Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Eva Pavlovičová

## Pravidelné mnohostěny a jejich vlastnosti

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Fyzika, Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2014

Na prvním místě bych chtěla poděkovat především své vedoucí bakalářské práce doc. Jarmile Robové za umožnění psát bakalářskou práci na toto téma, za její pomoc, cenné rady, připomínky i náměty a čas strávený při konzultacích. Děkuji také rodině za trpělivost a podporu po celou dobu studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5. 5. 2014 Eva Pavlovičová

Název práce: Pravidelné mnohostěny a jejich vlastnosti

Autor: Eva Pavlovičová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstrakt: Tato práce je určena pro všechny zájemce z řad široké veřejnosti, zvláště pro zájemce o geometrii pravidelných mnohostěnů. Lze ji samozřejmě použít i jako pomůcku při výuce pravidelných mnohostěnů. Jedná se o ucelený text shrnující popis, historii, klasifikaci každého z pěti pravidelných těles. Dále jsou uvedeny jejich vlastnosti a výskyt. Součástí práce jsou nejen základní výpočty povrchů a objemů těchto pěti těles, ale také poloměrů kulových ploch jim opsaných a vepsaných. Text je doplněn názornými obrázky vytvořenými v aplikacích GeoGebra a Cabri3D. Některé kapitoly jsou doplněny fotografiemi.

Klíčová slova: Pravidelné mnohostěny, platónská tělesa, Platón, dualismus.

Title:  Regular polyhedra and their properties

Author: Eva Pavlovičová

Department: Department od Didactics of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstract: This work is intended for all people from the general public especially for all people interested in regular polyhedra geometry. The work can be also used as didactic aid by education of regular polyhedra. It is an comprehensive text which summarizes description, history, classification of this five regular polyhedra. We will also focus on their properties and occurence. Basic calculations of surfaces, volumes and radii of the circles circumscribed and inscribed are in the work too. The text is supplemented with illustrative pictures made in GeoGebra and Cabri3D. Some chapters are supplemented with photos.

Keywords: Reagular polyhedra, platonic solids, Platon, dualism.

# Obsah

# Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou pravidelné mnohostěny, jejich historie, klasifikace, vlastnosti a výskyt. Je určena nejen studentům a učitelům, ale také příznivcům matematiky a geometrie. Pro pochopení této práce se kromě středoškolské matematiky nepožadují žádné speciální znalosti.

Hlavním cílem práce je blíže čtenáře seznámit s těmito tělesy a pokusit se ukázat jejich výjimečnost a krásu.

Práce je rozdělená do pěti kapitol. V první kapitole se seznámíme nejdříve s mnohostěny obecně, dále zavedeme mnohostěny pravidelné, které jsou náplní celého textu. V druhé polovině první kapitoly se dozvíme něco o historii Platónových těles, od nejstarších nálezů přes významné starověké matematiky a myslitele až po středověké vědce, kteří byli těmito pěti tělesy také fascinováni. A v závěru první kapitoly je uveden jednoduchý důkaz o počtu Platónových těles. Kapitola druhá je jádrem této bakalářské práce, každé těleso je v ní klasifikováno. Třetí kapitola se věnuje jedné ze zajímavých vlastností pravidelných mnohostěnů a to dualitě. Ve čtvrté kapitole se dozvíme, kde se s pravidelnými mnohostěny můžeme setkat v přírodních vědách, v umění, architektuře, módě a při hraní her. Pátá a poslední kapitola se věnuje sítím těchto pěti těles.

Všechny kapitoly jsou doplněny řadou obrázků a názorných fotografií. Obrázky byly tvořeny v matematických softwarech GeoGebra a Cabri 3D. Obrázky a fotografie převzaté z knih, či internetu mají v seznamu literatury vždy uveden zdroj. U nekěterých obrázků, zvláště u obrázků těles vnořených do jiného tělesa, není z důvodu lepší názornosti striktně dodržena viditelnost.

Myslím si, že na středních školách se žáci s Platónovými tělesy mnohou setkat jen v hodinách stereometrie a to velmi zřídka. Je to škoda, protože toto téma je velice zajímavé, má bohatou historii, dokáže zaujmout a zpestřit výuku. Studenti si také mohou zkusit odvozování vztahů a práci se vzorci pro objem a povrch na celkem netypických tělesech, jako jsou osmistěn, dvacetistěn a dvanáctistěn.

Věřím, že tato bakalářská práce zaujme čtenáře nejen výběrem tématu, ale že mu také lépe umožní porozumět a pochopit krásu těchto těles.

# 1. Pravidelné mnohostěny

**Platón: *Bůh činí vždy geometricky*.**

## 1.1 Mnohostěn

Na úvod práce připomeneme několik základních pojmů, kterými jsou mnohoúhelník, mnohostěn a konvexní útvar.

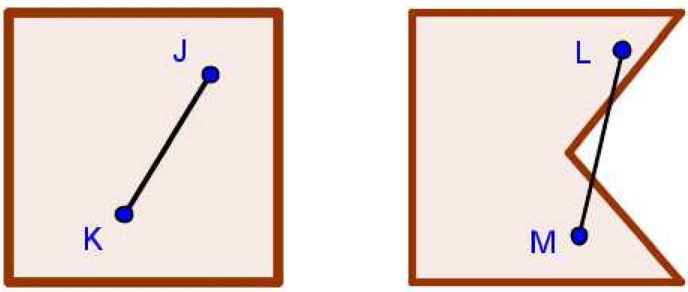
*Mnohoúhelníkem* nazveme část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná.

Příkladem mnohoúhelníku je čtverec, obdélník, trojúhelník, obecně *n*-úhelník.

Těleso, jehož hranice je tvořena mnohoúhelníky neležícími v jedné rovině, nazveme *mnohostěn*, nebo také *polyedr*.

Mezi tělesa řadíme například krychli, hranol, válec, kouli. Krychle a hranol patří i mezi zástupce mnohostěnů.

*Konvexním útvarem* nazveme takový geometrický útvar, který s libovolnou dvojicí svých bodů obsahuje i úsečku, spojující tyto dva body.




Obr. 1.1: *Konvexní, nekonvexní mnohoúhelník*

Příkladem konvexních útvarů v rovině je obdélník, kruh, trojúhelník, v prostoru to je například krychle nebo koule.

Mnohostěn je tedy část prostoru ohraničená několika mnohoúhelníky, tyto mnohoúhelníky nazýváme **stěny mnohostěnu**. Vrcholy mnohoúhelníků jsou též **vrcholy mnohostěnu** a jejich strany jsou **hranami mnohostěnu**. V každé hraně se stýkají dvě stěny a každá hrana obsahuje dva vrcholy. V každém vrcholu se sbíhají nejméně tři hrany, tj. také tři stěny.

Mnohostěny dělíme na:

- pravidelné (všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky)

- polopravidelné (stěny tvoří pravidelné mnohoúhelníky, které ovšem nemusí mít stejný tvar)
- nepravidelné

V této práci se dále budeme zabývat mnohostěny pravidelnými, které nazýváme mnohostěny platónskými.

## 1.2 Pravidelné mnohostěny

*Pravidelným mnohostěnem* (nebo též *platónským*, či *Platónovým tělesem*) nazveme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká stejný počet hran.

Pro pravidelné polyedry je charakteristické, že stěny tvoří pravidelné shodné mnohoúhelníky. Všechny hrany jsou proto stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly jsou shodné, v každém vrcholu se stýká stejný počet stěn a hran. Můžeme jim opsat i vepsat kulovou plochu, resp. sféru, přičemž platí, že střed tělesa má stejnou vzdálenost od jeho vrcholů (střed kulové plochy opsané) a stejnou vzdálenost od jeho stěn (střed kulové plochy vepsané).

Pravidelné mnohostěny jsou obdobou pravidelných mnohoúhelníků v rovině. Zatímco pravidelných mnohoúhelníků máme nekonečně mnoho (pravidelný mnohoúhelník existuje pro všechna $n \geq 3$), pravidelných těles existuje právě pět. Proč je jich právě pět, bude vysvětleno v kapitole 1.4.

Názvy těchto pěti těles v řečtině označují počet stěn:

- tetraedr: čtyřstěn, stěnami jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky
- hexaedr: šestistěn, krychle, stěnami je šest čtverců
- oktaedr: osmistěn, stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků
- dodekaedr: dvanáctistěn, stěnami je dvanáct pravidelných pětiúhelníků
- ikosaedr: dvacetistěn, stěnami je dvacet rovnostranných trojúhelníků

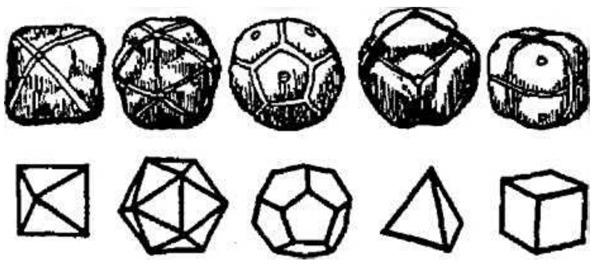
Další zajímavou vlastností je dualita. Spojením středů sousedních stěn platónského tělesa úsečkami, vzniknou hrany jiného pravidelného mnohostěnu. Takto vzniklé těleso označujeme jako duální k tělesu původním. Dualita pravidelných mnohostěnů bude podrobněji vysvětlena v kapitole 3.

## 1.3 Historie pravidelných mnohostěnů

### 1.3.1 Nejstarší nálezy

Počátky a objevení pravidelných mnohostěnů nemůžeme přesně určit, ovšem podle archeologických nálezů víme, že tato tělesa byla známa již ve starověku. Ve Skotsku byla objevena tělesa připomínající pravidelné mnohostěny vytesaná z kamene, jejich stáří se odhaduje asi na 2000 let př. n. l., některá jsou dokonce označena čarami naznačujícími hrany pravidelného mnohostěnu (obr. 1.2, 1.3).

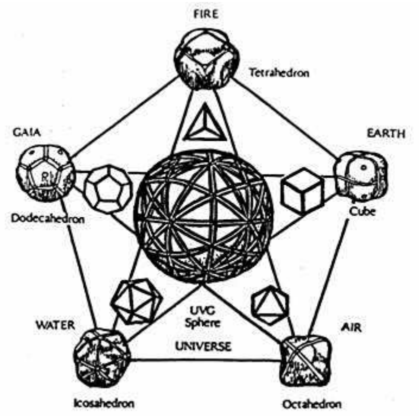
Obr. 1.2: *Kamenné mnohostěny ze Skotska*



Obr. 1.3: *Přiřazení nálezů k mnohostěnům*

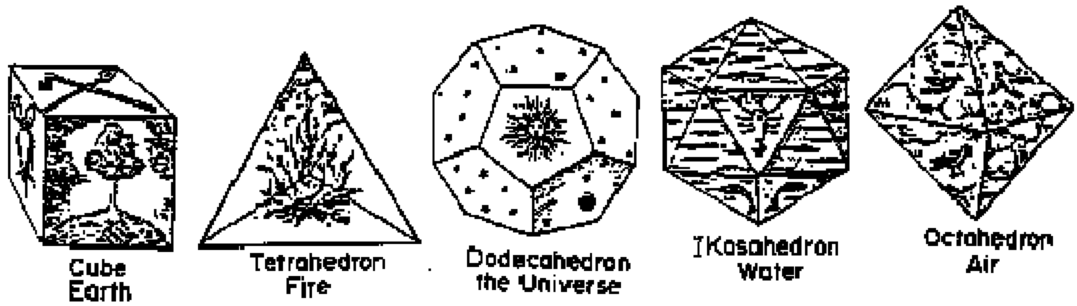
### 1.3.2 Pythagorejci, Platón

Tato tělesa byla podrobněji popsána v době velkých starořeckých matematiků na počátku 4. století př. n. l., kteří v nich hledali řád a podstatu světa. Zajímali se o ně hlavně pythagorejci, kteří jejich dokonalost, jež byla těmto tělesům připisována kvůli jejich symetrii, zaznamenali do magického pentagramu – ve vrcholech bylo právě 5 dokonalých těles a ve středu byl veškerý prostor, celý vesmír (obr. 1.4).




Obr. 1.4: Magický pentagram

Pravidelné mnohostěny však nesou jméno antického filosofa a matematika Platóna (427-347 př. n. l.), který ve svém díle *Tímaios* dokonce popisuje konstrukce těchto mnohostěnů přikládáním jednotlivých mnohoúhelníků k sobě a říká, že stěny lze rozložit do trojúhelníků, z nichž každý je tvořen dvěma trojúhelníky pravoúhlými [3]. Navazuje na učení Empedokla o existenci čtyř základních živlů (země, oheň, voda, vzduch). Platón říká, že podstata světa musí být stvořena z dokonalých těles, proto zemi přiřadil krychli, oheň čtyřstěnu, vzduch osmistěnu, vodu dvacetistěnu a dvanáctistěn byl přestavitel jsoucna - všeho, co existuje.



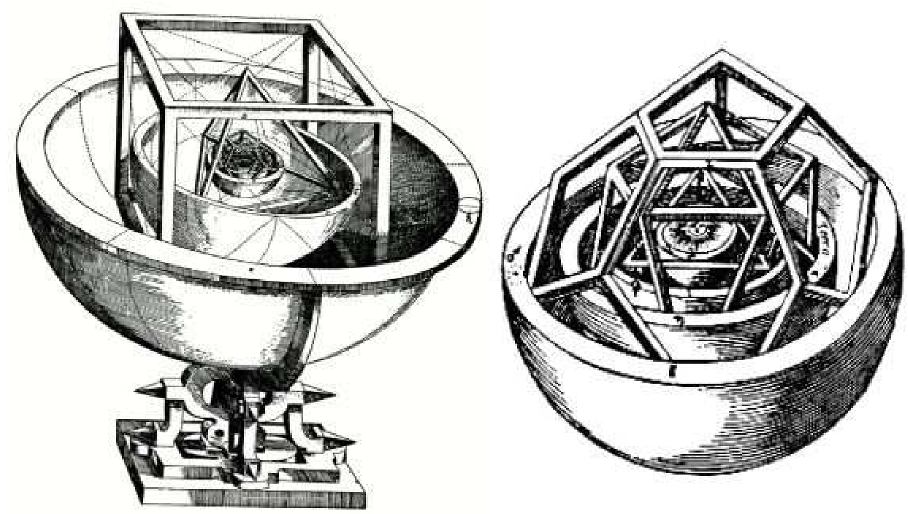

Obr. 1.5: *Přiřazení pravidelných mnohostěnů živlům*

### 1.3.3 Luca Bartolomeo de Pacioli (1445 - 1514/1517)

Luca Bartolomeo de Pacioli byl italský františkánský mnich a významný matematik. Je brán za zakladatele účetnictví. Přednášel na univerzitě v Perugii, poté přesídlil do Benátek, kde dokončil svoé nejrozsáhlejší dílo *Summa.* Poté odjíždí vyučovat na univerzitu do Milána, kde se setkává s Leonardem da Vincim. Paciolli začne pracovat na knize *O božském poměru* (*De Divina Proportione*). V této knize se zabývá proporcemi zlatého řezu na platónských tělesech, zvláště na dvanáctistěnu [2] a ilustruje ji sám Leonardo da Vinci.

### 1.3.4 Johannes Kepler (1571 - 1630)

Propojování geometrie a filosofie nebylo obvyklé jen pro starověk, platónská tělesa inspirovala také Johanna Keplera. Podle jeho zkoumání se tehdy šest známých planet pohybovalo okolo Slunce po kulových plochách opsaných či vepsaných pravidelným mnohostěnům (opět idea, že dokonalost pravidelných mnohostěnů se musela projevit v řádu světa). Například Země obíhala po kulové ploše dotýkající se středů stěn pravidelného dvanáctistěnu (vepsaná kulová plocha) a Mars po kulové ploše procházející vrcholy pravidelného dvanáctistěnu (opsaná kulová plocha). Keplerova teorie ztroskotala, když se zjistilo, že vzdálenost kulových ploch neodpovídá skutečným vzdálenostem planet od Slunce.



Obr. 1.6: *Keplerův model vesmíru*

### 1.3.5 Leonhard Euler (1707 - 1783)

Leonhard Euler byl švýcarský matematik, fyzik a astronom. Je považován za jednoho z nejlepších matematiků 18. století. Také jeho fascinovaly pravidelné mnohostěny. Formuloval vztah pro počet stěn, vrcholů a hran, který platí pro každý konvexní mnohostěn. Tento vztah je známý pod názvem Eulerova věta.

Pokud v konvexním mnohostěnu sečteme počet vrcholů $v$ a počet stěn $s$, zjistíme, že je tento součet roven počtu hran $h$ zvětšenému o číslo dvě. Symbolický zápis má tedy tvar:

$$s + v = h + 2$$

Jednalo se o empiricky objevený vztah, který byl později matematicky dokázán [3].

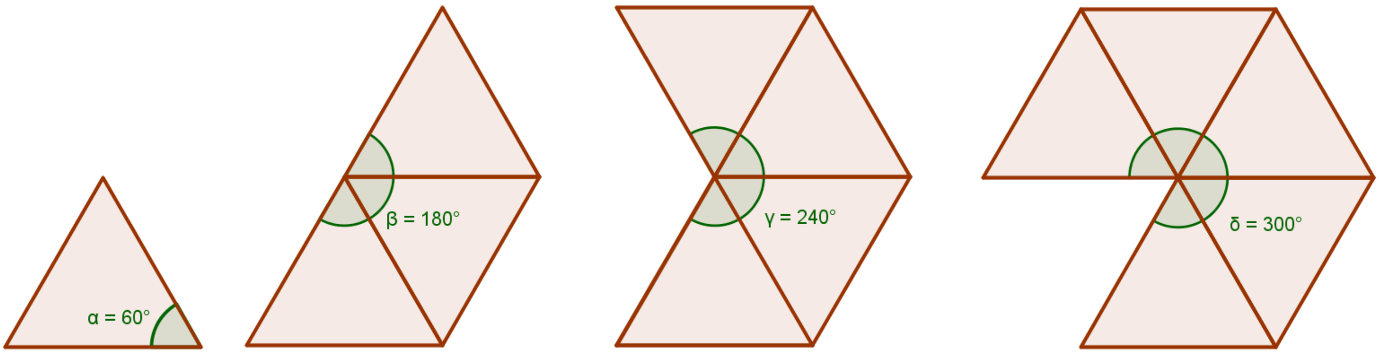
## 1.4 Počet pravidelných mnohostěnů

**Proč právě 5 dokonalých těles?**

Z definice pravidelného mnohostěnu víme, že plášť pravidelného mnohostěnu tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky, z nichž žádné dva neleží ve stejné rovině. Aby nám vznikla hranice tělesa spojením několika těchto mnohoúhelníků, musí být součet úhlů u vrcholu, u kterého se nám stěny sbíhají, menší než 360°. U každého vrcholu mnohostěnu se musí sbíhat alespoň 3 stěny - ze dvou rovinných útvarů není možné vytvořit prostorové těleso.

### 1.4.1 Stěny rovnostranné trojúhelníky

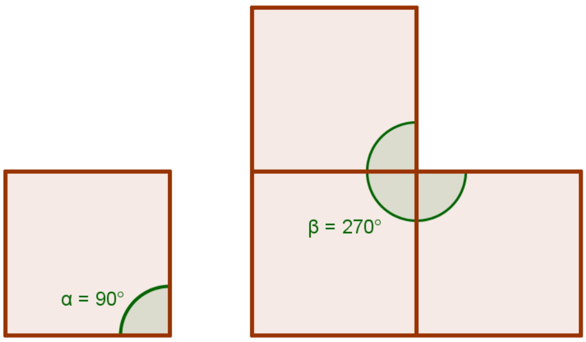
Pokud stěny našeho pravidelného mnohostěnu představují nejjednodušší pravidelné mnohoúhelníky, rovnostranné trojúhelníky (vnitřní úhly mají velikost 60°), pak se v každém vrcholu mohou sbíhat tři (čtyřstěn), čtyři (osmistěn) nebo pět (dvacetistěn) stěn (součty úhlů u vrcholů pak budou 180°, 240° nebo 300°). Šest stěn a více už by bylo v rozporu s výše uvedenou podmínkou.




Obr. 1.7*: Stěny rovnostranné trojúhelníky*

### 1.4.2 Stěny pravidelné čtyřúhelníky

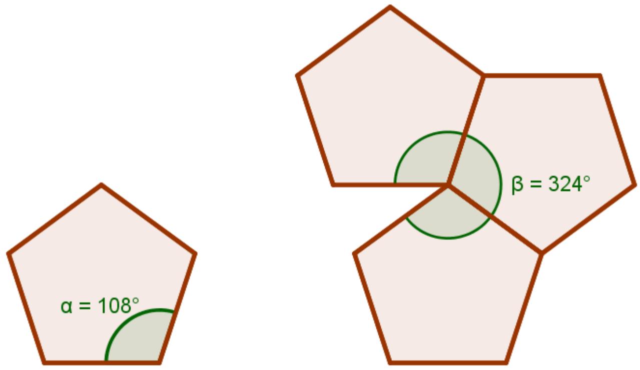
Vezmeme-li v úvahu mnohostěn se čtvercovými stěnami (vnitřní úhly mají velikost 90°), jsou naše podmínky splněny pouze jednou a to v případě, že se ve vrcholu stýkají stěny tři ($3 \cdot 90° = 270°$). Pravidelným mnohostěnem, jehož stěny tvoří pravidelné čtyřúhelníky, je krychle.




Obr. 1.8*: Stěny pravidelné čtyřúhelníky*

### 1.4.3 Stěny pravidelné pětiúhelníky

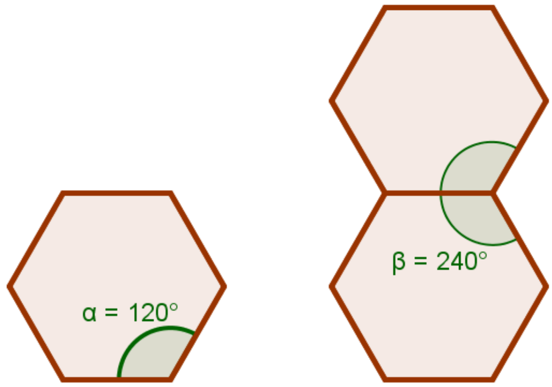
U stěn tvořených pravidelnými pětiúhelníky (vnitřní úhly mají velikost 108°), jsou podmínky splněny také pouze pro tři stěny sbíhající se v jednou vrcholu $(3 \cdot 108° = 324°)$. Pravidelnými pětiúhelníky je tvořen dvanáctistěn.




Obr. 1.9: *Stěny pravidelné pětiúhelníky*

### 1.4.4 Stěny pravidelné šestiúhelníky

Nenajdeme však žádné jiné těleso, jež by bylo pravidelným mnohostěnem, v jehož vrcholech by se sbíhaly minimálně 3 stěny a součet vniřních úhlů u sbíhajících se stěn by byl menší než 360°. V pravidelném šestiúhelníku je velikost vnitřního úhlu rovna 120°, spojením tří stěn, dostaneme $(3 \cdot 120° = 360°)$ opět rovinný útvar. Totéž platí i pro pravidelné mnohoúhelníky s vyšším počtem vrcholů.




Obr. 1.10: *Stěny pravidelné šestiúhleníky*

A proto v prostoru nemůže existovat více než právě těchto 5 pravidelných mnohostěnů.

# 2. Klasifikace pravidelných mnohostěnů

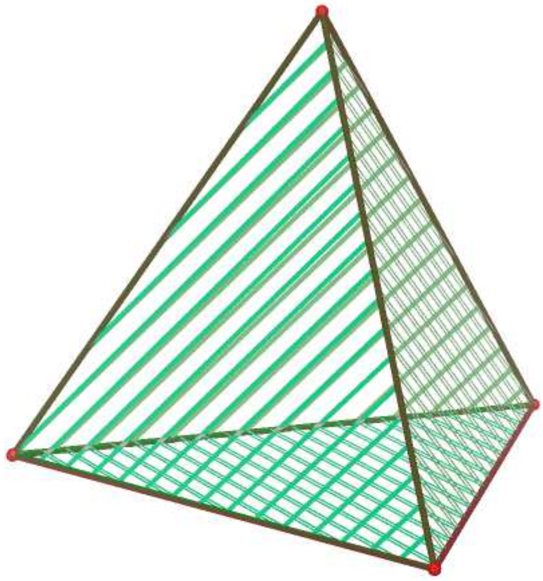
V následující kapitole klasifikujeme všechna Platónova tělesa. Shrnutí vlastností je zaznamenáno v tabulkách. Úhlem u vrcholu rozumíme úhel u vrcholu v jedné stěně.

## 2.1 Pravidelný čtyřstěn – tetraedr

Uvažujeme pravidelný čtyřstěn o hraně délky *a*.

*Tabulka 1:*

| Tetraedr | |
|---|---|
| Stěna | *trojúhelník* |
| Počet vrcholů | *4* |
| Počet hran | *6* |
| Počet stěn | *4* |
| Úhel u vrcholu | *60°* |
| Objem | $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ |
| Povrch | $S = a^2\sqrt{3}$ |
| Poloměr kulové plochy opsané | $r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ |
| Poloměr kulové plochy vepsané | $\rho = \frac{a\sqrt{6}}{12}$ |

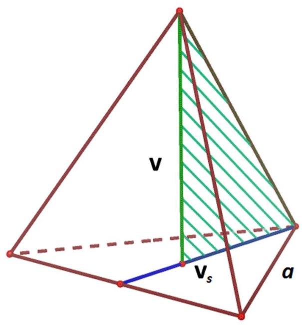


Obr. 2.1: Čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) je trojrozměrné těleso, jehož povrch je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, má čtyři vrcholy. Pravidelný čtyřstěn řadíme mezi pravidelné trojboké jehlany. Zajímavé je, že vzdálenost každých dvou vrcholů ve čtyřstěnu je stejná, na rozdíl od ostatních platónských těles. Podle Platóna je tetraedr symbolem ohně.

**Výška *v* čtyřstěnu** je na výpočet náročnější. Víme, že stěnová výška tetraedru je $v_s = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Těžiště stěny dělí tuto výšku v poměru 2:1, z toho $\frac{2}{3}v_s = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ a podle Pythagorovy věty můžeme vypočítat tělesovou výšku:

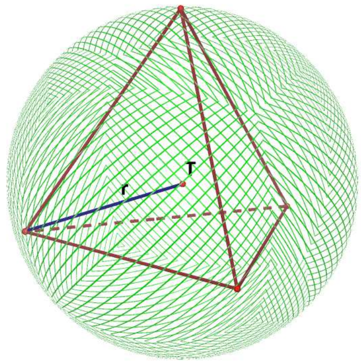
$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$




Obr. 2.2: Výška čtyřstěnu

**Poloměr *r* kulové plochy (sféry) opsané** tetraedru je roven vzdálenosti těžiště tělesa *T* od libovolného vrcholu tělesa. Těžiště pravidelného čtyřstěnu se nachází v $\frac{1}{4}$ jeho výšky. Poloměr je tedy:

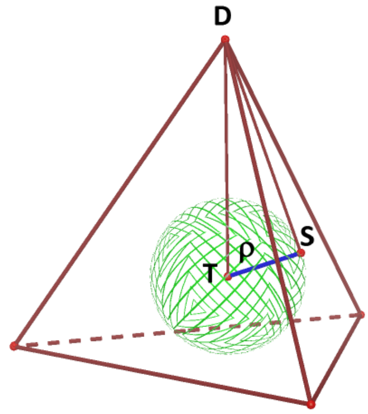
$$r = \frac{3}{4}v = \frac{3}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$




Obr. 2.3: Čtyřstěn, sféra opsaná

**Poloměr *ρ* kulové plochy (sféry) vepsané** pravidelnému čtyřstěnu je vzdálenost *d* těžiště tělesa *T* od libovolné stěny. Dotykové body vepsané sféry jsou středy stěn. Vezmeme pravoúhlý trojúhelník *TDS*, kde *T* je těžiště, *D* je vrchol čtyřstěnu a *S* je těžiště jedné stěny, můžeme použít Pythagorovu větu $d^2 + t^2 = s^2$, přičemž $s = r = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, $t = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

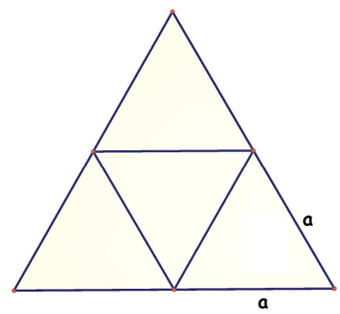
Odtud $$d = \rho = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{24}} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$




Obr. 2.4: Čtyřstěn, sféra vepsaná

**Povrch *S* tetraedru** vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn, které jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky. Obsah jedné stěny $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Čtyřstěn má stěny čtyři, proto výsledný povrch bude roven čtyřnásobku *P*, tedy

$$S = 4P = a^2\sqrt{3}.$$

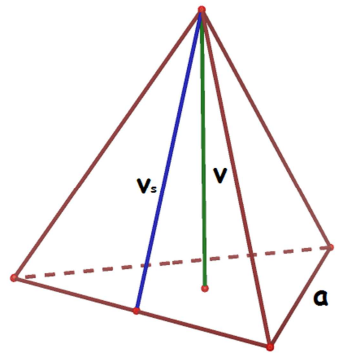



Obr. 2.5: Povrch čtyřstěnu

**Objem *V* pravidelného čtyřstěnu** spočítáme jako obsah podstavy násobený tělesovou výškou vydělený třemi, kde obsah podstavy $S_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Teď už jen dosadíme do vztahu pro výpočet objemu jehlanu:

$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$



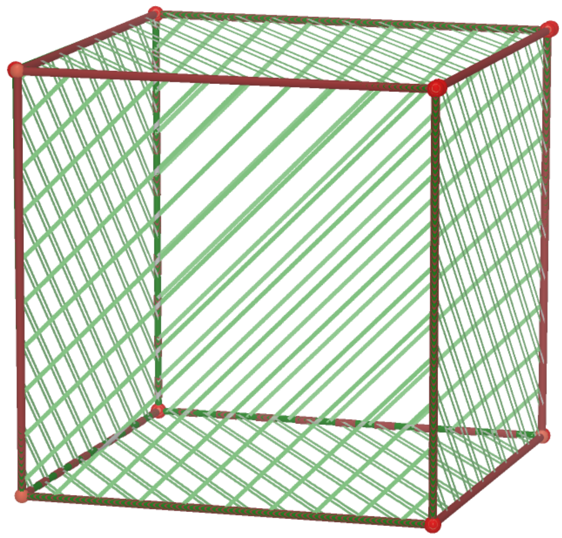

Obr. 2.6: Objem čtyřstěnu

## 2.1 Pravidelný šestistěn – hexaedr

Uvažujeme pravidelný šestistěn o hraně délky *a.*

*Tabulka 2:*

| Hexaedr | |
|---|---|
| Stěna | *Čtverec* |
| Počet vrcholů | *8* |
| Počet hran | *12* |
| Počet stěn | *6* |
| Úhel u vrcholu | *90°* |
| Objem | $V = a^3$ |
| Povrch | $S = 6a^2$ |
| Poloměr kulové plochy opsané | $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ |
| Poloměr kulové plochy vepsané | $\rho = \frac{a}{2}$ |

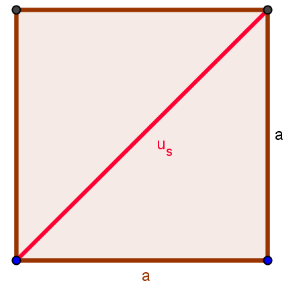


Obr. 2.7: Krychle

Nejznámější název pro pravidelný šestistěn (hexaedr) je krychle. Platón toto těleso, jehož stěny jsou tvořeny shodnými čtverci a které má osm vrcholů a dvanáct hran stejné délky, přiřazoval elementu země.

**Délka $u_s$ stěnové úhlopříčky** je délkou úhlopříčky čtverce a podle Pythagorovy věty platí:

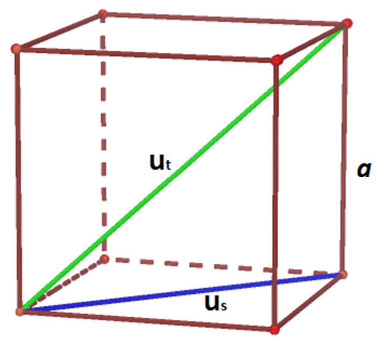
$$u_s = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$




Obr. 2.8: Stěnová úhlopříčka krychle

**Délku $u_t$ tělesové úhlopříčky** lze vypočítat pomocí strany čtverce a stěnové úhlopříčky také podle Pythagorovy věty:

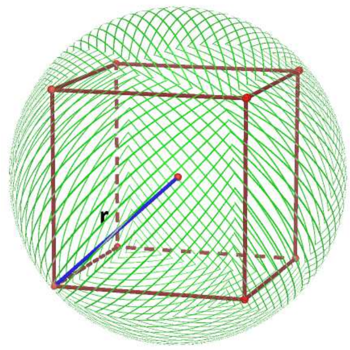
$$u_t = \sqrt{{u_s}^2 + a^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$




Obr. 2.9: Tělesové úhlopříčka krychle

**Poloměr *r* kulové plochy (sféry) opsané** je u šestistěnu roven polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa. Tedy:

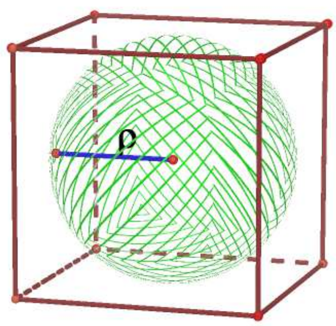
$$r = \frac{u_t}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$




Obr. 2.10: Krychle, sféra opsaná

**Poloměr *ρ* kulové plochy (sféry) vepsané** krychli je roven vzdálenosti středu tělesa od libovolného středu stěny:

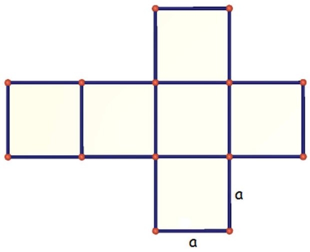
$$\rho = \frac{a}{2}$$



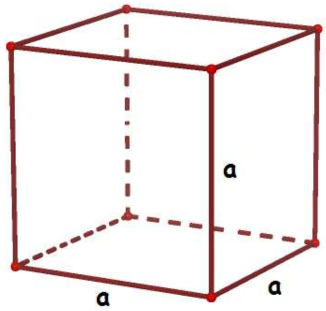

Obr. 2.11: Krychle, sféra vepsaná

**Povrch *S* krychle** vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn. Tento případ je nejjednodušší, neboť každá stěna je tvořena čtvercem. Obsah jedné stěny $P = a^2$. Krychle má stěn celkem 6, proto:

$$S = 6P = 6a^2$$




Obr. 2.12: Krychle, povrch




Obr. 2.13: Krychle, objem

**Objem *V* krychle** dokážeme také vypočítat velice snadno. Víme totiž, že výška odpovídá hraně, proto se objem vypočítá:

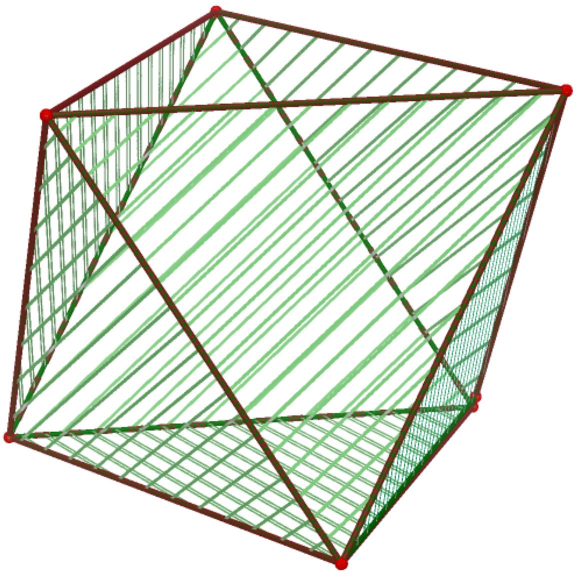
$$V = a^3$$

## 2.3 Pravidelný osmistěn – oktaedr

Uvažujme pravidelný osmistěn s hranou délky *a.*

*Tabulka 3:*

| **Oktaedr** | |
|---|---|
| Stěna | *Trojúhelník* |
| Počet vrcholů | *6* |
| Počet hran | *12* |
| Počet stěn | *8* |
| Úhel u vrcholu | *60°* |
| Objem | $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ |
| Povrch | $S = a^2 2\sqrt{3}$ |
| Poloměr kulové plochy opsané | $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
| Poloměr kulové plochy vepsané | $\rho = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ |

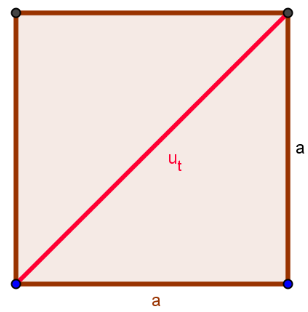


Obr. 2.14: Pravidelný osmistěn

Stěny pravidelného osmistěnu (oktaedru) jsou tvořeny osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Osmistěn má šest vrcholů. Podle Platóna symbolizoval element vzduchu.

**Délka $u_t$ tělesové úhlopříčky** je stejná jako úhlopříčka čtverce se stranou $a$:

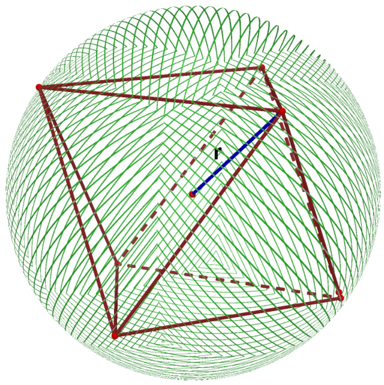
$$u_t = a\sqrt{2}$$




Obr. 2.15: Tělesová úhlopříčka osmistěnu

**Poloměr $r$ kulové plochy (sféry) opsané** se rovná polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa, tedy:

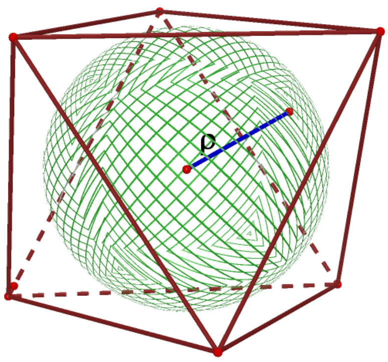
$$r = \frac{u_t}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$




Obr. 2.16: Osmistěn, sféra opsaná

**Poloměr $\rho$ kulové plochy (sféry) vepsané** se rovná vzdálenosti těžiště (středu) tělesa od libovolné stěny. Dotykové body kulové plochy jsou těžiště stěn osmistěnu

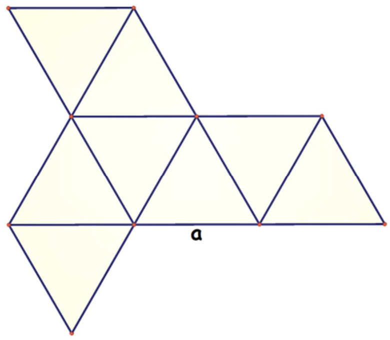
$$\rho = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$




Obr. 2.17: Osmistěn, sféra vepsaná

**Povrch *S* osmistěnu** vypočítáme jako součet obsahů všech stěn. Stěny jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky *a*, tedy obsah jedné stěny $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

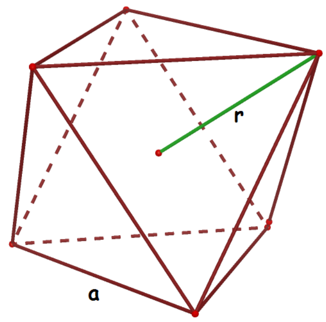
Výsledný povrch je $S = 8P = 8\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$.




Obr. 2.18: Osmistěn, povrch

**Objem *V* osmistěnu** získáme, sečteme-li objemy dvou shodných jehlanů se společnou čtvercovou podstavou a výškou *r.* Výška *r* nám také udává poloměr kulové sféry opsané: $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Objem osmistěnu vypočítáme: $V = 2\frac{1}{3}S_p r = 2\frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$



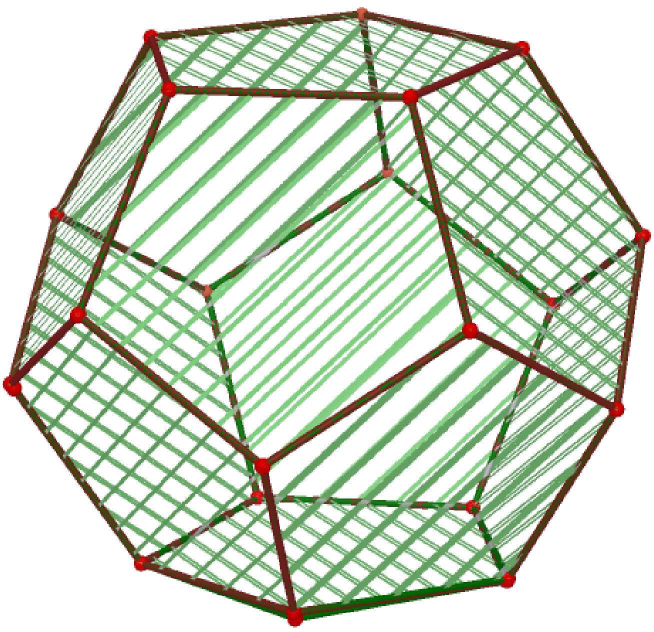

Obr. 2.19: Osmistěn, objem

## 2.4 Pravidelný dvanáctistěn – dodekaedr

Uvažujme pravidelný dvanáctistěn s hranou délky *a.*

*Tabulka 4:*

| Dodekaedr | |
|---|---|
| Stěna | *pětiúhelník* |
| Počet vrcholů | *20* |
| Počet hran | *30* |
| Počet stěn | *12* |
| Úhel u vrcholu | *108°* |
| Objem | $V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$ |
| Povrch | $S = 3a\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ |
| Poloměr kulové plochy opsané | $r = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$ |
| Poloměr kulové plochy vepsané | $\rho = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$ |

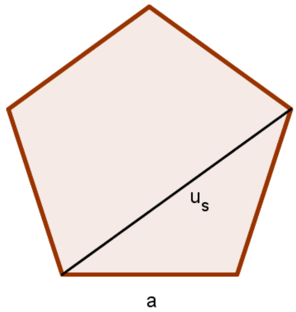


Obr. 2.20: Pravidelný dvanáctistěn

Stěny dvanáctistěnu tvoří shodné pravidelné pětiúhelníky. Platón tomuto tělesu přiřazoval vesmír neboli vše kolem nás (jsoucno).

**Délku $u_s$ úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku** vypočítáme, neboť víme, že průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich v poměru zlatého řezu [2].

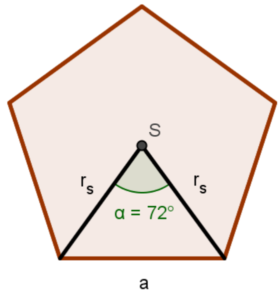
Odtud: $$u_s = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$$



Obr. 2.21: Úhlopříčka pětiúhelníku

**Poloměr $r_s$ kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku** můžeme vypočítat, když si pětiúhelník rozdělíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou *a* a rameny $r_s$. Pro jakýkoliv z těchto trojúhelníků platí kosinová věta:

$$a^2 = {r_s}^2 + {r_s}^2 - 2r_s r_s cos72°$$



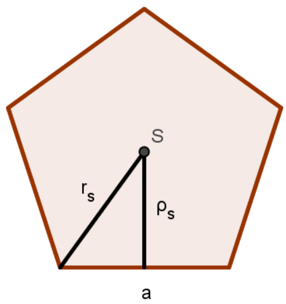
Obr. 2.22: Pětiúhelník, poloměr $r_s$

Z [2] víme, že $$cos72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Už můžeme vyjádřit $r_s$ v závislosti na délce strany : $r_s = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}} = \frac{a}{10}\sqrt{(5+\sqrt{5})10}$

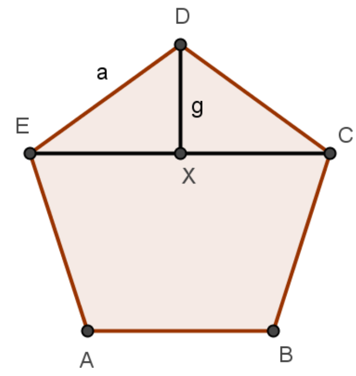
**Poloměr $\rho_s$ kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku** můžeme vypočítat pomocí pravoúhlého trojúhelníku s přeponou $r_s$ a odvěsnami $\rho_s$ a $\frac{a}{2}$. V tomto trojúhelníku můžeme aplikovat Pythagorovu větu: $${r_s}^2 = {\rho_s}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Tedy: $$\rho_s = \sqrt{{r_s}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}}$$



Obr. 2.23: Pětiúhelník, poloměr $\rho_s$

**Označme vzdálenost *D, X* jako *g*** (obr. 2.24). *D* je vrchol pravidelného pětiúhelníku a *X* střed úhlopříčky *C, E* pravidelného pětiúhelníku. Odvěsnu *g* pravoúhlého trojúhelníku *DXE* potom můžeme vypočítat Pythagorovou větou: $a^2 = \left(\frac{u_s}{2}\right)^2 + g^2$

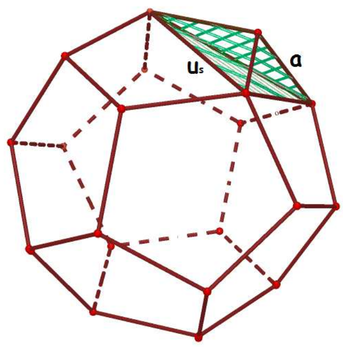


Obr. 2.24: Vzdálenost $g$

Vyjádříme $g$ :

$$g = \sqrt{a^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 \left(1 + \sqrt{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

K výpočtu poloměru kulové plochy vepsané pravidelnému dvanáctistěnu musíme znát **odchylku $\omega$** jeho **sousedních stěn**. Tu zjistíme, když z dodekaedru odřízneme pravidelný trojboký jehlan (obr. 2.25). Hrany jeho podstavy mají délku úhlopříčky pětiúhelníku $u_s$ a boční hrany jsou hranami dodekaedru. Takto vzniklý jehlan poté řízneme rovinou kolmou k jeho boční hraně, procházející hranou podstavy. Řezem je rovnoramenný trojúhelník s rameny *x* a základnou $u_s$ (obr. 2.26). Délku *x* vypočítáme z rovnosti obsahů trojúhelníku:



Obr. 2.25: Odchylka sousedních stěn

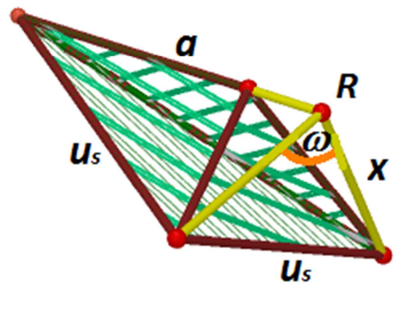
$$\frac{a \cdot x}{2} = \frac{u_s \cdot g}{2}$$

Délka *x* je tedy: $x = \frac{a}{8}\left(1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

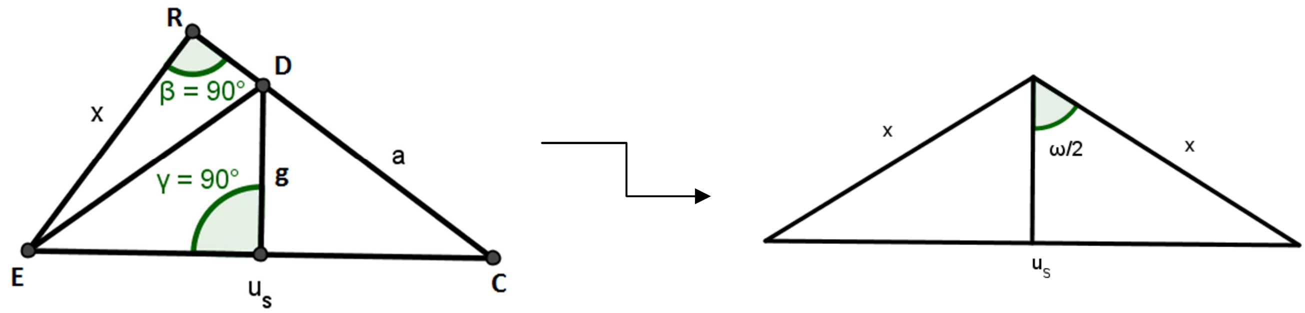
Díky znalosti *x* můžeme určit **odchylku $\omega$ sousedních stěn**, kterou vypočítáme:

$$sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_s}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{\frac{a}{8}\left(1 + \sqrt{5}\right)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

$$\frac{\omega}{2} \approx 58°17´;\ \omega \approx 116°34´$$

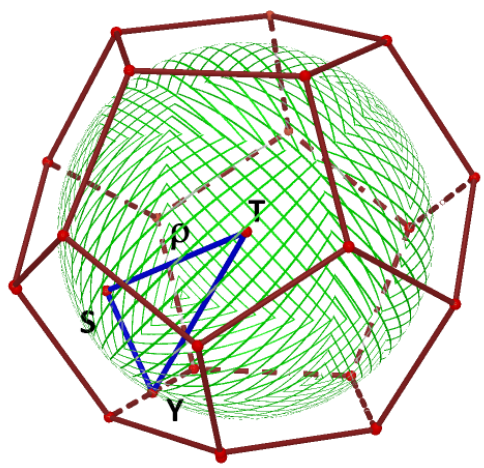


Obr. 2. 26: Odchylka sousedních stěn




Obr. 2.27: Odchylka sousedních stěn

**Poloměr *ρ* kulové plochy (sféry) vepsané** dokážeme vypočítat, neboť střed této sféry leží v těžišti *T* dodekaedru a poloměr je roven vzdálenosti těžiště od středu libovolné stěny. Zjistíme jej tedy díky pravoúhlému trojúhelníku *TSY*, kde *T* je střed dodekaedru, *S* střed stěny a *Y* je střed hrany téže stěny. Pak odvěsna *SY* ($\rho_s$) svírá s přeponou *TY* úhel $\frac{\omega}{2}$ a druhá odvěsna *TS* je hledaný poloměr $\rho$.




Obr. 2.28: Dvanáctistěn, sféra vepsaná

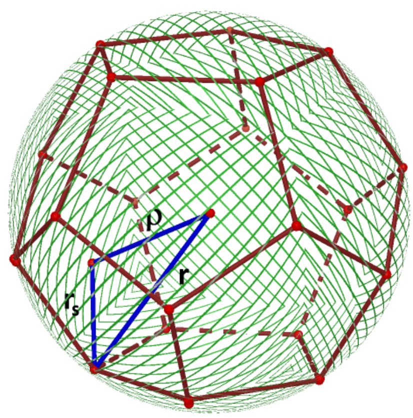
$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\rho_s}$$

A tedy: $$\rho = \rho_s \cdot tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Kde $$sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \quad ; \quad cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}} \cdot \frac{\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5(2\sqrt{5}+5)}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

**Poloměr *r* kulové plochy (sféry) opsané** vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v trojúhelníku s přeponou *r* a odvěsnami $\rho$ a $r_s$.




Obr. 2.29: Dvanástistěn, sféra opsaná

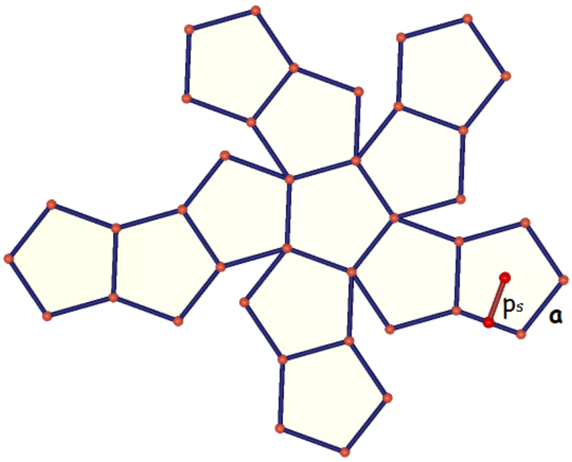
$$r = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{10(5+\sqrt{5})}}{10}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 3\sqrt{5}+9}{8}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{3}\sqrt{2\sqrt{5}+6}}{4} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{4} = \frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4}$$

Teď můžeme dopočítat i **délku $u_t$ tělesové úhlopříčky**, která prochází středem tělesa a je dvojnásobkem *r:*

$$u_t = 2r = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{a\sqrt{3}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$$

**Povrch *S* dvanáctistěnu** je součet obsahů dvanácti shodných pravidelných pětiúhelníků, obsah pětiúhelníku je roven součtu obsahů pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou *a* a výškou $\rho_s$.



Obr. 2.30: Dvanáctistěn, povrch

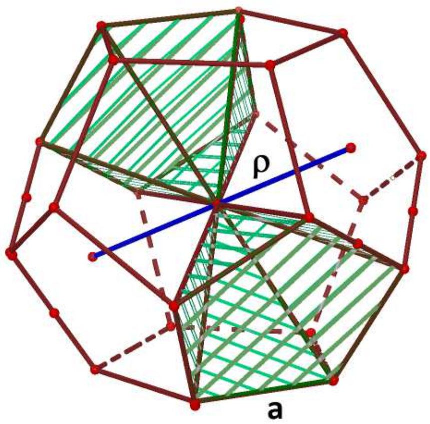
Obsah pětiúhelníku:

$$P = 5\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{25\left(2\sqrt{5}+5\right)}{5}} =$$
$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

Povrch dvanáctistěnu:

$$S = 12P = 12\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$$

**Objem *V* dodekaedru** zjistíme na základě znalosti poloměru kulové plochy vepsané. Vypočítáme ho jako součet objemů dvanácti shodných pravidelných pětibokých jehlanů, jejichž podstavy tvoří stěny dvanáctistěnu a výšky jsou rovny poloměru kulové plochy vepsané.



Obr. 2.31: Dvanáctistěn, objem

Objem jehlanu $V_j$:

$$V_J = \frac{1}{3}S_p \cdot \rho = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20} =$$
$$= \frac{a^3}{12 \cdot 20}\sqrt{(10\sqrt{5}+25)10(25+11\sqrt{5})} =$$
$$= \frac{5a^3}{12 \cdot 20}\sqrt{470+210\sqrt{5}} = \frac{a^3}{48}\sqrt{225+210\sqrt{5}+245} =$$
$$= \frac{a^3}{48}\sqrt{(15+7\sqrt{5})^2} = \frac{a^3}{48}(15+7\sqrt{5})$$

A tedy objem celého dvanáctistěnu:

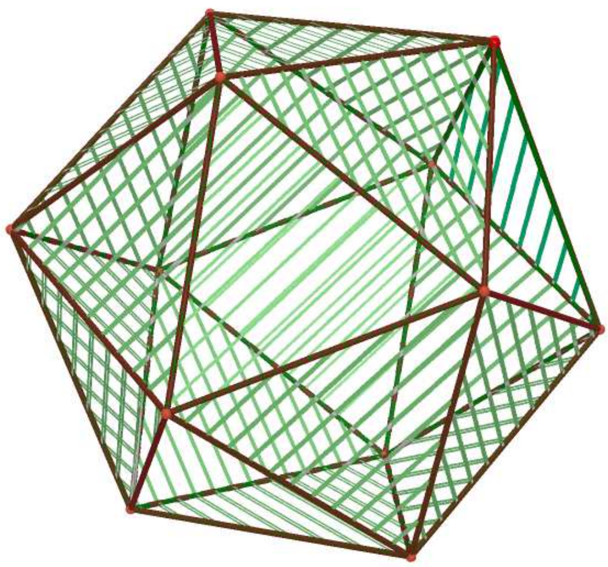
$$V = 12V_J = 12\frac{a^3}{48}(15+7\sqrt{5}) = \frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$$

## 2.5 Pravidelný dvacetistěn – ikosaedr

Uvažujme pravidelný dvacetistěn s hranou délky *a.*

*Tabulka 5:*

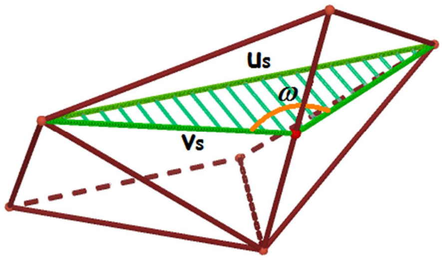
| **Ikosaedr** | |
|---|---|
| Stěna | *trojúhelník* |
| Počet vrcholů | *12* |
| Počet hran | *30* |
| Počet stěn | *20* |
| Úhel u vrcholu | *60°* |
| Objem | $V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$ |
| Povrch | $S = 5a^2\sqrt{3}$ |
| Poloměr kulové plochy opsané | $r = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ |
| Poloměr kulové plochy vepsané | $\rho = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{20}$ |



Obr. 2.32: Pravidelný dvacetistěn

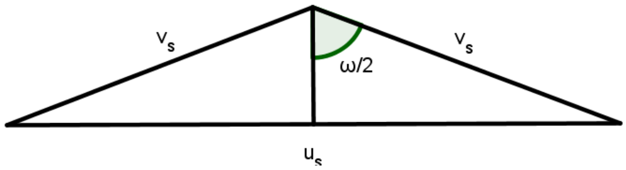
Pravidelný dvacetistěn je těleso, jehož stěny tvoří dvacet shodných rovnostranných trojůhelníků. Ikosaedr má 12 vrcholů a 30 hran. Podle Platóna byl pravidelný dvacetistěn symbolem vody.

Výpočet **poloměru** $\rho$ **kulové plochy (sféry) vepsané** je náročnější. Nejdříve musíme zjistit odchylku sousedních stěn.



Obr. 2.33: Odchylka sousedních stěn

**Odchylku** $\omega$ **sousedních stěn** vypočítáme, řízneme-li dvacetistěn rovinou tak, aby vznikl pravidelný jehlan s podstavou pravidelného pětiúhleníku. Dále jehlan řízneme rovinou kolmou k boční hraně jehlanu protínající podstavu ve stěnové úhlopříčce.Vzniklý rovnoramenný trojúhelník s rameny $v_s$ a základnou $u_s$ bude s rameny trojůhelníku svírat odchylku $\omega$. Odchylku tedy spočítáme:

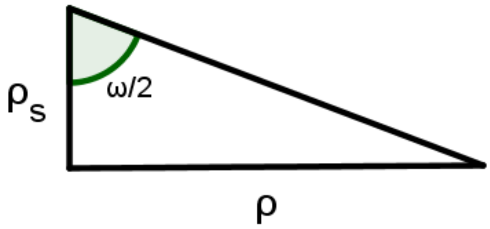


Obr. 2.34: Odchylka sousedních stěn

$$sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_s}{2}}{v_s} = \frac{\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{\omega}{2} \approx 69°05', \omega \approx 138°11'$$

**Poloměr** $\rho$ **kulové plochy vepsané** je roven vzdálenosti těžiště tělesa od středu libovolné stěny a vypočítáme jej pomocí pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $\rho$ a $\rho_S$.



Obr. 2.35: Poloměr kulové sféry vepsané

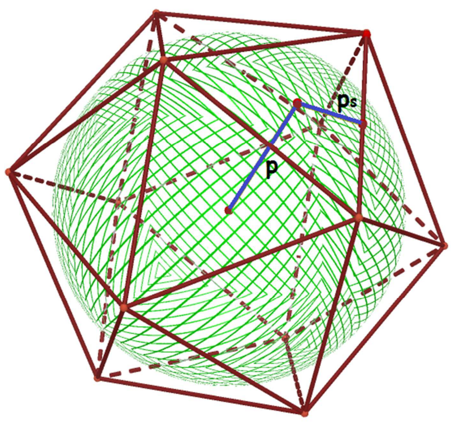
$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\frac{v_S}{3}} .$$

Dále víme, že: $sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

A tedy podle goniometrického vzorce:

$$sin^2x + cos^2x = 1$$

známe i velikost $cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$ .



Obr. 2.36: Dvacetistěn, sféra vepsaná

$$tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}}=\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2(3-\sqrt{5})}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=$$

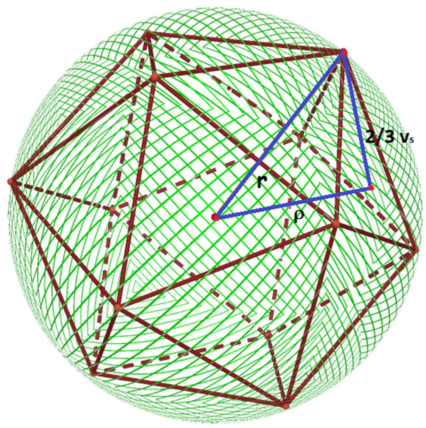
$$=\frac{\sqrt{2(2+\sqrt{5})^2(3-\sqrt{5})}}{2}=\frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{2}=\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

**Poloměr $\rho$ kulové plochy vepsané** je tedy:

$$\rho=tan\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\frac{v_s}{3}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$$

**Poloměr $r$ kulové plochy (sféry) opsané** je roven délce přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $\rho$ a $\frac{2}{3}v_s$. Je to vlastně vzdálenost středu dvacetistěnu k libovolnému vrcholu. K výpočtu využijeme Pythagorovu větu:

$$r^2=\left(\frac{2}{3}v_s\right)^2+\rho^2$$




Obr. 2.37: Dvacetistěn, sféra opsaná

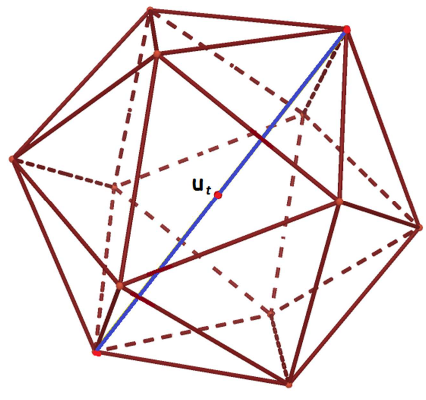
Dosaďme:

$$r^2=\frac{a^2}{3}+\frac{3a^2(3+\sqrt{5})^2}{12^2}=\frac{a^2}{3}\left(1+\frac{9+6\sqrt{5}+5}{16}\right)=\frac{a^2}{3}\frac{15+3\sqrt{5}}{8}$$

$$r=\sqrt{\frac{a^2(15+3\sqrt{5})}{3\cdot 8}}=\frac{a\sqrt{15+3\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

**Délka $u_t$ tělesové úhlopříčky** je dvojnásobek poloměru kulové sféry opsané $r$:

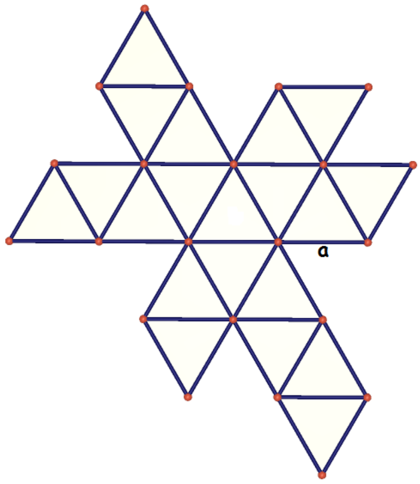
$$u_t=2r=2\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}=\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}$$




Obr. 2.38: Dvacetistěn, délka tělesové úhlopříčky

**Povrch *S* tělesa** tvoří dvacet shodných rovnostranných trojúhelníků se stranou délky *a,* obsah jedné stěny $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, tedy povrch celého dvacetistěnu:

$$S = 20P = 20\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}$$



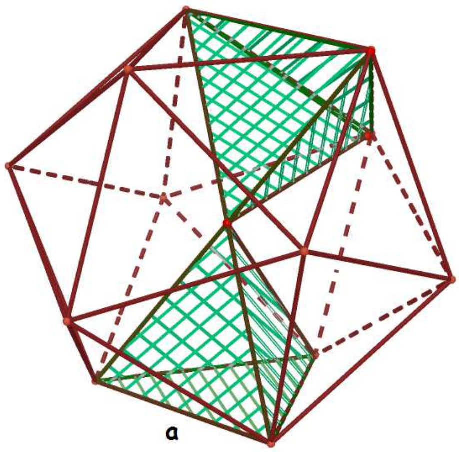

Obr. 2.39: Dvacetistěn, povrch

**Objem *V* dvacetistěnu** vypočítáme jako součet objemů dvaceti shodných pravidelných trojbokých jehlanů, jejichž podstavy jsou stěny dvacetistěnu a výškami je poloměr kulové plochy vepsané. Takový jehlan má objem:

$$V_j = \frac{1}{3}P\rho = \frac{1}{3}\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} = \frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48}$$

Objem celého dvacetistěnu tedy je:

$$V = 20V_j = 20\frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48} = \frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$$




Obr. 2.40: Dvacetistěn, objem

## 3. Dualita pravidelných mnohostěnů

Ke každému pravidelnému mnohostěnu existuje *mnohostěn* jemu *duální*, jehož vrcholy leží ve středech stěn mnohostěnu původního.

Jestliže se tedy středy stěn daného pravidelného mnohostěnu stanou vrcholy, které spojíme úsečkami, pak tyto úsečky budou hranami mnohostěnu nového. Takto získaný mnohostěn se nazývá duální mnohostěn k mnohostěnu výchozímu.

V následující tabulce jsou charakterizovány pravidelné mnohostěny podle počtu stěn, vrcholů a hran.

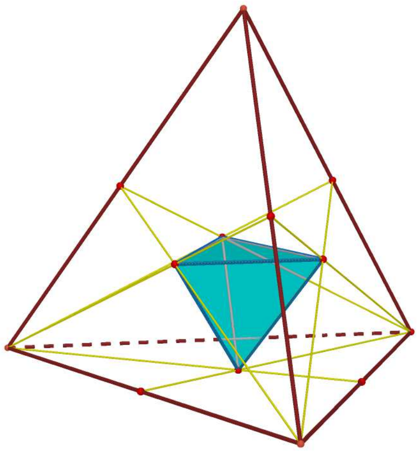
*Tabulka 6:*

| Název mnohostěnu | Počet | | | Počet hran | |
|---|---|---|---|---|---|
| | stěn *s* | vrcholů *v* | hran *h* | u jednoho vrcholu *m* | v jedné stěně *n* |
| čtyřstěn (tetraedr) | 4 | 4 | 6 | 3 | 3 |
| krychle (hexaedr) | 6 | 8 | 12 | 3 | 4 |
| osmistěn (oktaedr) | 8 | 6 | 12 | 4 | 3 |
| dvanáctistěn (dodekaedr) | 12 | 20 | 30 | 3 | 5 |
| dvacetistěn (ikosaedr) | 20 | 12 | 30 | 5 | 3 |

Všimněme si, že výše uvedenou definici splňují i Platónova tělesa, zatímco krychle má šest stěn a osm vrcholů, u osmistěnu je tomu právě naopak. Proto říkáme, že krychle je k osmistěnu duální. Obdobně je tomu i u dvanáctistěnu (12 stěn, 20 vrcholů) a dvacetistěnu (20 stěn a 12 vrcholů), zbylý čtyřstěn (4 stěny, 4 vrcholy) je duální sám k sobě.

## 3.1 Dualita čtyřstěnu

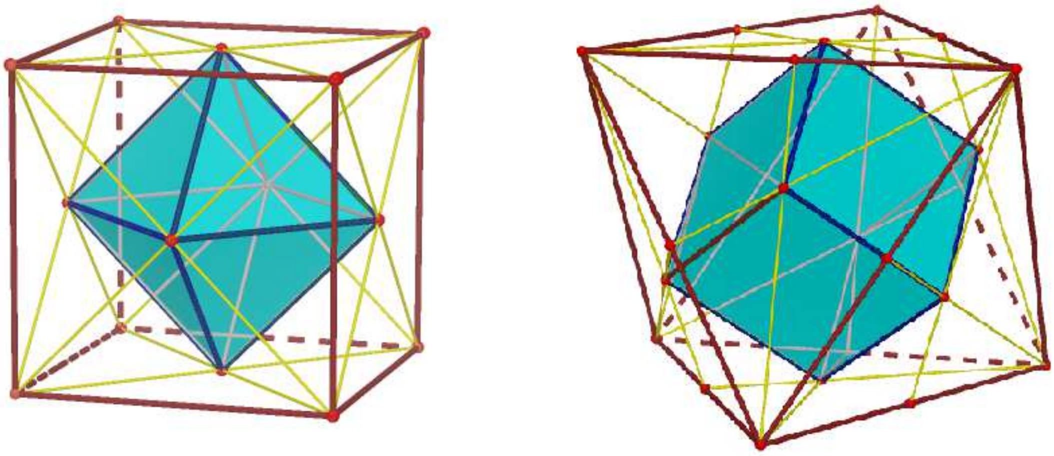
Duálním mnohostěnem k čtyřstěnu je opět čtyřstěn.



Obr. 3.1: Dualita čtyřstěnu

## 3.2 Dualita krychle - osmistěn

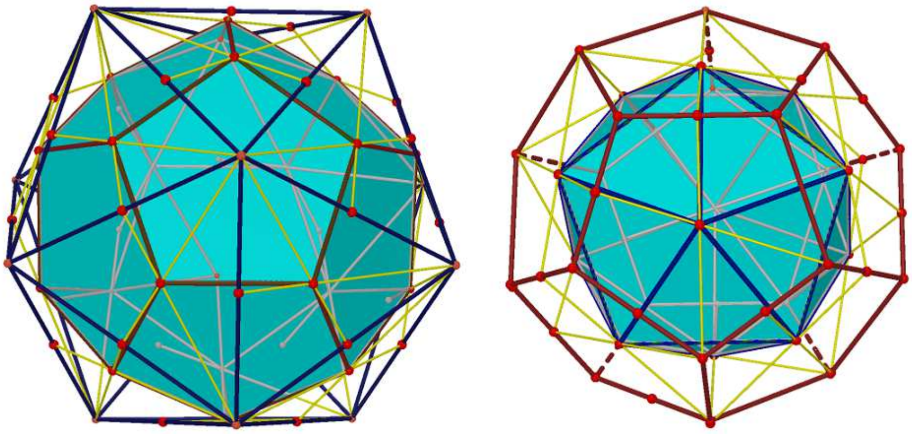
Krychle je duální s pravidelným osmistěnem a naopak.



Obr. 3.2: Dualita krychle - osmistěn

### 3.3 Dualita dvanáctistěn - dvacetistěn

Pravidelný dvanáctistěn s pravidelným dvacetistěnem jsou taktéž duální.



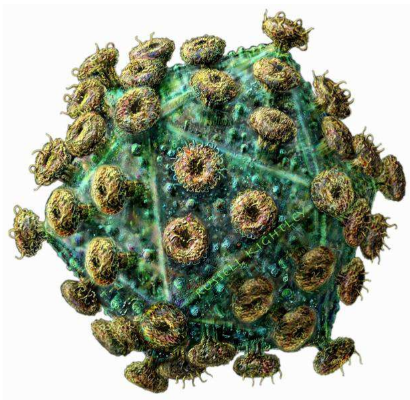
Obr. 3.3: Dualita dvanáctistěn - dvacetistěn

# 4. Výskyt pravidelných mnohostěnů

Podle Platóna a dalších starověkých učenců jsou pravidelné mnohostěny podstatou všeho. S vývojem vědy a techniky se můžeme dívat stále hlouběji do struktury látek. Překvapením je, že příroda a svět kolem nás jsou často tvořeny látkami, jejichž stavební jednotky mají tvary přibližné platónským (dokonalým) tělesům.

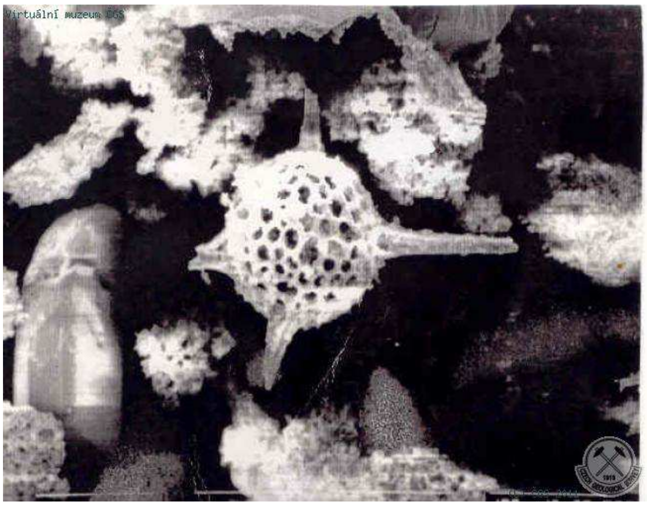
### 4.1 V medicíně a přírodě

Mnoho virů má kapsidy (bílkovinné pláště obklopující virovou nukleovou kyselinu) přibližně podobné dvacetistěnu. Mezi nejznámější takové viry patří viry dětské obrny, herpes viry, dokonce i viry HIV (obr. 4.1).



Obr. 4.1: Obrázek viru HIV

Také někteří prvoci nazývaní Mřížovci (Radolaria) vytváří spletité kostry ve tvaru dvacetistěnů s ostny. Tyto kostry můžeme najít na dnech oceánů. Podle nálezů schránek Mřížovců vznikl také výtvarný směr inspirovaný právě dvacetistěnem (obr. 4.13)



Obr. 4.2: Schránky Mřížovců

V přírodě se nejčastěji setkáváme s pravidelnými mnohostěny u krystalů minerálů. Krystaly podobné krychli má například sůl kamenná (halit) a křišťály, s osmistěnnou mřížkou se setkáváme u krystalů magnetitu, podobné dvanáctistěnu jsou krystaly pyritu. Uhlík (nejvyskytovanější prvek v přírodě) krystalizuje v několika formách, například v diamantu má krystalová mřížka strukturu krychle a třeba fulleren má mřížku podobnou dvacetistěnu.

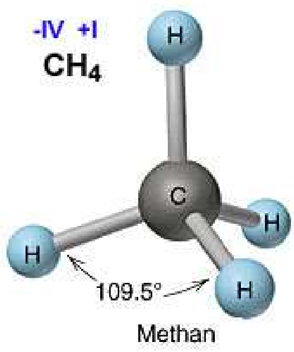
Obr. 4.3: Krystal soli kamenné (krychle)

Obr. 4.4: Magnetit (osmistěn)


Obr. 4.5: Krystal pyritu (dvanáctistěn)

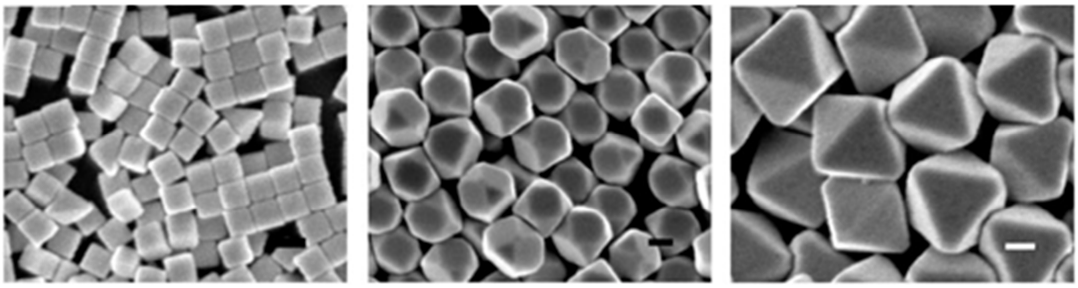
## 4.2 V chemii a fyzice

V chemii se s pravidelnými mnohostěny setkáváme zvláště u sloučenin. Tetraedrické uspořádání odpovídá hybridizaci sp3. Centrální atom je umístěn ve středu tetraedru, ligandy jsou umístěny v jeho vrcholech. Vazebné úhly jsou 109,5°.  Tvar tetraedru najdeme např. i u molekul vody nebo amoniaku. V případě vody jsou ve dvou vrcholech tetraedru atomy vodíku a do zbývajících vrcholů směřují volné elektronové páry. Díky tomu je stavba molekuly vody lomená. Podobně to vypadá i u amoniaku, kde jsou ve vrcholech 3 atomy vodíku a do čtvrtého vrcholu směřuje 1 volný elektronový pár. U organických sloučenin se s tetraedrem setkáváme například v methanu (obr. 4.6).




Obr. 4.6: Uspořádání do tetraedru v molekule methanu

S vývojem nanotechnologií si můžeme všimnout, že také mnohé nanočástice mají tvary pravidelných mnohostěnů (obr 4.7).



Obr. 4.7: Tvary pravidelných mnohostěnů v nanočásticích

## 4.4 V architektuře, umění a módě

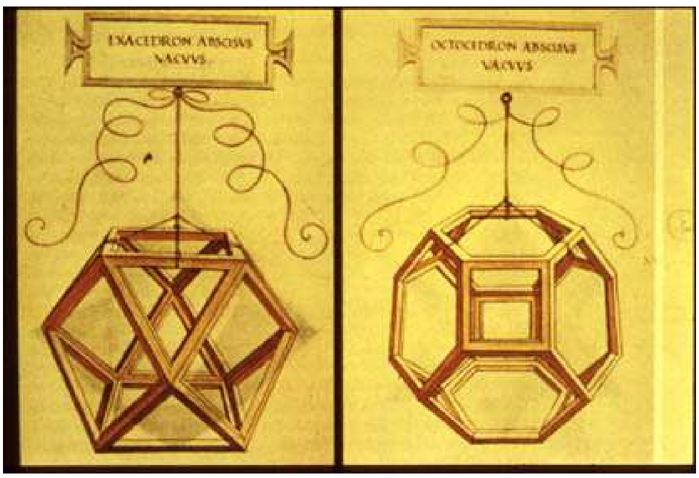
Jistě jste si všimli, že některé pyramidy mají tvar poloviny pravidelného osmistěnu a to proto, že vybudovat tento tvar není složité.

Obr. 4.8: Chefrenova pyramida v Gize

Pravidelné mnohostěny inspirovaly také mnohé významné umělce minulých dob. Florentský malíř Paolo Ucello navrhl v polovině 15. století v benátské bazilice sv. Marka dlažbu, ve které je znázorněn malý hvězdicový dvanáctistěn (polopravidelné těleso).

Obr. 4.9: Vzor v dlažbě v bazilice sv. Marka

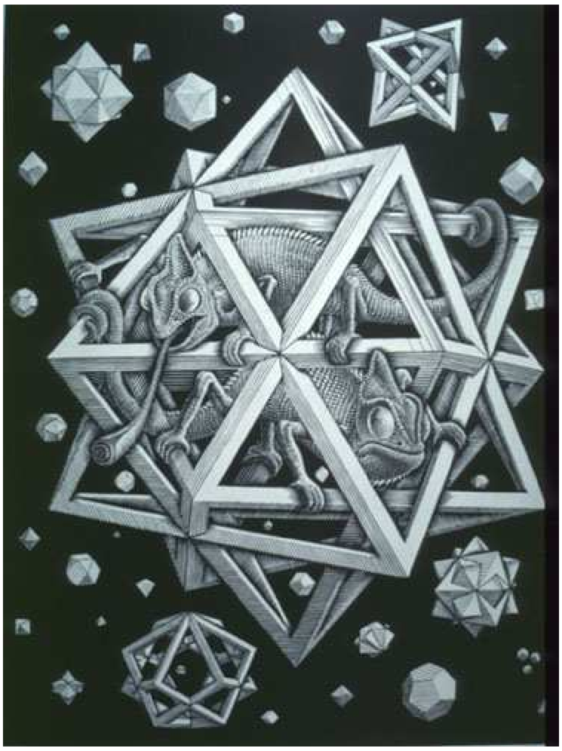
Tajemnost platónských těles vnímal i Leonardo da Vinci. Nejdříve si pravidelné mnohostěny vyráběl ze dřeva. Poté provedl jejich rozsáhlou studii, když se uvolil ilustrovat knihu význaného matematika Luca Pacioliho *O božském poměru* (*De Divina Proportione*). Tato kniha se věnovala božským tělesům a proporcím lidského těla. Najdeme v ní 59 kolorovaných kreseb mnohostěnů (obr. 4.10).



.

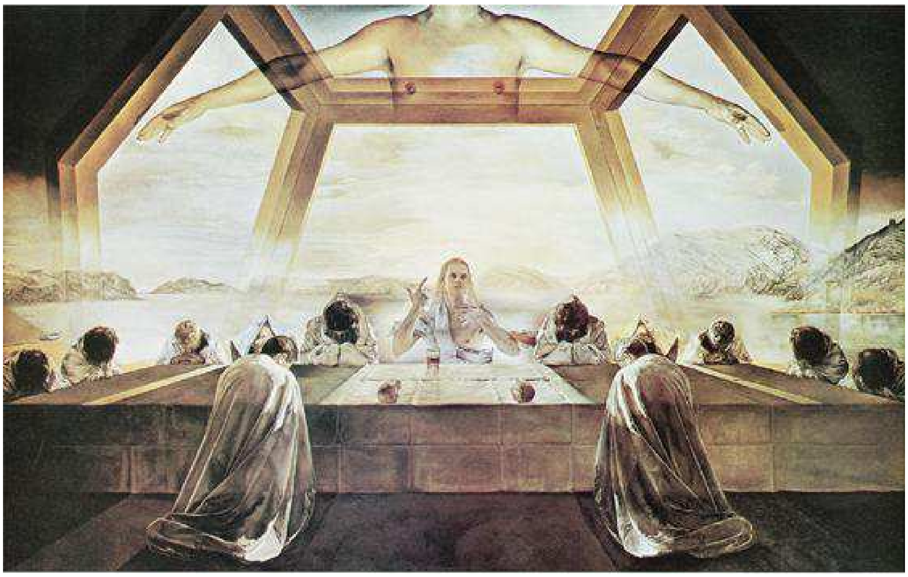
Obr. 4.10: Ilustrace Leonarda da Vinciho v knize *De Divina Proportione*

V roce 1948 vytvořil M. C. Escher podle kresby Leonarda da Vinciho v Pacioliho knize obraz s názvem Hvězda, opět si můžeme všimnout (obr. 4.11), že pro všechna geometrická vyobrazení byl základem pravidelný dvanáctistěn.



Obr. 4.11: M. C. Escher, *Hvězda*

Pravidelný dvanáctistěn je symbolem jsoucna. Toho využil i Salvátor Dalí ve svém díle Poslední večeře z roku 1955, na kterém můžete vidět Ježíše a apoštoly obklopené částí dvanástistěnu.



Obr. 4.12: Salvátor Dalí, *Poslední večeře*

Nálezy schránek Mřížovců (obr. 4.2) inspirovaly umělce ke vzniku výtvarného směru. V obrazech je důležité zachytit tvar dvacetistěnu (obr. 4.13).

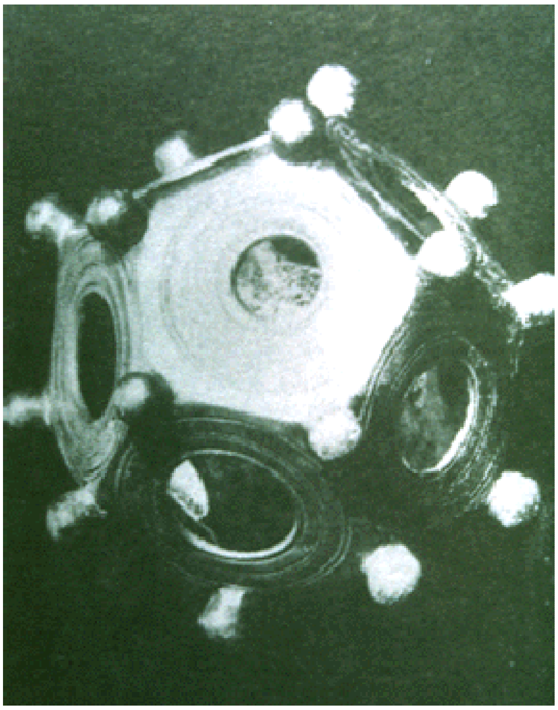
Obr. 4.13: Barbara West, radiolariánské umění

V roce 2011 vznikla také módní kolekce propojující stereometrii a extravaganci. Autorkou je Amily Hrustic, která pravidelné mnohostěny přenáší na pětici šatů.

Obr. 4.14: Amily Hroustic, *Dvanáctistěn*

## 4.5 Ve hrách

Nejstarší známou hračkou ve tvaru pravidelného mnohostěnu je etruský dodekahedron nalezený ve Skotsku. Stáří této hračky se odhaduje přibližně na 500 let př.n.l.

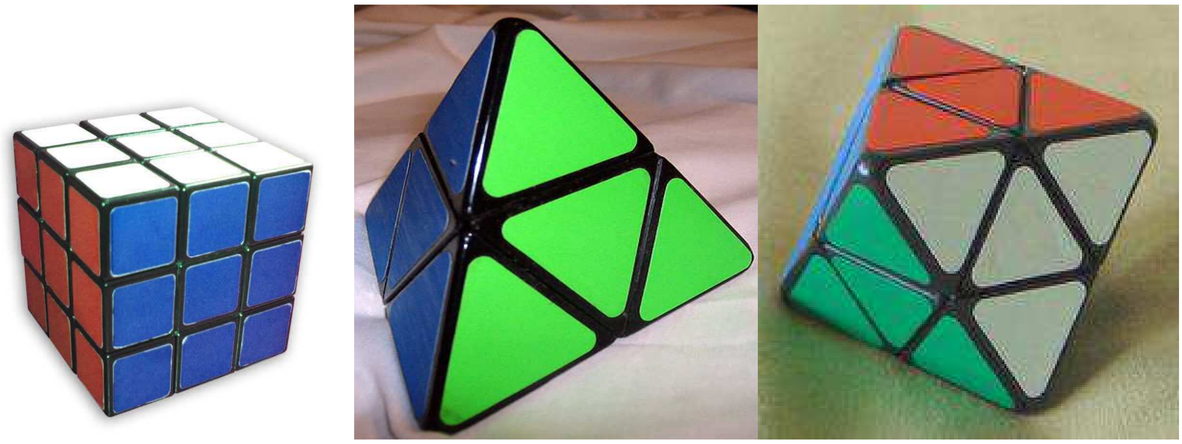


Obr. 4.15: Etruská hračka

Velmi využívanou herní pomůckou je kostka. Hrací kostka má nejčastěji tvar krychle, ale pro různé hry existují i kostky ve tvarech všech pěti mnohostěnů (obr. 4.16).

Obr. 4.16: Role-play kostky

Další známou logickou hrou je Rubikův hlavolam, který je také nejznámější ve tvaru krychle. I u Rubikova hlavolamu se ovšem můžeme setkat s několika rozdílnými tvary.

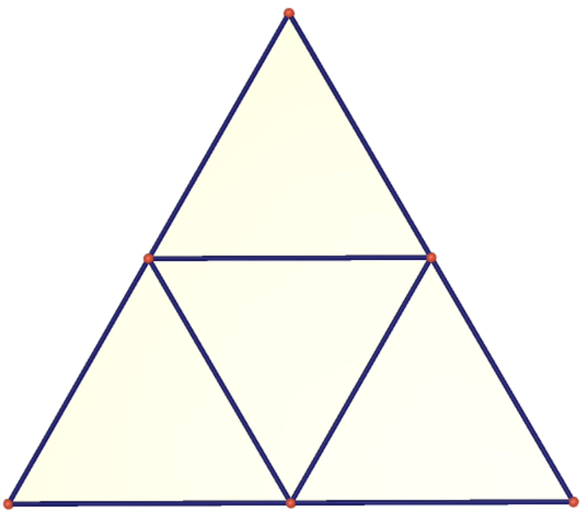


Obr. 4.17: Rubikovy hlavolamy

# 5. Sítě pravidelných mnohostěnů

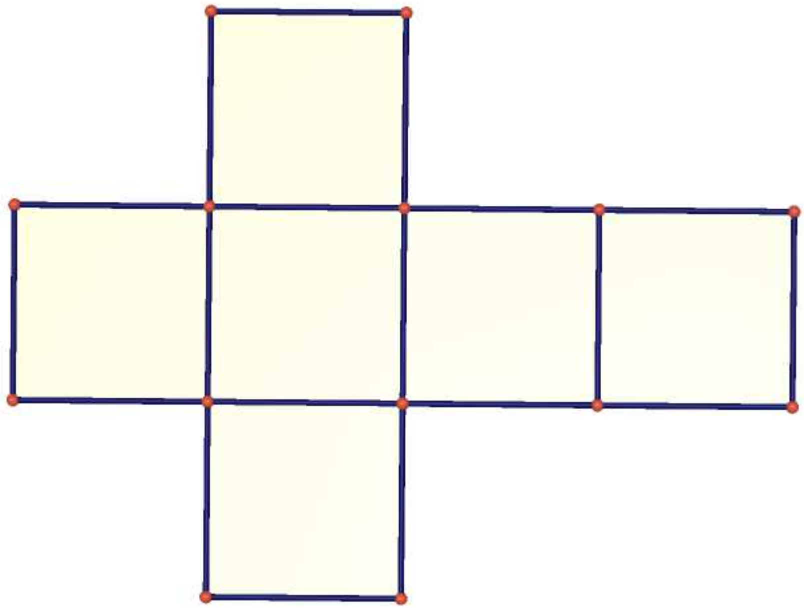
Sítí mnohostěnu rozumíme zakreslení všech stěn mnohostěnu do jedné roviny tak, aby stěny tvořily souvislý celek. Ke každému platónskému tělesu si uvedeme jednu síť. Sítě byly vytvořeny grafickým programem Cabri3D, který pro každý mnohostěn generuje stále stejnou síť.

- **Čtyřstěn**



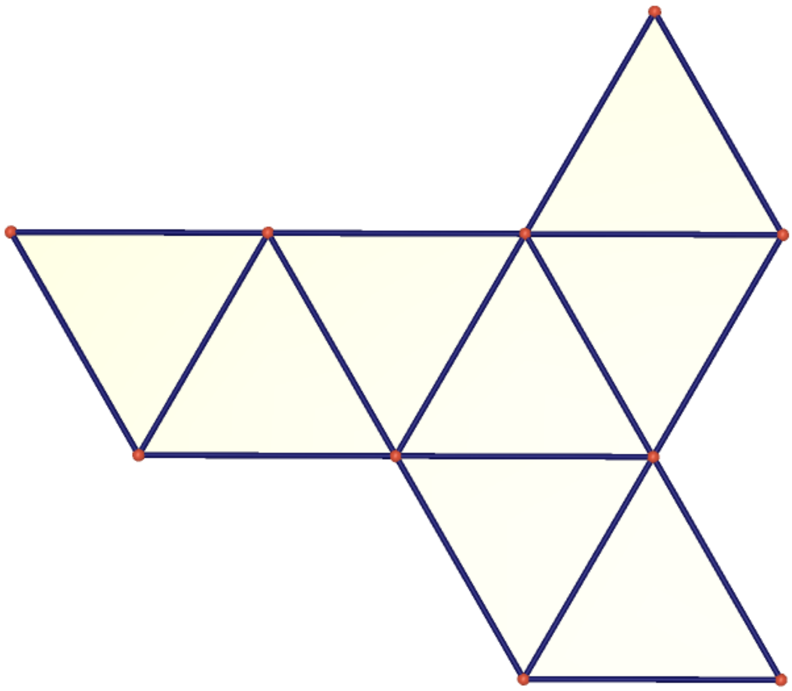
Obr. 5.1: Síť čtyřstěnu

- **Krychle**



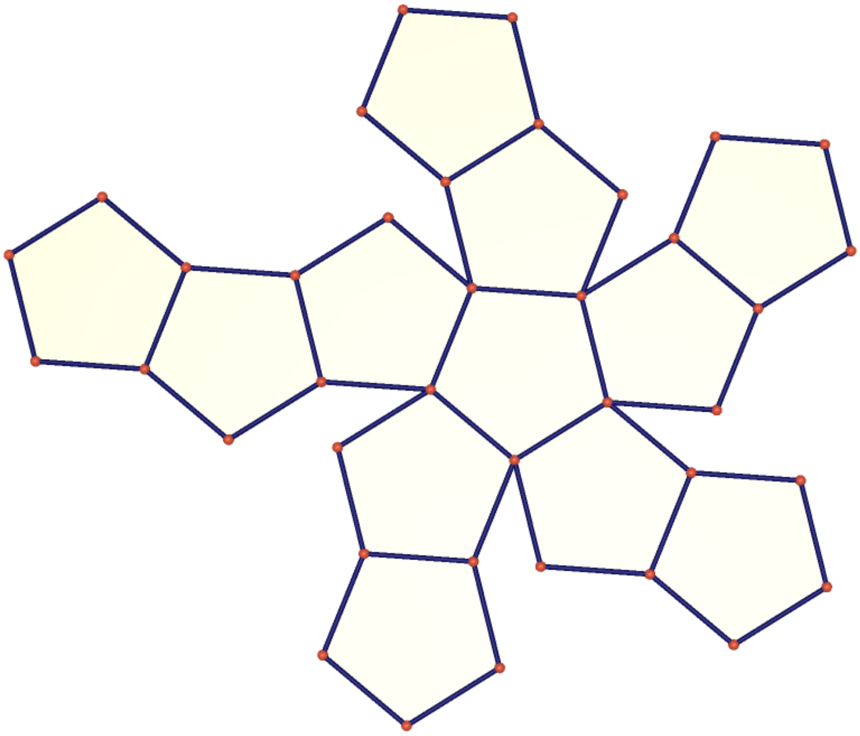
Obr. 5.2: Síť krychle

- **Osmistěn**



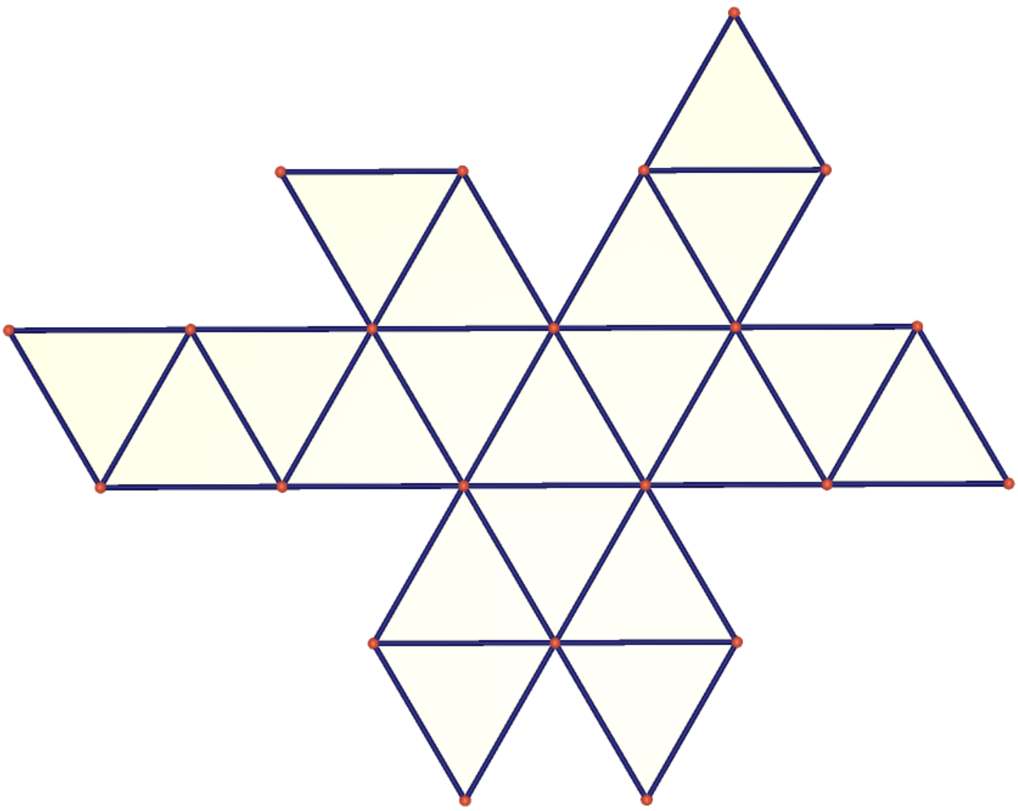
Obr. 5.3: Síť osmistěnu

- **Dvanáctistěn**



Obr. 5.4: Síť dvanáctistěnu

- **Dvacetistěn**



Obr. 5.5: Síť dvacetistěnu

# Závěr

Cílem práce bylo seznámit širší okruh čtenářů s pravidelnými mnohostěny, s jejich historií, vlastnostmi, výskytem, ale také s různými názvy pro tyto mnohostěny jako jsou Platónova, či platónská tělesa. V dnešní době se tato problematika na školách spíše neprobírá a učitelům stačí, když studenti znají krychli, někdy jsou seznámeni i se čtyřstěnem. Ke zbylým tělesům si většinou musí najít cestu sami, což je škoda.

Dle mého názoru v sobě mají Platónova tělesa veliké kouzlo. Myslím si, že právě proto jimi byli inspirováni jedni z největších myslitelů dávných dob.

Díky této práci jsem také lépe porozuměla matematickým programům GeoGebra a Cabri3D.

## Použitá literatura

**[1] Moravec, L., Chmelíková, V.:** *Pravidelné mnohostěny.* Seminární práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007

**[2] Chmelíková, V**.: *Zlatý řez.* Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta,2006

**[3] Svobodová, V.:** *Historie pravidelných mnohostěnů.* In: Sborník *Matematika v proměnách věků IV.*Akademické nakladatelství Cerm, 2007

**[4] Svobodová, V.:** *Pravidelné mnohostěny z dvojího podledu, Učitel matematiky 11,* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2003

**[5] Pomykalová, E**.: *Matematika pro gymnázia: Stereometrie.* Prométheus, 2002

**[6] Ruland, J.,Ferenz, G.:** *Posvátná geometrie platónských těles.* ANAG, 2010

**[6]** ***Pět Platónových těle****s*, <http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka4.html>

**[7]** ***Cube*****,** <http://cs.wikipedia.org/wiki/Cube>

**[8]** ***Tetrahedron*****,** <http://en.wikipedia.org/wiki/Tetrahedron>

**[9]** ***Octahedron,*** <http://en.wikipedia.org/wiki/Octahedron>

**[10]** ***Dodecahedron*****,** <http://cs.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron>

**[11]** ***Icosahedron*****,** <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron>

## Seznam zkratek

$a$: délka strany pravidelného $n$-úhelníku

$u_s$: stěnová úhlopříčka mnohostěnu

$u_t$: tělesová úhlopříčka tělesa

$v_s$: výška ve stěně

$v$: tělesová výška

$\omega$: odchylka sousedních stěn

$r$: poloměr kulové plochy (sféry) opsané

$\rho$: poloměr kulové plochy (sféry) vepsané

$P$: obsah mnohoúhelníku

$S$: povrch mnohostěnu

$S_p$: obsah podstavy tělesa

$V_j$: objem jehlanu

$V$: objem mnohostěnu

# Seznam obrázků