Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Farská

Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek

Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.
Studijní program: Matematika, Učitelství pro střední školy M-I

Děkuji vedoucí mé diplomové práce RNDr. Jarmile Robové, CSc. za zajímavé téma a za věcné připomínky k práci. Dále děkuji své rodině za podporu a pomoc.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10. 8. 2006 Jana Farská

Obsah

Název práce: Výuka kombinatoriky na střední škole s využitím webových stránek

Autor: Jana Farská

Katedra (ústav): Katedra didaktiky matematiky, UK MFF

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

e-mail vedoucího: Jarmila.Robova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Diplomová práce je zaměřena na vytvoření webových stránek pro výuku kombinatoriky na středních školách. V době psaní této práce existovaly jen neúplné nebo velmi stručné webové stránky k tomuto tématu a většina z nich nevyužívala dostatečně možnosti Internetu – stránky byly statické a málo provázané odkazy. Stránky v anglickém jazyce byly v tomto ohledu zpracované o něco lépe. Hodnocením několika existujících stránek se zabývá první část této diplomové práce. Druhou částí jsou nové webové stránky. K jejich vytvoření jsem použila jazyk HTML, skripty jsou napsány pomocí JavaScriptu a grafická úprava stránek je většinou definovaná v externích CSS souborech.
Stránky jsou určeny spíše pro samostudium, ale dají se využít i při výuce. Obsahují výklad látky, řešené příklady a úlohy k procvičení. Výsledky jednotlivých úloh je možné zobrazit kliknutím na určenou ikonu. U některých (zejména obtížnějších) úloh lze zobrazit nápovědu nebo celý postup řešení.

Klíčová slova: kombinatorika, výuka, matematika, Internet

Title: Teaching of combinatorics at high school with the help of Internet web-sites

Author: Jana Farská

Department: Department of Mathematics Education, UK MFF

Supervisor: RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Supervisor's e-mail address: Jarmila.Robova@mff.cuni.cz

Abstract: The main task of this thesis was to create web pages for teaching High School combinatorics. During working on the thesis, there were only incomplete or, very brief web pages with this theme on the Internet and many of them did not exploit it's possibilities. The web pages were static and there were very few references to the other pages. This was more exploited on the English web pages. Some of the existing web pages are classified in the first part of this thesis. The second part contains new web pages. The pages are constructed using HTML language, the scripts are made in JavaScript and the graphic layout is defined mainly in the extern CSS files.
The pages are intended for self-studying, but it is also possible to use them in school education. The pages contain the explanation of combinatorics, solved examples and exercises. By clicking the specified icon it is possible to show the answers to the exercises. Some of them (mainly the more difficult ones) have hidden hints or contain the whole solution.

Keywords: combinatorics, teaching, mathematics, Internet

1. Úvod

Hlavním úkolem této diplomové práce bylo vytvoření nových webových stránek pro výuku kombinatoriky. Toto téma jsem jsi zvolila z několika důvodů. Jednak mě zaujal samotný cíl, kterým je praktické využití mé diplomové práce při výuce matematiky na středních školách, a dalším důvodem byla možnost výhodného uplatnění poznatků z obou mých aprobačních předmětů, matematiky a informatiky.

V první části této práce je hodnocení několika existujících stránek věnujících se kombinatorice. Při hledání a prohlížení zmíněných stránek se ukázalo, že stránky, které se věnují kvalitně a podrobně danému tématu a přitom jsou zpracované didakticky správně pro potřeby výuky středoškoláků, v podstatě neexistují. Druhou částí diplomové práce tedy jsou nové webové stránky pro výuku kombinatoriky. Tyto stránky se od tištěných učebnic liší hlavně tím, že jsou do nich zařazeny interaktivní skripty, které usnadňují pochopení látky, umožňují provádět některé základní výpočty, zobrazují nápovědu k náročnějším úlohám, odkrývají výsledky úloh a podobně. Z tohoto důvodu doporučuji prohlížet stránky v elektronické podobě na přiloženém CD.

K prohlížení stránek není potřeba připojení k Internetu ani žádné speciální vybavení počítače, stránky se dají otevřít v běžném internetovém prohlížeči (soubor index.htm). Pro jejich prohlížení doporučuji prohlížeče Mozilla 1.7.5 a Internet Explorer 6.0 nebo novější. Ve starší verzi internetového prohlížeče se nezobrazovaly některé speciální znaky správně.

2. Hodnocení současných stránek o kombinatorice

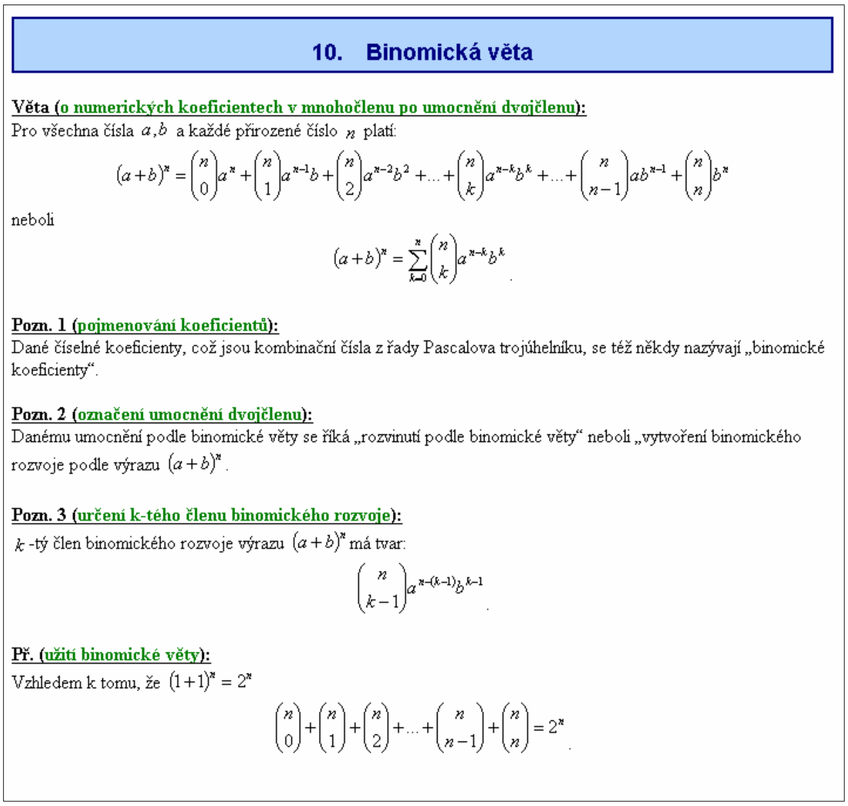
K tématu kombinatorika existuje poměrně velké množství webových stránek, ale často se týkají jen určité části kombinatoriky, např. pouze permutací nebo Pascalova trojúhelníku. Stránek, které se věnují celé kombinatorice nebo alespoň její větší části, je v dnešním internetu málo; většinou se jedná o maturitní přehledy bez vysvětlení látky. Stránky mají často velmi jednoduchou grafiku, nejsou interaktivní a celá kombinatorika bývá probrána na jediné internetové stránce.

V dalším textu uvádím hodnocení několika webových stránek, které jsou věnovány kombinatorice. Mezi kritéria hodnocení jsem zařadila odbornou správnost, rozsah zpracovaných témat (které pojmy jsou na stránce zpracovány, jestli stránka obsahuje výklad pojmů a příklady), dále přehlednost a grafické zpracování stránek. Při hodnocení obsahu a rozsahu stránek jsem vycházela z učebnice Calda, Dupač: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.

2.1 České stránky věnované kombinatorice

Pavel Jošt – Stránky pro Gymnázium a SPgŠ Liberec, Jeronýmova

Kombinatorika (http://pj.wz.cz/mat_4r/kombinatorika.html)
Tato webová stránka obsahuje všechny základní definice a věty středoškolské kombinatoriky i malou poznámku o historii. Látka je přehledně rozdělená, jednotlivé pojmy jsou výrazně barevně označeny, takže se student na stránkách snadno zorientuje a rychle najde, co potřebuje. Není zde vysvětlení pojmů ani ilustrační příklady – stránka slouží spíš studentům, kteří problematice rozumí a potřebují jen připomenout některý pojem nebo vzorec.


10. Binomická věta

Věta (o numerických koeficientech v mnohočlenu po umocnění dvojčlenu):
Pro všechna čísla a,b a každé přirozené číslo n platí:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

neboli

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k .$$

Pozn. 1 (pojmenování koeficientů):
Dané číselné koeficienty, což jsou kombinační čísla z řady Pascalova trojúhelníku, se též někdy nazývají „binomické koeficienty“.

Pozn. 2 (označení umocnění dvojčlenu):
Danému umocnění podle binomické věty se říká „rozvinutí podle binomické věty“ neboli „vytvoření binomického rozvoje podle výrazu $(a+b)^n$.

Pozn. 3 (určení k-tého členu binomického rozvoje):
k-tý člen binomického rozvoje výrazu $(a+b)^n$ má tvar:

$$\binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1} .$$

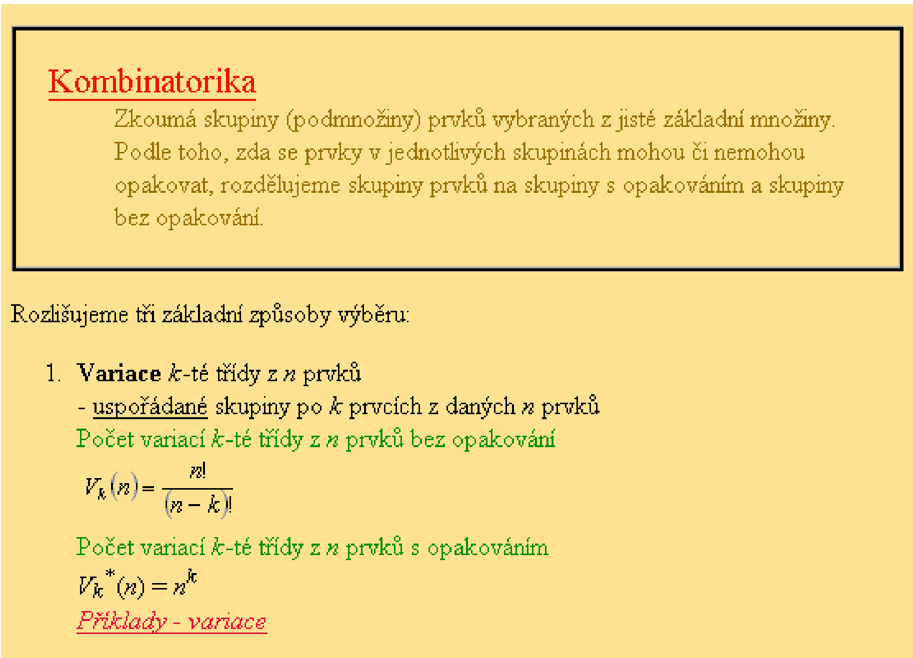
Př. (užití binomické věty):
Vzhledem k tomu, že $(1+1)^n = 2^n$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = 2^n .$$

Obr. 1

Studijní materiály Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB – Technické univerzity Ostrava

V předmětu Pravděpodobnost a statistika (http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/) je úvodní přednáška z části věnovaná kombinatorice.
Z menu vede několik odkazů na stránky, které se týkají kombinatoriky:
studijní texty (http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/soubory/kap01/prav1.htm),
příklady 1 (http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/soubory/zdroje/kombin.htm),
příklady 2 (http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/soubory/zdroje/CVIC01/CVIC01.HTM),
řešené příklady (http://homen.vsb.cz/~s1m30/cdpast1/soubory/zdroje/resprik1/respr1.htm).
Na stránce *studijní texty* je stručný přehled některých pojmů kombinatoriky, ale látka není vysvětlená. U pojmů variace, permutace a kombinace jsou odkazy na řešené příklady. Stránka obsahuje pojmy variace, permutace a kombinace bez opakování i s opakováním, kombinační číslo, vlastnosti kombinačních čísel. Neobsahuje kombinatorická pravidla součtu a součinu, Pascalův trojúhelník, ani binomickou větu. K procvičení látky je tu přes 40 příkladů, ke kterým jsou na jiné stránce výsledky.
Pojmy variace, permutace a kombinace jsou uspořádané jinak než na ostatních prohlížených stránkách; není tu klasické rozdělení na skupiny bez opakování a s opakováním, ale jsou zmíněny nejprve oba druhy variací (viz obr. 2), pak oba druhy permutací a nakonec oba druhy kombinací.
Stránka není graficky dobře navržená, má hodně syté pozadí, takže barevný text je hůře čitelný. Nejsou zde žádné ilustrační obrázky.



Obr. 2

Mathes

Kombinatorika (http://www.mathes.cz/ucebnice/kombinatorika.aspx)
Tato stránka se od ostatních výrazně liší: neobsahuje totiž seznam definic a matematických vět, ale souvislý text. Výklad je spíš neodborný, ale matematicky správný (až na pár překlepů), proto je stránka vhodná i pro studenty, kteří se s tímto tématem zatím nesetkali nebo kterým stručné odborné formulace k pochopení látky nestačí.
Graficky je tato stránka velmi jednoduchá. Ke zpřehlednění nebo zvýraznění textu používá autor různé velikosti a řezy písma, ale žádné barvy ani obrázky, dělící čáry a podobně. Matematické věty většinou nejsou nijak označené a zvýrazněné, jsou v textu společně s vysvětlením jejich využití, případně odvozením.
Stránka obsahuje kombinatorická pravidla součtu a součinu, permutace bez opakování, faktoriál, variace bez opakování, částečně kombinace bez opakování, řešené příklady. Stránky jsou nedokončené, ale autor na nich plánuje dále pracovat.

Třetí příklad

Mějme n různobarevných korálků, které budeme navlíkat na niť. Její konce poté svážeme, takže dostaneme kruh (něco jako náhrdelník). Kolika způsoby lze korálky do kruhu uspořádat? Tzn. uspořádání, které se liší jen otočením kruhu nepovažujeme za různé.

Řešení

Nejdříve určíme počet všech uspořádání. Tedy jako bychom korálky navlíkali do řady, nikoli do kruhu. Těch je n! Ovšem několik uspořádání je kruhu shodných. Proveďme následující úvahu. Uvažujme nějaké uspořádání v kruhu a zvolme si libovolný korálek, o kterém prohlásíme, že je první a ostatní korálky očíslujeme třeba ve směru hodinových ručiček. Teď celé uspořádání pootočíme ve směru hodinových ručiček o jeden korálek (takže první se dostane na místo druhého, druhý na místo třetího, atd.), čímž dostaneme shodné uspořádání. Takto můžeme uspořádání pootočit n krát a vždy dostaneme shodné uspořádání. Když jsme ale korálky navlíkali do řady, všechna tato shodná uspořádání jsme započítali. Výsledek tedy je

$$\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n} = (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-1)!.$$

Pro názornost ještě uvedeme shodná uspořádání v kruhu pro čtyři korálky:

12	41	34	23
43	32	21	14

Obr. 3

Kurz opakování vybraných kapitol středoškolské matematiky:
Kapitola 12. Kombinatorika (http://www.ft.utb.cz/czech/um/ostravsk/kurzmatSS/KOSkap12.htm).
Na této stránce najdete kombinatorická pravidla součtu a součinu, faktoriál, variace, permutace a kombinace bez opakování, kombinační číslo a jeho vlastnosti. Pojmy jsou pouze definovány, nejsou více vysvětleny, takže stránka je užitečná opět spíš pro studenty, kteří látce rozumí a chtějí si ji jenom rychle připomenout. Do textu je zařazeno také zadání několika příkladů, ale nejsou k nim uvedeny výsledky. Chybí zde pojmy variace, permutace a kombinace s opakováním, Pascalův trojúhelník, binomická věta.
Orientaci na stránkách usnadňuje pravý okraj, kde jsou vedle důležitých částí textu obrázky, případně krátký text. Naopak v hlavním textu jsou nadpisy málo výrazné.
Stránka se zobrazuje různě v Exploreru a v Mozille, rozdíl je např. v kvalitě zobrazení matematických symbolů: v Exploreru jsou indexy čitelné dobře, v Mozille těžko. Vzhledem k tomu, že jsou výrazy tvořeny obrázky, nedá se písmo ve výrazech zvětšit běžným způsobem.

Permutací (pořadí) n **prvků** je každá $n-$ členná variace z daných n prvků neboli každá uspořádaná $n-$ tice sestavená z těchto n prvků.

Počet všech takových permutací se značí $P(n)$ (resp. $V(n,n)$).

permutace bez opakování

Vzorce o počtu variací a permutací bez opakování jsou uvedeny v Tab. 12.1.

Pro počet $V(k,n)$ všech $k-$ členných variací z n prvků $(k,n \in N, k \le n)$ platí vzorec $$V(k,n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$ neboli $$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$
Pro počet $P(n)$ všech permutací (pořadí) n prvků platí vzorec: $$P(n) = n!$$

Tab. 12.1

vzorce pro určení počtu variací a permutací bez opakování

Příklad 12.3.

Příklad

Jsou dány 4 barvy. Kolik vlajek je možné sestavit z těchto barev, v případě, že každá vlajka má pouze 2 pruhy? Kolik vlajek je možné vytvořit, v případě, že každá vlajka obsahuje právě 3 pruhy? Kolik v případě právě 4 pruhů?

Obr. 4

www.vysokeskoly.cz

Maturitní otázky – Matematika (http://system.vysokeskoly.cz/index.php?clanek=1104).
Odkaz vede na seznam zpracovaných témat, částečně abecedně setříděný.
S kombinatorikou souvisí následující dvě témata:
1. Variace, permutace, kombinace
(http://www.vysokeskoly.cz/maturitniotazky/otazky/matematika/VariacePermutaceKombinace.htm)
2. Kombinační číslo, vlastnosti, rovnice s kombinačními čísly
(http://www.vysokeskoly.cz/maturitniotazky/otazky/matematika/KombinacniCislo.htm)
Stránky obsahují pojmy faktoriál, variace, permutace a kombinace bez opakování i s opakováním (ale s překlepem v názvu – viz obr. 5), kombinační číslo, Pascalův trojúhelník a binomická věta. U většiny pojmů je několik řešených příkladů, ale jsou v nich občas překlepy nebo chyby. U vzorce pro počet permutací s opakováním není vysvětleno, co znamenají symboly k_1, k_2, ..., k_n. Chybí zde výklad látky, stránky jsou určené jen pro opakování.
Grafické zpracování je opět velmi jednoduché, nejsou tu žádné ilustrační obrázky. Stránky se dobře zobrazují v Internet Exploreru, ale v Mozille a Firefoxu jsou špatně zobrazeny některé speciální znaky (např. znak implikace nebo tři tečky), což je způsobené tím, že stránky jsou generované aplikací Microsoft Word. Ze stránek je možné stáhnout původní dokument.

Variace bez opakování:

Variace k-té třídy z n prvků s opakováním je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

$$V'_k(n) = n^k$$

Permutace bez opakování:

Permutace s opakováním z n prvků je k-tice uspořádaná z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

$$P'(k_1;k_2;k_3;\dots k_n) = \frac{(k_1+k_2+k_3+\dots+k_n)!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot\dots\cdot k_n!}$$

Kombinace bez opakování:

Kombinace k-té třídy z n prvků s opakování je každá neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Obr. 5

2.2 Stránky v angličtině věnované kombinatorice

MATH–abundance

Counting problems (http://www.ping.be/~ping1339/tel.htm)
Solved problems about counting (http://www.ping.be/~ping1339/Pcount.htm)
Na stránce Counting problems je přehled většiny základních pojmů kombinatoriky, chybí pouze Pascalův trojúhelník. Binomická věta je uvedena i s důkazem. Nejsou zde klasické definice, pojmy jsou vysvětleny obecným nebo konkrétním příkladem:
Variations without repetition: Take a set A of n different elements. Choose p elements in a specific order.
Permutations with repetition: Take 3 red marbles, 2 blue marbles, and 5 yellow ones. Place this marbles in a specific order.
Dále jsou příklady řešeny a tato řešení vedou ke vzorcům pro počet variací, permutací, resp. kombinací.
Druhý uvedený odkaz vede na stránku, která obsahuje 13 příkladů k tématu i s řešeními.
Jak je vidět z obrázku, graficky jsou tyto stránky velmi jednoduché. Zvýrazněné jsou jen nadpisy a zadání příkladů. Celá stránka obsahuje pouze text, nejsou tu žádné obrázky ani jiné objekty. Ani vzorce nejsou vkládané jako obrázky, jak tomu bývá na jiných stránkách, ale jsou tvořeny víceřádkovým textem.

Combinations

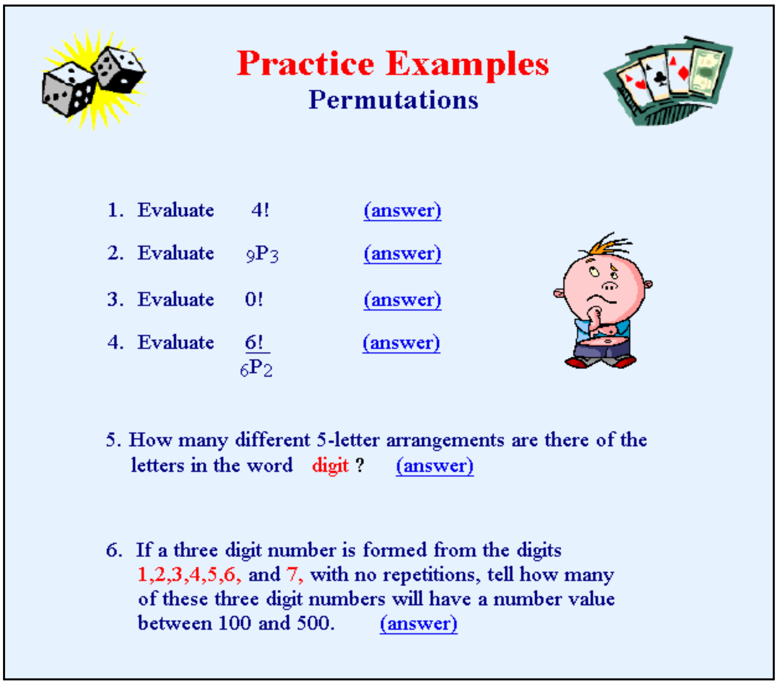
Take a set A of n different elements. Choose a subset of p elements.
Such choice is called a combination of n elements choose p.
We write the number of such combinations as C(n,p).
Each of the V(n,p) variations of n elements choose p, can be constructed as follows.
a) Take a subset (a combination) of p elements from the n elements. This can be done in C(n,p) ways.
b) Take that subset and choose a particular order of the p elements.
This can be done in p! ways.
From this we have V(n,p) = C(n,p) . p!
Or, C(n,p) = V(n,p) / p! Since V(n,p) = n.(n-1).(n-2). ... .(n-p+1) , we have

```
                n.(n-1).(n-2). ... .(n-p+1)
       C(n,p) = ---------------------------
                           p!

                n.(n-1).(n-2). ... .(n-p+1).(n-p). ... .1
<=>    C(n,p) = ---------------------------------------------------
                           p! . (n-p). ... .1

                    n!
<=>    C(n,p) = ------------
                  p!.(n-p)!
```

Obr. 6

Oswego City School District Regents Exam Prep Center

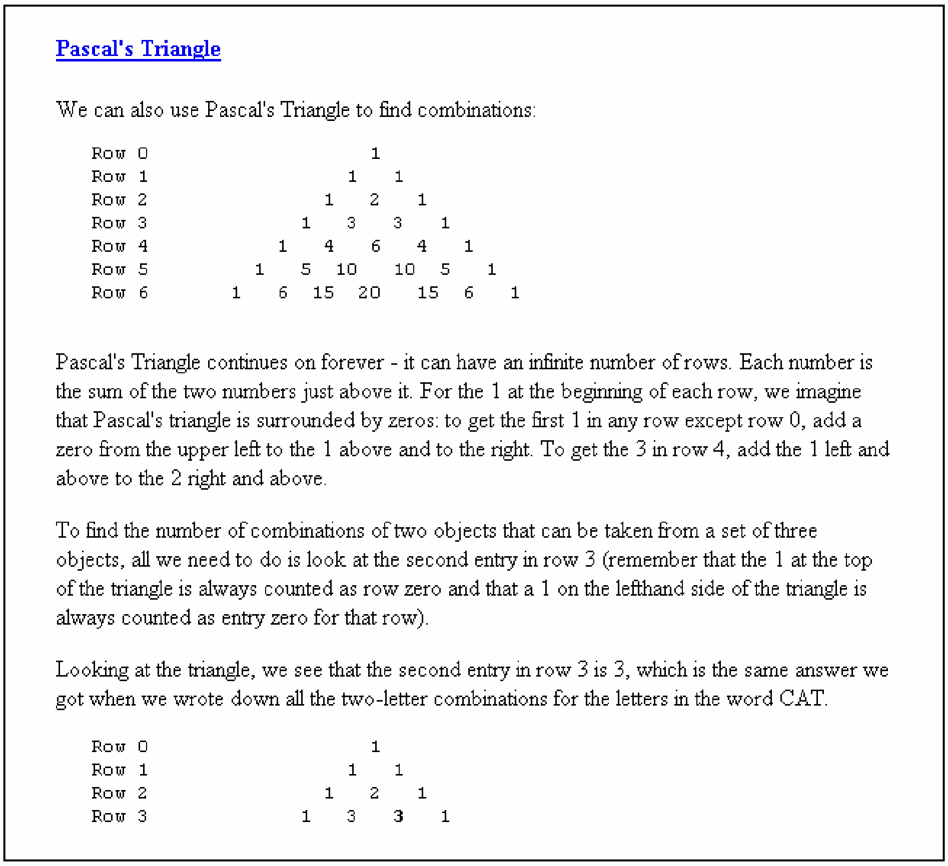
Kombinatorika je zde pouze součástí stránek o pravděpodobnosti:
Uncertainty (Probability) (http://regentsprep.org/Regents/math/math-a.cfm#a6)
Odtud vedou odkazy na stránky týkající se kombinatoriky:
The Counting Principle (kombinatorické pravidlo součinu) (http://regentsprep.org/Regents/math/math-topic.cfm?TopicCode=counting),
Factorial (http://regentsprep.org/Regents/math/math-topic.cfm?TopicCode=factnot),
Permutations (variace a permutace) (http://regentsprep.org/Regents/math/math-topic.cfm?TopicCode=permut),
Combinations (http://regentsprep.org/Regents/math/math-topic.cfm?TopicCode=combin).
Přestože na úvodní stránce (http://regentsprep.org) je uvedeno „The goal of this nonprofit site is to help high school students ...“, tedy že stránky jsou určeny pro středoškoláky, kombinatorika je probrána jen velmi jednoduše. Příklady jsou pouze s konkrétními čísly, dokonce ani u faktoriálu není zmíněno *n*!, přestože se objeví u variací a kombinací.
Mezi pojmy, které se zde dají alespoň částečně najít, tedy patří: kombinatorické pravidlo součinu, faktoriál, variace (jsou zmíněny jako permutace(n, r)), permutace a kombinace bez opakování, permutace s opakováním. Chybí kombinatorické pravidlo součtu, variace a kombinace s opakováním, kombinační číslo, Pascalův trojúhelník, binomická věta. Celkově jsou tyto stránky pro české středoškoláky spíš nedostatečné, ale mohou být dobré jako motivace v nižších ročnících.
Každé téma je zpracováno na několika samostatných stránkách. Tyto stránky jsou v seznamu označeny buď L = Lesson (výklad), P = Practice (příklady s výsledky i řešením), nebo T = Teacher Resource (náměty pro učitele). Stránky tedy mohou využít nejen studenti, ale také učitelé zde mohou najít inspiraci do hodin matematiky.
Tyto stránky využívají možností internetu podstatně více, než všechny ostatní uvedené stránky. Látka je rozdělená do více malých stránek, takže student nemusí listovat dlouhým textem, ale přes odkaz v obsahu přejde hned k tématu, které ho zajímá. Řešení příkladů je schované za odkazy a zobrazuje se ve vlastním okně, nebo je skryté v rozbalovacím menu. Pro zajímavější grafiku využili autoři i pohyblivé obrázky, které při prohlížení stránek působí spíš rušivě.



Obr. 7

Drexel University – The Math Forum

Součástí tohoto matematického fóra jsou nejen jednotlivé dotazy a odpovědi na ně, ale v sekci Frequently Asked Questions (http://mathforum.org/dr.math/faq/) jsou zvlášť zpracována některá matematická témata. Mezi ně patří
Permutations and Combinations (http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.comb.perm.html)
a Pascal‘s Triangle (http://mathforum.org/dr.math/faq/faq.pascal.triangle.html).
Pojem Permutations zde zahrnuje pouze variace, permutace jako speciální případ variací tu nejsou vůbec zmíněny. Variace i kombinace (bez opakování) jsou nejprve vysvětleny na konkrétním příkladu, potom je vzorec zobecněn. Pascalův trojúhelník je v této kapitole zmíněn v souvislosti s kombinacemi, ale je mu věnována také samostatná stránka, kde je popsáno několik jeho zajímavých vlastností. Na konci obou uvedených stránek jsou odkazy na související dotazy z fóra, mezi kterými lze např. najít dotaz na binomickou větu (Binomial Expansions and Pascal‘s Triangle), nebo několik příkladů: Telephone Number Possibilities, Handshakes at a Party, Monkeys Typing Shakespeare: Infinity Theory nebo Binomial Theorem (Find the fourth term of (2a – 6b)^11).
Stránky se souvisejícími tématy jsou navzájem provázané odkazy, takže se čtenář snadno dostane k informacím různé úrovně a zaměření.
Graficky jsou stránky opět velice jednoduché a také obrázky se tu objevují jen výjimečně. Vzorce jsou „kreslené“ textem, podobně jako u MATH–abundance.



Pascal's Triangle

We can also use Pascal's Triangle to find combinations:

```
Row 0                  1
Row 1                1   1
Row 2              1   2   1
Row 3            1   3   3   1
Row 4          1   4   6   4   1
Row 5        1   5   10  10  5   1
Row 6      1   6   15  20  15  6   1
```

Pascal's Triangle continues on forever - it can have an infinite number of rows. Each number is the sum of the two numbers just above it. For the 1 at the beginning of each row, we imagine that Pascal's triangle is surrounded by zeros: to get the first 1 in any row except row 0, add a zero from the upper left to the 1 above and to the right. To get the 3 in row 4, add the 1 left and above to the 2 right and above.

To find the number of combinations of two objects that can be taken from a set of three objects, all we need to do is look at the second entry in row 3 (remember that the 1 at the top of the triangle is always counted as row zero and that a 1 on the lefthand side of the triangle is always counted as entry zero for that row).

Looking at the triangle, we see that the second entry in row 3 is 3, which is the same answer we got when we wrote down all the two-letter combinations for the letters in the word CAT.

```
Row 0                  1
Row 1                1   1
Row 2              1   2   1
Row 3            1   3   3   1
```

Obr. 8

2.3 Přehled hodnocení odborné správnosti a rozsahu

	kombinatorická pravidla součtu a součinu	variace, permutace a kombinace bez opakování	variace, permutace a kombinace s opakováním	Pascalův trojúhelník	binomická věta
Pavel Jošt – Stránky pro Gymnázium a SPgŠ Liberec	☺	☺	☺	😐	☺
Studijní materiály Katedry matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB – Technická univerzita Ostrava	–	😐	😐	–	–
Mathes	☺	😐	–	–	–
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta technologická	☺	😐	–	–	–
www.vysokeskoly.cz	–	☺	☹	😐	😐
MATH–abundance	–	😐	😐	–	☺
Oswego City School District Regents Exam Prep Center	😐	😐	–	–	–
Drexel University – The Math Forum	–	😐	–	☺	😐

Značení
Stránka obsahuje dané pojmy:
☺ celé a správně,
😐 jen částečně nebo s drobnými nepřesnostmi,
☹ s chybami;
– stránka dané pojmy neobsahuje.

2.4 Celkové hodnocení

Pavel Jošt – Stránky pro Gymnázium a SPgŠ Liberec	☺
Studijní materiály Katedry matematiky a deskriptivní geometrie, VŠB – Technická univerzita Ostrava	☺
Mathes	☺
Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta technologická	😐
www.vysokeskoly.cz	☹
MATH–abundance	☺
Oswego City School District Regents Exam Prep Center	☺
Drexel University – The Math Forum	☺

3. Webové stránky

Stránky jsou rozděleny do čtyř základních kapitol: Základní kombinatorická pravidla, Variace, permutace a kombinace bez opakování, Variace, permutace a kombinace s opakováním, Kombinační čísla. Tyto kapitoly se dále dělí na podkapitoly s výkladem jednotlivých kombinatorických pojmů a úlohami.

Řešené příklady jsou většinou zařazeny do výkladu, takže studentovi umožňují pochopit souvislost mezi teorií (definicí, vzorcem, pravidlem apod.) a konkrétním příkladem. Některé z nich jsou doplněny o ilustrativní skripty.

Úlohy jsou na samostatné stránce vždy k celé kapitole. Jsou uspořádány podle témat a na konci stránky je část nazvaná „Směs“, která obsahuje komplexnější úlohy. U každé úlohy je skrytý výsledek, který se zobrazí po kliknutí na určenou ikonu; student tedy nemusí nikde listovat a hledat, který výsledek patří k právě řešené úloze. U některých náročnějších úloh je možné zobrazit nápovědu, případně celý postup řešení.

Skripty určené k jednoduchým výpočtům jsou vytvořeny tak, aby nesprávné hodnoty zadané uživatelem nahradily hodnotou nula, případně číslo zaokrouhlily.

Stránky jsou napsané v XHTML 1.0 Strict, všechny skripty jsou vytvořené v jazyce JavaScript, grafika je převážně definovaná v externích CSS souborech. Jak již bylo zmíněno v úvodu práce, k prohlížení stránek doporučuji prohlížeče Mozilla 1.7.5 a Internet Explorer 6.0 nebo novější.

Úvod

Při řešení mnoha praktických problémů se setkáváme s úlohami, při kterých utváříme skupiny z prvků nějaké konečné množiny. Například máme sestavit rozvrh hodin z daných předmětů, potřebujeme rozhodnout, které týmy budou v turnaji hrát proti sobě, nebo chceme rozdat několik druhů cen mezi účastníky závodu. Řešením těchto úloh se zabývá kombinatorika.

Kombinatorika je tedy obor matematiky, který se zabývá uspořádáním daných prvků podle určitých pravidel do určitých skupin.

Základním pojmem v kombinatorice je pojem (k-prvková) **skupina**, nebo také ***k*-tice** prvků. Jestliže v k-tici záleží na pořadí prvků, mluvíme o **uspořádaných *k*-ticích**, jestliže na pořadí prvků v k-tici nezáleží, mluvíme o **neuspořádaných *k*-ticích**. Dále rozlišujeme, jestli se prvky v k-tici mohou opakovat. Pokud se každý prvek může v k-tici vyskytnout nejvýše jednou, mluvíme o skupinách **bez opakování**; jestliže se může libovolný prvek v k-tici vyskytnout vícekrát (nejvýše k-krát), mluvíme o skupinách **s opakováním**.

S náznaky kombinatoriky se setkáváme již u starořeckých matematiků. Počátky hlubšího studia otázek spojených s kombinatorikou však spadají do období 16. století. Zájem o kombinatoriku podnítily v té době různé hazardní hry, například vrchcáby neboli hra v kostky. Matematici se začali zabývat otázkami, jaká možná seskupení mohou nastat při házení určitého počtu hracích kostek, jaké jsou pravděpodobnosti výher, později i jinými otázkami, a tak se postupně vyvíjel obor, který v současné době nalézá uplatnění v teorii pravděpodobnosti, v teorii informací, ve statistice a v dalších oborech.

Ikony

... při najetí myší nebo při kliknutí na tyto ikony se zobrazí (případně schová) postup řešení.

... při kliknutí na tyto ikony se zobrazí (případně schová) výsledek k úloze.

... při najetí myší na tuto ikonu se zobrazí nápověda k úloze.

... při kliknutí na tyto ikony se zobrazí (případně schová) důkaz věty.

Tyto stránky jsou optimalizovány pro prohlížeče Mozilla 1.7.5 a Internet Explorer 6.0 a pro rozlišení 1 280 × 1 024 pixelů.
K prohlížení stránek doporučuji použít prohlížeč Mozilla Firefox, který je volně ke stažení na stránce www.mozilla.com/firefox/.

Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorické pravidlo součinu

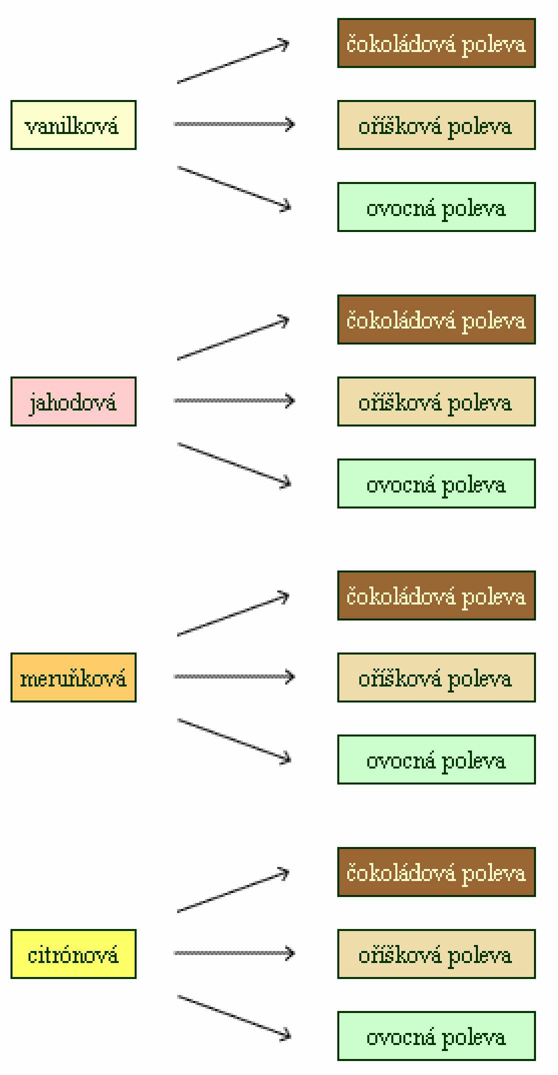
Toto pravidlo používáme v běžném životě zcela automaticky. Než uvedeme jeho matematickou formulaci, ukážeme si jeho využití na příkladu.

Příklad

U stánku nabízejí čtyři druhy zmrzliny a tři polevy. Kolik různých zmrzlin s polevou lze vytvořit, jestliže nechceme míchat více druhů ani více polev?

Řešení

Následující diagram zobrazuje všechny možnosti:



Ke každému ze čtyř druhů zmrzliny můžeme přidat jednu ze tří polev, celkem je proto možné vytvořit $\mathbf{4 \cdot 3 = 12}$ různých zmrzlin s polevou.

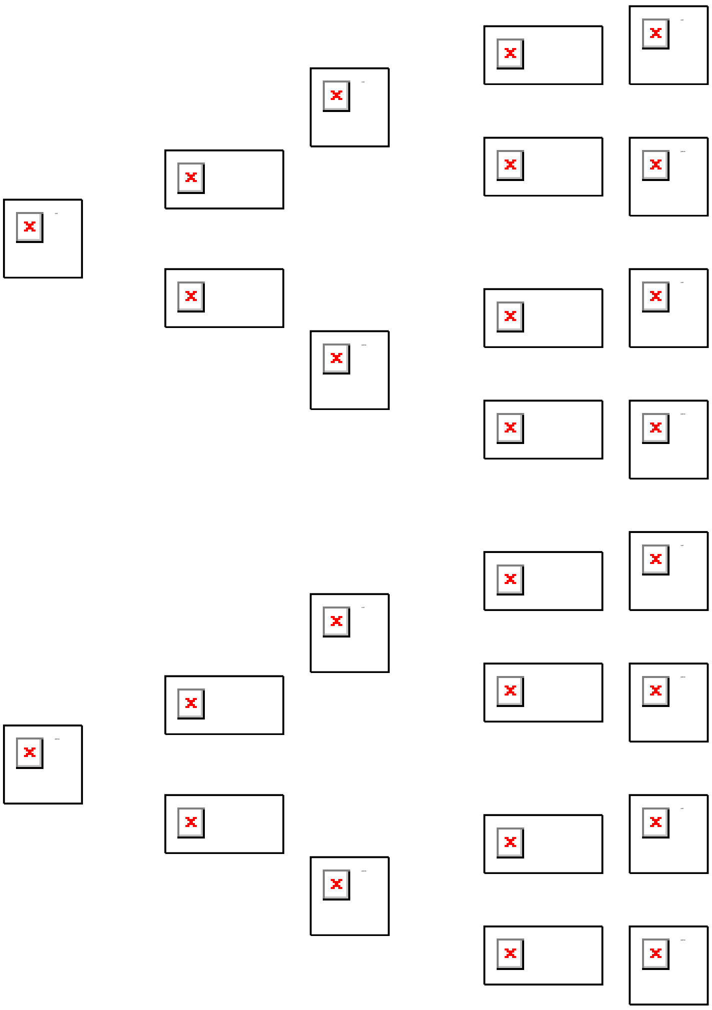
Zobecněním předchozí úvahy dojdeme k následujícímu pravidlu:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

V úvodním příkladě jsme hledali uspořádané dvojice druh − poleva, jejichž první člen (druh) lze vybrat čtyřmi způsoby a druhý člen (polevu) lze vybrat třemi způsoby. Tedy $k = 2$, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$; $n_1 \cdot n_2 = 12$.

Kombinatorické pravidlo součinu můžeme použít také v případě, kdy několikrát (k-krát) opakujeme výběr z určitých prvků a zajímá nás, kolik různých pořadí může vzniknout. Např. když házíme mincí, jde o opakovaný výběr ze dvou prvků (orel, panna). Po třech hodech může vniknout **2 · 2 · 2 = 8** různých výsledků:

První hod **Druhý hod** **Třetí hod**



orel − orel − orel 1

orel − orel − panna 2

orel − panna − orel 3

orel − panna − panna 4

panna − orel − orel 5

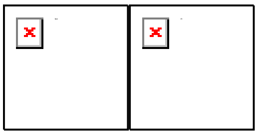
panna − orel − panna 6

panna − panna − orel 7

panna − panna − panna 8

Příklad

Kolik různých uspořádaných dvojic čísel můžeme dostat, když hodíme dvakrát kostkou s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách?



(Kliknutí na kostku znamená nový hod.)

Řešení

V prvním hodu může padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_1 = 6$, ke každému z nich může ve druhém hodu opět padnout jedno ze šesti čísel, tj. $n_2 = 6$. Počet různých dvojic ($k = 2$) je tedy $6 \cdot 6 =$ **36**.

Další stránka: Kombinatorické pravidlo součtu
Kombinatorika > Základní kombinatorická pravidla > Kombinatorické pravidlo součinu

Základní kombinatorická pravidla

Kombinatorické pravidlo součtu

Také toto pravidlo v životě často využíváme, aniž si to uvědomujeme. Jestliže máme např. tři žluté, dvě modré a čtyři zelené pastelky, umí každý snadno spočítat, že dohromady máme 3 + 2 + 4 = 9 pastelek. Matematicky se toto pravidlo formuluje takto:

> Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

Příklad

Do třídy chodí 28 žáků. Devět z nich jezdí do školy autobusem a tři vozí do školy rodiče autem. Kolik žáků z této třídy chodí do školy pěšky, jestliže nikdo nepoužívá na cestě do školy jiný dopravní prostředek?

Řešení

Počet žáků, kteří jsou z této třídy a chodí do školy pěšky, označíme x. Potom platí:
$28 = 9 + 3 + x$
Vyjádřením x získáme výsledek:
$x = 28 - 9 - 3 = 16$
Z této třídy chodí do školy pěšky 16 žáků.

Příklad

V letadle na mezinárodní lince je 9 chlapců, 5 amerických dětí, 9 mužů, 7 dětí jiné státní příslušnosti, 14 Američanů, z nichž je 6 mužů, a 7 žen jiné státní příslušnosti. Kolik cestujících je v letadle?

Řešení

Nejprve určíme počet dětí: v letadle je 5 amerických dětí a 7 dětí jiné státní příslušnosti, to znamená dohromady 12 dětí. Dále je v letadle 7 žen jiné státní příslušnosti než americké a 9 mužů. K určení celkového počtu dospělých tedy zbývá zjistit, kolik amerických žen je v letadle. Ze zadání víme, že je v letadle 14 Američanů, z toho 6 mužů a 5 dětí. Počet amerických žen je proto $14 - 6 - 5 = 3$. Dostáváme tak počet dospělých: $9 + 7 + 3 = 19$.
V letadle je tedy 12 dětí a 19 dospělých, což je dohromady 31 cestujících. Informace o tom, že v letadle je 9 chlapců, není k výpočtu potřeba.

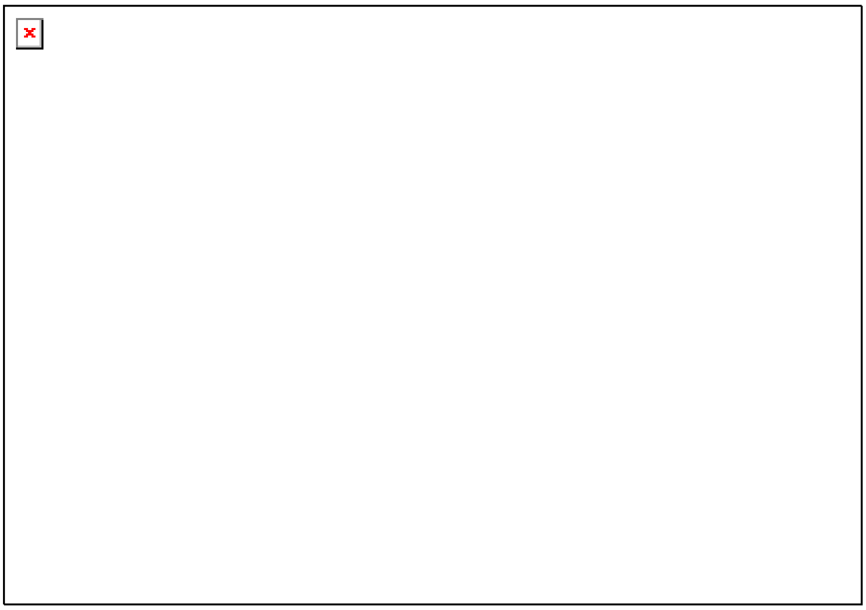
O trochu složitější je určování počtu prvků sjednocení množin v případech, kdy tyto množiny nejsou disjunktní.

Příklad

V jedné třídě, ve které každý žák ovládá aspoň jeden ze dvou jazyků (angličtinu nebo němčinu), hovoří 25 žáků anglicky, 16 žáků německy a 7 žáků hovoří oběma jazyky. Kolik žáků chodí do této třídy?

Řešení

Množinu žáků, kteří mluví anglicky, označíme A, a množinu žáků, kteří mluví německy, označíme N. Protože každý žák ve třídě ovládá alespoň jeden z uvedených jazyků, chodí do třídy tolik žáků, kolik prvků má sjednocení množin A a N. Víme, že $|A| = 25$, $|N| = 16$, $|A \cap N| = 7$. Kdybychom jen sečetli $|A| + |N|$, byli by žáci, kteří mluví oběma jazyky, započítáni dvakrát. Je proto potřeba je jednou odečíst:
$|A \cup N| = |A| + |N| - |A \cap N| = 25 + 16 - 7 = 34$.
Do této třídy chodí 34 žáků.



Příklad

Při matematické soutěži řešili žáci tři úlohy; označme je A, B, C. Ze stočtyřiceti soutěžících vyřešilo úlohu A osmdesát, úlohu B sedmdesát a úlohu C padesát soutěžících. Přitom úlohu A a zároveň B vyřešilo čtyřicet soutěžících, úlohu B a zároveň C třicet soutěžících a stejně tak i úlohu A a zároveň C vyřešilo třicet soutěžících. Všechny tři úlohy vyřešilo dvacet soutěžících. Kolik soutěžících nevyřešilo ani jednu úlohu?

Řešení

Budeme postupovat tak, že nejprve zjistíme, kolik žáků vyřešilo alespoň jednu úlohu, a tento mezivýsledek odečteme od celkového počtu soutěžících.
Množinu soutěžících, kteří vyřešili úlohu A (resp. B, C) označíme SA (resp. SB, SC). Potom počet soutěžících, kteří vyřešili alespoň jednu úlohu, je stejný, jako počet prvků množiny $SA \cup SB \cup SC$.

Opakovaným kliknutím na obrázek se postupně objeví vzorec pro určení počtu prvků sjednocení tří množin.

$|S_A \cup SB \cup SC| = \ldots$

$|SA \cup SB \cup SC| = |SA| + |SB| + |SC| - |SA \cap SB| - |SA \cap SC| - |SB \cap SC| + |SA \cap SB \cap SC| =$
$= 80 + 70 + 50 - 40 - 30 - 30 + 20 =$
$= 120.$
Alespoň jednu úlohu vyřešilo 120 žáků. Soutěže se zúčastnilo 140 žáků, zbývá tedy 20 žáků, kteří nevyřešili ani jednu úlohu.

Předchozí stránka: Kombinatorické pravidlo součinu
Další stránka: Řešené příklady
Kombinatorika > Základní kombinatorická pravidla > Kombinatorické pravidlo součtu

Základní kombinatorická pravidla

Řešené příklady

Příklad 1

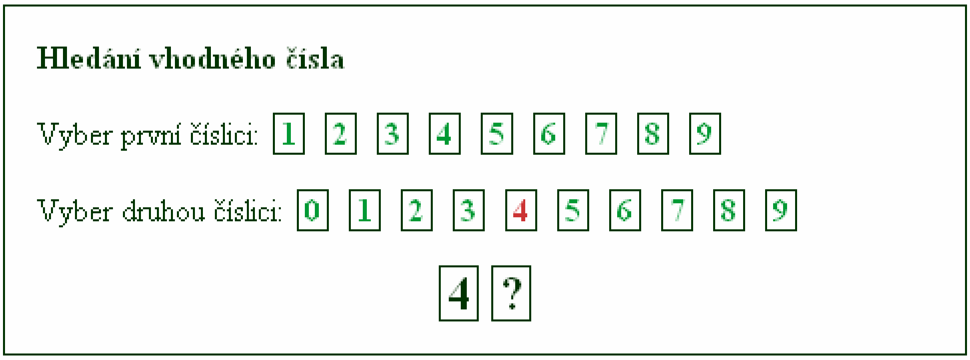
Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení

V tomto případě lze využít obě kombinatorická pravidla.

1) *Řešení s využitím kombinatorického pravidla součinu*

Na místě desítek může být libovolná z číslic 1, 2, …, 9, máme tedy devět možností pro výběr první číslice. *Ke každé z nich* existuje devět možností, jak vybrat číslici pro místo jednotek: může zde být číslice 0 a libovolná z číslic 1, 2, …, 9, která je různá od číslice stojící na místě desítek. Celkem lze tedy sestavit $9 \cdot 9 = 81$ uvažovaných dvojciferných čísel.

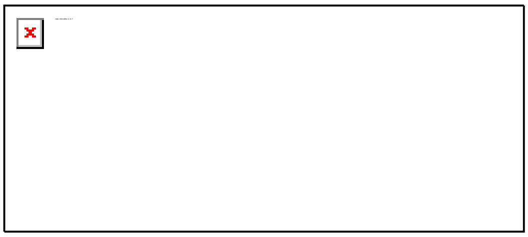


2) *Řešení s využitím kombinatorického pravidla součtu*

Všechna přirozená dvojciferná čísla lze rozdělit do dvou disjunktních skupin tak, že v první jsou dvojciferná čísla s různými číslicemi a ve druhé dvojciferná čísla se stejnými číslicemi. Počet všech dvojciferných čísel je 90, počet dvojciferných čísel se stejnými číslicemi je 9 (jsou to čísla 11, 22, …, 99). Označíme-li hledaný počet dvojciferných čísel s různými číslicemi x, pak platí:
$x + 9 = 90.$
Odtud dostáváme, že je $x = 81$.

Příklad 2

Z místa A do místa B vedou čtyři turistické cesty, z místa B do C tři. Určete, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest je právě jedna použita dvakrát.

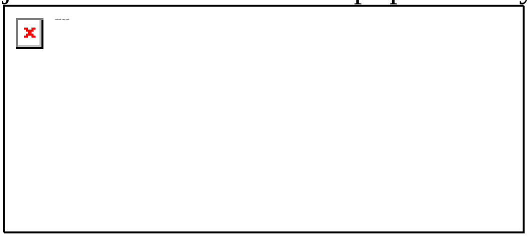


Řešení

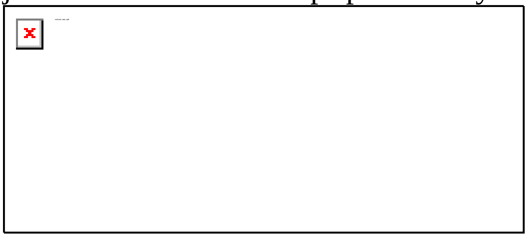
Nejprve určíme, kolika způsoby lze vybrat trasu z A do C: ke každému ze čtyř způsobů, jak dojít z A do B, existují tři způsoby, jak dojít z B do C. Trasu z A do C lze tedy vybrat $4 \cdot 3$, tj. dvanácti způsoby.

Nyní jde o to, kolika způsoby lze vybrat zpáteční trasu z C do A tak, aby v ní byla použita právě jedna cesta z těch, po kterých jsme už šli z A do C. Máme tedy dvě možnosti:

Po stejné cestě se budeme vracet z C do B. Potom z B do A půjdeme jinou cestou, než kterou jsme šli z A do B. V tomto případě lze vybrat zpáteční trasu z C do A třemi způsoby.



Z C do B půjdeme jinou cestou, než kterou jsme přišli, a z B do A půjdeme po stejné cestě, jako z A do B. V tomto případě lze vybrat zpáteční trasu z C do A dvěma způsoby.



Protože obě uvedené možnosti se navzájem vylučují a jiné nejsou, dostáváme (podle kombinatorického pravidla součtu), že celkový počet tras z C do A, které splňují dané podmínky, je roven pěti.
Ke každé z dvanácti tras z A do C existuje tedy pět tras z C do A, které splňují požadovanou podmínku. Pomocí kombinatorického pravidla součinu získáme výsledek úlohy: počet všech způsobů, kterými lze vybrat trasu z A do C a zpět tak, že z daných cest je právě jedna použita dvakrát, je $12 \cdot 5 = 60$.

Podobné úlohy

Určete počet způsobů, jimiž lze vybrat trasu
a) z A do C a zpět;
b) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest není žádná použita dvakrát;
c) z A do C a zpět tak, že z těchto sedmi cest jsou právě dvě použity dvakrát.

Předchozí stránka: Kombinatorické pravidlo součtu
Další stránka: Úlohy
Kombinatorika > Základní kombinatorická pravidla > Řešené příklady

Základní kombinatorická pravidla

Úlohy

Úloha 1.1

Určete počet všech trojciferných přirozených čísel,
a) v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou;
b) v jejichž dekadickém zápisu se nějaká číslice vyskytuje alespoň dvakrát.

Úloha 1.2

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8 × 8 vybrat dvě různobarevná pole tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.

Úloha 1.3

Určete, kolik dvojjazyčných slovníků je třeba k tomu, aby byla zajištěna možnost přímého překladu z anglického, francouzského, německého a ruského jazyka do každého z nich.

Úloha 1.4

Spočtěte, kolik čísel z množiny {1, 2, …, 100 000} je:
a) dělitelných 7;
b) dělitelných 5 nebo 11;
*c) dělitelných 6 nebo 10 nebo 15.
d) Jak se změní výsledek v případě, že uvažujeme čísla z množiny {0, 1, 2, …, 100 000}?

Úloha 1.5

V košíku je 12 jablek a 10 hrušek. Petr si má z něho vybrat buď jablko, anebo hrušku tak, aby Věra, která si po něm vybere jedno jablko a jednu hrušku, měla co největší možnost výběru. Určete, co si má vybrat Petr.

Úloha 1.6

Na vrchol hory vedou čtyři turistické cesty a lanovka.

Určete počet způsobů, kterými je možno se dostat
a) na vrchol a zpět;
b) na vrchol a zpět tak, aby zpáteční cesta byla jiná než cesta na vrchol;
c) na vrchol a zpět tak, aby aspoň jednou byla použita lanovka;
d) na vrchol a zpět tak, aby lanovka byla použita právě jednou.

Úloha 1.7

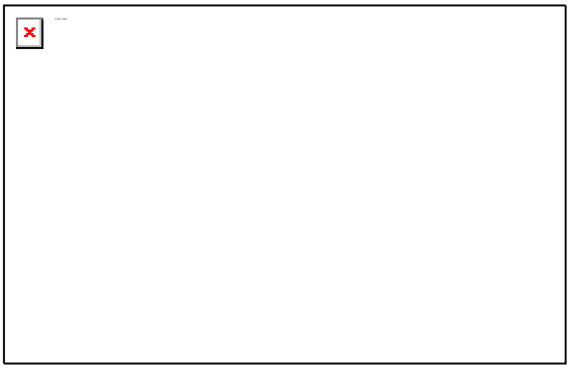
Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu není nula a ze zbývajících devíti číslic se v něm každá vyskytuje nejvýše jednou.
Kolik z těchto čísel je větších než 9 000?
Kolik je menších než 3 000?

Úloha 1.8

Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, jejichž dekadický zápis je složen z číslic 1, 2, 3, 4, 5 (každá se může opakovat), která jsou dělitelná
a) pěti,
b) dvěma,
c) čtyřmi.

Úloha 1.9

Z místa A do místa B vede pět cest, z místa B do místa C vedou dvě cesty a z místa A do místa C vede jedna cesta (viz obrázek).



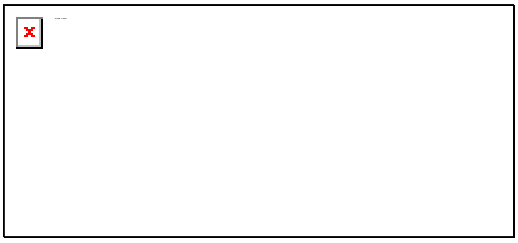
Určete, kolika různými způsoby lze vykonat cestu
a) z místa A do místa C přes místo B;
b) z místa A do místa C (jakkoli);
d) z místa A do místa C (jakkoli) a potom zpět do místa B (přímo),
jestliže každým místem můžete projít nejvýše jednou (není možné se vracet).

Úloha 1.10

Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně *n* vnitřních bodů. Určete počet trojúhelníků s vrcholy v těch bodech, jejichž žádná strana neleží ve straně čtverce ABCD.

Úloha 1.11

Určete, kolika způsoby se lze dostat z A do B, cestujeme-li po cestách zobrazené sítě a nikdy se nevracíme směrem k místu A. Jedna z možných cest je zobrazena.



Předchozí stránka: Řešené příklady
Kombinatorika > Základní kombinatorická pravidla > Úlohy

Variace, permutace, kombinace

Variace

k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Definici se pokusíme vysvětlit na příkladu:

Příklad

V košíku je jablko, hruška, broskev a pomeranč. Kolika způsoby můžeme vybrat jedno ovoce k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu?

***k*-členná variace z *n* prvků** znamená, že ze všech možných prvků (kterých je n) vybíráme jen několik (k; $k \leq n$). V našem příkladu vybíráme tři kusy ovoce ze čtyř možných ($k = 3$, $n = 4$). Pokud vybíráme všechny prvky, platí $k = n$; v takových případech mluvíme o permutacích.
Uspořádaná *k*-tice znamená, že záleží na pořadí, v jakém prvky vybíráme. V našem příkladu záleží na tom, jestli vybereme jablko k snídani a pomeranč ke svačině nebo naopak.
Formulace "**každý se v ní** (k-tici) **vyskytuje nejvýše jednou**" znamená, že když některý prvek vybereme, nemůžeme ho vybrat podruhé. V našem příkladu je jasné, že pokud sníme jablko k snídani, už ho nemůžeme sníst ke svačině nebo k obědu.

Odpověď na otázku "Kolika způsoby můžeme vybrat jedno ovoce k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu?" budeme hledat takto:
− K snídani můžeme vybrat libovolné ovoce, máme tedy 4 možnosti.
− Ke svačině už můžeme vybírat jen ze zbývajících tří druhů ovoce.
− Při výběru ovoce k obědu už budeme mít jen dvě možnosti.
Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ způsobů, jak vybrat ze čtyř kusů ovoce jedno k snídani, jedno ke svačině a jedno k obědu.

Zobecněním předchozího postupu dostaneme vzorec pro určení počtu k-členných variací z n prvků:
− První prvek vybíráme ze všech n prvků, máme proto n možností, jak ho vybrat.
− Pro druhý prvek už máme jen $n - 1$ možností, protože nemůžeme znovu vybrat prvek, který byl vybraný jako první.
− Podobně pro třetí prvek máme $n - 2$ možností, protože dva prvky už byly vybrány.
Takto pokračujeme dál, dokud nevybereme k prvků. Poslední, k-tý prvek můžeme vybrat $n - k + 1$ způsoby: Z původních n prvků už jsme vybrali $k - 1$ prvků, zbývá proto $n - (k - 1) = n - k + 1$ prvků, ze kterých vybíráme ten poslední, k-tý prvek.
Využitím kombinatorického prvidla součinu dostáváme počet $V(k, n)$ všech k-členných variací z n prvků:
$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$.

Počet V(k, n) všech k-členných variací z n prvků je
$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$.

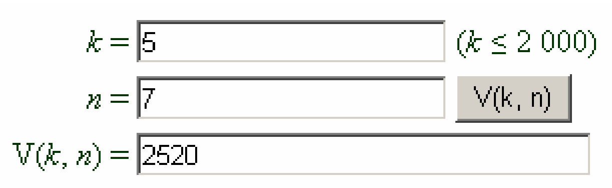
Příklad

Určete počet všech pětičlenných variací ze sedmi prvků.

Řešení

Dosazením do vzorce $k = 5$, $n = 7$, dostáváme:
$V(5, 7) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\ 520$

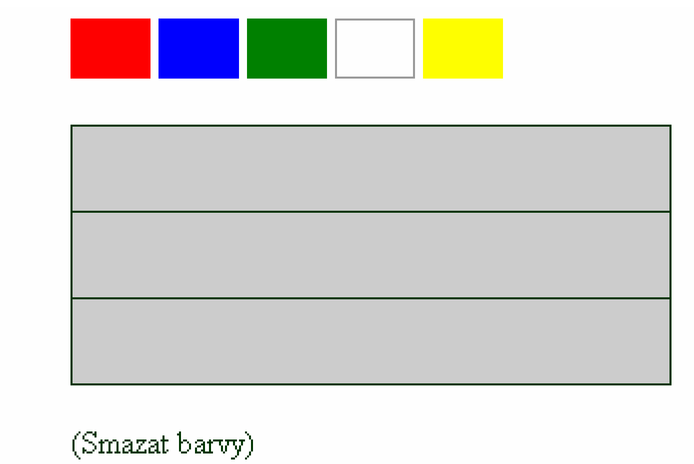
Zkuste si spočítat variace také pro jiné hodnoty k a n. Výsledek si zde můžete ověřit.



Příklad

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy červené, modré, zelené, bílé a žluté.
a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit.
b) Kolik jich má uprostřed modrý pruh?
c) Kolik jich má (kdekoli) bílý pruh?
d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh?

Sestavení vlajky: zvolte barvu a přiřaďte ji některému pruhu vlajky.



Řešení

a) Vzhledem k tomu, že pruhy mají mít různé barvy a že záleží na pořadí těchto pruhů, jde o tříčlenné variace z pěti prvků (tj. $k = 3$, $n = 5$). Z látek daných barev lze sestavit $V(3, 5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ různých vlajek.

b) Jestliže je uprostřed modrý pruh, zbývá jen vybrat barvy pro krajní pruhy. Vybíráme tedy dvě ze čtyř barev a záleží na jejich pořadí, jde proto o dvoučlenné variace ze čtyř prvků: $V(2, 4) = 4 \cdot 3 = 12$ vlajek.

c) Látku bílé barvy můžeme použít na horní, prostřední nebo dolní pruh vlajky. Podobně jako v případě b) vybíráme na zbylé dva pruhy dvě barvy ze zbývajících čtyř. Celkem tedy můžeme sestavit $3 \cdot 12 = 36$ takových vlajek.

d) Všechny vlajky můžeme rozdělit na dvě disjunktní skupiny: v první skupině budou takové vlajky, které mají uprostřed červený pruh, ve druhé skupině budou vlajky, které červený pruh uprostřed nemají. Počet všech vlajek je 60 (viz případ a)); počet vlajek, které mají uprostřed červený pruh, je 12 (viz případ b)); počet vlajek, které uprostřed červený pruh nemají, je $60 - 12 = 48$.

Vyjádření počtu variací pomocí faktoriálu
Několik úloh k variacím

Další stránka: Permutace
Kombinatorika > Variace, permutace, kombinace > Variace

Permutace

Permutace je zvláštní případ variace, kde $k = n$. To znamená, že ze zadaných prvků postupně vybereme všechny. Každá permutace tedy odpovídá nějakému pořadí zadaných prvků: každý prvek se v pořadí musí objevit, ale žádný tam nemůže být dvakrát.

Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Permutace z n prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.

Počet permutací z n prvků odvodíme ze vzorce pro počet n-členných variací z n prvků:
$V(k, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$
Pro $k = n$:
$V(n, n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - n + 1) =$
$= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 1.$

Počet $P(n)$ všech permutací z n prvků je
$P(n) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$

Příklad

Určete počet všech permutací prvků a, b, c.

Řešení

Počet prvků je 3, proto počítáme $P(3)$:
$P(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$
Odpověď: Počet všech permutací prvků a, b, c je 6.
Pro kontrolu je můžeme vyjmenovat:
(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Počet permutací narůstá velmi rychle, pro větší hodnoty n bychom je už vyjmenovávali těžko. Pro ilustraci je zde tabulka prvních několika hodnot $P(n)$ a graf.

P(0)	1
P(1)	1
P(2)	2
P(3)	6

P(4)	24
P(5)	120
P(6)	720
P(7)	5 040
P(8)	40 320
P(9)	362 880
P(10)	3 628 800
...	...
P(20)	2 432 902 008 176 640 000

Pro přirozená čísla $n \leq 170$ můžete pro výpočet P(n) využít následující skript:

n = 7 P(n)

P(n) = 5040

Faktoriál

Pro každé přirozené číslo n definujeme:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

(Symbol $n!$ čteme "n faktoriál".)

Počet P(n) všech permutací z n prvků můžeme pomocí faktoriálu zapsat takto:

$P(n) = n!$

Jak a proč definovat 0! ?

$0! = 1$

Počet V(k, n) všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Když do vzorce dosadíme $k = n$, dostaneme výraz:

$$V(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Z první definice permutace víme, že $V(n, n) = P(n) = n!$. Aby platila rovnost $n! / 0! = n!$, definuje se $0! = 1$.

Pro přirozená čísla n, k; $k \leq n$ platí

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad

Zjednodušte výraz:

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{(2n)!}{(2n+1)!} + \frac{(3n-1)!}{(3n-2)!}$$

Řešení

$$\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{(2n)!}{(2n+1)!} + \frac{(3n-1)!}{(3n-2)!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} - \frac{(2n)!}{(2n+1)\cdot(2n)!} + \frac{(3n-1)\cdot(3n-2)!}{(3n-2)!} =$$

$$= (n+1) - \frac{1}{2n+1} + (3n-1) =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot(2n+1) - 1 + (3n-1)\cdot(2n+1)}{2n+1} =$$

$$= \frac{8n^2 + 4n - 1}{2n+1}$$

Výraz má smysl pro n z množiny přirozených čísel.
Pro $n = 0$ nejsou definované výrazy $(3n - 1)!$ a $(3n - 2)!$.

Příklad

Určete, kolika způsoby může 10 táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit
a) do řady;
b) do řady, v níž je táborník Aleš na kraji;
c) do řady, v níž táborníci Aleš a Zdeněk nestojí vedle sebe.

Řešení

a) Jde o počet permutací z 10 prvků, takže počet způsobů, jak 10 táborníků může nastoupit do řady, je P(10) = **10!**.

b) Nejprve postavíme Aleše stranou a necháme nastoupit ostatních 9 táborníků. Podobně jako v případě a) jde o počet permutací z 9 prvků, počet způsobů seřazení je tedy P(9) = 9!. Aleš se potom může zařadit buď na levý nebo na pravý kraj. Celkem je tedy **2 · 9!** způsobů seřazení 10 táborníků tak, aby byl Aleš na kraji.

c) Nejprve si uvědomíme, že platí následující rovnost:
počet všech seřazení = (počet takových seřazení, že Aleš a Zdeněk stojí vedle sebe) + (počet takových seřazení, že Aleš a Zdeněk vedle sebe nestojí).
Počet všech seřazení jsme vypočítali v případě a), víme tedy, že jejich počet je 10!.
Počet způsobů, jak seřadit 10 táborníků tak, aby Aleš a Zdeněk stáli vedle sebe, určíme snadno: spojíme je do dvojice a počítáme, kolika způsoby lze seřadit 9 prvků (8 táborníků + 1 dvojice). To lze 9! způsoby. Musíme si sle uvědomit, že Aleš a Zdeněk mohou být ve dvojici dvěma způsoby (Aleš vlevo a Zdeněk vpravo, nebo naopak). Celkem je tedy počet způsobů, jak seřadit 8 táborníků a jednu dvojici, 2 · 9!.
Teď už snadno zjistíme, kolik je způsobů seřazení deseti táborníků tak, aby Aleš a Zdeněk vedle sebe nestáli: stačí od počtu všech možných seřazení odečít počet takových, kde Aleš a Zdeněk stojí vedle sebe:
10! − 2 · 9! = 10 · 9! − 2 · 9! =**8 · 9!**.

Úlohy k tématu: faktoriál, permutace

Předchozí stránka: Variace
Další stránka: Kombinace

Kombinatorika > Variace, permutace, kombinace > Permutace

Variace, permutace, kombinace

Kombinace

Kombinace se od variací liší tím, že nezáleží na pořadí vybraných prvků.

k-členná kombinace z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Abychom odlišili zápisy variací a kombinací, zapisujeme variace do kulatých závorek, např. (c, a, b), a kombinace do složených závorek, např. $\{e, f, g\}$.

Ukažme si rozdíl mezi tříčlennými *variacemi* ze čtyř prvků a tříčlennými *kombinacemi* ze čtyř prvků:

Tříčlenné variace z prvků *a*, *b*, *c*, *d*:			
(a, b, c) (a, c, b) (b, a, c) (b, c, a) (c, a, b) (c, b, a)	(a, b, d) (a, d, b) (b, a, d) (b, d, a) (d, a, b) (d, b, a)	(a, c, d) (a, d, c) (c, a, d) (c, d, a) (d, a, c) (d, c, a)	(b, c, d) (b, d, c) (c, b, d) (c, d, b) (d, b, c) (d, c, b)
Tříčlenné kombinace z prvků *a*, *b*, *c*, *d*:			
$\{a, b, c\}$	$\{a, b, d\}$	$\{a, c, d\}$	$\{b, c, d\}$

Každé tříčlenné kombinaci ze čtyř prvků odpovídá $3! = 6$ tříčlenných variací ze stejných čtyř prvků.
Obecně každé *k*-členné kombinaci z *n* prvků odpovídá $k!$ *k*-členných variací ze stejných *n* prvků.
Odtud můžeme odvodit vztah mezi počtem *k*-členných kombinací z *n* prvků $K(k, n)$ a počtem *k*-členných variací z *n* prvků $V(k, n)$:
$V(k, n) = k! \cdot K(k, n)$.
Tento vztah můžeme dál rozepsat a vyjádřit počet *k*-členných kombinací v závislosti na hodnotách *k* a *n*:

$$K(k, n) = \frac{1}{k!} \cdot V(k, n) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Počet $K(k, n)$ všech *k*-členných kombinací z *n* prvků je

$$K(k, n) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Jak už bylo uvedeno výše, tříčlenné kombinace ze čtyř prvků jsou čtyři: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.
Zkusme jejich počet určit pomocí odvozeného vzorce:

$$K(3, 4) = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

Pro výpočet K(*k*, *n*) můžete využít následující skript:

$k =$ 3

$n =$ 4 K(k, n)

$K(k, n) =$ 4

Příklad

Ve třídě je 26 žáků. Kolika způsoby z nich lze vybrat dva zástupce třídy?

Řešení

Protože nezáleží na pořadí vybraných studentů, jde o dvoučlenné kombinace z 26 prvků. Jejich počet je

$$K(2, 26) = \frac{26!}{2! \cdot 24!} = 325.$$

Kombinace a podmnožiny

Zůstaneme ještě chvíli u tříčlenných kombinací z prvků *a*, *b*, *c*, *d*:
{*a*, *b*, *c*}, {*a*, *b*, *d*}, {*a*, *c*, *d*}, {*b*, *c*, *d*}.
Všimněte si, že tyto kombinace přesně odpovídají všem tříprvkovým podmnožinám množiny {*a*, *b*, *c*, *d*}.
Tato vlastnost platí obecně:

> *k*-členná kombinace z *n* prvků je *k*-členná podmnožina množiny těmito *n* prvky určené.

Prázdnou množinu ($k = 0$) lze z libovolné *n*-prvkové množiny vybrat vždy jen jediným způsobem, proto pro všechna *n*, kde *n* je přirozené číslo, platí $K(0, n) = 1$.

Příklad

Určete počet tříprvkových podmnožin množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Řešení

Počet tříprvkových podmnožin desetiprvkové množiny je stejný, jako počet tříčlenných kombinací z deseti prvků. Proto je hledaný počet

$$K(3, 10) = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120.$$

Kombinační číslo

Kombinační číslo je symbol, který označuje počet *k*-členných kombinací z *n* prvků.

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k, $k \leq n$, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ čteme "n nad k".

Počet K(k, n) všech k-členných kombinací z n prvků můžeme zapsat kombinačním číslem:

$$\mathrm{K}(k, n) = \binom{n}{k}$$

Při počítání s kombinačními čísly se často využívá následující vlastnost:

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k, $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Odvození je snadné:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Příklad

U výtahu, do něhož můžou nastoupit nejvýše tři osoby, stojí 5 osob. Označme je a, b, c, d, e. Sestavte všechny trojice osob, které mohou nastoupit, a vypište dvojice, které v daném případě nenastoupí.

Kliknutím na osobu před výtahem a ve výtahu se tyto dvě osoby vymění:

Ve výtahu	Před výtahem
Adam, Bára, Cyril	David, Ema

Řešení

Nastoupí	Zůstávají
$\{a, b, c\}$	$\{d, e\}$
$\{a, b, d\}$	$\{c, e\}$
$\{a, b, e\}$	$\{c, d\}$
$\{a, c, d\}$	$\{b, e\}$
$\{a, c, e\}$	$\{b, d\}$
$\{a, d, e\}$	$\{b, c\}$

$\{b, c, d\}$	$\{a, e\}$
$\{b, c, e\}$	$\{a, d\}$
$\{b, d, e\}$	$\{a, c\}$
$\{c, d, e\}$	$\{a, b\}$

Tento příklad názorně ilustruje výše uvedenou vlastnost

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k},$$

tj. počet možností, jak vybrat tři lidi, kteří pojedou výtahem, je stejný, jako počet možností, jak vybrat dva lidi, kteří budou muset počkat:

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$$

Další vlastnosti kombinačních čísel

Úlohy k tématu: kombinační čísla, kombinace

Předchozí stránka: Permutace
Další stránka: Úlohy
Kombinatorika > Variace, permutace, kombinace > Kombinace

Variace, permutace, kombinace

Úlohy

Odkazy na úlohy podle témat:
Faktoriál
Variace
Permutace
Kombinační čísla
Kombinace
Směs

Faktoriál

Úloha 2.1

Vypočtěte:

a) $\dfrac{7!}{5!}$

b) $\dfrac{7!+5!}{5!}$

c) $\dfrac{5!\cdot 6!}{7!}$

d) $\dfrac{8!}{5!\,3!}$

Výsledky:
a) **42**
b) **43**
c) **120/7**
d) **56**

Úloha 2.2

Pro přípustné hodnoty *n* zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

b) $\dfrac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$

c) $\dfrac{(n+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$

d) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{(n-2)!}$

Úloha 2.3

Pro přípustné hodnoty *n* zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{1}{n!} - \dfrac{3}{(n+1)!} - \dfrac{n^2-4}{(n+2)!}$

b) $\dfrac{n^2-9}{(n+3)!} + \dfrac{6}{(n+2)!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$

c) $\dfrac{(n+2)!}{n!} - 2\,\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$

d) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} - \dfrac{(n+1)!}{n!}$

Úloha 2.4

V Z řešte rovnice:

a) $\dfrac{(x+3)!}{(x+1)!} - 16\,x = -24$

b) $\dfrac{(x+6)!}{(x+4)!} + x^2 - 16\,x = 28$

c) $x \cdot \dfrac{(x+3)!}{(x+2)!} + x^2 = 14$

d) $(5!)^x = (4!)^x$

Variace

Úloha 2.5

Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se žádná číslice neopakuje?

Úloha 2.6

Kolik různých umístění může být na prvních třech místech při hokejovém mistrovství světa, zúčastní-li se ho osm družstev?

Úloha 2.7

Určete počet všech nejvýše čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi, která jsou sestavena z číslic 0, 2, 4, 6, 8.

Úloha 2.8

Určete, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje dvanácti předmětům a každému nejvýše jednu vyučovací hodinu denně, má-li se skládat ze šesti vyučovacích hodin.
V kolika z nich se vyskytuje chemie?
V kolika z nich je chemie zařazena na 1. vyučovací hodinu?

Úloha 2.9

Určete počet prvků, z nichž lze utvořit
a) 240 dvoučlenných variací;
b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

Úloha 2.10

O telefonním čísle svého spolužáka si Vašek zapamatoval jen to, že je devítimístné, začíná dvojčíslím 23, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné pětadvaceti. Určete, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.

Permutace

Úloha 2.11

Kolika způsoby lze rozesadit pět hostů do pěti křesel stojících v jedné řadě?

Úloha 2.12

Kolika různými způsoby lze postavit do kruhu (tváří do středu):
a) 5 různých osob;
b) *m* různých osob?
Dvě rozmístění považujeme za stejná, jestliže lze jedno na druhé převést otáčením.

Úloha 2.13

Určete, kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit šest hochů, jestliže
a) dva chtějí sedět vedle sebe;
b) dva chtějí sedět vedle sebe a třetí chce sedět na kraji.

Úloha 2.14

Určete, kolika způsoby může *m* chlapců a *n* dívek nastoupit do zástupu tak, aby
a) nejdříve stály všechny dívky a pak všichni chlapci;
b) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka ani mezi žádnými dvěma dívkami nebyl žádný chlapec;
c) mezi žádnými dvěma chlapci nebyla žádná dívka.

Úloha 2.15

Kolika způsoby lze uspořádat množinu přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ tak, aby každé sudé číslo zůstalo v pořadí na sudém místě?

Úloha 2.16

Určete počet prvků tak, aby
a) bylo možno z nich utvořit právě 40 320 permutací;
b) při zvětšení jejich počtu o dva se počet permutací zvětšil 56krát;
c) při zmenšení jejich počtu o dva se počet permutací zmenšil dvacetkrát.

* Úloha 2.17

Představte si, že zapíšete pod sebe všechny permutace čísel 1, 2, 3, 4, 5; vznikne tak obdélníkové schéma, které má 120 řádek a 5 sloupců. Určete součet všech čísel v každém sloupci.

* Úloha 2.18

Určete, kolika nulami končí dekadický zápis čísla 258!.

Číslo 258! se dá zapsat jsou součin prvočísel:
$258! = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4} \cdot 11^{n_5} \cdot \ldots \cdot p^{n_k}$, kde p je největší prvočíslo menší než 258. Počet nul je roven menšímu z čísel n_1, n_3.

Kombinační čísla

Úloha 2.19

Vypočtěte:

a) $\binom{7}{2}$

b) $\binom{8}{3}$

c) $\binom{121}{120}$

d) $\binom{n+2}{2}$

e) $\binom{n+1}{n-1}$

Úloha 2.20

V množině přirozených čísel řešte rovnici:

a) $\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=4$

b) $\binom{n}{3}+\binom{n+2}{3}+\binom{n+4}{3}=\frac{n^3}{2}+88$

Kombinace

Úloha 2.21

Je dán čtverec *ABCD* a na každé jeho straně n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků s vrcholy v těchto bodech.
(Porovnejte s úlohou 1.10 z minulé kapitoly.)

Úloha 2.22

Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete, kolika způsoby si Petr může vyměnit dvě své knihy za dvě knihy Ivaniny.

Úloha 2.23

Ve skladu je 10 výrobků, mezi nimi jsou 3 vadné. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat kolekci pěti výrobků, aby
a) všechny byly dobré,
b) byl právě jeden vadný,
c) byl nejvýš jeden vadný,
d) byl aspoň jeden vadný?

Úloha 2.24

Určete, kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li, aby mezi vybranými
a) nebyl pan A;
b) nebyli zároveň pánové A a B;
c) byl aspoň jeden z pánů A, B.

Úloha 2.25

Určete počet prvků, z nichž lze utvořit 66 dvoučlenných kombinací.

Úloha 2.26

Určete počet prvků tak, aby
a) počet čtyřčlenných kombinací z nich vytvořených byl dvacetkrát větší než počet

dvoučlenných kombinací;
b) při zvětšení počtu prvků o jeden se počet tříčlenných kombinací zvětšil o 21.

Úloha 2.27

Kolik hráčů se zúčastnilo turnaje ve stolním tenisu, jestliže bylo odehráno 21 zápasů a hráči hráli každý s každým jednou?

Úloha 2.28

Zvětší-li se počet prvků o 1, zvětší se počet tříčlenných kombinací z nich utvořených o 21. Kolik je dáno prvků?

Úloha 2.29

Kolik tříprvkových podmnožin má množina $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$?

Úloha 2.30

Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže
a) žádné tři body neleží na jedné přímce,
b) právě tři body leží na jedné přímce?

Úloha 2.31

Jsou dány rovnoběžné (různé) přímky p, q. Na přímce p je dáno osm různých bodů, na přímce q jedenáct různých bodů. Určete počet:
a) trojúhelníků s vrcholy v daných bodech,
b) konvexních čtyřúhelníků s vrcholy v daných bodech.

Úloha 2.32

V levém dolním rohu šachovnice 8×8 je umístěna figurka, kterou lze jedním tahem přemístit buď o jedno pole vpravo, nebo o jedno pole vzhůru. Spočtěte, kolika různými způsoby lze tuto figurku přemístit do pravého horního rohu.

Směs

Úloha 2.33

Určete, kolika způsoby je možno seřadit u startovací čáry osm závodních automobilů do dvou řad po čtyřech vozech, jestliže
a) v každé řadě záleží na pořadí;
b) na pořadí v řadách nezáleží.

Úloha 2.34

V kupé železničního vagónu jsou proti sobě dvě lavice po pěti místech. Z deseti cestujících si čtyři přejí sedět ve směru jízdy, tři proti směru a zbývajícím třem je to lhostejné. Určete, kolika způsoby se mohou rozsadit.

Úloha 2.35

Kolika způsoby lze uspořádat množinu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?
V kolika případech bude prvek b před prvkem c?
V kolika případech je prvek b na prvním místě a zároveň prvek c není na posledním místě?
V kolika případech nebude prvek c ani první, ani poslední?

Úloha 2.36

Na maturitním večírku je 15 hochů a 12 děvčat. Určete, kolika způsoby z nich lze vybrat čtyři taneční páry.

Úloha 2.37

Ze skupiny deseti kosmonautů je třeba vybrat čtyřčlennou posádku. Je však nevhodné, aby určití dva kosmonauté letěli spolu. Kolik různých výběrů posádky je možno vytvořit?

Úloha 2.38

Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 postavit pět různých figur tak, aby dvě stály na černých a tři na bílých polích.

Úloha 2.39

Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova BEROUNKA tak, aby nějaká skupina po sobě jdoucích písmen utvořila
a) slovo BERAN;
b) slova NERO a KUBA v libovolném pořadí;
c) slova BUK a NORA v libovolném pořadí.

Úloha 2.40

Určete počet způsobů, jimiž lze vedle sebe zapsat písmena slova KOMBINACE tak, aby v tomto pořadí byly samohlásky v abecedním pořádku.

Úloha 2.41

Určete počet průsečíků všech úhlopříček konvexního n-úhelníku, nemají-li žádné tři společný vnitřní bod.

Úloha 2.42

Určete, v kolika bodech se protíná 12 přímek v rovině, z nichž pět je rovnoběžných a žádné tři neprocházejí týmž bodem.

Úloha 2.43

Je dán rovnostranný trojúhelník a na každé jeho straně je dáno n ($n \geq 3$) vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků
a) s vrcholy v daných bodech;
b) s vrcholy v daných bodech a na různých stranách daného trojúhelníku.

Úloha 2.44

V prostoru je dáno n bodů, z nichž p leží v téže rovině, a kromě nich už žádné čtyři body v jedné rovině neleží. Určete:
a) počet čtyřstěnů s vrcholy v daných bodech;
b) počet rovin, které tyto body určují.

Úloha 2.45

Určete počet všech přirozených čísel menších než 500, v jejichž dekadickém zápisu jsou pouze cifry 3, 5, 7, 9, každá nejvýše jednou.

Úloha 2.46

Osm hostů se má ubytovat ve třech pokojích, které mají čísla 1, 2, 3. Pokoj č. 1 je třílůžkový, pokoj č. 2 také a pokoj č. 3 je dvoulůžkový. Kolika způsoby je možné uvedené hosty rozmístit v těchto třech pokojích?

Úloha 2.47

V množině přirozených čísel řešte rovnici:
$V(2, x) + K(1, x) = 256$.

Úloha 2.48

V množině přirozených čísel řešte nerovnici:
$K(x - 2, x) < 45$.

Předchozí stránka: Kombinace
Kombinatorika > Variace, permutace, kombinace > Úlohy

Variace, permutace a kombinace s opakováním

Variace, permutace a kombinace s opakováním se od variací, permutací a kombinací bez opakování liší tím, že prvky se mohou ve výběru opakovat. Ostatní vlastnosti zůstávají stejné: u variací a permutací záleží na pořadí, v jakém prvky vybíráme, u kombinací na pořadí prvků nezáleží. Permutace s opakováním stejně jako permutace bez opakování určují pořadí *všech* zadaných prvků.

Zápis se většinou odlišuje apostrofem, tedy např. V'(2, 3) označuje počet dvoučlenných variací s opakováním ze tří prvků. Toto značení se používá také na těchto stránkách.

Variace s opakováním

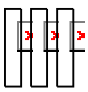
> *k*-členná variace s opakováním z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

U variací bez opakování bylo *k* omezeno velikostí *n*, které udávalo počet různých prvků, ze kterých jsme vybírali. U variací s opakováním má *n* trochu jiný význam: znamená počet druhů, např. počet barev, cifer nebo třeba písmen, které pak můžeme vybrat opakovaně. Proto může být $k > n$.
Na ukázku jsou zde vypsané všechny tříčlenné variace s opakováním ze dvou prvků *a*, *b*:
(*a*, *a*, *a*), (*a*, *a*, *b*), (*a*, *b*, *a*), (*b*, *a*, *a*), (*a*, *b*, *b*), (*b*, *a*, *b*), (*b*, *b*, *a*), (*b*, *b*, *b*).

Počet V'(*k*, *n*) všech *k*-členných variací s opakováním z *n* prvků můžeme odvodit pomocí kombinatorického pravidla součinu. Nejprve určíme počet V'(3, 4) všech tříprvkových variací s opakováním ze čtyř prvků, potom postup zobecníme.

Mějme 4 krabice s pastelkami. V každé krabici je neomezeně mnoho pastelek jedné barvy a žádné dvě krabice neobsahují pastelky stejné barvy. Máme tedy například jednu krabici se žlutými pastelkami, jednu s červenými, jednu se zelenými a jednu s modrými pastelkami. Kolik různých trojic pastelek lze vytvořit?

První pastelku můžeme vzít z libovolné krabice. Máme tedy čtyři možnosti, jak ji vybrat.
Druhou pastelku můžeme také vzít z libovolné krabice. Máme tedy zase čtyři možnosti, jak ji vybrat.
Stejně tak třetí pastelku, takže také pro ni máme čtyři možnosti, jak ji vybrat.
Volby jsou navzájem nezávislé, proto podle kombinatorického pravidla součinu existuje celkem $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 64$ různých trojic pastelek, vybraných ze čtyř krabic.



(Kliknutím na pastelku změníte její barvu v pořadí žlutá, červená, zelená, modrá.)

Postup se teď pokusíme zobecnit. Místo čtyř krabic budeme mít n krabic a místo tří pastelek budeme vybírat k pastelek; n a k jsou libovolná přirozená čísla.
První pastelku tentokrát můžeme vzít z libovolné z n krabic, máme tedy n možností, jak ji vybrat. Stejně tak máme n možností, jak vybrat druhou pastelku, třetí pastelku, …, k-tou pastelku. Podle kombinatorického pravidla součinu tedy existuje $n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$ (celkem se n opakuje k-krát), tj. n^k k-tic pastelek, vybraných z n krabic.

Počet V'(k, n) všech k-členných variací s opakováním z n prvků je
$V'(k, n) = n^k$.

Příklad

Určete počet pěticiferných přirozených čísel, složených pouze z cifer 6, 7, 8, 9.
Kolik z nich je menších než 90 000?

Řešení

V prvním případě se jedná o pětičlenné variace s opakováním ze čtyř prvků ($k = 5$, $n = 4$), jejich počet je proto $V'(5, 4) = 4^5 = 1\,024$.

Chceme-li určit počet takových přirozených čísel, která se skládají pouze z cifer 6, 7, 8, 9 a jsou menší než 90 000, můžeme k výpočtu použít kombinatorické pravidlo součinu: na místě desetitisíců může stát cifra 6, 7, nebo 8, máme tedy tři možnosti výběru; na dalších čtyřech místech může stát libovolná z cifer 6, 7, 8, 9, počet možností jejich výběru je proto $V'(4, 4) = 4^4 = 256$.
Celkem je tedy $3 \cdot 256 = 768$ pěticiferných přirozených čísel menších než 90 000, složených pouze z cifer 6, 7, 8, 9.

Příklad

Určete počet všech podmnožin k-prvkové množiny.

Řešení

Prvky dané k-prvkové množiny označíme čísly 1, 2, 3, …, k a každé její podmnožině přiřadíme uspořádanou k-tici složenou z nul a jedniček takto: Je-li ve zvolené podmnožině prvek označený číslem j ($1 \le j \le k$), přiřadíme jí uspořádanou k-tici, jejímž j-tým členem je jednička; jestliže tento prvek v podmnožině není, bude na j-tém místě příslušné uspořádané k-tice nula. Např. podmnožině {2, 3, 5} množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6} je tak přiřazena uspořádaná šestice (0, 1, 1, 0, 1, 0), podmnožině {1, 6} uspořádaná šestice (1, 0, 0, 0, 0, 1) atd.
Je zřejmé, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné, neboť také obráceně každé takovéto uspořádané k-tici odpovídá jediná podmnožina k-prvkové množiny. To však znamená, že k-prvková množina má právě tolik podmnožin, kolik existuje uspořádaných k-tic složených z nul a jedniček; protože tyto k-tice jsou vlastně k-člennými variacemi s opakováním ze dvou prvků, máme výsledek:
Počet podmnožin k-prvkové množiny je $V'(k, 2) = 2^k$.

Několik úloh k variacím s opakováním

Další stránka: Permutace s opakováním
Kombinatorika > Variace, permutace a kombinace s opakováním > Variace s opakováním

Variace, permutace a kombinace s opakováním

Permutace s opakováním

> Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje aspoň jednou.

Vztah mezi k a n je následující:

n udává počet *různých* prvků.
Jednotlivé prvky se mohou opakovat: je zvykem označovat počet opakování prvního prvku k_1, počet opakování druhého prvku k_2, a tak dál, až počet opakování posledního – n-tého prvku je zvykem označovat k_n.

k označuje počet všech prvků, jejichž různá pořadí zkoumáme, proto platí
$k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Jestliže máme např. 30 bílých kostek, 40 modrých kostek a 50 černých kostek a chceme je srovnat do řady, jedná se o permutace s opakováním ze tří prvků, kde první prvek se opakuje třicetkrát, druhý čtyřicetkrát a třetí padesátkrát:
$n = 3$ (bílá, modrá, černá kostka);
$k_1 = 30$, $k_2 = 40$, $k_3 = 50$;
$k = k_1 + k_2 + k_3 = 30 + 40 + 50 = 120$.

Příklad

Zkusme určit počet pořadí pěti prvků, v nichž se jeden prvek opakuje třikrát a další dva jsou různé ($n = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $k = 5$); označme je např. a, a, a, b, c.
Protože umíme určit počet pořadí pěti různých prvků, přeznačíme nejprve tři stejné prvky na a_1, a_2, a_3. Jak už víme, počet pořadí pěti různých prvků (bez opakování) je P(5) = 5! = 120.
Když smažeme indexy u prvků a_1, a_2, a_3, počet pořadí bude menší než 120, protože některá pořadí budou stejná:

(a_1, b, a_2, a_3, c) (a_1, b, a_3, a_2, c) (a_2, b, a_1, a_3, c) (a_2, b, a_3, a_1, c) (a_3, b, a_1, a_2, c) (a_3, b, a_2, a_1, c)	(c, a_1, b, a_2, a_3) (c, a_1, b, a_3, a_2) (c, a_2, b, a_1, a_3) (c, a_2, b, a_3, a_1) (c, a_3, b, a_1, a_2) (c, a_3, b, a_2, a_1)	(a_1, a_2, b, c, a_3) (a_1, a_3, b, c, a_2) (a_2, a_1, b, c, a_3) (a_2, a_3, b, c, a_1) (a_3, a_1, b, c, a_2) (a_3, a_2, b, c, a_1)	…
(a, b, a, a, c)	(c, a, b, a, a)	(a, a, b, c, a)	…

Jak naznačuje tabulka, každé pořadí prvků a, a, a, b, c odpovídá šesti pořadím prvků a_1, a_2, a_3, b, c, kde prvky b, c stojí na stejných místech a prvky a_1, a_2, a_3 se prostřídají všemi způsoby. Prvky a_1, a_2, a_3 lze na tři volná místa doplnit P(3) = 3! = 6 způsoby, proto je počet pořadí prvků a, a, a, b, c šestkrát menší než počet pořadí prvků a_1, a_2, a_3, b, c.
Počet pořadí prvků a, a, a, b, c je tedy 120/3! = 120/6 = 20.
Pro kontrolu je ještě vyjmenujeme:

(a, a, a, b, c), (a, a, a, c, b),
(a, a, b, a, c), (a, a, c, a, b),
(a, a, b, c, a), (a, a, c, b, a),
(a, b, a, a, c), (a, c, a, a, b),
(a, b, a, c, a), (a, c, a, b, a),
(a, b, c, a, a), (a, c, b, a, a),
(b, a, a, a, c), (c, a, a, a, b),
(b, a, a, c, a), (c, a, a, b, a),
(b, a, c, a, a), (c, a, b, a, a),
(b, c, a, a, a), (c, b, a, a, a).

Příklad

Mějme 4 krabice s pastelkami: jednu krabici s k_1 žlutými pastelkami, jednu krabici s k_2 červenými pastelkami, jednu krabici s k_3 zelenými pastelkami a jednu krabici s k_4 modrými pastelkami; k_1, k_2, k_3, k_4 jsou přirozená čísla. Určete, kolika způsoby je možné seřadit všechny tyto pastelky.

(Jde o permutace ze čtyř prvků s opakováním, kde se první prvek opakuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát, třetí prvek k_3-krát a čtvrtý prvek k_4-krát.)

Řešení

Podobně jako v minulém příkladu určíme, kolika způsoby by bylo možné pastelky seřadit, kdyby byly každé dvě navzájem různé. Celkem je pastelek $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$, počet jejich seřazení by proto byl $P(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!$.
Protože pastelky nejsou všechny navzájem různé, budou se některá pořadí opakovat:
Každých $k_1!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění jen pořadí žlutých pastelek.
Každých $k_2!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění jen pořadí červených pastelek.
Každých $k_3!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění jen pořadí zelených pastelek.
Každých $k_4!$ pořadí je stejných, protože se v nich mění jen pořadí modrých pastelek.
Výsledný počet pořadí všech pastelek je proto

$$P'(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,k_4!}$$

Jestliže tento postup ještě zobecníme a místo čtyř krabic s pastelkami jich budeme uvažovat n, dostaneme následující vzorec:

Počet $P'(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutací z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \ldots, k_n$-krát, je

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_n!}.$$

Příklad

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 2 modré a 2 černé kostky.

Kliknutím na dvě kostky vyměníte jejich místa:

Řešení

Dosadíme do vzorce pro počet permutací ze tří prvků s opakováním $k_1 = k_2 = k_3 = 2$:

$$P'(2, 2, 2) = \frac{(2+2+2)!}{2!\,2!\,2!} = \frac{6!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{720}{8} = 90$$

Několik úloh k permutacím s opakováním

Předchozí stránka: Variace s opakováním
Další stránka: Kombinace s opakováním
Kombinatorika > Variace, permutace a kombinace s opakováním > Permutace s opakováním

Variace, permutace a kombinace s opakováním

Kombinace s opakováním

k-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je neuspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

Příklad

Určete, kolika způsoby je možné rozmístit tři stejné kuličky do čtyř krabiček.

Řešení

Třikrát vybíráme jednu ze čtyř krabiček, do které umístíme kuličku; jde tedy o tříčlenné kombinace s opakováním ze čtyř prvků ($k = 3$, $n = 4$).
V následující tabulce jsou vypsané všechny možnosti, jak se dají tři kuličky rozmístit do čtyř krabiček, a vedle každé možnosti je odpovídající symbolický zápis, ze kterého později odvodíme vzorec pro výpočet počtu těchto možností. V tomto symbolickém zápise zůstává pro kuličku stejný symbol jako v tabulce (•); svislá čára (|) označuje oddělení dvou sousedních krabiček. Těchto symbolů je pro *n* krabiček potřeba $n - 1$, v našem případě tedy $4 - 1 = 3$, protože u krajních krabiček stačí oddělení jen z jedné strany. Tak například symbolický zápis pro jednu kuličku v první krabičce a dvě kuličky ve třetí krabičce (druhá a čtvrtá krabička zůstane prázdná) je •||••| .

		Číslo krabičky					**Symbolický zápis**
		1	**2**	**3**	**4**		
1		•••					•••|||
2			•••				|•••||
3				•••			||•••|
4					•••		|||•••
5		••	•				••|•||
6		••		•			••||•|
7		••			•		••|||•
8		•	••				•|••||
9			••	•			|••|•|
10			••		•		|••||•
11		•		••			•||••|
12			•	••			|•|••|
13				••	•		||••|•
14		•			••		•|||••
15			•		••		|•||••
16				•	••		||•|••
17		•	•	•			•|•|•|
18		•	•		•		•|•||•

19	•		•	•	•||•|•
20		•	•	•	|•|•|•

Tři stejné kuličky je možné rozmístit do čtyř krabiček dvaceti způsoby.

V tomto případě bylo ještě možné vypsat všechny způsoby, jak tři kuličky rozmístit do čtyř krabiček, a potom je jednoduše spočítat. Pro větší čísla je ale takový postup nepoužitelný. K odvození výpočtu pro obecné n a k využijeme zmíněný symbolický zápis rozdělení kuliček. Všimněte si, že ke každému rozdělení kuliček do krabiček je přiřazen právě jeden symbolický zápis. Obráceně platí, že každé šestici, ve které se vyskytují tři znaky • a tři znaky |, je přiřazeno také právě jedno rozdělení kuliček do krabiček. Vyzkoušejte si, jestli rozumíte tomuto přiřazení správně:

Kliknutím na krabičku do ní můžete přidat kuličku, pokud ještě nejsou všechny tři kuličky rozdané. Přidávání a odebírání kuliček můžete přepínat kliknutím na Přidat kuličku/Odebrat kuličku.

Jestliže je tedy toto přiřazení vzájemně jednoznačné, odpovídá také počet různých šestic tří symbolů • a tří symbolů | počtu všech možných rozmístění tří kuliček do čtyř krabiček. Přitom počet uvedených šestic symbolů umíme určit: jedná se o permutace s opakováním ze dvou prvků (•, |), kde se první prvek (•) opakuje třikrát a stejně tak i druhý prvek (|) se zde opakuje třikrát. Počet takových permutací s opakováním je

$$P'(3,3) = \frac{(3+3)!}{3!\,3!} = \frac{720}{6 \cdot 6} = 20,$$

což odpovídá počtu řádků výše uvedené tabulky.

Zobecníme-li úlohu tak, že budeme hledat počet způsobů, jak rozmístit k stejných kuliček do n krabiček, dala by se tato rozmístění šifrovat $(k + n - 1)$-ticemi, ve kterých se symbol • vyskytuje k-krát (k kuliček) a symbol | $(n - 1)$-krát ($n - 1$ oddělení mezi n krabičkami). Počet takových $(k + n - 1)$-tic odpovídá počtu permutací dvou prvků s opakováním, kde se první prvek opakuje k-krát a druhý $(n - 1)$-krát:

$$P'(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

Protože tento počet $(k + n - 1)$-tic k znaků • a $(n - 1)$ znaků | je stejný jako počet různých rozmístění k kuliček do n přihrádek, dostáváme vzorec pro k-členné kombinace s opakováním z n prvků:

$$K'(k, n) = P'(k, n-1) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Počet K'(k, n) všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'(k, n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Příklad

Určete, kolika způsoby je možné rozmístit sedm stejných kuliček do tří krabiček.

Řešení

Sedmkrát vybíráme jednu ze tří krabiček, do které umístíme kuličku; jde tedy o sedmičlenné kombinace s opakováním ze tří prvků (k = 7, n = 3).

$$K'(7, 3) = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7!\,2!} = 36$$

Příklad

Kolika způsoby lze rozdělit 15 bonbónů mezi 10 dětí?

Řešení

Patnáctkrát vybíráme jedno z deseti dětí, kterému dáme bonbón; jde tedy o patnáctičlenné kombinace s opakováním z deseti prvků (k = 15, n = 10).

$$K'(15, 10) = \binom{10+15-1}{15} = \binom{24}{15} = \frac{24!}{15!\,9!} = 1\,307\,504$$

Příklad

Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4, 5, 6, 7.

Řešení

Tři čísla a, b, c mohou být velikosti stran trojúhelníku, pokud platí $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$. Tuto podmínku splňuje každá trojice sestavená z čísel 4, 5, 6, 7: vezmeme dvě nejmenší možná čísla (tj. 4 a 4) a porovnáme jejich součet s největším možným číslem (tj. 7). Protože 4 + 4 > 7, trojúhelníková nerovnost platí pro krajní případ a proto platí i pro všechny ostatní případy.
Příklad se tak zjednodušil na hledání počtu neuspořádaných trojic sestavených z čísel 4, 5, 6, 7, tedy na určení počtu tříčlenných kombinací s opakováním ze čtyř prvků (k = 3, n = 4).

$$K'(3, 4) = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20$$

Několik úloh ke kombinacím s opakováním

Předchozí stránka: Permutace s opakováním
Další stránka: Úlohy
Kombinatorika > Variace, permutace a kombinace s opakováním > Kombinace s opakováním

Variace, permutace a kombinace s opakováním

Úlohy

Odkazy na úlohy podle témat:
Variace s opakováním
Permutace s opakováním
Kombinace s opakováním
Směs

Variace s opakováním

Úloha 3.1

Vypište všechny dvoučlenné variace s opakováním ze tří prvků a, b, c.

Výsledek:
(a, a), (a, b), (a, c)
(b, a), (b, b), (b, c)
(c, a), (c, b), (c, c)

Úloha 3.2

Kolik různých péticiferných čísel lze vytvořit z číslic 2 a 5?

Úloha 3.3

Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 2, 3?

Úloha 3.4

Kolik slov skládajících se z p písmen (tj. slov "délky p") lze utvořit z abecedy, která má n písmen?

Úloha 3.5

Kufřík má heslový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici; těchto číslic je na každém kotouči devět. Určete největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít, jestliže jsme zapomněli heslo.

Úloha 3.6

Kolik znaků, které jsou složeny z jednoho až čtyř signálů, může obsahovat Morseova abeceda? (Signálem rozumíme "tečku" nebo "čárku".)

Úloha 3.7

Na panelu je *r* žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, žlutě nebo červeně. Určete, kolik různých stavů může panel signalizovat.
Kolik žárovek bychom potřebovali, kdybychom chtěli rozlišit 50 různých stavů?

Úloha 3.8

Kolik různých státních poznávacích značek pro automobily lze použít, je-li k dispozici 21 písmen a 10 číslic a značka se skládá ze tří písmen na prvních třech místech a dále ze čtyř číslic?

Úloha 3.9

Určete počet čtyřciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se vyskytují pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5.

Úloha 3.10

Určete, z kolika prvků lze utvořit 1 024 pětičlenných variací s opakováním.

Úloha 3.11

V množině přirozených čísel řešte rovnici:
$V'(2, x) - x \cdot V'(2, 3) = 10$

Permutace s opakováním

Úloha 3.12

Určete, kolika způsoby je možné srovnat do řady 2 šedé, 3 modré a 4 černé kostky.

Úloha 3.13

Určete počet uspořádání těchto šesti prvků: *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *c*.

Úloha 3.14

Určete kolika způsoby lze přemístit písmena slova Mississippi. Kolik z nich nezačíná písmenem M?

Úloha 3.15

Určete počet všech pěticiferných přirozených čísel, jež lze sestavit z číslic 5 a 7, má-li v každém z nich být číslice 5
a) právě třikrát;
b) nejvýše třikrát;
c) aspoň třikrát.

Úloha 3.16

Určete počet všech deseticiferných přirozených čísel, jejichž ciferný součet je roven třem. Kolik z nich je sudých?

Úloha 3.17

Ze sedmi kuliček, z nichž čtyři jsou modré (navzájem nerozlišitelné), jedna bílá, jedna červená a jedna zelená, máme vybrat a položit do řady pět kuliček. Kolika způsoby to lze provést?

* Úloha 3.18

Určete počet všech čtyřciferných čísel dělitelných devíti, která můžeme napsat užitím číslic 0, 1, 2, 5, 7. Přitom se mohou číslice v čísle i opakovat.

Úloha 3.19

Určete počet způsobů, jimiž lze na šachovnici 8 × 8 rozmístit všechny figurky šachové hry (bílý král, bílá dáma, 2 bílí střelci, 2 bílí jezdci, 2 bílé věže, 8 bílých pěšců + totéž černé barvy).

Úloha 3.20

Určete, kolika způsoby lze na černá políčka šachovnice 8 × 8 rozmístit 12 bílých (nerozlišitelných) a 12 černých (nerozlišitelných) kostek tak, aby toto rozmístění bylo symetrické podle středu šachovnice.

Kombinace s opakováním

Úloha 3.21

V obchodě mají tři druhy sirupu: jahodový, malinový a pomerančový. Určete počet všech možností nákupu pěti lahví sirupu v tomto obchodě.

Úloha 3.22

Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit osm (stejných) jablek.

Úloha 3.23

Určete počet kvádrů, jejichž velikosti hran jsou přirozená čísla nejvýše rovná deseti. Kolik je v tomto počtu krychlí?

Úloha 3.24

Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má jednu z velikostí daných čísly 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Úloha 3.25

Ze všech bílých šachových figurek bez krále a dámy (tj. z osmi pěšců, dvou věží, dvou jezdců a dvou střelců) vybereme
a) dvojici,
b) trojici.
Jaký je počet možností pro jejich složení?

Úloha 3.26

Apolloniovou úlohou se rozumí úloha sestrojit kružnici, která má tři z těchto vlastností: prochází daným bodem, dotýká se dané přímky, dotýká se dané kružnice. (Označíme-li tyto vlastnosti po řadě písmeny B, p, k, můžeme každou Apolloniovu úlohu zapsat pomocí trojice z těchto písmen; tak např. úloha Bpp značí úlohu sestrojit kružnici procházející daným bodem a dotýkající se dvou daných přímek.)
Určete počet všech Apolloniových úloh.

Úloha 3.27

Kolik různých neuspořádaných trojic mohou dát počty ok na jednotlivých kostkách při vrhu třemi kostkami? (Jde o obvyklou kostku s jedním až šesti oky na jednotlivých stěnách.)

Úloha 3.28

V železničním depu je dvacet osobních, sedm lůžkových a pět poštovních vozů. Kolik různých souprav s pěti vozy je možno v tomto depu sestavit, jestliže nezáleží na pořadí vozů v soupravě?

Úloha 3.29

Klenoník vybírá do prstenu tři drahokamy; k dispozici má tři rubíny, dva smaragdy a pět safírů. Kolika způsoby může tento výběr provést, považujeme-li kameny téhož druhu za stejné?

Úloha 3.30

Určete, kolika různými způsoby lze rozdělit 15 korunových mincí mezi 10 dětí, jestliže
a) neklademe žádná omezení;
b) každé dítě dostane alespoň jednu minci;
c) nejstarší dítě dostane alespoň dvě mince.

Směs

Úloha 3.31

Je dáno slovo ABRAKADABRA. Určete:
a) počet všech možných pořadí z daných písmen;
b) počet všech pořadí, v nichž nejsou vedle sebe dvě písmena A;
c) počet všech pořadí, v nichž není vedle sebe pět písmen A.

Úloha 3.32

Určete počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšáků)
a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice 8 × 8;
b) na libovolné dvě řady šachovnice 8 × 8.

Úloha 3.33

Určete, kolika způsoby je možno přemístit písmena slova BATERKA tak, aby se souhlásky a samohlásky střídaly.

Úloha 3.34

V novinovém stánku je ke koupi deset druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v padesáti exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit
a) 15 pohledů;
b) 51 pohledů;
c) 8 různých pohledů.

Úloha 3.35

Knihovna má pět regálů, do každého se vejde 20 knih. Určete, kolika způsoby lze do knihovny umístit 20 knih. (V jednotlivých regálech záleží jen na pořadí knih, nezáleží na jejich posunutí.)

Úloha 3.36

V samoobsluze mají čtyři druhy kávy v balíčcích po padesáti gramech. Určete, kolika způsoby lze koupit 250 gramů kávy, jestliže
a) balíčků každého druhu mají dostatečný počet;
b) od dvou druhů mají deset balíčků a od zbývajících dvou pouze po čtyřech balíčcích.

Úloha 3.37

Určete, kolika způsoby lze rozdat 18 (různých) knih třem žákům A, B, C tak, aby A a B dohromady měli dvakrát více knih než C.

Úloha 3.38

Tři děvčata − Anna, Dana a Hana − se mají rozdělit o sedm stejných růží a pět stejných tulipánů. Kolika způsoby to lze provést?

Úloha 3.39

Určete, kolika způsoby si mohou tři osoby rozdělit čtyři stejná jablka a šest stejných hrušek.

Předchozí stránka: Kombinace s opakováním
Kombinatorika > Variace, permutace a kombinace s opakováním > Úlohy

Kombinační čísla

Kombinační číslo

Kombinační číslo je symbol, který označuje počet *k*-členných kombinací z *n* prvků.

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k, $k \le n$, je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Symbol $\binom{n}{k}$ čteme "n nad k".

Příklady

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\,(7-5)!} = \frac{7!}{5!\,2!} = 21$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\,0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$$

Určíme hodnoty několika speciálních případů kombinačních čísel:

$k = 0$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$k = n$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$k = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

Pro všechna přirozená čísla n platí

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

Věta 1

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k, $k \leq n$, platí

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Odvození:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$

Tato vlastnost matematicky popisuje jednoduchý fakt: Chceme-li vybrat k-prvkovou podmnožinu n-prvkové množiny, zbyde vždy $n - k$ nevybraných prvků. Rozhodneme-li se tedy vybrat $n - k$ prvků, které do hledané podmnožiny nezařadíme, počet možností, jak je vybrat, bude stejný jako při přímém výběru k prvků.

Příklad

Mezi šest dětí chceme rozdělit 2 oranžová a 4 zelená trička. Určete počet možností, jak to udělat.

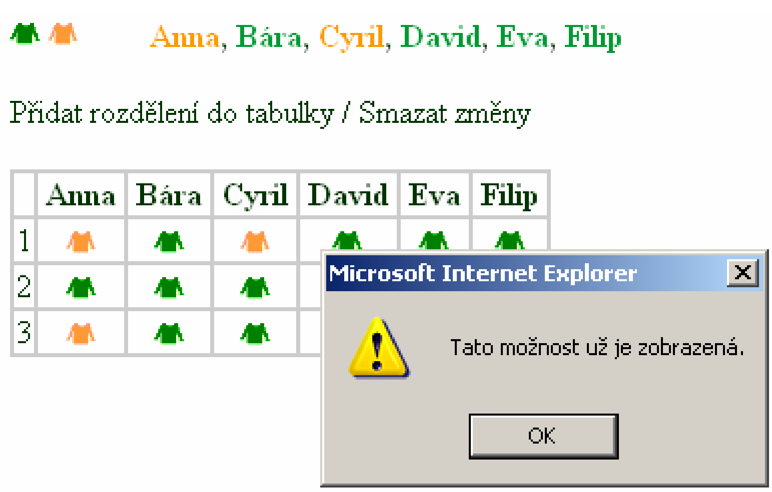
Řešení

První možnost: Určíme počet možností, jak vybrat dvě děti, které dostanou oranžová trička; ostatní čtyři dostanou zelená trička.
Druhá možnost: Určíme počet možností, jak vybrat čtyři děti, které dostanou zelená trička; ostatní dvě dostanou oranžová trička.

$$\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

Najděte všechny možnosti, jak rozdělit trička:

Vyberte tričko a potom ho kliknutím na jméno přiřaďte některému z dětí.



Věta 2

Pro všechna celá nezáporná čísla n, k, $k < n$, platí
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Důkaz vychází z definice kombinačního čísla.

Příklad

Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

$\binom{20}{6} + \binom{20}{13}$

Řešení

$$\binom{20}{6} + \binom{20}{13} = \binom{20}{6} + \binom{20}{7} = \binom{21}{7}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Příklad

Vyjádřete jediným kombinačním číslem: $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4}$

Řešení

Nejprve si uvědomíme, že platí $\binom{n}{n} = 1$, a proto $\binom{4}{4} = \binom{5}{5}$.

Dále opakovaně použijeme poslední uvedenou vlastnost
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{aligned}
&\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \\
&= \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \\
&= \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \\
&= \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \\
&= \binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \\
&= \binom{9}{5}
\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Další stránka: Pascalův trojúhelník
Kombinatorika > Kombinační čísla > Vlastnosti kombinačních čísel

Kombinační čísla

Pascalův trojúhelník

Pascalův trojúhelník je schéma, které dobře znázorňuje některé vlastnosti kombinačních čísel. Můžete se s ním setkat ve dvou tvarech.
(Najetím na hodnotu v libovolném z obou schémat se v obou schématech barevně označí odpovídající hodnota.)

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$

$$1$$
$$1\quad 1$$
$$1\quad 2\quad 1$$
$$1\quad 3\quad 3\quad 1$$
$$1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1$$
$$1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1$$

....

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \cdots\ \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$$

První uvedený tvar zobrazuje základní vztah Pascalova trojúhelníku s kombinačními čísly. Ve druhém tvaru jsou kombinační čísla vyčíslena a dají se v něm lépe vypozorovat některé jejich vlastnosti.

Příklad

Napište osmý řádek Pascalova trojúhelníku.

Řešení

První řádek je $\binom{0}{0}$

Druhý řádek je $\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$

Třetí řádek je $\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$

...

Osmý řádek je $\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$

Z předchozího řešení můžeme odvodit, jak obecně vypadá n-tý řádek Pascalova trojúhelníku:

***n*-tý řádek Pascalova trojúhelníku** má tvar

$$\binom{n-1}{0}\ \binom{n-1}{1}\ \binom{n-1}{2}\ \binom{n-1}{3}\ \cdots\ \binom{n-1}{n-3}\ \binom{n-1}{n-2}\ \binom{n-1}{n-1}$$

Skládá se tedy z n kombinačních čísel

$$\binom{n-1}{k},$$

kde k nabývá hodnoty 0, 1, …, $(n-1)$.

Úloha

Napište desátý řádek Pascalova trojúhelníku.

Výsledek

$$\binom{9}{0}\ \binom{9}{1}\ \binom{9}{2}\ \binom{9}{3}\ \binom{9}{4}\ \binom{9}{5}\ \binom{9}{6}\ \binom{9}{7}\ \binom{9}{8}\ \binom{9}{9}$$

Všimněte si v Pascalově trojúhelníku symetrického rozmístění stejných čísel vzhledem k jeho ose souměrnosti. Je to dané tím, že čísla

$$\binom{n}{k} \text{ a } \binom{n}{n-k},$$

která se sobě rovnají, jsou stejně vzdálena od "středu" každého řádku. V následujícím schématu se při najetí myši na některé kombinační číslo barevně označí i číslo, které je ve stejném řádku stejně vzdálené od osy souměrnosti.

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 1 \\
1\quad 2\quad 1 \\
1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}
$$

Příklad

Dopište druhou polovinu dvanáctého řádku Pascalova trojúhelníku:
1 11 55 165 330 462 ....

Řešení

Dvanáctý řádek se skládá ze dvanácti čísel, vypsaných je prvních šest z nich. Protože jsou hodnoty v Pascalově trojúhelníku symetrické podle jeho osy souměrnosti, stačí prvních šest čísel opsat v opačném pořadí. Celý dvanáctý řádek Pascalova trojúhelníku tedy vypadá takto:
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1.

Další vlastnost kombinačních čísel, kterou můžeme vypozorovat v Pascalově trojúhelníku, je
$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1+3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

....

$$\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \binom{n}{3}\ \cdots\ \binom{n}{n-2}\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$$

Příklad

Dvanáctý řádek Pascalova trojúhelníku má tvar
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1.
Odvoďte z něj následující (třináctý) řádek Pascalova trojúhelníku.

Řešení

Na začátku a na konci každého řádku Pascalova trojúhelníku je číslo 1. Ostatní čísla odvodíme pomocí vlastnosti

$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$:

Dvanáctý řádek:	1 + 11	55	165	330	462	462	330	16	
Třináctý řádek:	1	12	66	220	495	792	924	792	495

Předchozí stránka: Vlastnosti kombinačních čísel
Další stránka: Binomická věta
Kombinatorika > Kombinační čísla > Pascalův trojúhelník

Binomická věta

Při řešení různých algebraických úloh potřebujeme občas umocnit dvojčlen $a + b$ na přirozené číslo n, tj. vypočítat $(a + b)^n$.
Nejspíš už znáte vzorce pro $n = 1$, $n = 2$ a $n = 3$:
$(a + b)^1 = a + b$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Vypočteme ještě $(a + b)^4$:
$(a + b)^4 = (a + b)^3 \cdot (a + b) =$
$= (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \cdot (a + b) =$
$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 =$
$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Porovnejte koeficienty u jednotlivých členů s hodnotami v Pascalově trojúhelníku:

$(a + b)^1$	$a + b$	1 1
$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1

Je vidět, že koeficienty v mnohočlenech odpovídají hodnotám v Pascalově trojúhelníku; každému mnohočlenu takto odpovídá právě jeden řádek Pascalova trojúhelníku. Tato vlastnost platí nejen pro $n = 1, 2, 3$ a 4, ale platí pro libovolné n z množiny přirozených čísel:

Pro všechna reálná čísla a, b a každé přirozené číslo n platí

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}a\,b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Vzorec si snadněji zapamatujeme, když si uvědomíme, podle jakých pravidel se mění kombinační čísla a exponenty u jednotlivých členů binomického rozvoje. Všimněte si, že exponenty mocnin se základem a klesají od n k nule a naopak exponenty mocnin se základem b rostou od nuly k n. Součet exponentů je v každém členu stejný a roven n.
Kombinační čísla, která jsou obsažena v každém sčítanci, začínají
$\binom{n}{0}$ a končí $\binom{n}{n}$.

Protože kombinační čísla v tomto vzorci vystupují v roli koeficientů mnohočlenu, který vznikne umocněním binomu (dvojčlenu), nazýváme je také **binomické koeficienty**.

Vyjádříme-li výraz $(a + b)^n$ pomocí binomické věty, říkáme, že jsme jej **rozvinuli podle binomické věty**, nebo že jsme utvořili **binomický rozvoj** výrazu $(a + b)^n$.

Příklad

Pomocí binomické věty vypočtěte $(x - 1)^5$.

Řešení

$(x - 1)^5 = [x + (-1)]^5 =$

$$= \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 \cdot (-1) + \binom{5}{2} x^3 \cdot (-1)^2 + \binom{5}{3} x^2 \cdot (-1)^3 + \binom{5}{4} x \cdot (-1)^4 + \binom{5}{5} (-1)^5 =$$

$= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot (-1) + 10 \cdot x^3 \cdot 1 + 10 \cdot x^2 \cdot (-1) + 5 \cdot x \cdot 1 + (-1) =$
$= x^5 - 5\,x^4 + 10\,x^3 - 10\,x^2 + 5\,x - 1$

Příklad

Užitím binomické věty vypočítejte $1{,}01^6$.

Řešení

$1{,}01^6 = (1 + 10^{-2})^6 =$

$$= \binom{6}{0} + \binom{6}{1} 10^{-2} + \binom{6}{2} (10^{-2})^2 + \binom{6}{3} (10^{-2})^3 + \binom{6}{4} (10^{-2})^4 + \binom{6}{5} (10^{-2})^5 +$$

$$+ \binom{6}{6} (10^{-2})^6 =$$

$= 1 + 6 \cdot 10^{-2} + 15 \cdot 10^{-4} + 20 \cdot 10^{-6} + 15 \cdot 10^{-8} + 6 \cdot 10^{-10} + 10^{-12} =$
$= 1{,}061\,520\,150\,601$

Příklad

Určete součet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

kde n je nezáporné celé číslo.

Řešení

Jestliže rozvineme podle binomické věty výraz $(1 + 1)^n$, dostaneme:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} 1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^n =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Protože $(1 + 1)^n = 2^n$, máme výsledek:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Příklad

Pomocí binomické věty dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n je číslo $8^n - 1$ dělitelné sedmi.

Řešení

$8^n - 1 = (7 + 1)^n - 1 =$

$$= \left[\binom{n}{0}\cdot 7^n + \binom{n}{1}\cdot 7^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 7^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 7 + \binom{n}{n}\right] - 1 =$$

$$= \left[\binom{n}{0}\cdot 7^n + \binom{n}{1}\cdot 7^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 7^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 7 + 1\right] - 1 =$$

$$= \binom{n}{0}\cdot 7^n + \binom{n}{1}\cdot 7^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 7^2 + \binom{n}{n-1}\cdot 7 =$$

$$= 7\cdot\left[\binom{n}{0}\cdot 7^{n-1} + \binom{n}{1}\cdot 7^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}\cdot 7 + \binom{n}{n-1}\right]$$

$= 7k$, kde k je přirozené číslo.

Číslo $8^n - 1$ je tedy pro každé přirozené číslo n dělitelné sedmi.

V některých případech nepotřebujeme znát celý binomický rozvoj, ale stačí nám jen určitý člen. V binomickém rozvoji výrazu $(a + b)^n$ je koeficient u prvního členu $\binom{n}{0}$, u druhého členu $\binom{n}{1}$, u třetího členu $\binom{n}{2}$, a tak dál, u k-tého členu je tedy koeficient $\binom{n}{k-1}$.
Z koeficientu můžeme odvodit celý k-tý člen binomického rozvoje:

> Pro všechna reálná čísla a, b, každé přirozené číslo n a přirozené číslo k, $k \leq n + 1$ platí, že k-tý člen binomického rozvoje výrazu $(a + b)^n$ má tvar
> $\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$.

Příklad

Určete desátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(2x^3 - \frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{12}$.

Řešení

Do vzorce pro k-tý člen dosadíme
$a = 2x^3$, $b = -\sqrt{2}/x$, $n = 12$, $k = 10$:

$$\binom{12}{10-1}(2x^3)^{12-(10-1)}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^{10-1} = \binom{12}{9}(2x^3)^3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^9 =$$

$$= -\frac{12!}{9!\,3!}\,2^3 x^9\cdot\frac{\sqrt{2}^9}{x^9} = -220\cdot 2^3\cdot(2^4\sqrt{2}) = -28\,160\sqrt{2}$$

Příklad

Určete, kolikátý člen binomického rozvoje výrazu $(2x^3 + 3x^2)^{10}$ obsahuje x^{23}.

Řešení

k-tý člen binomického rozvoje výrazu $(2x^3 + 3x^2)^{10}$ má tvar

$$\binom{10}{k-1}(2x^3)^{10-(k-1)} \cdot (3x^2)^{k-1}\ .$$

Číselné koeficienty hodnotu exponentu mocniny x neovlivní, můžeme tedy dále počítat bez nich:

$x^{3 \cdot [10-(k-1)]} \cdot x^{2 \cdot (k-1)} = x^{33-3k} \cdot x^{2k-2} = x^{31-k}$

Hledáme takový člen, který obsahuje x^{23}:

$x^{31-k} = x^{23}$

$31 - k = 23$

$k = 8.$

V binomickém rozvoji daného výrazu je x^{23} v osmém členu.

Předchozí stránka: Pascalův trojúhelník
Další stránka: Úlohy
Kombinatorika > Kombinační čísla > Binomická věta

Kombinační čísla

Úlohy

Odkazy na úlohy podle témat:
Kombinační čísla
Pascalův trojúhelník
Binomická věta

Kombinační čísla

Úloha 4.1

Vypočítejte:

a) $\binom{8}{2}$

b) $\binom{8}{6}$

c) $\binom{10}{7}$

d) $\binom{15}{12}$

Úloha 4.2

Jediným kombinačním číslem vyjádřete tyto součty:

a) $\binom{10}{4} + \binom{10}{5}$

b) $\binom{13}{2} + \binom{13}{10}$

c) $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$

Úloha 4.3

Vyjádřete jediným kombinačním číslem:

$$\binom{5}{5} + \binom{6}{5} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} + \binom{9}{5}$$

Úloha 4.4

Určete součet:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\dots+\binom{19}{2}+\binom{20}{2}$$

Úloha 4.5

V množině přirozených čísel řešte rovnice:

a) $\binom{9}{4}\cdot x=\binom{10}{5}$

b) $\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=4$

c) $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{2}=4$

d) $\binom{x-1}{x-3}+\binom{x-2}{x-4}=9$

e) $\binom{x+1}{2}+\binom{x}{2}=4\binom{n}{n}$, n je přirozené číslo

f) $\binom{x-1}{2}-\binom{x}{0}=\dfrac{n!}{2n\,(n-1)\,(n-2)!}\cdot\binom{x}{2}$, $n\geq 2$ je přirozené číslo

Úloha 4.6

V množině přirozených čísel řešte nerovnice:

a) $\binom{y+1}{2}+\binom{y+4}{2}+\binom{y+7}{2}<93$

b) $\binom{y}{2}+\binom{y+3}{2}+\binom{y+6}{2}<100$

c) $\binom{y+2}{2}\geq\binom{y}{2}+1$

Pascalův trojúhelník

Úloha 4.7

Napište devátý řádek Pascalova trojúhelníku (oba tvary).

Úloha 4.8

Desátý řádek Pascalova trojúhelníku má tvar
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.
Odvoďte z něj následující (jedenáctý) řádek Pascalova trojúhelníku.

Binomická věta

Úloha 4.9

Podle binomické věty rozveďte:
a) $(a + b)^5$
b) $(a - b)^5$

Úloha 4.10

Vypočtěte podle binomické věty:
a) $(x^2 - 1)^5$
b) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4$
c) $(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3})^6$
d) $(2a - 3b)^5 + (2a + 3b)^5$

Úloha 4.11

Užitím binomické věty vypočítejte
a) $1{,}02^5$,
b) $0{,}98^5$.

Úloha 4.12

Užitím binomické věty vypočítejte s přesností na tři desetinná místa $1{,}05^7$.

Úloha 4.13

Určete:
a) třetí člen binomického rozvoje výrazu $(x - 10)^9$
b) předposlední člen binomického rozvoje výrazu $(t + 10^{-2})^{20}$
c) pátý člen binomického rozvoje výrazu $\left(y - \frac{2}{\sqrt{y}}\right)^8$

Úloha 4.14

Určete koeficient pátého členu výrazu $(x^2 + \sqrt{y})^8$.

Úloha 4.15

Vypočtěte dva prostřední členy rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{x} - 2x\sqrt{x})^{19}$.

Úloha 4.16

Vypočítejte kladné číslo x, je-li
a) pátý člen rozvoje výrazu $(1 + \sqrt{x})^{10}$ roven 840,
b) sedmý člen rozvoje výrazu $(x - \mathrm{i}\,\sqrt[3]{2})^{10}$ roven −8,4.

Úloha 4.17

Kolikátý člen binomického rozvoje výrazu
a) $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ obsahuje x^8,
b) $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{12}$ neobsahuje x? (Jde o tzv. absolutní člen.)

Úloha 4.18

Vypočítejte ten člen binomického rozvoje výrazu
$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{21}$, který neobsahuje x.

Úloha 4.19

Určete všechny členy binomického rozvoje výrazu $(\sqrt[7]{7} + \sqrt[5]{5})^{24}$, které jsou racionálními čísly.

Úloha 4.20

V binomickém rozvoji výrazu $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$
je koeficient u třetího členu o 54 větší než koeficient u členu posledního. Určete absolutní člen, tj. člen, který neobsahuje proměnnou x.

* Úloha 4.21

Určete člen, který obsahuje x^{14} v rozvoji výrazu
$(1 - x^3)^9 \cdot (1 + x^2)^{10}$.

Úloha 4.22

Vypočítejte:
$$\binom{18}{0} + \binom{18}{1} + \binom{18}{2} + \dots + \binom{18}{17} + \binom{18}{18}$$

Úloha 4.23

Dokažte, že číslo $11^{10} - 1$ je dělitelné číslem 100.

Úloha 4.24

Užitím binomické věty dokažte, že číslo $6^{2n} - 1$ je pro každé přirozené číslo n dělitelné sedmi.

Úloha 4.25

Pomocí binomické věty dokažte, že platí:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^{n}\binom{n}{n} = 0$$

Úloha 4.26

Kolik sčítanců dostaneme po umocnění $(a + b + c)^7$?
(Úlohu neřešte rozepisováním binomického rozvoje, ale kombinatorickou úvahou.)

Předchozí stránka: Binomická věta
Kombinatorika > Kombinační čísla > Úlohy

Literatura a jiné zdroje

Použitá literatura

Benda P., Daňková B., Skála J. (1971): Sbírka maturitních příkladů z matematiky. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
Calda E. (1996): Kombinatorika pro učitelské studium. MatfyzPress, Praha.
Calda E., Dupač V. (2003): Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, Praha.
Huťka V., Cirjak M., Drobná O., Švidroňová A. (1986): Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 7. část. Státní pedagogické nakladatelství, Praha.
Koucký M. (2003): Sbírka příkladů z diskrétní matematiky. Technická univerzita v Liberci, Liberec.
Kubát J., Hrubý D., Pilgr J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – Maturitní minimum. Prometheus, Praha, 1999.
Opava Z.: Matematika kolem nás. Albatros, Praha 1989.
Sedláček J. (1985): Faktoriály a kombinační čísla. (Edice Škola mladých matematiků, svazek 56.) Mladá fronta, Praha.
Schramm L., Nimrichter F., Topinka V. (1981): Sbírka úloh z matematiky pro střední ekonomické školy. Státní pedagogické nakladatelství Praha.
Smida J. (1989): Matematika pro II. ročník gymnázií – Kombinatorika. Státní pedagogické nakladatelství Praha.

Další literatura

Matoušek J., Nešetřil J. (2000): Kapitoly z diskrétní matematiky. Karolinum, Praha.
Vilenkin N. J. (1977): Kombinatorika. SNTL, Praha.
Vrba A. (1980): Kombinatorika. (Edice Škola mladých matematiků, svazek 45.) Mladá fronta, Praha.

Webové stránky k tématu

České stránky

Pavel Jošt – Stránky pro Gymnázium a SPgŠ Liberec, Jeronýmova
http://pj.wz.cz/mat_4r/kombinatorika.html

Studijní materiály Katedry matematiky a deskriptivní geometrie VŠB–Technické univerzity Ostrava
V předmětu Pravděpodobnost a statistika je úvodní přednáška z části věnovaná kombinatorice: studijní texty, řešené příklady, úlohy 1, úlohy 2.

Mathes

Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta technologická
Kurz opakování vybraných kapitol středoškolské matematiky

Anglické stránky

MATH–abundance
Counting problems, Solved problems about counting

Oswego City School District Regents Exam Prep Center
Uncertainty (Probability):
The Counting Principle (kombinatorické pravidlo součinu),
Factorial,
Permutations (variace a permutace),
Combinations.

Drexel University – The Math Forum
Permutations and Combinations, Pascal's Triangle.

Kombinatorika > Literatura a jiné zdroje

4. Závěr

Zpracování tématu Kombinatorika pro výuku na středních školách mě přivedlo k prostudování (především) středoškolských učebnic matematiky od různých autorů a vydavatelství. Zjistila jsem, že základní typové úlohy se v učebnicích vyskytují opakovaně už řadu let. Do své práce jsem se snažila zařadit kromě úloh z běžně užívaných učebnic i úlohy méně obvyklé.

Při psaní této diplomové práce jsem se setkala s řadou obtíží, především šlo o rozdílné zobrazování webových stránek v různých prohlížečích.

Během vytváření stránek jsem hotové části postupně zveřejňovala na Internetu. Na stránky jsem umístila počítadlo přístupů, abych zjistila, jestli je o toto téma zájem. To se potvrdilo hned první den, kdy se stránky objevily v seznamech vyhledávacích serverů. Od té chvíle byl téměř každý den zaznamenán návštěvník z nové adresy a někteří návštěvníci se vraceli opakovaně. Práce na tomto tématu se tak pro mě stala ještě více zajímavá; viděla jsem, že výsledek bude skutečně užitečný. Na stránky jsem dočasně umístila také svou e-mailovou adresu, aby mi návštěvníci stránek mohli posílat své připomínky a náměty, ale tuto možnost bohužel nikdo nevyužil. Proto uvažuji o vytvoření diskuzního fóra nebo alespoň návštěvní knihy, což by komentování stránek usnadnilo a také by to autorům komentářů umožnilo zůstat v anonymitě.

Díky této diplomové práci jsem získala množství praktických zkušeností při publikování a prezentování výukových témat pomocí moderních informačních technologií. Tyto zkušenosti budu moci jistě využívat i ve své budoucí praxi.