Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Zlomky – některé obtíže žáků a didaktické přístupy učitelů

Fractions – Some Difficulties of Pupils and Teaching Approaches of Teachers

Diplomová práce

Vedoucí práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autor diplomové práce: Bc. Eliška Vejmelková

Studijní obor: Učitelství pro ZŠ a SŠ – matematika

Forma studia: kombinovaná

Diplomová práce dokončena: Praha, 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Nadi Vondrové, Ph.D. Všechny použité prameny a literatura byly řádně citovány a práce nebyla použita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne ……………….

Podpis ……………………..

Poděkování

Děkuji vedoucí mé práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a podnětné připomínky. Děkuji učitelům za rozhovory, děkuji žákům základních škol za videa, bez nichž by se tato práce neobešla. Děkuji dále Ing. Janě Petrovičové, Mgr. Erice Vejmelkové, Mgr. Michalovi Stejskalovi a dalším přátelům a rodině za podporu při studiu.

Abstrakt (česky)

Zlomky představují jedno z kritických míst matematiky základní školy. Cílem této diplomové práce je a) popsat didaktické praktiky používané při výuce zlomků (zaměřené zejména na aditivní operace se zlomky), b) zjistit, jaké strategie používají žáci u vybraných úloh zaměřených na zlomky, jaké obtíže jsou překážkou v jejich úspěšném řešení a jakou mají žáci o zlomcích představu. Teoretická část obsahuje úvahy o vyučování a učení se matematice, průřez historického vývoje pojmu zlomek a početních operací se zlomky a také vybrané výzkumy týkající se zlomků. Praktická část začíná analýzou učebnic, kde jsou identifikovány sémantické a strukturální modely používané u zlomků a způsoby vyučování operací se zlomky. Vlastní výzkum sestává z polostrukturovaných rozhovorů na téma výuka zlomků a obtíže žáků se zlomky s pěti zkušenými učiteli (z nichž jeden není aprobovaný) a z klinických rozhovorů se třemi žáky z různých základních škol. Rozhovory se žáky byly zaměřeny na řešení diagnostických úloh z oblasti zlomků. Přepisy obou typů rozhovorů byly analyzovány technikami založenými na zakotvené teorii. Bylo zjištěno, že učitelé využívají nejen běžných praktik, které navrhují učebnice, ale že si vytvářejí také vlastní metodické pomůcky a postupy. Tyto praktiky a postupy jsou jedním z výsledků práce. Dále bylo zjištěno, že zkoumaní žáci nemají obtíže s výpočty se zlomky, ale jejich neúspěch v řešení diagnostických úloh je způsoben nedostatečnou představou, co zlomek vůbec označuje.

Klíčová slova:
zlomky, chyby, obtíže žáků, modely, výukové metody

Abstrakt (anglicky)

Fractions are one of the critical areas of mathematics at the primary school. The aim of this diploma thesis is to describe didactic practices used when teaching fractions (focusing in particular on additive operations with fractions) and find out what strategies are used by pupils at selected tasks focusing on fractions, what difficulties are an obstacle in their successful solutions and what images of fractions the pupils have. The theoretical part contains considerations about the teaching and learning of mathematics, the overview of the historical development of the concept of fraction and operations with fractions and also selected research related to fractions. The practical part begins with the analysis of the textbooks where their semantic and structural models used for fractions are identified as well as ways of teaching operations with fractions. My own research consists of semi-structured interviews with five experienced teachers (one of whom is not qualified) on the topic of teaching fractions, the difficulties of pupils with fractions and of clinical interviews with three pupils from different primary schools. Interviews with the pupils were focused on the solution of the diagnostic tasks in the field of fractions. Transcripts of both interviews were analyzed by techniques based on grounded theory. It was found that the teachers use not only conventional practices which are offered by textbooks but that they also create their own teaching approaches and procedures. These practices and procedures are one of the results of the diploma work. Furthermore, it was found that the researched pupils have no difficulties with the calculations with fractions but their failure in the solution of the diagnostic tasks is caused by the lack of understanding what fractions represent.

Keywords:
fractions, errors, pupils’ difficulties, models, teaching methods

Obsah

1 Úvod ... 8

2 Teoretická část ... 9

2.1 Vyučování a učení se matematice ... 9

2.1.1 Žák a proces nabývání znalostí ... 9

2.1.2 Výukové metody ... 10

2.1.3 Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice ... 12

2.2 Historie pojmu zlomek a početních operací s nimi ... 13

2.2.1 Egypt ... 14

2.2.2 Mezopotámie ... 15

2.2.3 Indie ... 15

2.2.4 Čína ... 15

2.2.5 Islámské země ... 16

2.2.6 Řecko ... 16

2.2.7 Řím ... 16

2.2.8 Střední Evropa ... 17

2.3 Vybrané výzkumy týkající se zlomků ... 17

3 Praktická část ... 21

3.1 Analýza učebnic ... 21

3.1.1 Analyzované učebnice ... 21

3.1.2 Shrnutí analýzy učebnic ... 41

3.2 Klinické rozhovory se žáky ... 43

3.2.1 Úlohy pro klinické rozhovory ... 43

3.2.2 Žáci a jejich charakteristiky ... 47

3.2.3 Stručný průběh rozhovorů ... 47

3.2.4 Analýza klinických rozhovorů s jednotlivými žáky ... 48

3.2.5 Shrnutí analýzy klinických rozhovorů se žáky ... 63

3.3 Rozhovory s učiteli 64
3.3.1 Charakteristika dotazovaných učitelů 64
3.3.2 Popis rozhovorů 65
3.3.3 Výsledky analýzy rozhovorů s učiteli 65
3.3.4 Shrnutí rozhovorů s učiteli 67
3.3.5 Shrnutí rozhovorů s žáky a rozhovorů s učiteli 68
4 Závěr 69
5 Literatura 72
6 Přílohy

1 *Úvod*

Téma zlomků jako jednoho z kritických míst v matematice na základní škole mne, jakožto budoucí učitelku matematiky, zaujalo s ohledem na složitost tohoto tématu, a to jak z pohledu učitele, který dané téma vysvětluje, tak z pohledu žáků, kteří mají s pochopením zlomků problémy.

Obecným cílem diplomové práce bylo prozkoumat kritické místo zlomků jednak z hlediska žáků a jejich obtíží a jednak z hlediska učitelů a jejich didaktických přístupů k výuce zlomků. Zabývala jsem se těmito otázkami:

- Jak přistupují k zavedení zlomků a operací s nimi nejčastěji používané učebnice?
- Jaké řešitelské strategie použijí žáci u vybraných úloh zaměřených na zlomky a jaké obtíže jsou překážkou v jejich úspěšném řešení? Jaké jsou jejich představy zlomků?
- Jaké didaktické praktiky používají vybraní učitelé matematiky při výuce zlomků (s důrazem na aditivní operace se zlomky)?
- Jedná se o běžné praktiky nebo si učitelé vytvářejí vlastní metody či postupy?
- Co považují vybraní učitelé za největší úskalí u tématu zlomky?

Diplomová práce se skládá ze dvou částí, části teoretické a praktické.

Teoretická část se zabývá obecně výukovými metodami, které používají učitelé v praxi, a historickým vývojem zaměřeným konkrétně na zlomky, např. kdy byly zlomky poprvé doložitelným způsobem využity, vývojem zápisu zlomků, vývojem početních operací se zlomky atd.

Praktická část je zaměřena na analýzu učebnic, které se nejčastěji používají při výuce zlomků. Svou analýzu jsem provedla pomocí několika vybraných hledisek. Dále se tato část zabývá analýzou videozáznamů hloubkových rozhovorů se třemi žáky z různých základních škol, které se zaměřily především na představy žáků o zlomcích a jejich schopnost s nimi operovat. S pěti učiteli, z nichž čtyři jsou aprobovaní a jeden neaprobovaný, jsem provedla rozhovory, které jsem vyhodnotila vzhledem k cílům práce. Na konci práce je uveden seznam literatury, jež byla k sepsání práce nezbytná, a dále jsou uvedeny přílohy, které obsahují ukázky přepisů audiovizuálních záznamů žáků a rozhovorů s učiteli a také seznam tabulek a obrázků.

Tuto diplomovou práci jsem zpracovala v rámci projektu GAČR P407/11/1740 Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů.

2 *Teoretická část*

„V čem je skutečné jádro matematiky? V axiomech, ve větách, v důkazech, v pojmech, v definicích, v teoriích, ve vzorcích, v metodách? Matematika by jistě nemohla existovat bez těchto součástí, jsou všechny podstatné. Nicméně já si vážně myslím, že žádná z nich není jádrem matematiky, že hlavním oprávněním matematikovy existence je řešení problémů, že skutečným jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.“ P. R. Halmos (cit. v Kuřina, 2010, str. 243)

2.1 Vyučování a učení se matematice

„Methodos“ je slovo řeckého původu a znamená cestu, postup. Obecně lze říci, že metoda je rozhodujícím prostředkem k dosahování cílů v každé naší uvědomělé činnosti. Pojmem vyučovací metoda chápeme způsob záměrného uspořádání činností učitele a žáků, které vedou k určitému stanovenému cíli. (Skalková, 2007, str. 181)

2.1.1 Žák a proces nabývání znalostí

Pojmotvorný proces tvorby matematických poznatků popisuje např. teorie generických modelů (Hejný, 2004), kterou následně stručně popíši.

Jak uvádí Hejný a Littler (2007), tato teorie je založena na pěti stádiích, a to motivace následující dvěma mentálními zdvihy (první: od konkrétních znalostí (izolované modely) k obecným (generické modely), druhý: od obecných znalostí k abstraktním (abstraktní znalosti)), a poslední stádium je krystalizace, kde se nové znalosti začleňují do existující matematické struktury. Nyní přiblížím jednotlivá stádia.

Motivace

Toto stádium chápeme jako rozdíl mezi již existující znalostí a požadovanou znalostí, kdy vzniká rozpor mezi „Nevím“ a „Chci umět/vědět“. Motivace, zejména u mladších dětí, se velmi rychle mění (dítě přeskakuje z jedné činnosti na druhou) a je urgentní (dítě okamžitě potřebuje například pastelky a papír, aby mohlo kreslit).

Izolované modely

Nové znalosti se do mysli dostávají postupně a mají dlouhodobou perspektivu (tj. rozvíjí se mnoho let na propedeutické úrovni). Toto stádium se dá rozdělit na 4 části:

- první konkrétní zkušenost (první izolovaný model)
- postupné sbírání dalších modelů, které nejsou propojeny
- některé modely vytvářejí skupinu (vývoj pocitu „stejnosti“)
- korespondence mezi libovolnými dvěma modely (důvod „stejnosti“)

Toto stádium je zakončeno vytvořením společenství izolovaných modelů.

Generické modely

Stádium generických modelů má k předchozímu stádiu vytvořeny dvě základní vazby, a to označování jádra společenství a jádra vztahů mezi jednotlivými modely a reprezentantem všech svých izolovaných modelů. Tyto generické modely mohou mít formu vzorce, návodu atd.

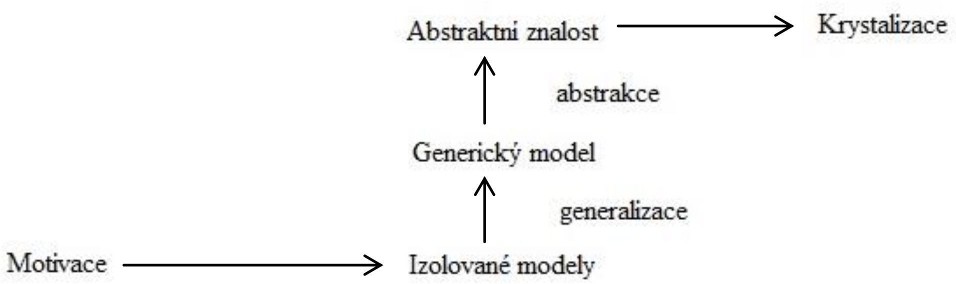
Abstraktní znalost

Abstraktní znalost je vlastně schopností žáka použít výsledek získaného v odlišných kontextech a bez nutnosti opření o sémantické modely.

Krystalizace

Nová znalost po vstupu do kognitivní struktury začíná hledat vztahy s existujícími znalostmi. Pokud se objeví nějaká disharmonie, je potřeba ji odstranit tak, že přizpůsobím novou znalost předchozím znalostem a také pozměním předchozí znalosti v souladu s novou znalostí. Krystalizace ale nezačíná až po konstrukci abstraktní znalosti, jelikož každý nový myšlenkový krok ve vytváření abstraktní znalosti se stává součástí kognitivní struktury.

Celou teorii popisuje obrázek 2.1.



Obrázek 2.1 Teorie generických modelů

2.1.2 Výukové metody

Klasifikace výukových metod je i nadále otevřený problém. Jako příklad uvádím klasifikaci podle Maňáka (1995).

A. Metody z hlediska pramene poznání a typu poznatků – aspekt didaktický

I. Metody slovní

1. Monologické metody (např. vysvětlování, výklad, přednáška)
2. Dialogické metody (např. rozhovor, dialog, diskuze)
3. Metody písemných prací (např. písemná cvičení, kompozice)
4. Metody práce s učebnicí, knihou, textovým materiálem

II. Metody názorně demonstrační
    1. Pozorování předmětů a jevů
    2. Předvádění (předmětů, činností, modelů, pokusů)
    3. Demonstrace statických obrazů
    4. Projekce statická a dynamická
III. Metody praktické
    1. Nácvik pohybových a praktických dovedností
    2. Laboratorní činnosti žáků
    3. Pracovní činnosti (v dílnách a na pozemku)
    4. Grafické a výtvarné činnosti

B. Metody z hlediska aktivity a samostatnosti žáků – aspekt psychologický
   I. Metody sdělovací
   II. Metody samostatné práce žáků
   III. Metody badatelské, výzkumné, problémové

C. Charakteristika metod z hlediska myšlenkových operací – aspekt logický
   I. Postup srovnávací
   II. Postup induktivní
   III. Postup deduktivní
   IV. Postup analyticko-syntetický

D. Varianty metod z hlediska fází výchovně-vzdělávacího procesu – aspekt procesuální
   I. Metody motivační
   II. Metody expoziční
   III. Metody fixační
   IV. Metody diagnostické
   V. Metody aplikační

E. Varianty forem z hlediska výukových prostředků – aspekt organizační
   I. Kombinace metod s vyučovacími formami
   II. Kombinace metod s vyučovacími pomůckami

F. Aktivizující metody – aspekt interaktivní
   I. Diskusní metody
   II. Situační metody
   III. Inscenační metody
   IV. Didaktické hry
   V. Specifické metody

V konkrétním vyučovacím procesu se uplatňují různé vyučovací metody souběžně a ve vzájemném propojení. Nejsou vzájemně od sebe odděleny. Metody se mohou v průběhu vyučovacího procesu měnit, několikrát vystřídat. Jednostranné používání metod nevede obvykle k úspěšným výsledkům. (Skalková, 2007, str. 184–185)

2.1.3 Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice

Podle M. Hejného a F. Kuřiny (2009) je vzdělávání orientováno na přenos neboli transmisi poznatků. Tato orientace přináší do vzdělání určitý formalismus. Rozvíjí sice paměť, ale již tak nerozvíjí vlastní myšlení a tvořivost. Při tomto přístupu k vyučování se můžeme naučit aplikovat poznatky tak, že žákům dáváme instrukce, jak se úloha počítá. Tímto přístupem může dojít k situaci, kdy žák umí vypočítat úlohu, ale nerozumí jí.

„Transmisivním vyučováním rozumíme přenos (transfer) znalostí z hlavy učitele přímo do hlavy žáka. Takto může roli učitele převzít rodič, spolužák, instruktor nebo i televize, rádio, počítač či knihy.“ (Hejný, Littler, 2007, str. 11). Při transmisivním vyučování matematiky se klade důraz na to, jak naučit žáka matematiku, cílem tedy je především samotná matematika, její školská forma, množství poznatků a především její kvalita. Žák v tomto vztahu není dominantní. Jako by při malování byla důležitější technika malby a výběr motivu než samotný malíř. Učitel se podřizuje učivu a je hlavně zprostředkovatelem.

Hejný a Kuřina (2009) zdůrazňují základní úkol učitele, kterým je motivace žáků k aktivitě. Učitel může podněcovat žáky vhodnými otázkami a problémy, aby žáci formulovali vlastní nápady či názory. Tímto učitel nastartuje konstruktivní poznávací proces.

M. Hejný a F. Kuřina (2009) hovoří o tzv. *didaktickém konstruktivismu*, který bere v úvahu specifika vyučování matematice, a formulují deset zásad, které popisují jejich pojetí k vyučování matematice.

Desatero konstruktivismu (kráceno)

1. Aktivita – žák chápe matematiku jako lidskou aktivitu, ne pouze jako soubor vět, definic a důkazů.
2. Řešení úloh – žák hledá souvislosti a řeší úlohy a problémy, zobecňuje tvrzení a vytváří pojmy.
3. Konstrukce poznatků – žák si vytváří individuální konstrukty (poznatky vznikající v mysli žáka).
4. Zkušenosti – vytváření poznatků žáka se opírá o jeho zkušenosti.

5. Podnětné prostředí – ve výuce je nutno vytvořit prostředí podněcující žákovu tvořivost (tvořivý učitel, podnětné úlohy a též je důležité vhodné klima třídy).
6. Interakce – diskuze, vytváření úloh, hledání protipříkladů apod. přispívají ke konstrukci poznatků žákem.
7. Reprezentace a strukturování – žák si vytváří různé druhy reprezentace matematického světa.
8. Komunikace – žák pěstuje různé druhy matematických jazyků (matematická symbolika), též umí vyjádřit vlastní myšlenky a rozumí jazyku druhých.
9. Vzdělávací proces – žák musí porozumět matematice (utváření představ), zvládat matematické řemeslo (zvládnutí algoritmů, nastudování pravidel) a aplikovat matematiku (provozovat matematiku).
10. Formální poznání – žák pouze reprodukuje informace, které získal transmisivním či instruktivním vyučováním.

2.2 Historie pojmu zlomek a početních operací s nimi

Vznik zlomků je spojen s hospodářskými potřebami jednotlivých kultur, kdy vznikla potřeba měřit a vážit, např. měřit velikost pole, rozdělit část na díly, zvážit různé předměty, zjistit objem sýpek atd. Pojem zlomku se vyvíjel postupně a nebyl vytvořen najednou v celé šíři. (Struik, 1963, str. 11)

Nyní se podíváme na historii početních operací se zlomky, která je zde zpracována podle Kolmana (1969). Po celá tisíciletí byla operace sčítání a odčítání malých čísel jedinými matematickými operacemi. Postupně vzniklo i násobení, zpočátku jako zdvojnásobování; to se jasně ukazuje ve staroegyptské matematice, kde se operace násobení převáděla na skládání operací dvou operací, a to zdvojnásobení a sčítání. Operace násobení, jako opakované sčítání, dávala stejný výsledek jako mnohonásobné opětovné přikládání míry při plošném měření, „otáčení“ z jedné polohy do druhé, k ní kolmé. A tak vznik násobení těsně souvisel se zemědělstvím, a tedy původně souvisel s geometrickými představami. Stejně tomu bylo i u Babyloňanů. Ti např. říkali součinu „a-ša“, tj. plocha. Autoři starověkých arabsky psaných matematických textů také nazývají součin „plochou“ („sath“) a míní tím pravoúhelník. Operace dělení vznikla až mnohem později než operace násobení. Poměrně brzy se však utvořil pojem jedné poloviny, původně ale nesouvisel s číslem dvě. Do pozdějšího období pak spadá vznik pojmu zlomku $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ atd. Ze slovního vyjádření těchto zlomků je již na rozdíl od $\frac{1}{2}$ zřetelná souvislost s odpovídajícími celými čísly 3, 4 atd. Vznik operace dělení a pojem zlomků těsně souvisí s problematikou měření.

V následujících oddílech uvádím nástin vývoje zlomků a početních operací s nimi v jednotlivých částech světa, a to v Egyptě, Mezopotámii, Indii, Číně a Evropě. Vycházím při tom z knih (Kolman, 1969, Juškevič, 1978, Mareš, 2008, Vymazalová, 2006, Bečvář, 2001).

2.2.1 Egypt

Podle Kolmana (1969) byly matematické znalosti Egypťanů na poměrně vysoké úrovni. Stavby pyramid, přehrad a vodních zařízení vyžadovaly zručnosti v počítání s velkými čísly. Egypťané používali dva typy čísel, a to čísla celá a zlomky. Zlomky vznikly, jak již bylo řečeno, při měření a dělení plochy pole na části. Proto se zlomek vyjadřoval jako část jednotky (z počátku jako konkrétní jednotky plochy „setata“). Nejstarší byly zlomky, v jejichž jmenovateli je mocnina dvou, tj. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ „setata“. Pro zlomky $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ existovaly zvláštní symboly, kde se později užívalo pouze $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$. Kromě nich Egypťané používaly tzv. „kmenové“ zlomky (tj. zlomky ve tvaru $\frac{1}{n}$) vyjádřené hieroglyfem „ra“ . Pod něj se psal číselný symbol vyjadřující jmenovatele. Např. $\frac{1}{10}$ se psala . Na kmenové zlomky se převáděly všechny ostatní zlomky. Kmenné (kmenové) zlomky a zlomek $\frac{2}{3}$ umožnily Egypťanům obecné dělení celých čísel podle již zmíněného schématu půlení, jež souviselo s již zmíněným zdvojnásobováním. Pro tento způsob bylo nutno vyjádřit zlomky $\frac{2}{n}$ jako součet kmenových zlomků. Jestliže bylo *n* sudé, tak $\frac{2}{n}$ se nahradilo zkráceným zlomkem. Pro *n* liché byly vyhotoveny zvláštní tabulky. Například zlomek $\frac{2}{101}$ se rozkládal na součet kmenových zlomků: $\frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$. Nejčastěji se užívalo rozkladu, který odpovídá vzorci $\frac{2}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n(n+1)}$, např.: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ atd. Dále Egypťané používali pomocná červená čísla. Dejme tomu, že potřebujeme získat $1\frac{2}{3}$ z $\frac{1}{5}$ (tj. $1\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}$); pak zapíšeme $1\frac{2}{3}$ černou tuží a pomocná čísla 3, 2 červenou tuží. To znamenalo, že jednička obsahuje 3 třetiny, $\frac{2}{3}$ obsahují 2 třetiny, dohromady tedy $1\frac{2}{3}$ obsahuje 5 třetin; a těchto pět třetin z $\frac{1}{5}$ dává $\frac{1}{3}$.

Podle Kolmana (1969) si potřeby kalendářních výpočtů vynutily další rozvoj počítání se zlomky. Egypťané dělili rok na 12 měsíců po 30 dnech, a když uplynuly, přidávali 5 dalších dnů. Data dnů v měsíci se odměřovala částmi (zlomky délky) celého měsíce a tento způsob se pak přenesl na jiné případy. Tak první den měsíce byla $\frac{1}{30}$ měsíce, třetí $\frac{1}{10}$, dvacátý $\frac{2}{3}$ a tedy čtyřiadvacátý den, tj. $\frac{4}{5}$, se vyjadřoval jako součet $\frac{1}{30}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$ měsíce.

Jak uvádí Vymazalová (2006), počítání s kmennými zlomky nebylo tak docela snadné, neboť výsledky sčítání, odčítání, násobení či dělení zlomků musely být opět zapsány pomocí kmenových zlomků. Symbolický zápis Egypťané ještě neznali. Zadání úloh i postup řešení se popisovaly slovně a byly doplněny písemnými výpočty, jež doprovázely operace výše zmíněné. Pro vyjádření jakékoli operace egyptští písaři používali často výraz „iri“ (základní význam je „dělat“), což v matematickém textu můžeme chápat jako „počítat“.

2.2.2 Mezopotámie

Kolman (1969) uvádí, že rozvoj zemědělství, stavba stupňovitých chrámů, rozvoj řemesel a obchodu v sumerské a akkadské říši podněcovalo vývoj vědy a mezi nimi i matematiky. Z této doby se zachovalo mnoho klínopisných dokumentů, jako zápisy o dodávkách obilí a dobytka, výkazy velkých hospodářství při chrámech a palácích, které dávají obraz o způsobu počítání, jež následně převzali Babyloňané.

Jak uvádí Mareš (2008), jejich číselná soustava uměla přepsat tzv. kmenové zlomky, způsobem blízkým dnešním desetinným zlomkům, a pokud to u některých nešlo (třeba $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$), měli je v tabulkách alespoň zaokrouhleně.

2.2.3 Indie

Podle Juškeviče (1978) bylo počítání se zlomky v Indii velice podrobně rozpracováno. Forma zápisu zlomků se téměř shodovala se současnou formou: čitatele psali nahoru nad jmenovatelem, ale i nadále nepoužívali zlomkovou čáru. Obecné zlomky, kde v čitateli již nebyla jednička, se vyskytly poprvé v Ápastambových „pravidlech provazce“, ale i tak používali Indové kmenové zlomky. Tak symbol $\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 5\end{matrix}$ znamená součin $1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{5}$. Je možné, že kmenové zlomky dělené celými čísly se objevily už v poměrně raném stadiu rozvoje aritmetiky, kdy prakticky používaná zásoba zlomků byla ještě poměrně malá, např. u měrných jednotek typu $\frac{1}{n}$. Zlomky tohoto typu se nacházejí později v evropské a arabské středověké literatuře.

2.2.4 Čína

V Číně byly zlomky typu $\frac{m}{n}$ odedávna známy, jak uvádí Juškevič (1978). Dále také uvádí, že operace se zlomky byly v čínské matematice rozpracovány velmi podrobně, a přitom se hojně využívalo krácení zlomků. Svědčí o tom skutečnost, že první úkoly „Matematiky v devíti knihách“ jsou věnovány právě krácení zlomků a předcházející partie jsou věnované jejich sčítání a odčítání. Bylo sepsáno pravidlo pro krácení zlomků, které říká: „To, co můžeš dělit dvěma, děl dvěma, jestliže není možné dělit dvěma, pak urči velikost čitatele a jmenovatele a odečti od většího menší, pokračuj ve vzájemném zmenšování, dokud nezískáš stejná čísla, tímto stejným číslem krať.“ Číňané jako první začali používat desetinné zlomky, což bylo spojeno s rozvojem měrné desetinné soustavy.

2.2.5 Islámské země

Podle Juškeviče (1978) stojí za zmínku vydání al-Chwárizmího traktátu. Jeho jedna část o aritmetice je věnována zlomkům (latinský termín fractiones je překlad slova kasr od arabského kasara-lámat). Odtud pocházejí rovněž názvy zlomků v evropských jazycích (např. francouzsky – nombre rompe, anglicky – fiction, německy – Bruch a česky – zlomek). Latinský text al-Chwárizmího aritmetiky vyjadřuje jednu charakteristickou zvláštnost arabštiny, která měla zvláštní číslovky pro kmenové zlomky do $\frac{1}{10}$. Al-Chwárizmí popisuje především šedesátinné zlomky.

2.2.6 Řecko

Jak uvádí Kolman (1969), dochované spisy nedávají jasnou představu o metodě, jak Řekové dělili. Nejpravděpodobnější je, že jejich způsob se podobal našemu, zvláště pak v pozdější době. Když nebylo dělení beze zbytku, spokojili se buď s přibližným výsledkem, nebo použili zlomek. Kmenové zlomky se dlouho zapisovaly slovně a poměrně pozdě symboly: $\frac{1}{3} = \gamma^{ov}$ nebo $\overline{\gamma}'$ nebo γ''. Jiným způsobem se zapisovaly obecné zlomky, v našem zápisu jsou to zlomky ve tvaru $\frac{m}{n}$, které byly považovány za m-násobky kmenových zlomků tvaru $\frac{1}{n}$ nebo za naznačenou operaci $m : n$. Zápis obecných zlomků nebyl jednotný. Nejdokonalejší způsob byl ten, že se jmenovatel psal nad čitatele, například: $\frac{\Theta}{\xi_{\varepsilon}}$, což bylo $\frac{65}{9}$. Řekové v tomto ohledu udělali krok dopředu a přiblížili se našemu dnešnímu označování zlomků.

2.2.7 Řím

Jak uvádí Kolman (1969), u Římanů existovala pro zlomky dvanáctinná soustava symbolů, přičemž každý zlomek od jedné dvanáctiny do jedenácti dvanáctin měl svůj vlastní znak i název.

2.2.8 Střední Evropa

Podle Juškeviče (1978) se systém připomínající ten dnešní začal v Evropě šířit až spolu s arabskými číslicemi v 10. století. Do toho se ale ještě připlétal vliv arabského světa, který používal zase zlomky o základu 60, které jsou pravděpodobně pozůstatkem ze starověké Mezopotámie. I když Evropa převzala indickou číselnou soustavu prostřednictvím Arabů, i v arabském světě se nový systém uplatňoval jen pomalu. Naopak v Evropě tomu bylo spíše obráceně a arabský systém přejímali nejrychleji obchodníci. Desetinné zlomky jako takové byly zřejmě poprvé systematicky používány v Číně. Arabové zase jako první zavedli náhradu zlomku desetinným číslem.

Dále Juškevič uvádí, že spolu s desítkovou poziční soustavou pro celá čísla přinášela aritmetika do Evropy i šedesátinné zlomky, které se používaly v astronomických výpočtech. Používání regulérního systému šedesátinných zlomků bylo jedním z předpokladů pro zavedení desetinných zlomků. Jako první se pokusil o systematické zavedení desetinných zlomků Immanuel ben Jákob Bonfils z Tarasconu. Až koncem 16. století byla idea desetinného zlomku zavedena systematicky holandským kupcem, mechanikem a matematikem Simonem Stevinem z Brugg.

Bečvář (2001) uvádí, že od té doby zápis zlomků připomínal ten dnešní (i když třeba vlastní vodorovné či šikmé lomítko převládlo až v 16. století). Od 14. století se se zlomky začaly současným způsobem provádět také základní početní úkony. Teprve v 16. století se ale začala důsledně používat metoda převádění zlomků na společného jmenovatele. Do té doby se zlomky o různém základu převáděly na součin obou jmenovatelů, takže poloviny a čtvrtiny by se sčítaly v osminách.

2.3 Vybrané výzkumy týkající se zlomků

Tichá a Macháčková (2006) zadaly žákům, kteří již téma zlomků měli probrané, sérii úloh (např. *Vybarvi* $\frac{2}{3}$ *obdélníku (kruhu) modře a potom ještě* $\frac{1}{4}$ *obdélníku (kruhu) červeně.*), a následně rozebraly některá řešení žáků z hlediska nejčastějších chyb, kterých se žáci dopouštějí. Zjistily, že žáci mají chybné představy, co zlomek vlastně znamená. V úlohách, kde celek není jasně deklarován (např. *Prodavač snížil cenu nanuku o* $\frac{1}{4}$ *na 6 korun. Kolik korun stál nanuk před zlevněním?*), žáci nejsou schopni rozlišit, co je celek a co je část.

Jak uvádí Hejný (2004), který využíval různých výzkumů, žáci chápou zlomek pouze jako uspořádanou dvojici čísel. Pravidla pro práci se zlomky se žáci často učí zpaměti, ale nedovedou použít zlomek při modelování situací z reálného života. Čili představa zlomku např. $\frac{8}{13}$ pro řadu žáků nic neznamená.

Pro moji práci je relevantní výčet nejčastějších chyb u operace sčítání zlomků a smíšených čísel, který sestavil Bruckner (1928). Vychází přitom z výzkumu, který byl proveden s přibližně 200 žáky z pátých a šestých ročníku ze šesti různých základních škol v Minneapolis. Žáci řešili těchto pět typů úloh: Součet dvou zlomků je menší než jedna a výsledek se nemusí zkrátit (např. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$); součet dvou zlomků je menší než jedna a výsledek se musí krátit (např. $\frac{1}{8}+\frac{5}{8}$); součet dvou zlomků je roven jedné (např. $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$); součet dvou zlomků je větší než jedna a výsledek musí být zapsán ve smíšeném čísle a následně se nemusí krátit (např. $\frac{2}{5}+\frac{4}{5}$); součet dvou zlomků je větší než jedna a výsledek musí být zapsán smíšeným číslem s tím, že se musí zlomek i zkrátit (např. $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}$). Následuje výčet chyb žáků. V závorkách uvádím četnost chyb v procentech.

1. Nedostatečné pochopení daného postupu: (20,2 %)
   - sečtení jmenovatelů a čitatelů: $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=\frac{5}{9}$
   - sečtení čitatelů a vynásobení jmenovatelů: $\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
   - sečtení čitatelů bez převedení na společného jmenovatele: $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$
   - součet čitatelů zapsaný do jmenovatele a součet jmenovatelů zapsaný do čitatele: $\frac{2}{8}+\frac{4}{8}=\frac{16}{6}$
   - součin čitatele a jmenovatele zapsaný v čitateli: $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{12}{4}+\frac{12}{4}=\frac{24}{4}$
   - vynásobení čitatelů a sečtení jmenovatelů: $\frac{1}{5}+\frac{2}{4}=\frac{2}{9}$
2. Obtíže při krácení zlomků na základní tvar: (17,5 %)
   - nezkrácení zlomku
   - dělení jmenovatele čitatelem: $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}=1\frac{2}{6}=1\frac{1}{3}$
   - dělení jmenovatele a čitatele různým číslem: $\frac{16}{30}=\frac{2}{5}$
3. Obtíže s nepravým zlomkem: (17,1 %)
   - nepřevedení nepravého zlomku na smíšené číslo: $7\frac{3}{4}+3\frac{1}{2}=10\frac{5}{4}$
   - převedení nepravého zlomku na smíšené číslo bez přičtení k celým číslům: $2\frac{1}{3}+7\frac{2}{3}=9\frac{3}{3}$
4. Početní chyby: (13,8 %)

- sčítání
- násobení
- dělení

5. Vynechání úlohy: (2,7 %)
6. Použití špatného postupu: (2,5 %)
    - odečítání: $\frac{6}{8}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}$
    - násobení: $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{2}{18}$
    - odečtení zlomků, ale přičtení celých čísel: $3\frac{2}{3}+2\frac{3}{6}=5\frac{3}{6}$
    - sečtení zlomků, ale vynásobení celých čísel: $3\frac{2}{3}+2\frac{1}{6}=6\frac{5}{6}$
    - sečtení zlomků, ale odečtení celých čísel: $6\frac{2}{3}+4\frac{1}{6}=2\frac{5}{6}$
7. Částečné operace: (2,2 %)
    - sečtení zlomků, ale přehlédnutí (vynechání) celých částí: $1\frac{1}{4}+3\frac{4}{8}=\frac{6}{8}$
    - sečtení celých čísel, ale přehlédnutí (vynechání) zlomků: $1\frac{1}{4}+3\frac{4}{8}=4$
8. Obtíže při převádění zlomků na společného jmenovatele: (1,5 %)
    - záměna jmenovatele: $\frac{6}{8}+\frac{1}{4}=\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$
    - nevynásobení čitatelů: $\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$
    - nezapsání jmenovatele: $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=7$
    - přičtení společného jmenovatele k rozšířenému čitateli: $\frac{1}{2}+\frac{2}{8}=\frac{12}{8}+\frac{2}{8}=\frac{14}{8}$
9. Obtíže při „půjčování“: (1,1 %)
    - u sčítání celých čísel a smíšených čísel: „půjčení“ si z celé části, sečtení zlomků a následné neupravení nepravého zlomku: $2\frac{2}{3}+4=2\frac{2}{3}+3\frac{3}{3}=5\frac{5}{3}$
    - u sčítání celých čísel a smíšených čísel: „půjčení“ si z celého čísla, rozdíl zlomků a součet celých čísel: $4+1\frac{2}{3}=3\frac{3}{3}+1\frac{2}{3}=4\frac{1}{3}$
10. Obtíže s pravými zlomky: (0,6 %)

    $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{6}{4}$
11. Chyby v přepisu: (0,2 %)

    $7+\frac{2}{3}=7\frac{3}{3}$
12. Neznámé chyby: (20,4 %)

$$2\frac{2}{3}+2\frac{1}{6}=2\frac{4}{6}+2\frac{3}{6}=6\frac{1}{6}$$

Dále Bruckner (1928) uvádí i nejčastější chyby, kterých se žáci dopouštějí u dalších operací se zlomky (odčítání, násobení a dělení), ale to již není předmětem této práce.

3 Praktická část

3.1 Analýza učebnic

V této části se zaměřuji především na analýzu učebnic z hlediska zlomků a operací s nimi, kterou jsem provedla na základě těchto kritérií:

- typy úvodních úloh;
- druh použitých didaktických modelů;
- výskyt symbolického zavedení zlomku;
- druhy úloh na procvičení aditivních operací se zlomky;
- celková struktura tématu zlomků;
- zavedení společného resp. nejmenšího společného jmenovatele;
- problematika umístění nuly ve zlomku.

3.1.1 Analyzované učebnice

Zaměřila jsem se na analýzu níže uvedených učebnic:

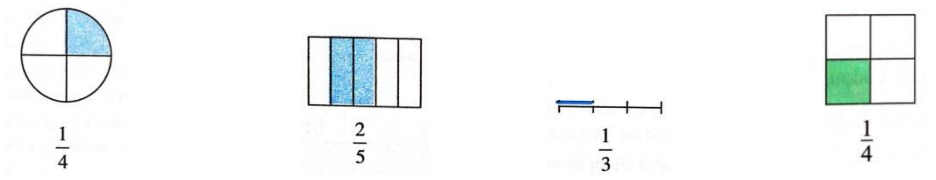
- KOMAN, Milan, Marie TICHÁ, František KUŘINA a Pavel ČERNEK. *Matematika: pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. 1. vyd. Praha 6: Matematický ústav AV ČR, 2000.
- ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 7: 1. díl*. 1. vyd. Praha 1: Prometheus, spol. s.r.o., 1999.
- HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMSA. *Matematika: Racionální čísla. Procenta*. 2. vyd. Praha 4: Prometheus, spol. s.r.o., 2004.
- CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. *Matematika 7*. 1. vyd. Praha 4: Pythagoras Publishing, a.s., 1998.
- OVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl*. 1. vyd. Praha 1: Prometheus, spol. s.r.o., 1999.
- PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a MÜLLEROVÁ. *Matematika 7 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha 2: Státní pedagogické nakladatelství, 2008.

- TREJBAL, Josef, Darina JIROTKOVÁ a Václav SÝKORA. *Matematika: pro 7. ročník základní školy 1. díl*. 1. vyd. Praha 2: Státní pedagogické nakladatelství, 1999.
- TAIŠL, Jan, Štefan MALINA a Josef VOJÁČEK. *Aritmetika: pro sedmý ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1958.

Pro jednoduchost budu na jednotlivé učebnice odkazovat názvem nakladatelství a v případě, že nakladatelství vydalo více řad učebnic, i jménem hlavního autora. Učebnice jsou představeny ve stejném pořadí, jaké je ve výčtu učebnic výše.

Pro zavedení zlomků se zpravidla používají tyto **modely**:

Spojité:



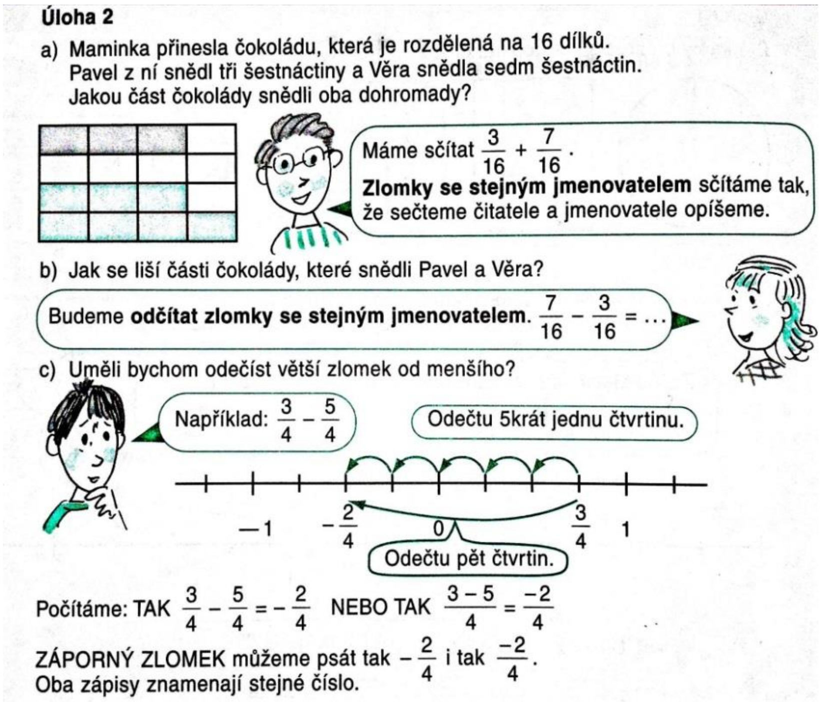
Kruhový model **Obdélníkový model** **Model úsečky** **Model čtverce**

Diskrétní: Kuličky, bonbóny, ořechy, stromy v sadě atd.

Matematický ústav AV

Kapitola zlomků je rozdělena na dvě části ve dvou dílech učebnic pro sedmý ročník. Takové rozdělení tématu jsem našla pouze v této učebnici. V prvním díle autoři vysvětlují, co to je zlomek, celek a část, rozšiřování a krácení zlomků, porovnávání a rovnost zlomků. Při tom využívají modelů jak spojitých (kruh – koláč, obdélník – čokoláda, úsečka), tak i diskrétních (ořechy, počet obědů ve škole, jahody, bonbóny). Již při porovnávání zlomků zavádějí termín „společný jmenovatel“.

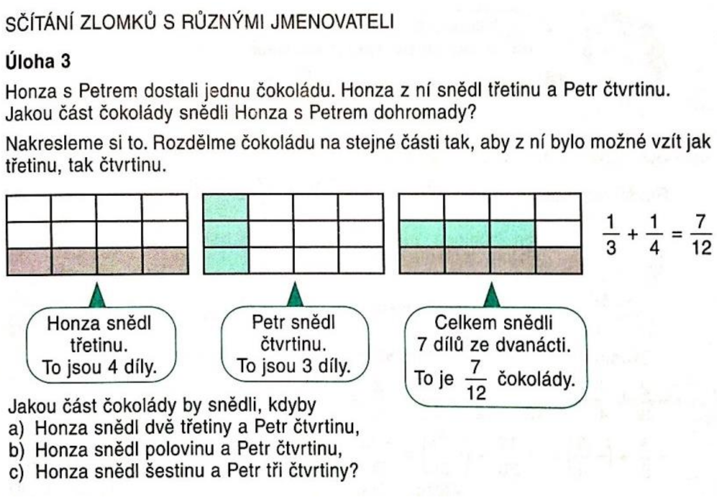
Ve druhém díle zavádějí autoři početní operace se zlomky. Nejprve se věnují umístění zlomků na číselnou osu čili porovnávání zlomků, přičemž se objevují i záporné zlomky. Dále uvádějí sčítání i odečítání zlomků se stejným jmenovatelem. Jako jediná má tato učebnice úvodní úlohu zadanou slovně a při jejím řešení autoři využívají model obdélníku. Jak je vidět na obrázku 3.1, autoři uvádějí pravidlo pro sčítání zlomků a různé zápisy záporného zlomku.



Obrázek 3.1 Úvodní úloha sčítání zlomků se stejným jmenovatelem (str. 36)

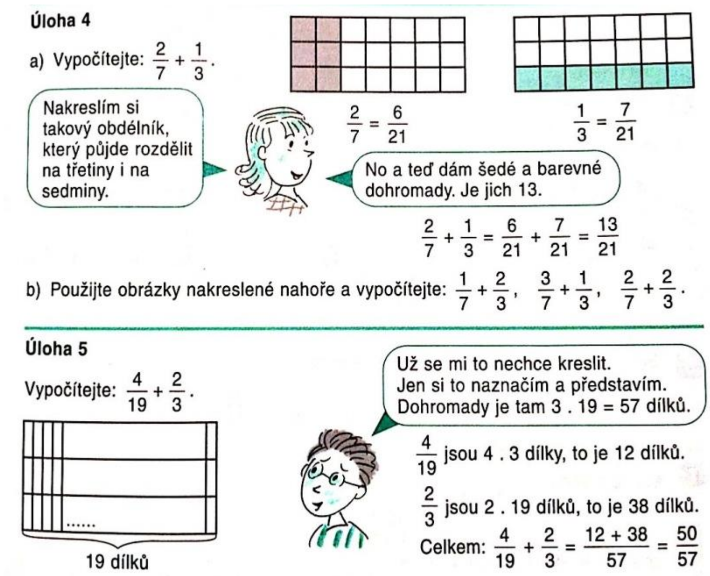
Na procvičení autoři uvádějí sadu aritmetických úloh s využitím číselné osy. Například: „Vypočítejte. Jednu z úloh znázorněte na číselné ose. $\frac{6}{10} + \frac{4}{10}$; $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$; $\frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{3}{12}$;…“ (str. 39). Najdeme zde i zajímavé úlohy typu: „Doplňte chybějící čísla. První úlohu znázorněte na číselné ose. $\frac{13}{8} - \frac{*}{8} = \frac{7}{8}$; …“, nebo „Zmenšete: $\frac{3}{8}$ o $\frac{5}{8}$; …“ (str. 39).

Dále je zavedeno sčítání zlomků s různými jmenovateli, a to opět na úloze, která je zadána slovně, kde řešení je znázorněno na modelu obdélníku (viz obrázek 3.2).



Obrázek 3.2 Úvodní úloha sčítání zlomků s různými jmenovateli (str. 37)

Aby autoři zobecnili pravidlo pro sčítání zlomků s různými jmenovateli, přidali ještě další dvě úlohy s řešením, kde pro výpočet použili obdélníkový model. Při tom postupně zvětšovali společného jmenovatele (v úloze číslo 4 hledali společného jmenovatele čísel 7 a 3 a v úloze 5 čísel 19 a 3, jak je vidět na obrázku 3.3). Následuje úloha, která čtenáře navádí na společného jmenovatele: „Když kreslíme obrázky, tak si vlastně upravujeme dané zlomky na zlomky se stejnými jmenovateli.“ (str. 38) Za řešením této úlohy je sepsáno pravidlo: „Zlomky s různými jmenovateli sčítáme tak, že si je upravíme na společného jmenovatele.“ (str. 38)



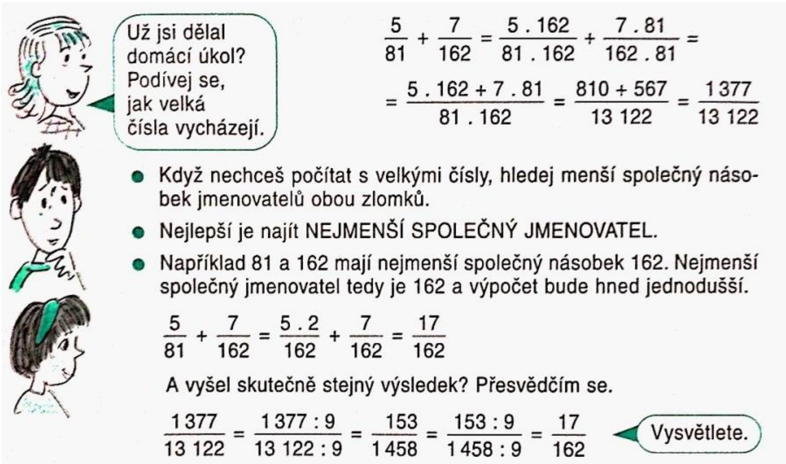
Obrázek 3.3 Posloupnost úloh na sčítání zlomků (str. 37)

Dále jsou uvedeny úlohy aritmetického typu na procvičení. Objevují se zde i nestandardní typy aritmetických úloh, jeden z nich je vidět na obrázku 3.4.

Máme zlomky $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{3}{8}$ a $\frac{9}{10}$.
a) Sčítejte libovolné dva z nich (6 možností).
b) Sčítejte libovolné tři z nich (4 možnosti).
c) Sečtěte všechny čtyři zlomky.

Obrázek 3.4 Nestandardní aritmetická úloha (str. 38)

Po úlohách na procvičení autoři uvádějí úlohu na hledání nejmenšího společného jmenovatele pomocí nejmenšího společného násobku (viz obrázek 3.5).

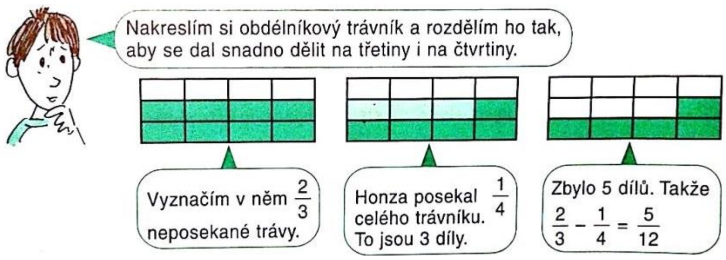


Obrázek 3.5 Úloha na hledání nejmenšího společného jmenovatele (str. 39)

V následujících úlohách si žáci mají procvičit hledání nejmenšího společného jmenovatele za situace, kdy jim autoři sami uvádějí nejmenšího společného jmenovatele: $\frac{4}{5} + \frac{7}{15} = \frac{*}{15} + \frac{7}{15}$ a pak následuje úloha, ve které si žáci nejmenšího společného jmenovatele musejí najít sami: $\frac{1}{8} + \frac{7}{12}$ (str. 39).

Ještě před tím než je zavedeno odečítání zlomků, najdeme v této učebnici úlohy typu: $\frac{5}{16} + \frac{-3}{12}$ nebo $\left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{1}{5}$ (str. 39), kde počítáme s opačnými čísly.

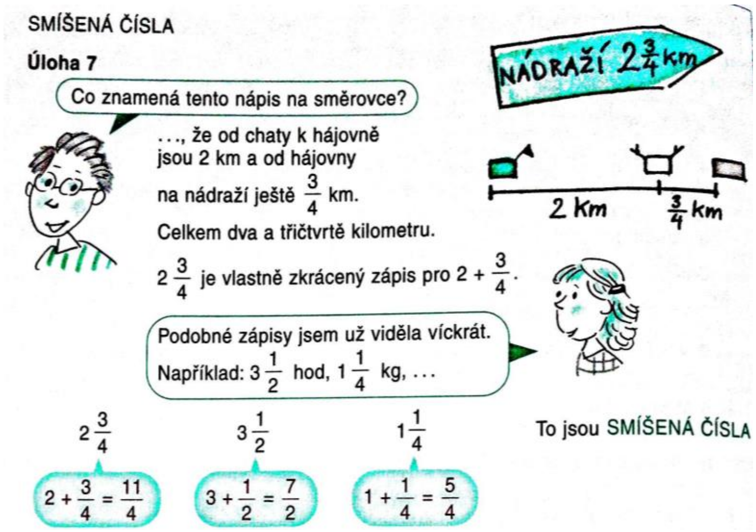
Následuje odečítání zlomků, kde úvodní úloha je opět zadána slovně: „Honzův děda sekal velký trávník. Když k němu Honza přišel, zbývalo posekat ještě $\frac{2}{3}$ trávníku. Honza vystřídal dědu a za půl hodiny posekal čtvrtinu celého trávníku. Jaká část trávníku je ještě neposekaná?“ Pro řešení úlohy využívají autoři model obdélníku, který vidíme na obrázku 3.6 jakožto rozdělení trávníku.



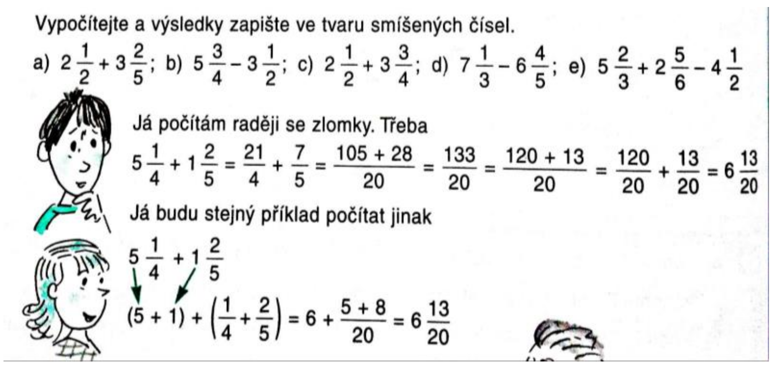
Obrázek 3.6 Model obdélníku k úloze na odečítání zlomků (str. 40)

V těchto úvodních úlohách používají autoři ve jmenovateli jen nesoudělná čísla.

Dále autoři vysvětlují, co jsou smíšená čísla (obrázek 3.7) a jak s nimi provádět početní operace (obrázek 3.8).

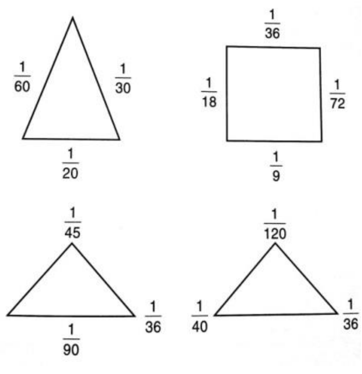


Obrázek 3.7 Co jsou smíšená čísla (str. 44)



Obrázek 3.8 Počítání se smíšenými čísly (str. 44)

K procvičení se objevují úlohy slovní, aritmetické, „najdi a oprav chybu“, „doplňte chybějící zlomky: $\frac{1}{2} + * = \frac{3}{5}$“ (str. 42), „Napište slovní úlohu“ a zábavné úlohy jako například doplňovačky, součtové a rozdílové hrozny, magické čtverce a egyptské trojúhelníky a čtverce (viz obrázek 3.9).

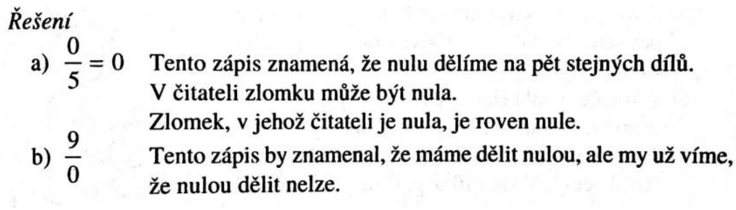


Obrázek 3.9 "Egyptské čtverce a trojúhelníky" (str. 45)

Prometheus, Šarounová

I v této učebnici je téma zlomků rozděleno na dvě části. Mezi nimi je vsunuto téma shodnost trojúhelníků, ale stále jsou obě části v jedné knize. První část učebnice je věnována vysvětlení pojmu zlomek, zavedení pojmů pravý (menší než 1) a nepravý zlomek (větší než 1), smíšená čísla, krácení a rozšiřování zlomků a porovnávání zlomků, kde autoři upozorňují na situaci, kdy se objeví nula ve jmenovateli. Pro tento případ lze uvést následující příklad, který se nachází v této učebnici:

„Pokuste se správně odpovědět na otázky: a) Může mít zlomek v čitateli nulu? Vysvětlete, co by to znamenalo. b) Může mít zlomek nulu ve jmenovateli?“ (Řešení je na obrázku 3.10.)


Řešení

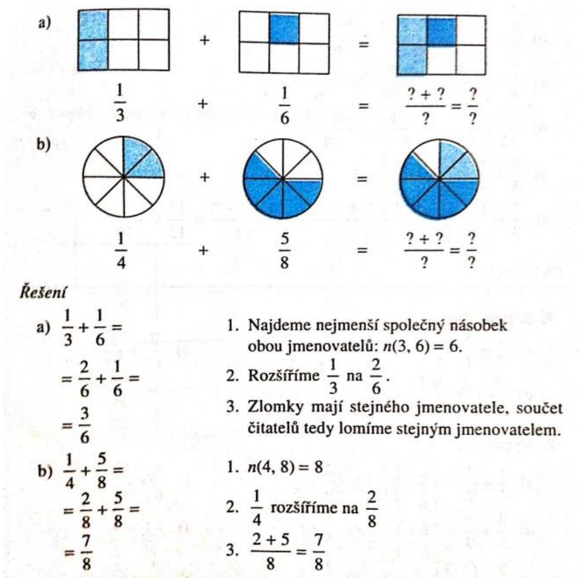
a) $\frac{0}{5} = 0$ **Tento zápis znamená, že nulu dělíme na pět stejných dílů.**
V čitateli zlomku může být nula.
Zlomek, v jehož čitateli je nula, je roven nule.

b) $\frac{9}{0}$ **Tento zápis by znamenal, že máme dělit nulou, ale my už víme, že nulou dělit nelze.**

Obrázek 3.10 Umístění nuly ve zlomku (str. 93)

Na konci této úlohy autoři sepsali pravidlo: „**Ve jmenovateli zlomku nemůže být nula!**“ (str. 93).

Druhá část učebnice je věnována početním operacím. Úvodní úlohy sčítání zlomků se stejným jmenovatelem jsou aritmetického typu. Tomuto sčítání jsou věnovány pouze tři úlohy, kde řešení je znázorněno graficky na modelech kruhu, úsečky a obdélníku. Následuje pravidlo pro sčítání zlomků se stejným jmenovatelem a po něm úvodní úlohy na sčítání zlomků s různými jmenovateli, u nichž autoři řešení znázornili graficky na obdélníkovém a kruhovém modelu s následným slovním popisem, kde autoři hledají nejmenší společný násobek jmenovatelů (viz obrázek 3.11).


a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{? + ?}{?} = \frac{?}{?}$

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{? + ?}{?} = \frac{?}{?}$

Řešení

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

$= \frac{2}{6} + \frac{1}{6} =$

$= \frac{3}{6}$

1. Najdeme nejmenší společný násobek obou jmenovatelů: $n(3, 6) = 6$.
2. Rozšíříme $\frac{1}{3}$ na $\frac{2}{6}$.
3. Zlomky mají stejného jmenovatele, součet čitatelů tedy lomíme stejným jmenovatelem.

b) $\frac{1}{4} + \frac{5}{8} =$

$= \frac{2}{8} + \frac{5}{8} =$

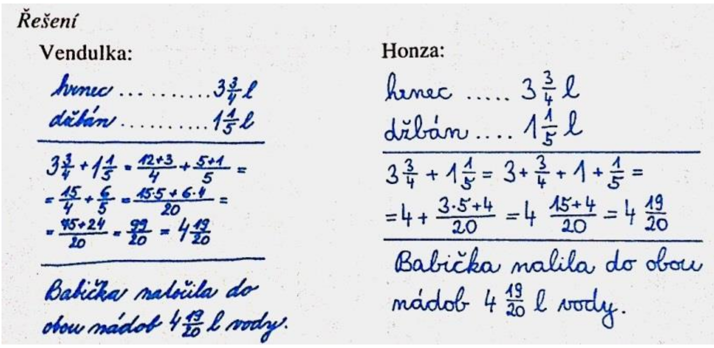
$= \frac{7}{8}$

1. $n(4, 8) = 8$
2. $\frac{1}{4}$ rozšíříme na $\frac{2}{8}$
3. $\frac{2+5}{8} = \frac{7}{8}$

Obrázek 3.11 Úvodní úloha se slovním popisem (str. 127)

Pravidlo pro sčítání zlomků s různými jmenovateli je sepsáno hned pod těmito úvodními úlohami: „Zlomky s různými jmenovateli sečteme tak, že je převedeme na společného jmenovatele a pak je sečteme jako zlomky se stejným jmenovatelem.“ (str. 127) Následuje řada aritmetických úloh, ve kterých se objevují i úlohy na součet zlomku a desetinného čísla, například: $-0{,}5 + \frac{3}{2}$ (str. 130). Je zajímavé, že úlohy se zápornými desetinnými čísly nebo zlomky jsou uvedené ještě před tím, než se autoři věnují odečítání zlomků, například $\frac{1}{5} + \left(-\frac{3}{7}\right)$ (str. 128). Tyto úlohy autoři řeší jako přičítání opačného čísla.

Dalším tématem, kterým se autoři zabývají, je sčítání smíšených čísel. Nejprve připomínají, co jsou smíšená čísla, dále je sepsána úvodní slovní úloha: „ Honza s Vendulkou sledovali babičku při práci v kuchyni. Babička plnila vodou dvě nádoby. Do hrnce nalila tři a „tři čtvrtě“ litru a do džbánu jeden litr a „pětinu“ litru vody. Víte, kolik litrů vody babička nalila do obou nádob dohromady? Honza s Vendulkou počítali takto:“ (viz obrázek 3.12)


Řešení

Vendulka:

hrnec .... $3\frac{3}{4}$ l

džbán .... $1\frac{1}{5}$ l

$3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{5} = \frac{12+3}{4} + \frac{5+1}{5} =$

$= \frac{15}{4} + \frac{6}{5} = \frac{15\cdot5+6\cdot4}{20} =$

$= \frac{75+24}{20} = \frac{99}{20} = 4\frac{19}{20}$

Babička nalévala do obou nádob $4\frac{19}{20}$ l vody.

Honza:

hrnec ..... $3\frac{3}{4}$ l

džbán .... $1\frac{1}{5}$ l

$3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{5} = 3 + \frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{5} =$

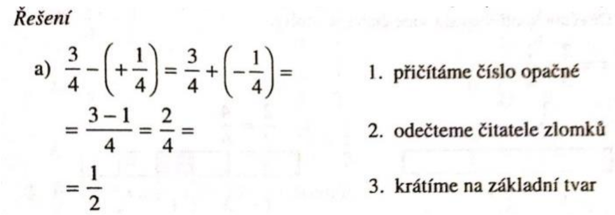
$= 4 + \frac{3\cdot5+4}{20} = 4\,\frac{15+4}{20} = 4\,\frac{19}{20}$

Babička nalila do obou nádob $4\frac{19}{20}$ l vody.

Obrázek 3.12 Úvodní úloha na sčítání smíšených čísel (str. 131)

Následně autoři sepsali pravidlo na sčítání smíšených čísel: „Smíšená čísla sčítáme tak, že buď sečteme zvlášť celky a zvlášť zlomkové části, nebo smíšená čísla zapíšeme jako nepravé zlomky a sečteme je.“ (str. 127). Následují aritmetické úlohy na procvičení.

Odečítání zlomků autoři uvádějí na úvodních úlohách, kde využívají odečítání celých čísel: „Odčítat celé číslo znamená přičítat číslo opačné. $3-(+2)=3+(-2)=3-2=1$“ (str. 134). Příklad se zlomky: „Vypočítej: a) $\frac{3}{4}-\left(+\frac{1}{4}\right)$ …“ viz obrázek 3.13.


Řešení

a) $\frac{3}{4}-\left(+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{4}\right)=$ 1. přičítáme číslo opačné

$=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=$ 2. odečteme čitatele zlomků

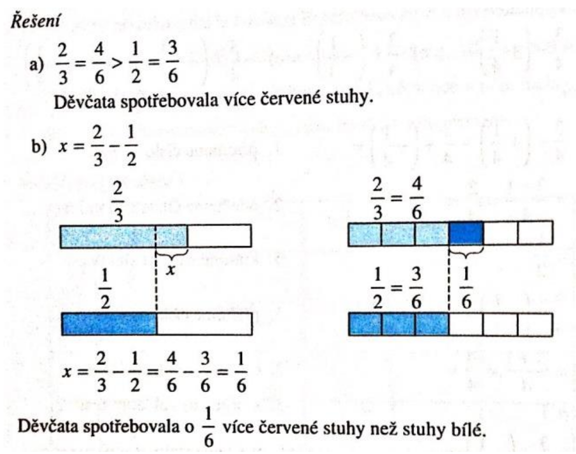
$=\frac{1}{2}$ 3. krátíme na základní tvar

Obrázek 3.13 Odečítání zlomků (str. 135)

Úvodní úloha na odečítání zlomků s různými jmenovateli je slovní: „Vendulka s Lenkou koupily Petrovi k narozeninám dárky. Na jejich zabalení si přinesly krásný papír a dvě stejně dlouhé stuhy: červenou a bílou. Na jeden dárek spotřebovaly $\frac{2}{3}$ červené stuhy, na druhý $\frac{1}{2}$ bílé stuhy.

Zjistěte: a) které stuhy spotřebovaly více,

b) rozdíl délek spotřebovaných stuh.“ (str. 135)


Řešení

a) $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}>\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$

Děvčata spotřebovala více červené stuhy.

b) $x=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

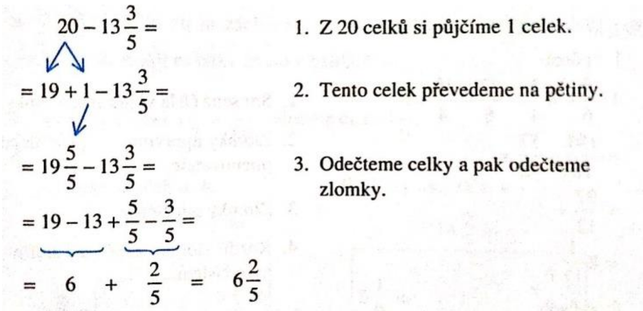
$x=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$

Děvčata spotřebovala o $\frac{1}{6}$ více červené stuhy než stuhy bílé.

Obrázek 3.14 Řešení úvodní úlohy na odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 136)

Po této úloze je sepsáno pravidlo: „Zlomky s různými jmenovateli odečteme tak, že je nejdříve převedeme na společného jmenovatele a pak odečteme jako zlomky se stejným jmenovatelem.“ (str. 136).

Následuje téma odečítání smíšených čísel, kde je opět úvodní úloha slovní: „Z dvacetilitrového kanystru odlil řidič do nádrže auta $13\frac{3}{5}$ litru benzinu. Kolik litrů benzinu zůstalo v kanystru?“ (str. 138). Tuto úlohu autoři řeší dvěma způsoby: první způsob: převedou obě čísla na zlomky, odečtou a rozdíl zapíší jako smíšené číslo; druhý způsob uvádím na obrázku 3.15.



$20 - 13\frac{3}{5} =$

$= 19 + 1 - 13\frac{3}{5} =$

$= 19\frac{5}{5} - 13\frac{3}{5} =$

$= \underbrace{19 - 13}_{6} + \underbrace{\frac{5}{5} - \frac{3}{5}}_{\frac{2}{5}} =$

$= 6 + \frac{2}{5} = 6\frac{2}{5}$

1. Z 20 celků si půjčíme 1 celek.
2. Tento celek převedeme na pětiny.
3. Odečteme celky a pak odečteme zlomky.

Obrázek 3.15 Druhý způsob řešení úlohy (str. 139)

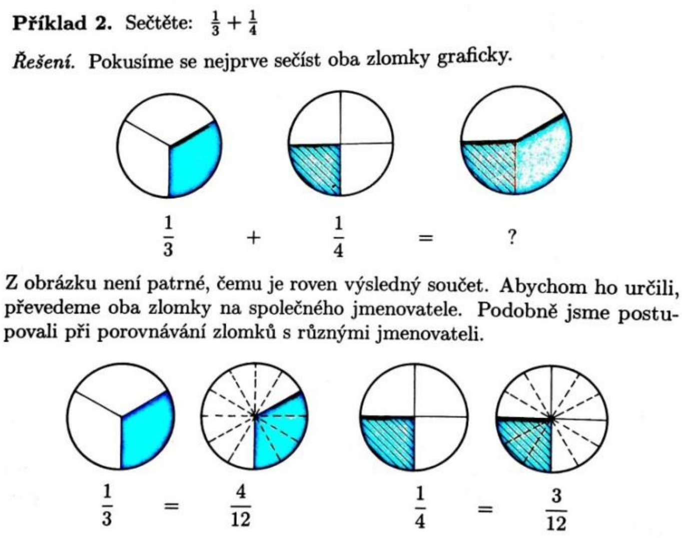
Po několika úlohách na procvičení je sepsáno pravidlo: „Smíšená čísla odečteme tak, že je buď převedeme na nepravé zlomky, které pak odečteme, nebo odečteme zvlášť celky a zvlášť zlomkové části.“ (str. 140).

V této učebnici najdeme hlavně úlohy aritmetické, mezi kterými jsou i rovnice: $\frac{1}{2} + x = \frac{2}{3}$ (str. 137) a doplňování tabulky, úlohy slovní a sčítací pyramidy. Úlohy na nalezení a opravení chyby či vymyšlení slovní úlohy se zde neobjevují.

Prometheus, Herman

Tato učebnice je zaměřena na žáky nižších tříd víceletých gymnázií. Autoři zavádějí pojem zlomek, smíšená čísla, rozšiřování a krácení zlomků, desetinné zlomky, periodická čísla a porovnávání zlomků. Stejně jako v učebnici (Prometheus, Šarounová) autoři při zavádění pojmu zlomek upozorňují na případ, kdy se vyskytne nula jak v čitateli, tak ve jmenovateli zlomku: „Ve jmenovateli zlomku nesmí být číslo 0.“ (str. 12) Můžeme si všimnout, že autoři pro pravidlo použili velmi podobné slovní spojení. Sčítání zlomků se stejným jmenovatelem je zavedeno na aritmetické úloze, která je řešená graficky, a následuje pravidlo slovně: „Zlomky se stejnými jmenovateli sečteme tak, že sečteme jejich čitatele a tento součet pak lomíme původním jmenovatelem.“; a symbolicky: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ (str. 49).

Následuje sčítání zlomků s různými jmenovateli, kde úvodní úloha je aritmetická a řešení je grafické, i když je vidět pouze grafické rozšíření zlomků (obrázek 3.16), ale výsledek v grafické podobě chybí. Jak si můžeme všimnout výše, v učebnici Matematického ústavu AV jsou použity stejné zlomky v úvodní úloze na sčítání zlomků s různými jmenovateli.


Příklad 2. Sečtěte: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

Řešení. Pokusíme se nejprve sečíst oba zlomky graficky.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$$

Z obrázku není patrné, čemu je roven výsledný součet. Abychom ho určili, převedeme oba zlomky na společného jmenovatele. Podobně jsme postupovali při porovnávání zlomků s různými jmenovateli.

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

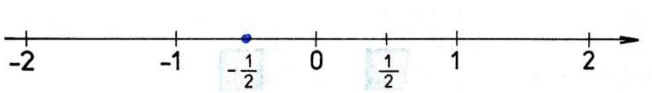
Obrázek 3.16 Grafické řešení (str. 50)

V první úloze autoři převedli oba zlomky na společného jmenovatele. Pro nalezení společného jmenovatele využívají nejmenšího společného násobku jmenovatelů, tento násobek nazývají nejmenší společný jmenovatel. Dále pokračují pravidlem pro sčítání zlomků s různými jmenovateli: „Zlomky s různými jmenovateli před sečtením převedeme na společného jmenovatele a teprve pak je sečteme.“ (str. 51).

Autoři této učebnice sepsali i vlastnosti sčítání zlomků (komutativnost a asociativnost), které najdeme na straně 52.

Následuje sčítání smíšených čísel, které lze provádět opět dvěma způsoby, jak ukazuje i učebnice (Prometheus, Šarounová).

Záporným zlomkům autoři věnovali samostatnou kapitolu. Opět zde pro představu využívají celých čísel (jako v učebnici Prometheus, Šarounová) na číselné ose. „Zlomek $-\frac{1}{2}$ budeme považovat za záporné číslo, které je *opačné ke kladnému číslu* $\frac{1}{2}$ a má tento obraz na číselné ose“, jak je vidět na obrázku 3.17 (str. 55).



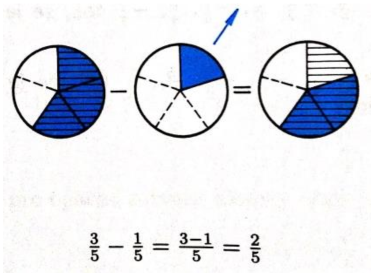
Obrázek 3.17 Číselná osa (str. 55)

A také zde najdeme sepsaná pravidla, která se týkají sčítání a odčítání záporných zlomků (obrázek 3.18) pro následné počítání aritmetických úloh.

$$\left(-\frac{a}{b}\right)+\left(-\frac{c}{d}\right) = -\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$$
$$\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{c}{d} = \frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$
$$\frac{a}{b}-\left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$
$$\left(-\frac{a}{b}\right)-\left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$

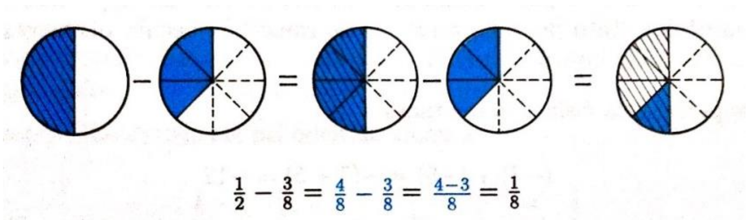
Obrázek 3.18 Pravidla o sčítání a odčítání záporných zlomků (str. 64)

Následujícím tématem je odečítání zlomků nejprve se stejnými jmenovateli, kde úvodní aritmetické úlohy jsou řešené graficky: například úloha $\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$ je řešena pomocí kruhového modelu (obr. 3.19).



Obrázek 3.19 Řešení úlohy odečítání zlomků se stejnými jmenovateli (str. 60)

Pravidlo je sepsáno jak symbolicky, tak i slovně. Autoři užívají podobné slovní spojení jako u sčítání zlomků se stejnými jmenovateli. Následuje úvodní aritmetická úloha na odečítání zlomků s různými jmenovateli, která je opět řešená graficky: $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}$ (obr. 3.20)



Obrázek 3.20 Řešení úlohy odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 61)

Pravidlo na odečítání zlomků s různými jmenovateli opět autoři popisují podobně jako sčítání zlomků s různými jmenovateli. Autoři zde uvádějí i to, že odečítání zlomků není ani asociativní, ani komunikativní.

Dále ukazují, jak odečítat smíšená čísla. Opět zavádějí dva způsoby jako v učebnici Prometheus, Šarounová.

V této učebnici najdeme převážně aritmetické úlohy a také úlohy s kmenovými zlomky. Zaujal mě ale typ úlohy, kde se žáci učí dosazovat místo písmen konkrétní zlomek (obrázek 3.21).

Vypočtěte oba rozdíly $(X - Y)$ a $(Y - X)$ a zkoumejte, jak spolu souvisejí:

a) $X = \frac{1}{3},\ Y = \frac{2}{5}$ **b)** $X = -\frac{2}{3},\ Y = \frac{5}{6}$

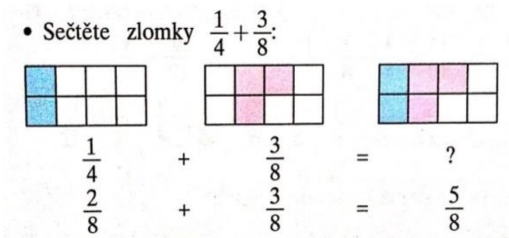
c) $X = -\frac{5}{4},\ Y = \frac{3}{8}$ **d)** $X = -\frac{6}{5},\ Y = -\frac{2}{15}$

Obrázek 3.21 Úloha na dosazení zlomků (str. 66)

Pythagoras

I v této učebnici je téma zlomků sepsáno v jednom celku. Nejprve autoři uvádějí pojem zlomek, rozšiřování a krácení zlomků (kde zavádějí pojem základní tvar zlomku), porovnávání zlomků a následují operace se zlomky.

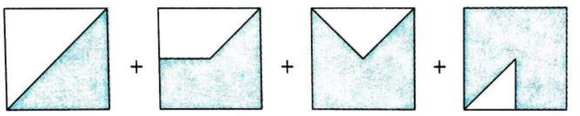
Operace sčítání a odečítání zlomků autoři nerozdělují, operace se smíšenými čísly uvádějí až po násobení a dělení zlomků. I zde autoři upozornili na případ, kdy je umístěna nula ve zlomku, a to hned za pravidlem pro sčítání a odečítání zlomků se stejným jmenovatelem: „Pozor: Zlomek s nulou ve jmenovateli nemá smysl!“ (str. 50) Pravidlo pro sčítání a odečítání zlomků s různými jmenovateli je nejprve sepsáno: „Zlomky upravíme rozšiřováním nebo krácením na zlomky se stejnými jmenovateli.“ a až poté je uvedena první úloha, která je řešená graficky na obdélníkovém modelu (obrázek 3.22). Vedle této úlohy je jen tak mimochodem poznámka o společném jmenovateli (obrázek 3.23). Dále se objevují úlohy na procvičení.



Obrázek 3.22 Úvodní úloha (str. 51)

Obrázek 3.23 Nejmenší společný jmenovatel (str. 51)

Vyskytují se zde úlohy hlavně aritmetického typu, dále též výzvy k vytvoření úlohy, úlohy na vyjádření vybarvené plochy zlomkem (obrázek 3.24) i slovní úlohy.



Obrázek 3.24 Vyjádření barevných ploch (str. 52)

Je zajímavé, že na konci kapitoly sčítání a odečítání zlomků je AUTOTEST, který si žáci mohou vyzkoušet, a sami tak své znalosti ohodnotit (obrázek 3.25).

AUTOTEST III.

1. Vyjádřete v metrech: $\frac{3}{4}$ km; $\frac{1}{5}$ km; $\frac{4}{10}$ km; $\frac{1}{8}$ km; $\frac{190}{1000}$ km	**Hodnocení** Za každý správný výsledek 1 bod celkem 5 bodů
2. Vyjádřete pomocí zlomků v metrech: 50 cm; 25 cm; 40 cm; 10 cm; 90 cm	Za každý správný výsledek 1 bod celkem 5 bodů
3. Porovnejte dvojice zlomků: $\frac{5}{7}$ a $\frac{9}{14}$; $\frac{3}{7}$ a $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{3}$ a $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$ a $\frac{5}{6}$	Za každé správné porovnání 1 bod celkem 4 body
4. Sečtěte zlomky: $\frac{5}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$; $\frac{11}{12}+\frac{5}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$	Za každý správný součet 1 bod celkem 4 body
5. Odečtěte zlomky $\frac{6}{7}-\frac{9}{14}$; $\frac{5}{8}-\frac{3}{5}$; $\frac{7}{9}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}-\frac{4}{5}-\frac{3}{20}$	Za každý správný rozdíl 1 bod celkem 4 body

Celkové hodnocení

22–17 bodů......výborný výkon
16–11 bodů......dobrý výkon
Ostatní musejí přidat

Obrázek 3.25 Autotest (str. 54)

Prometheus, Odvárko

Hned v úvodu kapitoly „Celek a jeho část“ autoři vyšetřují, jak je to s umístěním nuly ve zlomku. Skutečnost, že nula nesmí být ve jmenovateli, je zapsána takto:

„V žádném zlomku nesmí být jmenovatel roven nule!

$\cancel{\frac{5}{0}}$ nemá smysl!!!“ (str. 5)

Následují témata zlomky na číselné ose, rozšiřování zlomků, krácení zlomků (i zde autoři uvádí pojem zlomku v základním tvaru), porovnávání zlomků, desetinná a smíšená čísla a počítání se zlomky.

Pravidlo pro sčítání zlomků se stejným jmenovatelem je sepsáno stejnými slovy jako v učebnici Matematického ústavu AV: „Zlomky se stejnými jmenovateli sčítáme tak, že sečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.“ (str. 22)

Pravidlo pro sčítání následně i odečítání zlomků s různými jmenovateli je formulováno následovně:

„Zlomky s různými jmenovateli sčítáme takto:

* převedeme je na společného jmenovatele;
* takto upravené zlomky se stejnými jmenovateli sečteme.“ (str. 23)

I zde autoři doporučují volit nejmenší společný násobek jmenovatelů a také krátit zlomky na základní tvar.

Následuje odečítání zlomků se stejnými jmenovateli (pravidlo je sepsáno obdobně jako sčítání zlomků se stejnými jmenovateli) a odečítání zlomků s různými jmenovateli, kde pravidlo je formulováno opět v bodech jako sčítání zlomků s různými jmenovateli.

Počítání se smíšenými čísly autoři vůbec nevysvětlují, ale úlohy s nimi se zde objevují.

V této učebnici najdeme tyto typy úloh: aritmetické, slovní, „najdi a oprav chyby“. Objevují se také úlohy typu lineární rovnice stejně jako v učebnici (Prometheus, Šarounová).

SPN, Půlpán

I zde v úvodní kapitole „Dělení celku, zlomek“ autoři vyšetřují umístění nuly ve zlomku. Pravidlo pro nulu ve jmenovateli je sepsáno tímto způsobem: „ **<u>Zapamatujte si:</u>**

V žádném zlomku **nesmí být** ve **jmenovateli nula!**

$\cancel{\frac{4}{0}}$ $\cancel{\frac{5}{0}}$ $\cancel{\frac{13}{0}}$ $\cancel{\frac{1541}{0}}$ $\cancel{\frac{71306}{0}}$ „ (str. 14).

Následuje rozšiřování a krácení zlomků (i zde autoři uvádějí pojem zlomek v základním tvaru), porovnávání zlomků, kde se řeší společný jmenovatel jako nejmenší společný násobek (objevují se zde i desetinné zlomky a smíšená čísla) a počítáni se zlomky.

Sčítání zlomků se stejným jmenovatelem autoři uvádějí na aritmetických úlohách, kde řešení je grafického typy na čtvercovém a kruhovém modelu.

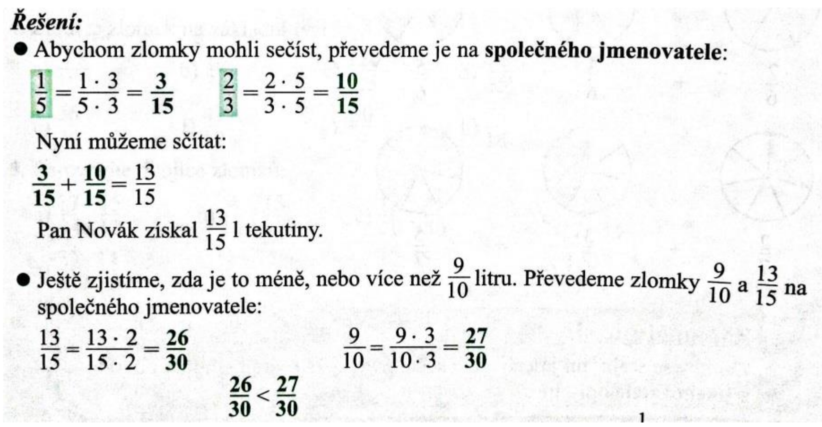
Úvodní úloha na sčítání zlomků s různými jmenovateli je slovní spojená s porovnáváním zlomků, kde řešení je sepsané ve dvou bodech. Můžeme si všimnout, že jmenovatele jsou opět čísla nesoudělná jako v učebnici Matematického ústavu AV.

„Pan Novák před zimou míchá do chladiče auta nemrznoucí směs s destilovanou vodou. Ví, že musí dolít $\frac{9}{10}$ litru tekutiny. Smíchal $\frac{1}{5}$ l nemrznoucí směsi s $\frac{2}{3}$ l destilované vody.

Stačilo toto množství směsi na dolití?

Pan Novák smícháním získal celkem $\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\right)$ l směsi.“ (str. 34)

Řešení této úlohy, jak jej uvádí autoři, je znázorněno na obrázku 3.26.



Řešení:

● Abychom zlomky mohli sečíst, převedeme je na **společného jmenovatele**:

$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \mathbf{\frac{3}{15}}$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \mathbf{\frac{10}{15}}$

Nyní můžeme sčítat:

$\mathbf{\frac{3}{15}} + \mathbf{\frac{10}{15}} = \frac{13}{15}$

Pan Novák získal $\frac{13}{15}$ l tekutiny.

● Ještě zjistíme, zda je to méně, nebo více než $\frac{9}{10}$ litru. Převedeme zlomky $\frac{9}{10}$ a $\frac{13}{15}$ na společného jmenovatele:

$\frac{13}{15} = \frac{13 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \mathbf{\frac{26}{30}}$ $\frac{9}{10} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \mathbf{\frac{27}{30}}$

$\mathbf{\frac{26}{30}} < \mathbf{\frac{27}{30}}$

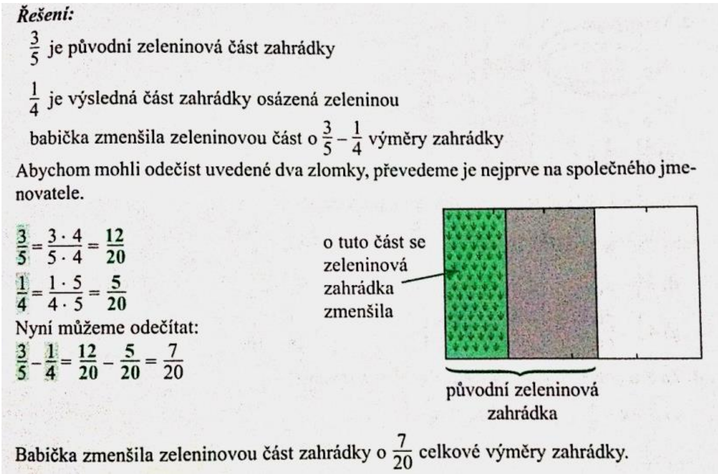
Obrázek 3.26 Řešení úvodní úlohy (str. 34)

Sčítání zlomků s různými jmenovateli autoři sepsali stejnými slovy jako v učebnici (Prometheus, Šarounová) jen slovosled se liší: „ **Zapamatujte si:**

> Zlomky s **různými** jmenovateli **sčítáme** tak, že je **nejprve** převedeme **na společného jmenovatele** a pak zlomky se stejnými jmenovateli sečteme.“ (str. 34)

Autoři uvádějí způsob sčítání i odečítání smíšených čísel, a to převod na zlomky a jejich následné sečtení. Druhý způsob vůbec nezmiňují.

Odečítání zlomků se stejnými jmenovateli autoři uvádějí na aritmetické úloze, která je řešená graficky. Odečítání zlomků s různými jmenovateli uvádějí na slovní úloze: „Babička měla vždy $\frac{3}{5}$ zahrádky osázeny zeleninou. Protože ji bolela záda, rozhodla se, že příští rok osází zeleninou jen $\frac{1}{4}$ zahrádky. O jakou část zahrádky zmenšila pěstování zeleniny?“ (viz obrázek 3.27)



Řešení:

$\frac{3}{5}$ je původní zeleninová část zahrádky

$\frac{1}{4}$ je výsledná část zahrádky osázená zeleninou

babička zmenšila zeleninovou část o $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$ výměry zahrádky

Abychom mohli odečíst uvedené dva zlomky, převedeme je nejprve na společného jmenovatele.

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$

$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$

Nyní můžeme odečítat:

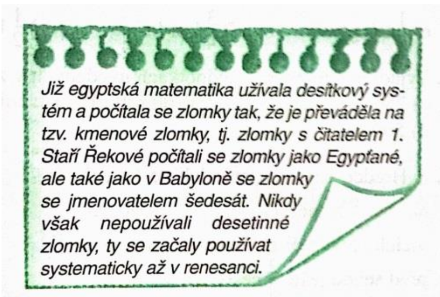
$\frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}$

Babička zmenšila zeleninovou část zahrádky o $\frac{7}{20}$ celkové výměry zahrádky.

Obrázek 3.27 Řešení úlohy odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 37)

Tato učebnice obsahuje převážně úlohy aritmetického typu, ale nalezneme zde i typ úlohy lineární rovnice či úlohy, kde se sčítají nebo odečítají desetinná čísla se zlomky a úlohy "Odhadněte, zda jsou čísla větší (menší) než 1" (str. 39). Zaujala mě tato úloha na sčítání zlomků: „Určete: a) dva stejné zlomky, jejichž součet je $\frac{1}{3}$. " (str. 35).

Autoři na některé stránky umístili i poznámky o historii matematiky (obrázek 3.28), které nenajdeme v žádné mnou analyzované učebnici.



Obrázek 3.28 Poznámka z historie zlomků (str. 17)

SPN, Trejbal

Tato učebnice mi připadá ze všech učebnic, které jsem analyzovala, nejméně přehledná. Každá strana je koncipovaná do dvou sloupců. I zde je celé téma zlomků pohromadě. Autoři nejprve začínají pojmem zlomek znázorněním zlomků na číselné ose, krácením (slovní i symbolický zápis je na obrázku 3.29) a rozšiřováním zlomků (je zmíněn zlomek v základním tvaru i nula ve jmenovateli), dále se objevuje porovnávání zlomků, smíšená čísla a početní operace se zlomky.

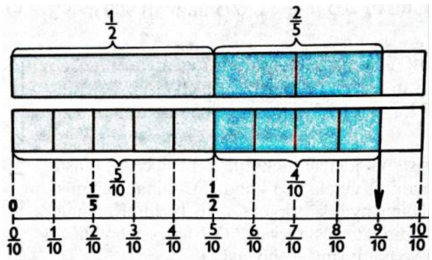
Zlomek krátíme tak, že jeho čitatele i jmenovatele dělíme týmž číslem různým od nuly. Jestliže čísla **a, b** jsou dělitelná číslem **m** a zároveň je **b** ≠ 0, **m** ≠ 0, pak platí

$$\frac{a : m}{b : m} = \frac{a}{b}.$$

Obrázek 3.29 Krácení zlomků (str. 18)

U sčítání zlomků se stejným jmenovatelem nás autoři odkazují na začátek minulého školního roku čili na začátek šestého ročníku, a tak toto téma pouze opakují. Úvodní aritmetická úloha na odečítání zlomků se stejnými jmenovateli je řešená graficky.

Úvodní úloha na sčítání zlomků s různými jmenovateli je aritmetického typu, kde řešení je znázorněno na modelu úsečky s využitím číselné osy (obrázek 3.30) a následováno slovním popisem krok po kroku. Společný jmenovatel se určuje tak, že se hledá nejmenší společný násobek těchto jmenovatelů.



Obrázek 3.30 Řešení úvodní úlohy s číselnou osou (str. 26)

Následují tři úlohy na procvičení a dále autoři zavádějí pravidlo sčítání (obrázek 3.31) i odečítání zlomků s různými jmenovateli symbolicky. Po symbolickém zápisu následuje konkrétní úloha.

Zlomky s různými jmenovateli sečteme po jejich úpravě na společného jmenovatele. Pro součet zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ($b \neq 0, d \neq 0$) platí:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,.\,d + b\,.\,c}{b\,.\,d}$$

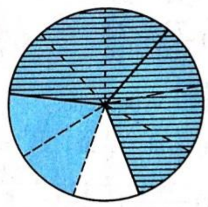
Obrázek 3.31 Pravidlo sčítání zlomků s různými jmenovateli (str. 27)

Odečítání zlomků s různými jmenovateli autoři znázorňují na kruhovém modelu doprovázeném slovním popisem (obrázek 3.32). Pravidlo je formulováno jak slovně, tak symbolicky (obrázek 3.33).

9 **1.** Vypočítejte: $\frac{8}{9} - \frac{2}{3}$.

Řešení

Na obr. 41 je modře vybarveno $\frac{8}{9}$ kruhu, vyšrafovány a zároveň modře vybarveny jsou $\frac{2}{3}$ $(\frac{6}{9})$ kruhu. Modrá nešrafovaná plocha představuje $\frac{2}{9}$ kruhu. Zlomek vyjadřující $\frac{2}{9}$ kruhu se proto rovná rozdílu $\frac{8}{9}$ a $\frac{2}{3}$ kruhu.



Obr. 41

Platí: $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

K rozdílu $\frac{2}{9}$ dospějeme pomocí následujícího výpočtu:

$\frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{8}{9} - \frac{6}{9} = \frac{8-6}{9} = \frac{2}{9}$.

Zkráceně počítáme: $\frac{8}{9} - \frac{2}{3} = \frac{8-6}{9} = \frac{2}{9}$.

Obrázek 3.32 Úvodní úloha na odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 27)

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

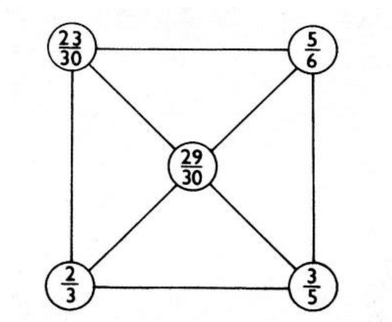
Při odčítání zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ uplatníme tytéž postupy jako při sčítání zlomků $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, o nichž jsme vás informovali na str. 27.

Obrázek 3.33 Symbolická formulace odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 28)

I zde autoři uvádějí dva postupy řešení sčítání a odečítání smíšených čísel stejně jako v učebnici (Prometheus, Šarounová).

Podobně jako v učebnici (Prometheus, Herman) jsou sepsány vlastnosti sčítání zlomků (komutativnost a asociativnost).

Opět je zde nejvíce úloh aritmetického typu. Najdeme však i úlohy typu „magických čtverců“, lineární rovnice (autoři však místo neznámé používají čtverečky, neznámá x se používá až v obtížnějších úlohách: „$\frac{2}{5} + \blacksquare = 6$“ (str. 28)) a také slovní úlohy, které jsou na konci kapitoly sčítání a odečítání zlomků. Jako zajímavou úlohu jsem shledala tuto úlohu se „čtvercem“: „Od zlomku $\frac{29}{30}$, který je uprostřed „čtverce“, odečtěte postupně zlomky, které jsou ve vrcholech „čtverce“ (obr. 3.34). Jestliže čtyři vzniklé rozdíly sečtete, obdržíte přirozené číslo. Které číslo?“ (str. 30)



Obrázek 3.34 „čtverec“ (str. 30)

Postup, který je sepsaný v první větě, je trochu matoucí. Postupně odečíst zlomky chápu tak, že odečtu všechny zlomky od toho zlomku ve středu $\frac{29}{30}-\frac{5}{6}-\frac{3}{5}-\frac{2}{3}-\frac{23}{30}$. Místo „postupně“ bych zvolila slovo „jednotlivě“ nebo „po jednom“.

SPN, Taišl

Tato učebnice je nejstarší učebnicí, kterou analyzuji, a vybrala jsem ji proto, abych znázornila, jak se zaváděly početní operace se zlomky v dřívější době.

V učebnici jsem zjistila nedostatek názorných obrázků, které by napomáhaly žákům popsanou problematiku lépe pochopit. Problematikou sčítání zlomků se stejným jmenovatelem se autoři učebnice zabývají pouze ve dvou úlohách, neboť, jak je konstatováno, se jedná o opakování ze šestého ročníku. Nicméně je zde znovu zaveden pojem zlomek, rozšiřování a krácení zlomků (i zde autoři zavádějí zlomek v základním tvaru), porovnávání zlomků (objevují se pojmy pravý/nepravý zlomek) a početní operace s nimi (až zde uvádějí autoři pojem smíšené číslo), ačkoli uvedené mají žáci v sedmém ročníku znát.

Dále se autoři zabývají pravidlem sčítání i odečítání zlomků s různými jmenovateli, které je popsáno takto: „Máme-li sečíst zlomky, které nemají stejné jmenovatele, například $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$, uvedeme je napřed na společného jmenovatele. Tím může být kterýkoli společný násobek obou jmenovatelů. Nejraději volíme nejmenší společný násobek daných jmenovatelů, v našem případě 12.“ (str. 27). Autoři však uvádějí pouze jeden ze dvou způsobů sčítání i odečítání smíšených čísel, což vnímám jako výrazný nedostatek, protože žáci nemají možnost výběru způsobu. Autoři vyjadřují jimi zmíněný způsob tak, že sečtou či odečtou nejprve celá čísla a následně zlomkové části.

Z obsahu této učebnice je zřejmé, co bylo předmětem výuky v šedesátých letech 20. století. Podstatné bylo umět vykonávat početní operace se zlomky a zcela absentoval požadavek na názorné porozumění zlomkům a početním operacím s nimi.

Stejně jako v učebnici (Pythagoras) je nejvíce úloh aritmetického typu. Slovní úlohy jsou umístěny na konci kapitoly Sčítání a odečítání zlomků.

3.1.2 Shrnutí analýzy učebnic

Výše uvedenou analýzu shrnuji v tabulce 3.1.

Učebnice	**Typ úvodních úloh**	**Modely**	**Symbolické zavedení**	**Druhy úloh na procvičení**	**Rozložení tématu**	**NSJ či NSN***	**Umístění nuly ve zlomku**
Matematický ústav AV	*Stejný jmenovatel:* Slovní úloha *Různé jmenovatele*: Slovní úlohy, jmenovatele jsou čísla nesoudělná *Smíšená čísla:* Slovní úloha	Spojité: kruhový obdélníkový	Není uvedeno	Slovní, aritmetické, „Najdi a oprav chybu“, „Napište slovní úlohu“, součtové a rozdílové hrozny, magické čtverce a egyptské trojúhelníky a čtverce	Ve dvou dílech série učebnic: 1. díl: zavedení zlomku, rozšiřování a krácení, porovnávání 2. díl: početní operace se zlomky	NSJ pomocí NSN	Není uvedeno
Prometheus, Šarounová	*Stejný jmenovatel:* Aritmetická úloha *Různé jmenovatele:* Aritmetická úloha *Smíšená čísla:* Slovní úloha	Spojité: kruhový obdélníkový úsečka	Není uvedeno	Aritmetické, slovní, tabulky, sčítací pyramidy	V jedné učebnici: 1. část: Zavedení zlomku, smíšená čísla, rozšiřování a krácení, porovnávání, záporné zlomky 2. část: početní operace se zlomky	NSN obou jmenovatelů	Celek a část
Prometheus, Herman	Pouze aritmetické úlohy	Spojité: kruhový obdélníkový	Sčítání a odečítání zlomků se stejnými jmenova-teli	Aritmetické	Jeden celek	Společný jmenovatel uveden pomocí NSN a dále NSJ.	Pojem zlomek

Pythagoras	Pouze aritmetické úlohy	Spojité: kruhový obdélníkový	Není uvedeno	Aritmetické, slovní, „Sestavte úlohu“, součtový had, součtové a rozdílové hrozny, tabulka, vyjádření vybarvené plochy	Jeden celek	Společný jmenovatel určený jako NSN jmenovatelů	Početní operace zlomků
Prometheus, Odvárko	Pouze aritmetické úlohy	Spojité: kruhový	Není uvedeno	Aritmetické, slovní, „Najdi a oprav chybu“, “Zkontroluj a dopočítej“,	Jeden celek	Společný jmenovatel určený jako SN jmenovatelů, ale doporučeno NSN	Celek a jeho část
SPN, Půlpán	*Stejný jmenovatel:* Aritmetické úlohy *Různé jmenovatele:* Slovní úlohy	Spojité: čtvercový kruhový obdélníkový	Není uvedeno	Aritmetické, slovní, „Odhadněte, zda jsou čísla větší (menší) než 1“	Jeden celek	Společný jmenovatel zaveden u porovnávání zlomků jako NSN jmenovatelů	Dělení celku, zlomek
SPN, Trejbal	Pouze aritmetické úlohy	Spojité: kruhový obdélníkový	Sčítání a odečítání zlomků s různý-mi jmenovat eli	Aritmetické, slovní, tabulka, „magický čtverec“,	Jeden celek	Společný jmenovatel jako NSN	Uvedeno v symbo-lických zápisech
SPN, Taiší	Pouze aritmetické úlohy	Spojité: kruhový	Není uvedeno	Aritmetické, slovní,	Jeden celek	Společný jmenovatel jako NSN jmenovatelů	Není uvedeno

Tabulka 3.1 Souhrn analýzy učebnice

*NSJ – nejmenší společný jmenovatel; NSN – nejmenší společný násobek

3.2 Klinické rozhovory se žáky

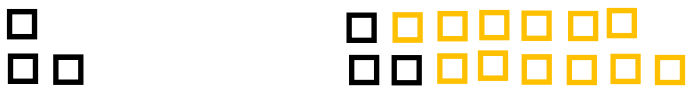
Cílem rozhovorů se žáky bylo zjistit, jaké řešitelské strategie použijí u vybraných úloh zaměřených na zlomky, jaké obtíže jsou překážkou v jejich úspěšném řešení a jaké mají představy o zlomcích.

3.2.1 Úlohy pro klinické rozhovory

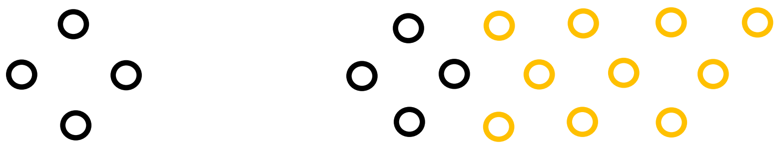
Úlohy pro tuto část výzkumu byly připraveny řešitelským týmem projektu GAČR Kritická místa matematiky – analýza didaktických praktik učitelů, komentáře jsou mé. Jsou rozděleny do třech typů: Obrázky, kde museli žáci dokreslit celek; Slovní úlohy; Úlohy s číselnými osami.

OBRÁZKY

- Když tohle je $\frac{1}{5}$, jak vypadá celek? (*Výsledek: 15*)



- Když tohle jsou $\frac{2}{7}$, jak vypadá celek? (*Výsledek: 14*)



- Když tohle je $\frac{5}{6}$, jak vypadá celek? (*Výsledek: 12*)

V těchto úlohách se sleduje, zda žáci dokáží najít celek a zda si uvědomí, že zlomek může být zobrazen i diskrétním modelem. U žáků můžeme dále pozorovat, jak dokreslují celek, zda si našli nějaký systém zakreslování, či zda zakreslují obrazce ledabyle. U první úlohy se můžeme setkat s tím, že za $\frac{1}{5}$ mohou považovat jeden čtvereček. U poslední úlohy se může stát, že žáci dokreslí obrazec do obdélníku, ale přitom vůbec nebudou vědět, že dvě hvězdičky jsou vlastně $\frac{1}{6}$.

CENY

- Po slevě o jednu třetinu stála mikina 756 Kč. Kolik stála původně? (*Výsledek: 1134 Kč*)
- Kuchyňský robot stojí v základní verzi 2 860 Kč. To je $\frac{5}{8}$ toho, co bychom zaplatili za verzi s úplným příslušenstvím. Kolik stojí úplná verze? (*Výsledek: 4576 Kč*)

V úlohách tohoto typu lze u žáků sledovat pochopení daného textu. Rovněž se v těchto úlohách dá pozorovat, jak si uvědomují, co ve zlomku znamená čitatel (kolik částí mám) a co jmenovatel (na kolik částí je celek rozdělen). Někteří žáci by mohli mít problém uvědomit si, kolik je sleva, co je cena po slevě a co je cena původní, neboli co dané zlomky (slevy) v daných úlohách znamenají (v úlohách není jasně dané, co je celek). U první úlohy by si žáci mohli plést, že 756 Kč je sleva mikiny, nebo že mikina stála 756 Kč. Tyto chyby jdou ruku v ruce s pochopením textu slovní úlohy. Obdobně i u druhé úlohy.

SLOVNÍ ÚLOHA

Matka Šetřílková peče často na víkend koláč. Dělá ho tak, aby se snědl čerstvý a nic nezbylo.

Recept koláče obsahuje:

$\frac{3}{8}$ kg mouky

$\frac{1}{2}$ čtvrtkilogramového balení másla

$\frac{1}{4}$ kilogramového balení cukru

3 vejce

Kromě toho samozřejmě trochu mléka ke smísení těsta a ovoce podle potřeby.

A. Rodina má 5 členů: matka, otec, jejich dvě děti (syn a dcera) a babička. Aby koláč vystačil pro celou rodinu, musí ho matka upéct z dvojnásobného množství surovin, než obsahuje recept. Když se koláč nakrájí, snědí otec a matka po třech dílech, děti o $\frac{1}{3}$ více než rodiče, babička naopak o $\frac{1}{3}$ méně (než každý z rodičů). Kolik surovin (mouky, másla, cukru a vajec) je na koláč potřeba? Na kolik dílů se koláč krájí?
B. Minulý víkend se u Šetřílků zastavili na nečekanou návštěvu Nešetřilovi: teta, strýc, bratranec a malá sestřenice. Matka chce narychlo upéct ještě jeden koláč. Ví, že dospělí (teta a strýc) snědí stejně jako ona a otec, bratranec sní určitě stejně jako každé z jejích dětí (jsou zhruba stejně staří). Naopak malá sestřenice sní jen tolik jako

babička. Problém je v tom, že matka má už jen 5 vajec. Kolik bude matka potřebovat ostatních surovin?

V této slovní úloze se dá pozorovat u žáků schopnost rozdělit si řešení úlohy, co budou počítat jako první, zda budou úlohu řešit postupně, či přeskakovat jednotlivé otázky a vybírat si tak od pro ně jednodušší otázky. Též se dá sledovat schopnost žáků určit, jaká početní operace bude potřeba při řešení jednotlivých úloh a také jejich postup při těchto operacích. Chyby, kterých se žáci zde mohou dopouštět, budou v určování početních operací, ale především v postupech při výpočtech se zlomky. S částí B ve slovní úloze mohou mít žáci problém s tím, že paní Šetřílková má k dispozici pět vajec, žáci si zde musí uvědomit, že paní Šetřílková bude potřebovat pětinásobek surovin, které jsou obsaženy ve směsi s jedním vejcem, a samozřejmě to následně vypočítat.

ZLOMKY NA ČÍSELNÉ OSE

Čísla *G* a *Q* jsou zlomky. Číslo *G* je znázorněné na číselné ose, číslo *Q* bude sděleno následně (na obrázku 3.35 uvádím ukázku listu s osami z první úlohy, jež žáci dostali jako zadání, další úlohy jsou uvedeny v příloze 4).

Úloha 1: ($G = \frac{19}{4}$), $Q = \frac{19}{6}$, $G + Q = N$ (sčítání), (*Výsledek:* $\frac{89}{12} = 7\frac{1}{12}$).

Úloha 2: ($G = \frac{39}{12}$), $Q = \frac{15}{9}$, $G - Q = N$ (odčítání), (*Výsledek:* $\frac{19}{12} = 1\frac{7}{12}$).

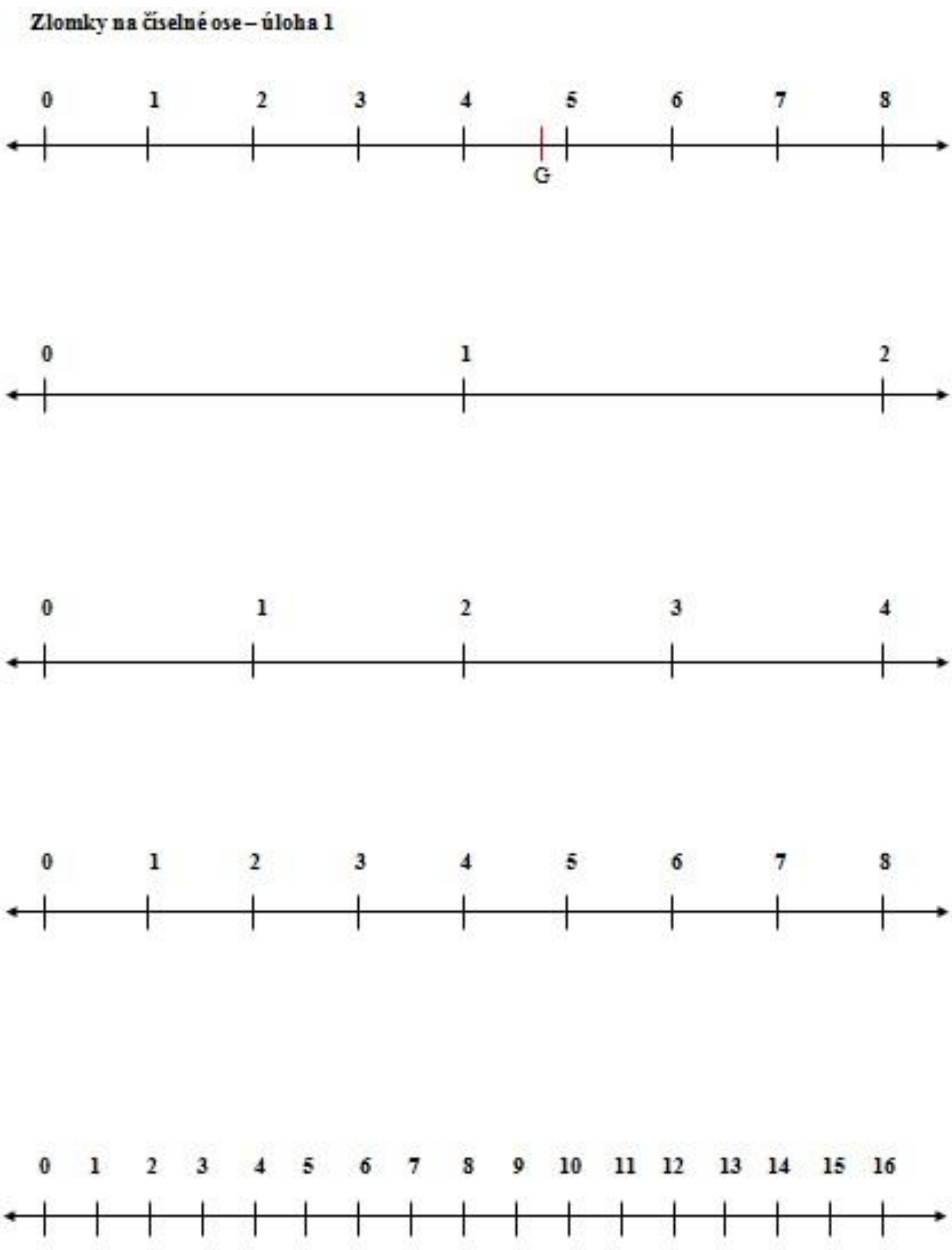
Úloha 3: ($G = 7$), $Q = \frac{7}{11}$, $G \cdot Q = N$, (jeden činitel celé číslo, druhý zlomek < 1), (*Výsledek:* $\frac{49}{11} = 4\frac{5}{11}$).

Úloha 4: ($G = 4$), $Q = \frac{25}{9}$, $G \cdot Q = N$, (jeden činitel celé číslo, druhý zlomek > 1), (*Výsledek:* $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$).

Úloha 5: ($G = \frac{28}{13}$), $Q = \frac{45}{7}$, $G \cdot Q = N$, (oba zlomky > 1), (*Výsledek:* $\frac{1260}{91} = \frac{180}{13} = 13\frac{11}{13}$).

Úloha 6: ($G = \frac{17}{3}$), $Q = \frac{8}{11}$, $G \cdot Q = N$, (oba zlomky, jeden > 1, druhý < 1), (*Výsledek:* $\frac{136}{33} = 4\frac{4}{33}$).

Úloha 7: ($G = \frac{7}{9}$), $Q = \frac{6}{12}$, $G \cdot Q = N$, (oba zlomky, oba < 1), (*Výsledek:* $\frac{7}{18}$).



Obrázek 3.35 Zadání první úlohy

Úlohy tohoto typu jsou zaměřené na hlubší pochopení zlomků a jejich početních operací, zda si žáci uvědomují velikost zlomků a jejich přibližné umístění na číselnou osu. Tyto úlohy jsou zaměřené hlavně na schopnost žáků odhadovat a také na schopnost orientace žáků na číselné ose. Dá se zde pozorovat i znalost početních operací se zlomky (i se smíšenými čísly). Žáci mohou mít největší obtíže s odhadováním hodnoty zlomků z daných bodů umístěných na číselné ose, dále s odhadováním umístění bodu na číselnou osu, znají-li hodnotu zlomku, a také s odhadováním výsledků rovnic i s následným umístěním výsledných bodů na číselnou osu.

3.2.2 Žáci a jejich charakteristiky

S touto částí diplomové práce jsem měla trochu problém. Setkala jsem se se značnou neochotou rodičů. Nechtěli, aby jejich děti byly natáčeny, ač jsem je ujišťovala, že jejich obličej nebude na záznamu vidět a ani jejich celá jména nikde nezveřejním. Musela jsem se uchýlit k jinému řešení, a to k pomoci svých blízkých. Tak jsem získala tři žáky, kteří v červnu 2013 končili sedmý ročník na základní škole a měli tedy za sebou téma Zlomky. Ač se zlomky většinou berou na podzim a v zimě, brala jsem v potaz, že již na nějaké věci mohli zapomenout, jelikož jsem záznamy natáčela v průběhu letních prázdnin.

První žák, se kterým jsem řešila dané úlohy, se jmenuje Honza. Matematika patří mezi jeho oblíbený předmět ve škole, mezi jeho další zájmy patří vše o vlacích a železnici. Na vysvědčení dostal jedničku a v průběhu rozhovoru bylo vidět, že přehled o zlomcích má. Při natáčení nebyl úplně komunikativní, nejspíš byl nervózní, ale v průběhu práce se uvolnil.

Druhá žákyně se jmenuje Jindřiška. Na vysvědčení dostala trojku. Matematika jí nevadí, ale nepatří mezi její oblíbené předměty. Je spíše zaměřená na přírodopis, zeměpis a výtvarnou výchovu. Při natáčení byla uvolněná a komunikativní.

Poslední žákyně se jmenuje Lucie. Na konci školního roku na vysvědčení dostala z matematiky čtyřku. V druhém pololetí se značně zhoršila, jelikož jí to ve škole nebaví. Mezi její záliby patří jízda na koni. Co se týče předmětů ve škole, nejvíce ji baví výtvarná výchova. Při natáčení záznamu byla velmi tichá, ačkoliv mi bylo řečeno, že je velmi komunikativní.

3.2.3 Stručný průběh rozhovorů

Ještě než jsme začali s natáčením, sdělila jsem každému z žáků, že úlohy mohou řešit, jak chtějí, a že se jich budu vyptávat, abych rozuměla všemu, co dělají. Vyzvala jsem je, aby se zeptali, pokud by narazili na nějaký problém; že ho zkusíme společně vyřešit. Žáci mohli používat kalkulačku, ale spíše o ni neměli zájem a počítali sami. Také jsem je ujistila, že je to celé anonymní, ale dostala jsem od nich svolení, že mohu použít jejich křestní jména.

Jako první žáci řešili jednodušší úlohy, a to úlohy s **obrázky**, kde mohli řešit úlohu jak početně, tak i pomocí grafického vyjádření. Pokud kreslili, chtěla jsem po nich následné vysvětlení, jak na to přišli.

Následovaly úlohy o **cenách**, kde jsem po žácích chtěla, aby mi vysvětlili, jak počítali.

Dále žáci řešili úlohy se **zlomky na číselné ose**, kde jsem je nechala nejprve odhadnout hodnotu bodu *G*, který byl vyznačen na číselné ose. Následně jsem jim sdělila přesnou hodnotu *G*, řekla jsem žákům hodnotu *Q* a nechala je, ať ji zakreslí na číselnou osu. Pak jsem žákům sdělila rovnici, podle které měli vypočítat hodnotu *N*. Ještě před tím, než žáci začali počítat, jsem po nich chtěla, aby zkusili hodnotu *Q* odhadnout. Pokud žáci měli s řešením těchto úloh problémy, snažila jsem se vracet k jednodušším zlomkům a modelovému (kruhový – koláčový model) vyjádření zlomků. Z časových důvodů jsem byla nucena u každého žáka vynechat jednu z těchto úloh.

Žáci řešili **slovní úlohu** o koláči jako poslední, jelikož viděli obsáhlý text této úlohy, a tak se trochu vyděsili. Ale vyřešit ji zvládli všichni tři.

Videozáznamy rozhovorů jsou dlouhé přes hodinu a třicet minut a byly natáčeny u žáků doma. Tyto záznamy jsme přepsala do protokolů, jejichž část je na ukázku v příloze 1. Celé přepisy jsou k dispozici v rámci projektu GAČR.

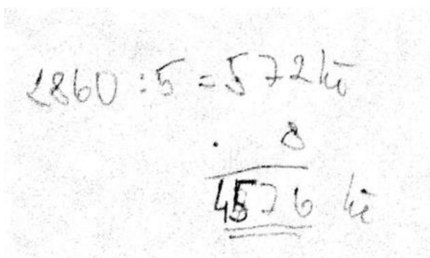
3.2.4 Analýza klinických rozhovorů s jednotlivými žáky

Postupně rozeberu každého žáka zvlášť. Zaměřím se hlavně na chyby u jednotlivých úloh a na to, jaké by mohly být příčiny těchto chyb. Kódy v závorkách jsou odkazy na přepisy videozáznamů žáků.

Honza

S prvními úlohami o doplňování celků neměl žádný problém. Dokázal dokreslit a dále i vysvětlit, jak na to přišel. (6 H – 28 H)

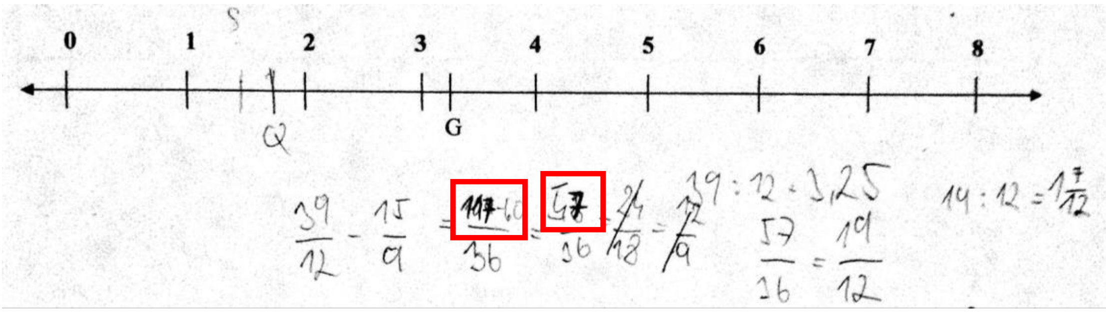
Následovaly dvě slovní úlohy o cenách. S první úlohou Honza neměl žádný problém. (31 H – 35 H). V druhé úloze se mu vyskytla menší chyba při násobení (viz obr. 3.36). Nejspíše si spletl 5 krát 8 s 6 krát 8. (38 H – 49 H)



Obrázek 3.36 Ceny – Honza

Dále jsme měli úlohy se zlomky na číselné ose. První úloha byla na sčítání zlomků. S pozicí bodu *Q* se vyskytl problém. Musela jsem Honzovi poradit, aby si zlomek převedl na smíšené číslo, a tak se daná pozice bodu *Q* dala najít. (61 T – 73 T) Při odhadování součtu těchto dvou bodů využil Honza vzdálenosti *G* a *Q*, ale nepoužíval vzdálenosti obou bodů od nuly. Vzal vzdálenost *Q* od nuly a vzdálenost *G* od *Q*, a tak svůj odhad ukazoval u bodu *G*. Při samotném výpočtu se nevyskytl žádný problém. Při umístění bodu *N* použil Honza převod zlomku na desetinné číslo. Až po výpočtu vzdálenosti bodů se opravil a následně ukázal správně řešení.

Druhá úloha byla zaměřena na odčítání. Při umisťování bodu *Q* na číselné ose Honza využil převodu zlomku na desetinné číslo. Stejného postupu využil i při odhadu odčítání. Převedl si úlohu na odčítání desetinných čísel, věděl ovšem, že to není přesný výsledek, jelikož zaokrouhloval na jedno desetinné místo. (118 H) Při výpočtu rovnice špatně rozšířil zlomek třicet devět dvanáctin, protože nepočítal s číslem 39 ale s číslem 34, jak je vidět na obrázku 3.37 v červených rámečcích.

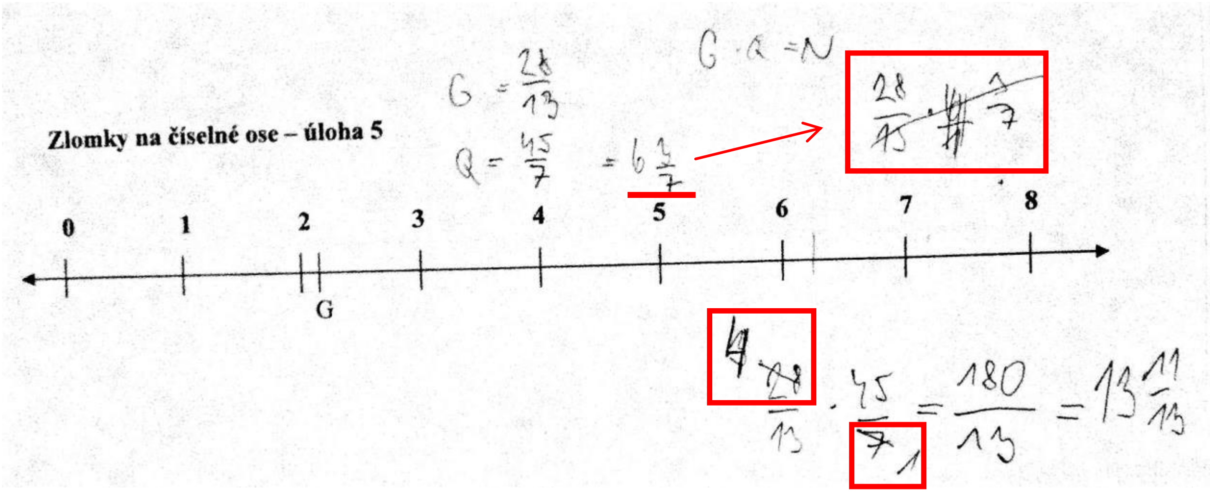


Obrázek 3.37 Úloha 2 – Honza

Vyšlo mu $\frac{19}{12}$. Zeptala jsem se ho, jestli tento zlomek je větší než jedna. Odpověděl, že ano. Protože, když vydělí devatenáctku dvanáctkou, tak je to větší než jedna (137 H). Výsledek Honza porovnal s odhadem (147 T – 160 H).

Následující úlohy byly zaměřeny na násobení zlomků. Při umisťování *Q* si Honza popletl, že *Q* bylo dáno zlomkem a ne desetinným číslem 7,11, proto chtěl umístit *Q* mezi čísla 7 a 8. (168 H) Aby zjistil skutečnou polohu bodu *Q*, využil převodu zlomku na desetinné číslo. Při odhadu výsledku rovnice využil přibližného desetinného čísla a vynásobil ho číslem 7. (187 H) Jeho odhad byl blízko výsledku rovnice. Při umisťování *N* ještě určil, že bude blíž k polovině.

V další úloze jsem Honzu nechala odhadnout, jakou hodnotu má bod *G*. Použil nejdříve desetinné číslo, následně ho převedl na smíšené číslo a nakonec smíšené číslo převedl na zlomek. V této úloze udělal chybu v krácení (obr. 3.38).

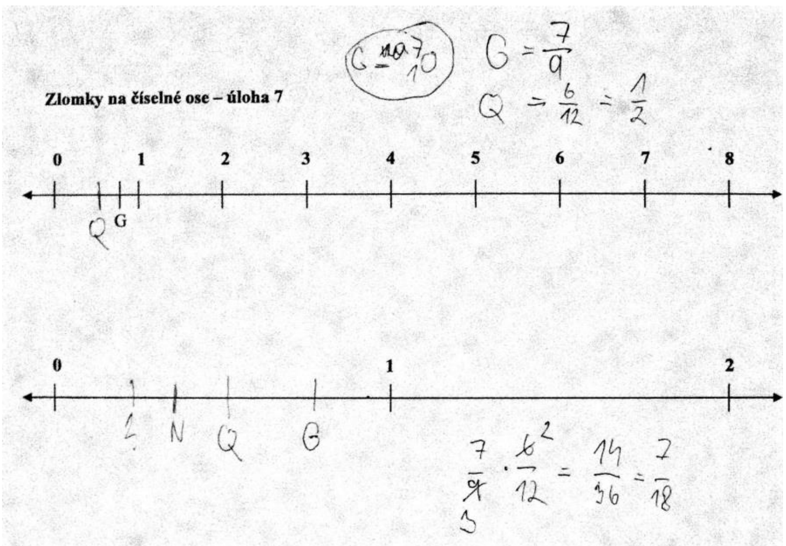


Obrázek 3.38 Úloha 5 – Honza

Dále si můžeme všimnout zápisu vpravo nahoře, kde chtěl Honza násobit zlomek se smíšeným číslem – začal násobit $\frac{6}{1}$, ale nevěděl, co má dělat se zbytkem smíšeného čísla. V této úloze použil osu s nejmenším měřítkem k umístění *N*.

V úloze 6 si Honza při odhadu velikosti *G* spletl desetinné číslo a smíšené číslo a následně špatně převedl smíšené číslo na zlomek. (288 H – 294 H) Výsledný zlomek násobení chtěl zkrátit třemi, což následně zavrhl. Ptala jsem se, zda je čitatel dělitelný třemi. Odpověděl, že ne, že ciferný součet není dělitelný třemi. (323 H)

V poslední úloze se měly násobit dva zlomky menší než jedna. Při odhadu násobení Honza opět využil převodů na desetinná čísla a ta vynásobil. K této úloze si vybral osu s největším měřítkem (obr. 3.39).



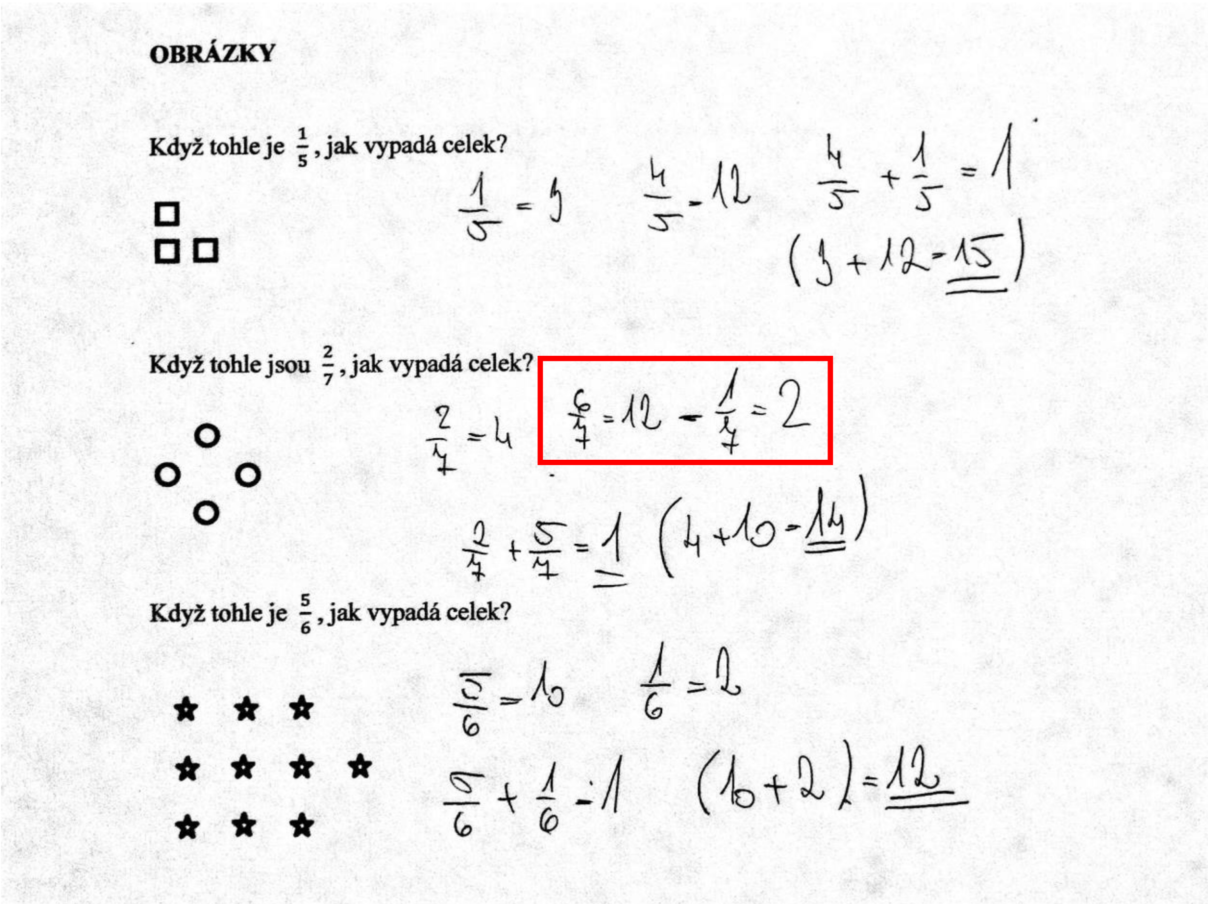
Obrázek 3.39 Úloha 7 – Honza

Nakonec řešil slovní úlohy. Ani s tímto úkolem neměl Honza větší problémy. Úlohu řešil postupně podle položených otázek. Početní úkony mu též nedělaly problémy.

Jindřiška

V úvodních úlohách (viz obr. 3.40) používala Jindřiška špatně symbol „rovná se“, jelikož nezapisovala celou rovnici, jedna pětina z neznámého celku jsou 3. V červeném rámečku na obr. 3.40 dále poukazuji na nesmyslnou rovnost, v níž Jindřiška používala ještě odčítání. Od $\frac{6}{7}$, které jsou rovny dvanácti kolečkám, odečítala $\frac{1}{7}$ čili dvě kolečka, aby dostala $\frac{5}{7}$, které jí chyběly do celku.

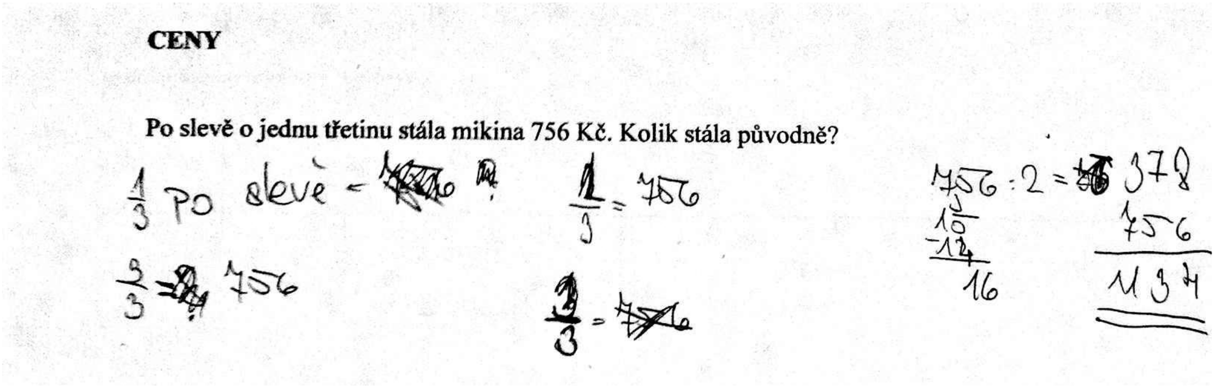
Jindřiška jako jediná tyto úlohy na zjištění celku vyřešila početně.



Obrázek 3.40 Celky – Jindřiška

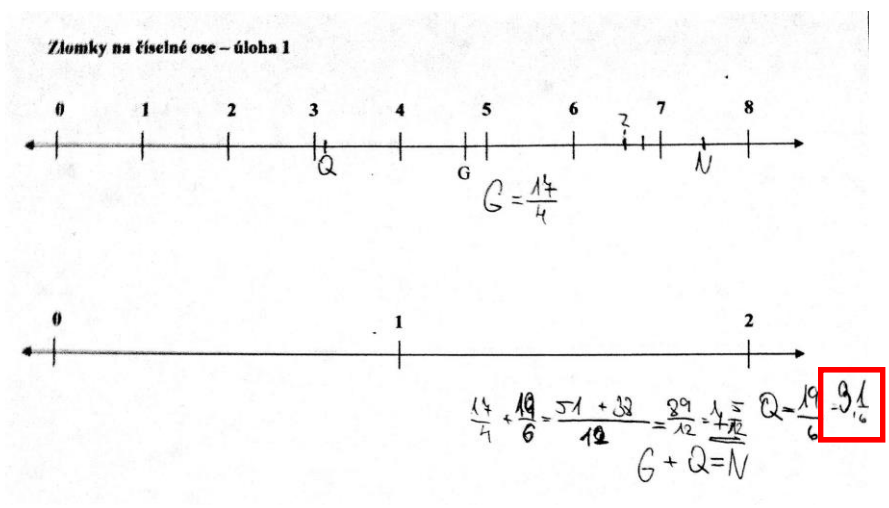
U první úlohy o slevách byla Jindřiška značně zmatená jejím zadáním. Pletla si, kolik byla sleva, kolik po slevě zbylo a co přesně znamená cena 756 korun („Takže jeden celek víme, to je těch sedm set padesát šest.“, „ Sedm set padesát šest je ta původní cena. Ne, sedm set padesát šest je ta původní cena, ale tu cenu zlevnili o jednu třetinu teda.“) (viz obr. 3.41).

(35 J – 57 J) S druhou úlohou již stejný problém neměla, jelikož to byla analogie. Dále při vysvětlování výpočtu této úlohy Jindřiška používala výraz vykrátit místo vynásobit.



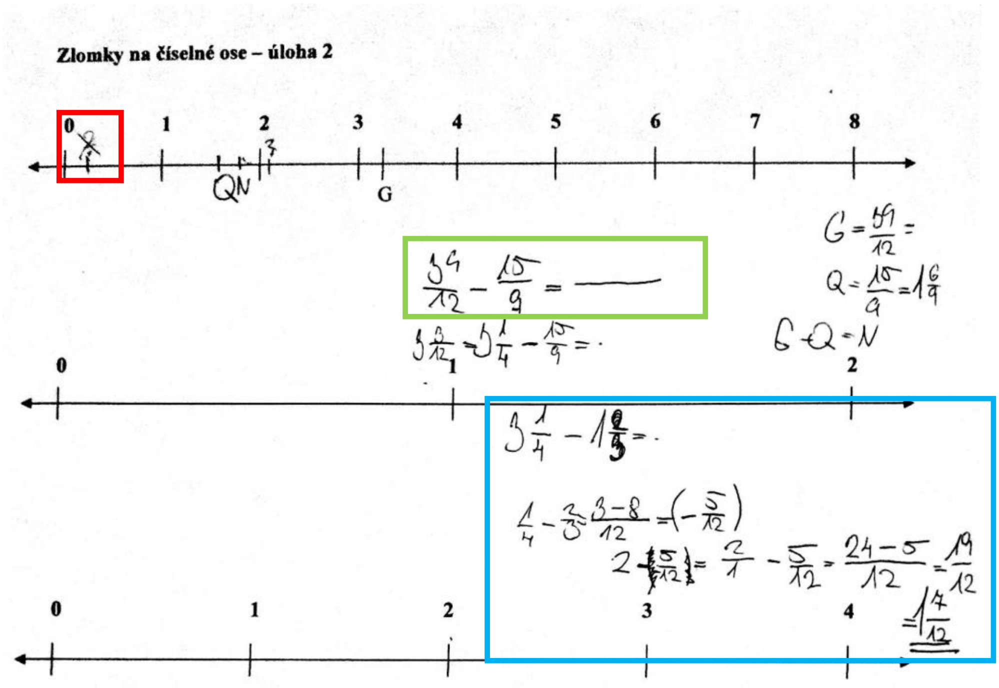
Obrázek 3.41 Ceny – Jindřiška

Následovaly úlohy se zlomky na číselné ose. Při odhadování stejně jako Honza využívala Jindřiška desetinné číslo, které následně převedla na zlomek. V první úloze (viz obr. 3.42) chtěla Q umístit mezi šestku a sedmičku nejspíše proto, že byl zadán zlomek $\frac{19}{6}$ a Jindřiška si myslela, že je to jako desetinné číslo 6,19. Do devatenáctky se vejde šestka třikrát, a tak to obrátila a počítala, kolikrát se vejde trojka do šestnáctky. (113 J – 122 J) Při převádění zlomku $\frac{19}{6}$ na smíšené číslo $3\frac{1}{6}$ postupovala Jindřiška tak, že trojku zapsala a jednu šestinu, která jí zbyla, zapsala jako desetinné číslo 3,1. (124 J – 128 J) Při odhadování součtu G a Q využila vzdálenosti od nuly „od oka“, ač to neuměla vyjádřit slovně. (145 J, 146 J) Jako společného jmenovatele čísla 4 a 6 nejprve určila 6, následně si hned uvědomila, že to tak není, a přepsala 6 na číslo 12. (157 J)



Obrázek 3.42 Úloha 1 – Jindřiška

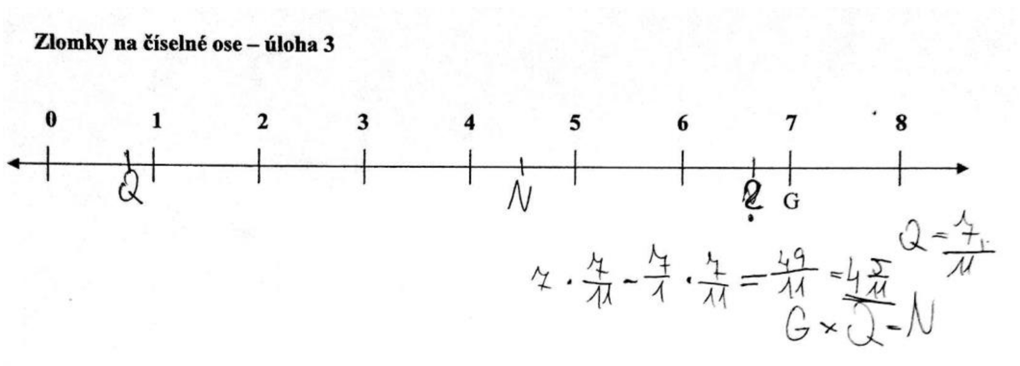
V úloze 2 (obr. 3.43) Jindřiška odhadla G jako $\frac{16}{3}$. Následně po otázce, kolik je to smíšeným číslem, se opravila a sdělila mi číslo desetinné, a to 3,1. Nakonec Jindřiška skončila u $\frac{10}{3}$. (198 J – 205 J) Při odhadu pozice bodu N Jindřiška umístila odhad k nule a po následné otázce, proč si to myslí, jsme přišly na to, že odečetla G od Q, což je obráceně, než je v zadání (červený rámeček v obr. 3.43).



Obrázek 3.43 Úloha 2 – Jindřiška

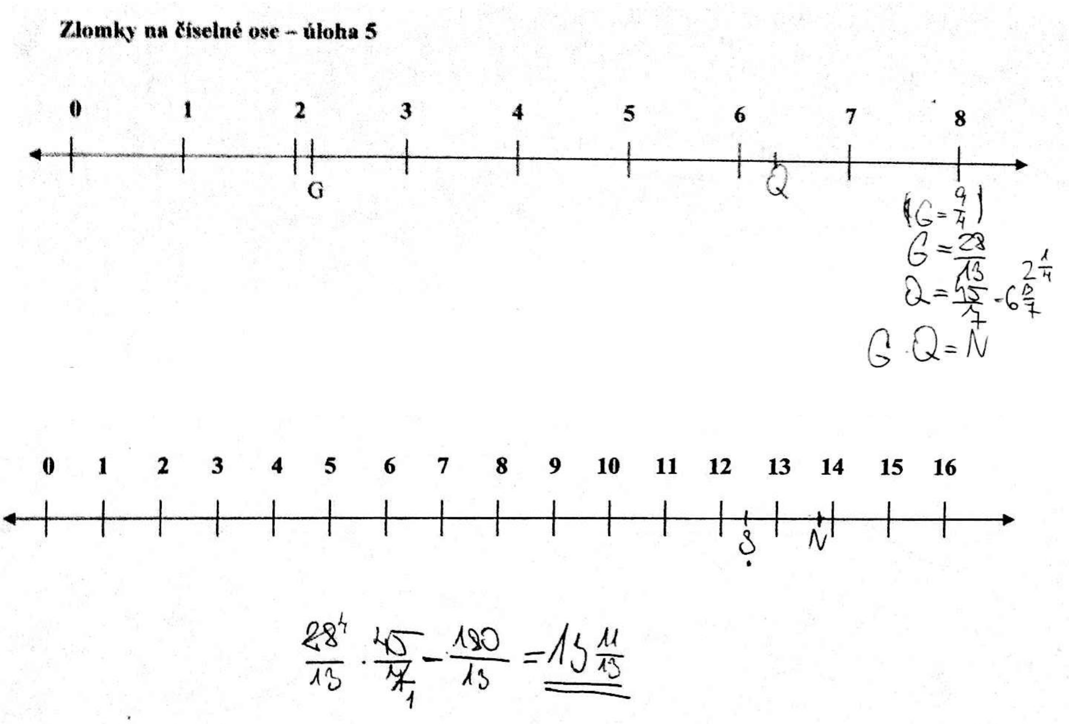
Při výpočtu chtěla Jindřiška začít krátit číslem 3 čísla 9 a 39. Neuvědomila si, že v odčítání to nelze (zelený rámeček v obr. 3.43). Následoval výpočet, kdy si zlomky převedla na smíšená čísla a odečítala (modrý rámeček v obr. 3.42). (222 J – 250 J) Problém nastal pouze v místě, kdy odčítala $2 - \frac{5}{12}$. Ačkoliv to řekla dobře, byla nejistá a napsala $2 - \left(-\frac{5}{12}\right)$.

V úloze 3 (obr. 3.44) při odhadu pozice výsledného bodu N postupovala Jindřiška graficky „od oka“. Sedmkrát za sebou nanesla od Q vzdálenost Q od nuly (261 J). Nanesla vzdálenost osmkrát a ne sedmkrát. Při výpočtu Jindřiška počítala 7 krát 7 je 14, protože si spletla násobení a sčítání. (266 J)



Obrázek 3.44 Úloha 3 – Jindřiška

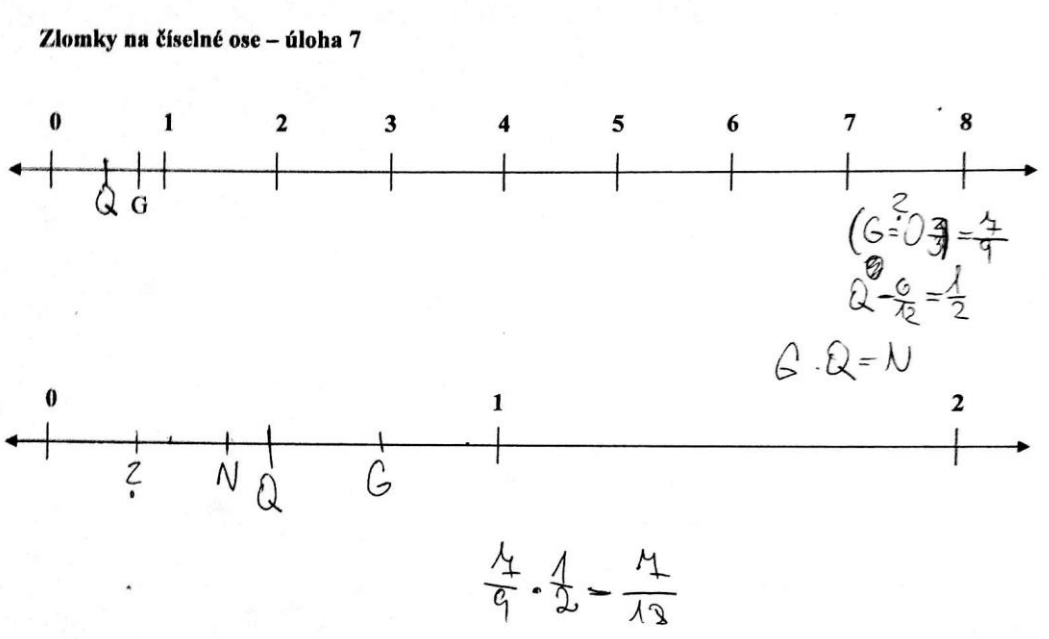
V úloze 5 (obr. 3.45) odhadla Jindřiška bod *G* jako $\frac{17}{2}$. Vysvětlila mi to tak, že kvůli dvěma celým si řekla, že to budou poloviny, a těch sedmnáct odhadla tak, že úsečku mezi dvojkou a trojkou si rozdělila na sto částí (setiny) a bod *G* je od dvojky sedmnáct těchto částí (sedmnáct setin). (290 J, 293 J) Při odhadu výsledku rovnice $G \cdot Q = N$ si spletla násobení se sčítáním. (300 J, 306 J, 308 J) Zde musela využít číselnou osu s menším měřítkem. S následujícím výpočtem neměla Jindřiška problém.



Obrázek 3.45 Úloha 5 – Jindřiška

V úloze 6 při odhadu vzdálenosti mezi číslem 5 a *G* hledala Jindřiška zlomek, který je větší než $\frac{1}{2}$ a v čitateli má také jedničku. Pak si myslela, že to je $\frac{7}{4}$ nebo $\frac{7}{3}$, ale hned se sama opravila, že to tak nebude. Následně řekla $\frac{7}{49}$. Následovalo zkrácení na 0,7 (desetinné číslo), po opravě na $\frac{1}{7}$ (neustále viděla desetinné číslo 5,7), kde jsme se následně shodly, že $\frac{1}{7}$ není větší než $\frac{1}{2}$. Dále navrhla $\frac{2}{14}$, což je opět $\frac{1}{7}$. Když jsem jí řekla, ať si zlomek představí na modelu koláče, přišla na $\frac{2}{3}$. (345 J – 374 J) Při odhadu součinu Jindřiška usoudila, že *N* bude ležet blízko k číslu 6. Po výpočtu jí vyšel výsledek $4\frac{4}{33}$. Číslo *N* chtěla Jindřiška umístit k $4\frac{1}{2}$. Když jsem jí řekla, ať si představí koláč, rozdělí ho na 33 kousků a vybarví 4 kusy, tak si uvědomila, že $\frac{1}{2}$ by musela být kolem $\frac{16}{33}$. (410 J – 420 J)

V úloze 7 (obr. 3.46) odhadla Jindříška bod *G* pomocí úlohy 6 (*G* odhadla na dvě třetiny). Tuto úlohu se rozhodla řešit na ose s největším měřítkem, kam také přepsala *G* a *Q*. Při odhadu umístila *N* za jedničku, radši jsem ji upozornila, že opět násobíme. Pak se Jindřiška rozhodla umístit odhad *N* mezi nulu a *Q*.



Obrázek 3.46 Úloha 7 – Jindřiška

Nakonec přišla slovní úloha. Hned z počátku, když Jindřiška počítala dvojnásobek surovin (mouky), si spletla početní operaci násobení se sčítáním (viz oranžový rámeček na obr. 3.46). Převedla oba zlomky na společného jmenovatele a rozšiřovala. Po upozornění, že operací je součin, začala se správným postupem. (469 J – 471 J) U dvojnásobku množství másla jsem chtěla, aby mi sdělila, kolik másla je potřeba. I když tam měla napsané, že balení je čtvrtkilové, nedokázala sama z této informace zjistit, kolik másla je potřeba. (474 J – 484 J)

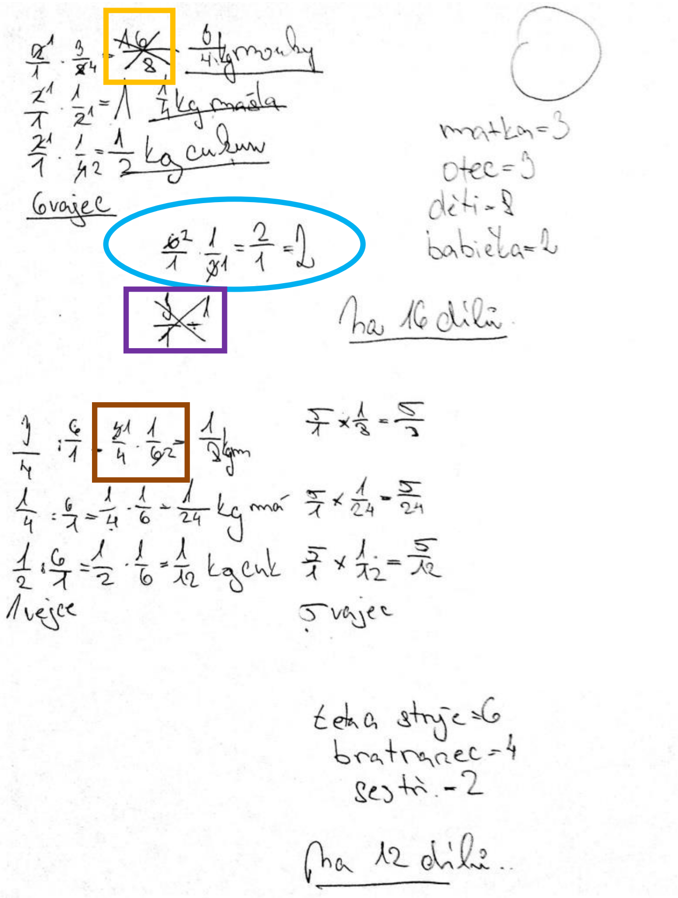
Při krájení koláče na díly, kdy po třech dílech sní rodiče, jak je to napsané v zadání slovní úlohy, myslela Jindřiška, že každý z rodičů sní jeden a půl dílu, což by znamenalo, že dohromady sní 3 díly. (497 J) Při počítání, kolik kusů sní děti, prakticky využila případu, kdy potřebovala zjistit, kolik je $\frac{1}{3}$ ze šesti, kde tento případ převedla na násobení zlomků (viz modrý ovál na obr. 3.47). (504 J) Ale když zjišťovala, kolik sní babička, chtěla číslo 3 dělit $\frac{1}{3}$. Když počítala, kolik sní děti, tak násobila, jelikož ve slovní úloze bylo napsáno, že děti sní o třetinu více. Když počítala, kolik sní babička, tak dělila, jelikož ve slovní úloze bylo napsáno „méně“ („A babička naopak o jednu třetinu méně než každý z rodičů, takže tři jedniny děleno jedna třetina.“). Následně chtěla odčítat $3 - \frac{1}{3}$ (viz fialový obdélník v obr. 3.46). (506 J – 514J)

Při výpočtu surovin na 5 vajec, vzala Jindřiška 6 vajec jako základ a od základu chtěla odečíst $\frac{1}{6}$. (521 J – 528 J) Ale dále již nevěděla, jak na to, tak jsme šly krok po kroku, nejdříve suroviny na 1 vejce a následně na 5 vajec. Při výpočtu, kolik mouky je potřeba na jedno vejce, dělila $\frac{3}{4} : \frac{6}{1}$, kde následně dělení převedla správně na násobení (v hnědém obdélníčku na obr. 3.47).

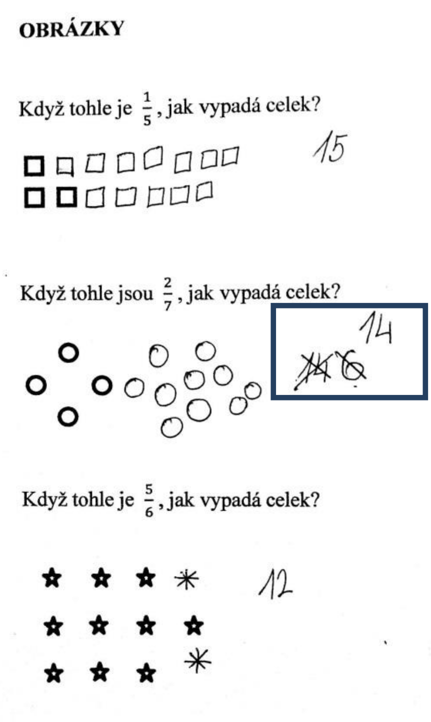
Při počítání, kolik sní bratranec, odpověděla, že osm. Myslela, že „každé z dětí“ znamená dohromady. Následně to opravila. (551 J – 555 J)

Lucie

První sadu úloh (obr. 3.48) řešila Lucie dokreslováním celku. Při řešení druhé úlohy si zjistila $\frac{1}{7}$ (dvě kolečka) a domalovala $\frac{5}{7}$, i když na obrázku následně číslo 14 škrtla a napsala číslo 6 (viz modrý obdélník na obr. 3.48), protože napsala, kolik zbývá sedmin do celku (počítala tedy, že v zadání je $\frac{1}{7}$). (27 L – 41 L)



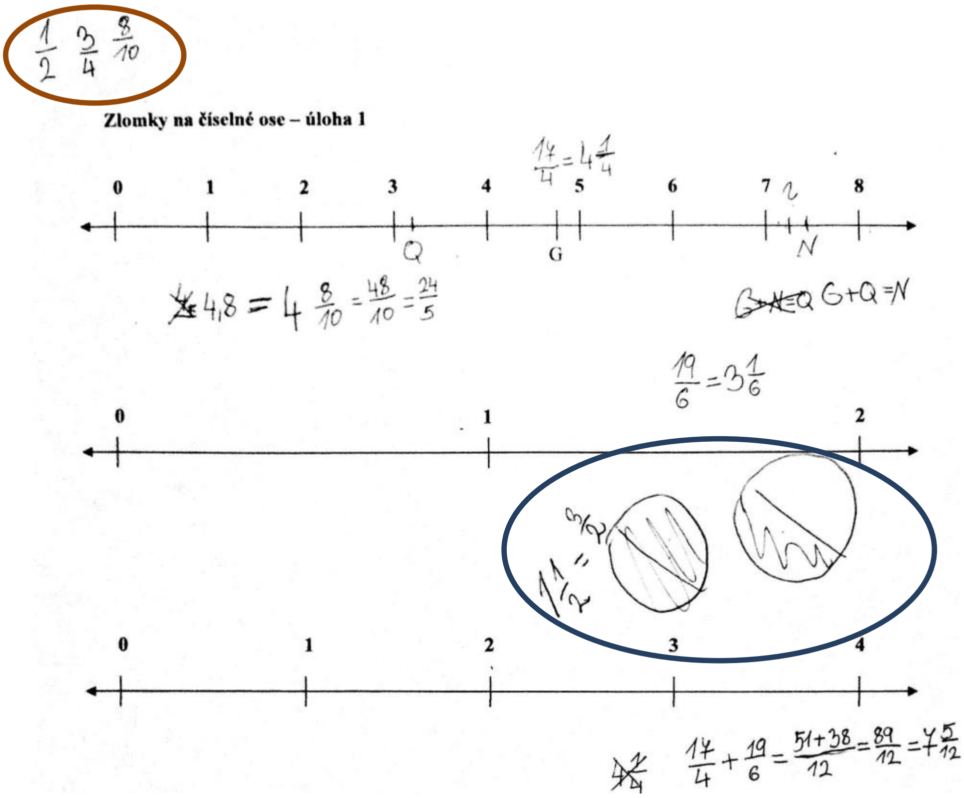
Obrázek 3.47 Slovní úloha – Jindřiška



Obrázek 3.48 Celky – Lucka

Následují slovní úlohy, kdy potřebujeme vypočítat celek. Při řešení první slovní úlohy chtěla Lucie částku 756 dělit třemi místo dvěma. Po následném zopakování slovní úlohy již dělila dvěma a zjistila $\frac{1}{3}$ ceny mikiny. Pak vynásobila třemi a zjistila původní cenu mikiny. (60 L – 71 L) V následující úloze postupovala stejně.

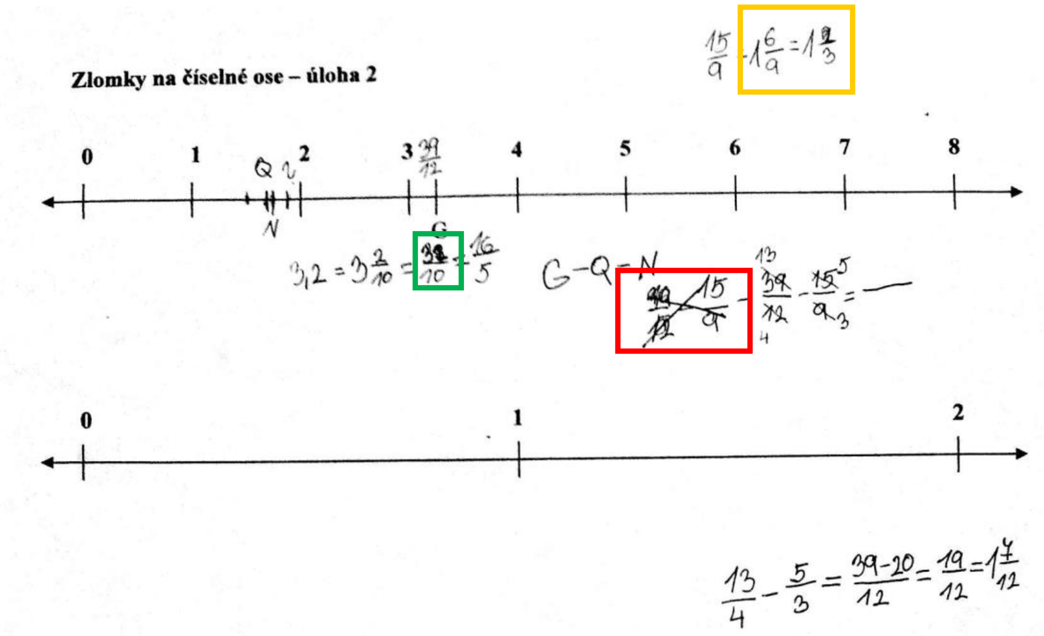
Následuje sada úloh se zlomky na číselné ose. V první úloze (obr. 3.48) při odhadování, jakou hodnotu má *G*, si Lucie spletla desetinné číslo 4,7 se $\frac{4}{7}$. (88 L – 95 L) Odhad *G* tedy vyřešila s mou pomocí přes desetinné číslo a následným převodem přes smíšené číslo se dostala ke zlomku. V hnědém oválu na obr. 3.48 vidíme, jak odvozovala přepis desetinného čísla 0,8 na zlomek. (115 T – 118 L) V modrém oválu vidíme, jak převáděla smíšené číslo na zlomek, opět jsem jí musela dopomoct, řekla jsme jí, ať to zkusí pomocí jednoduššího příkladu $1\frac{1}{2}$. (122 T – 132 L) Když měla Lucie odhadnout součet *G* a *Q*, prakticky hned ji napadlo sčítat celky, i když k tomu využila náš odhad bodu *G*.



Obrázek 3.49 Úloha 1 – Lucka

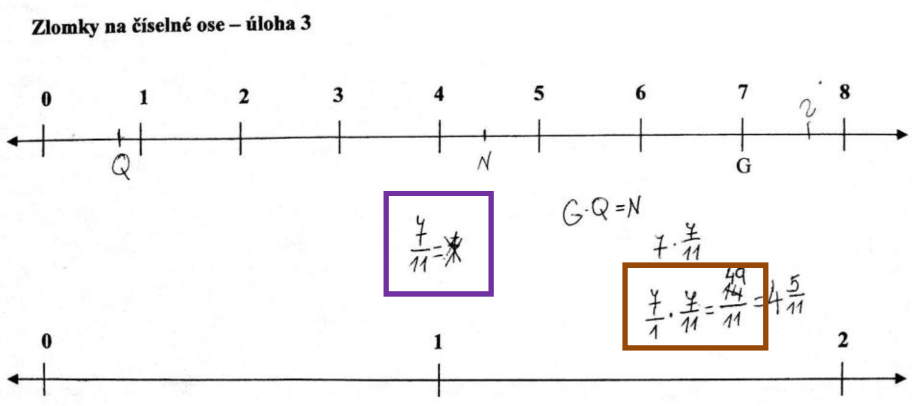
Když Lucka prováděla výpočet, nejdříve se bála a řekla, že to neumí, ale následně si vzpomněla, že musíme jít přes společného jmenovatele. Dále ve výpočtu chybu neudělala.

V druhé úloze (obr. 3.50) již Lucie neměla takový problém odhadnout *G*, až potom při převádění smíšeného čísla na zlomek udělala chybu (viz zelený obdélník v obr. 3.50), kde se však zřejmě jen přepsala. Při hledání pozice bodu Q udělala Lucka chybu v krácení smíšeného čísla, kdy $1\frac{6}{9}$ zkrátila na $1\frac{1}{3}$ (viz žlutý obdélník na obr. 3.50), kde to následně přepsala na $1\frac{2}{3}$. Dále řekla, že Q bude ležet mezi číslem 2 a 3 (239 L), což tvrdila, protože jí vyšlo číslo 2 v čitateli a 3 ve jmenovateli. Při odečítání se opět spletla a počítala s odhadem bodu G (viz červený obdélník na obr. 3.50). Před výpočtem si zlomky zkrátila. (267 T – 279 L)



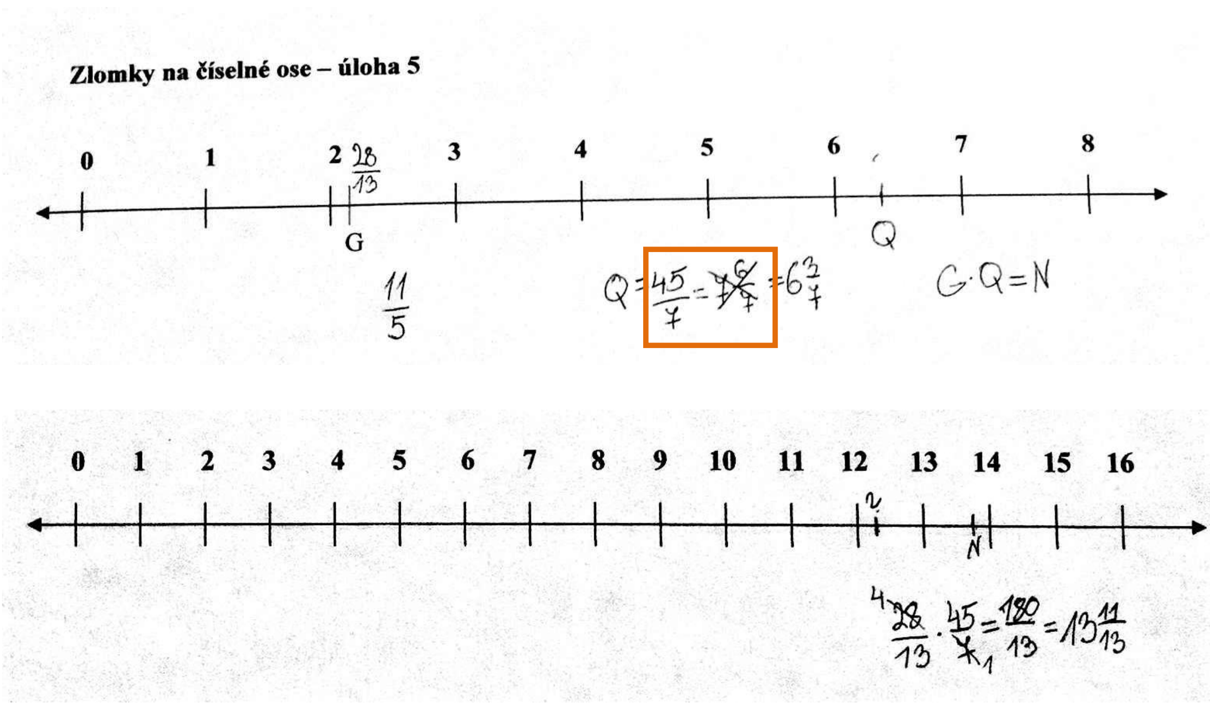
Obrázek 3.50 Úloha 2 – Lucka

Následovala úloha 3 (obr. 3.51), v níž Lucka měla násobit zlomek celým číslem. Při určování pozice bodu Q určila, že sedm jedenáctin je více než celek, jak vidíme ve fialovém rámečku na obrázku 3.51. Spletla si totiž čitatele se jmenovatelem. Při výpočtu, když přepisovala sedm celých na zlomek, mi sdělila, že je to 7,1, spletla si desetinné číslo 7,1 se zlomkem $\frac{7}{1}$ (327 L). Místo násobení čitatelů je vlastně sečetla (viz hnědý rámeček na obr. 3.51).



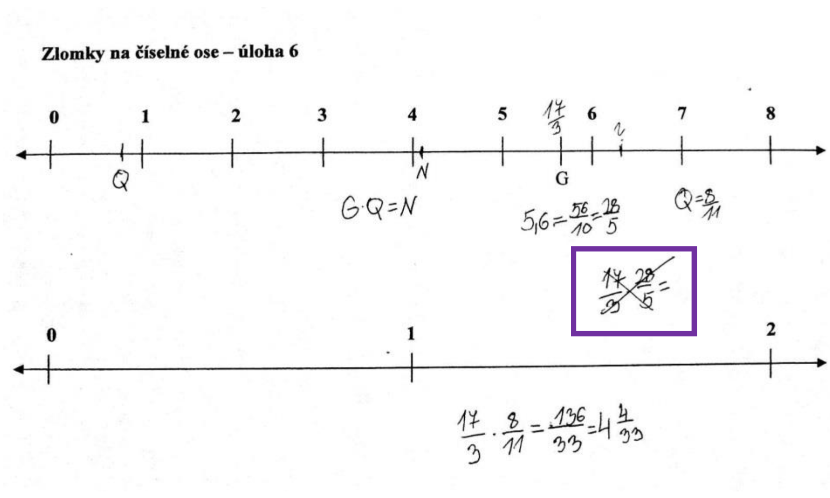
Obrázek 3.51 Úloha 3 – Lucka

V úloze 5 (obr. 3.52) měla Lucka vynásobit dva zlomky větší než 1. Když převáděla hodnotu *Q* na smíšené číslo, spletla se při počítání 7 krát 7, že je 39, proto jí vyšlo $7\frac{6}{7}$ (viz oranžový obdélník v obr. 3.52).



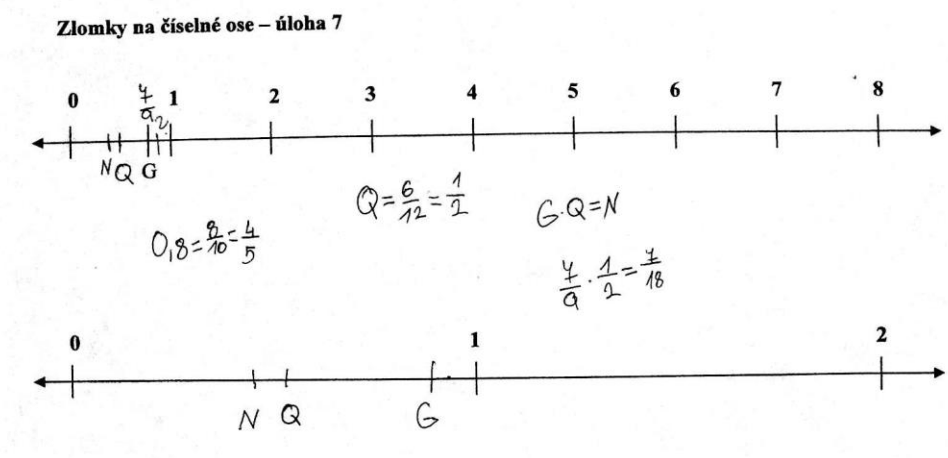
Obrázek 3.52 Úloha 5 – Lucka

Šestou úlohu (obr. 3.53) řešila Lucka stejně jako předchozí. Při odhadu výsledného *N* si myslela, že pokud násobíme „kousíčky“ (zlomky menší než jedna), dají nám více než jedna („455 T: ... Že ty kousíčku udělaj víc jak jednu? 456 L: Ehm. (Souhlas)“). Při následném výpočtu si napsala zlomky, kde místo *Q* použila odhad *G* (viz fialový obdélník na obr. 3.53).



Obrázek 3.53 Úloha 6 – Lucka

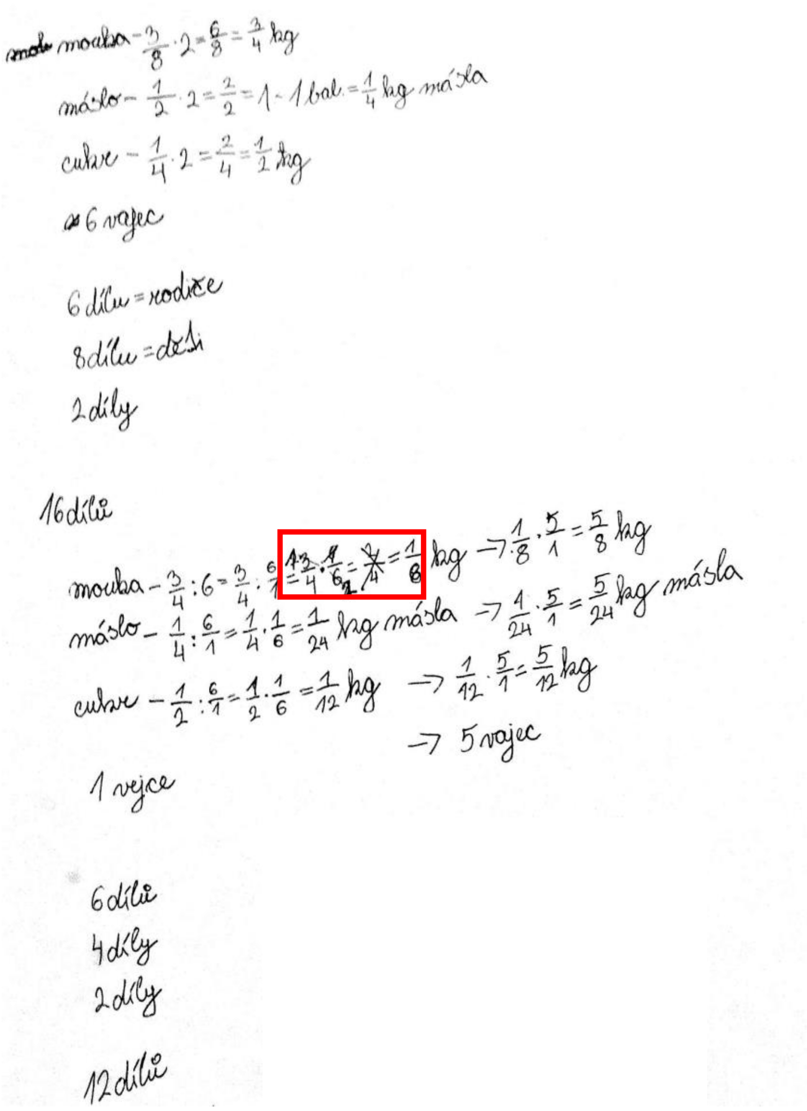
V poslední úloze (obr. 3.54), když Lucie označovala *Q* na číselné ose, věděla, že bude ležet v jedné polovině, ale když jsme se dostaly k tomu, zda $\frac{6}{12}$ je to samé jako $\frac{1}{2}$, tak váhala. Proto si měla zkusit zlomek zkrátit. Následně jsem se jí zeptala, zda by mi nemohla povědět další obměnu jedné poloviny. Odpověděla $\frac{4}{8}$. (480 T – 508 L)



Obrázek 3.54 Úloha 7 – Lucka

Jako poslední Lucku čekala slovní úloha (obr. 3.54) rozdělená do několika podotázek. Když Lucie násobila dvakrát $\frac{6}{8}$ mouky, řekla, že je to $\frac{6}{16}$. (543 L – 545 L) Vynásobila dvěma jmenovatele místo čitatele. Po opravě na $\frac{6}{8}$ chtěla vydělit zlomek dvěma, místo aby ho krátila. (550 T – 556 L) Při počítání, kolik je potřeba másla, jí vyšlo 1, ale nevěděla jednotky, řekla: „kilogramu“. Převod jednoho čtvrtkilogramového balení másla na kilogramy pro ni byl složitý. (558 T – 572 L) U výpočtu, kolik cukru je třeba, se zarazila u jednotky (viz také předchozí případ s máslem). (576 T – 580 L) U části, kolik je potřeba surovin na 5 vajec, chtěla Lucie nejprve zjistit, kolik je potřeba surovin na 1 díl (1 vejce). Chtěla tedy vydělit pěti (máme k dispozici 5 vajec), ale přitom bylo dáno, kolik surovin je na 6 vajec. Po několika návodných otázkách dospěla k tomu, že musí dělit šesti, aby zjistila, kolik surovin je potřeba na 1 vejce. (636 L – 661 L)

Když Lucie dělila $\frac{3}{4}$ kilogramu mouky šesti, udělala chybu – zkrátila zlomky v součinu $\frac{3}{4}$ a $\frac{1}{6}$ na $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$, a když je vynásobila, tak prohodila jmenovatele v druhém zlomku a napsala ho do čitatele. Tak jí vyšly $\frac{2}{4}$ (viz červený obdélník na obr. 3.55). Sama následně přišla na svou chybu a opravila ji. (673 L – 674 L)



Obrázek 3.55 Slovní úloha – Lucka

3.2.5 Shrnutí analýzy klinických rozhovorů se žáky

Předchozí analýzu klinických rozhovorů se žáky vyhodnotím v tabulce 3.2.

		Honza	Jindřiška	Lucka
Obrázky	**Řešení**	Grafické	Početní	Grafické
	Chyby	Žádné	Zápis „=“ Zápis výpočtů	Záměna odpovědí
Ceny	**„… o … na …“**	Pochopení textu	Nepochopení textu (co je celek)	Pochopení textu po opakovaném přečtení
	Početní chyby	V násobení (násobilka)	Při dělení Záměna slov „krátit“, „násobit“	Žádné
Úlohy s číselnými osami	**Odhady G**	Pomocí desetinných čísel	Pomocí desetinných čísel	Pomocí desetinných čísel
	Zobrazení Q	Přes desetinná čísla a smíšená čísla	Přes desetinná čísla a smíšená čísla	Přes desetinná čísla a smíšená čísla
	Početní chyby	Ú1: Nepozornost v zápisu Ú5: Krácení zlomků	Ú1: nesprávný společný jmenovatel Ú2: Odečítání desetinných čísel Ú3: Záměna početních operací Ú5: Záměna zlomku za desetinné číslo	Ú1, Ú6: Záměna zadaných hodnot s odhady Ú2: Nepozornost v zápisu Ú3: Záměna zlomku za desetinné číslo Ú5: Chyba při násobení
Slovní úloha	**Rozdělení**	Postupně	Postupně	Postupně
	Početní chyby	Žádné	Záměna početních operací Záměna početních operací díky signálním slovům v úloze („méně“)	Převod 1 čtvrtkilogramového balení másla na kg Nepozornost při krácení

Tabulka 3.2 Shrnutí analýzy klinických rozhovorů žáků

K výsledkům rozhovorů se vrátím ještě v následující části, kde budou výsledky rozhovorů se žáky dány do souvislosti s rozhovory s učiteli.

3.3 Rozhovory s učiteli

Cílem hloubkových rozhovorů s učiteli bylo zjistit, jaké didaktické praktiky používají vybraní učitelé matematiky při výuce zlomků (s důrazem na aditivní operace se zlomky), zda si učitelé vytvářejí vlastní metody či postupy a co považují za největší úskalí u tématu zlomky.

Ač plánované rozhovory nebyly časově náročné, musela jsem hledat učitele nejen na základě dostupnosti, ale hlavně na základě jejich ochoty věnovat mi čas. Nakonec se mi povedlo domluvit se se čtyřmi učiteli základních škol ze tří různých měst a s jednou učitelkou z gymnázia. Rozhovory se konaly ve sborovně či v kabinetech u jednotlivých učitelů.

3.3.1 Charakteristika dotazovaných učitelů

První rozhovor jsem prováděla na jedné základní škole v Kadani se dvěma vyučujícími DK a JP najednou (iniciály jmen). Oba dva učitelé mají aprobaci matematika a fyzika. Učitelka DK učí již 27 let bez tříleté mateřské dovolené čili celkem učí 24 let. Učitel JP učí 28 let. Rozhovor jsme vedli ve sborovně, jelikož na této škole učitelé nemají vlastní kabinet, a trval přibližně 20 minut.

Druhý rozhovor jsem vedla na základní škole v Jirkově s učitelem MM. Tento učitel učí s roční přestávkou 15 let, ale není aprobovaný a nemá žádné vysokoškolské vzdělání. Na této škole dále vyučuje informatiku. Zaměřuje se spíše na transmisivní výuku. Tento rozhovor se konal v učitelově kabinetě a trval kolem 20 minut.

Třetí rozhovor jsem vedla s učitelkou IP z gymnázia v Klášterci nad Ohří. Učí 25 let, z nichž učila 20 let na základní škole. Další předmět, který na škole vyučuje, je chemie. Z časových důvodů výuku zlomků zaměřuje pouze na zvládnutí početních operací s nimi. Tento rozhovor jsme vedly v prázdné třídě, jelikož kolegyně, se kterou sdílí kabinet, měla v té době neplánovanou schůzku. I tento rozhovor trval přibližně 20 minut.

Poslední rozhovor jsme prováděla na základní škole v Kadani s učitelkou KV. Učí již 36 let s pětiletou přestávkou na mateřské dovolené. Její další aprobace je zeměpis a její další funkcí na škole je výchovná poradkyně. Rozhovor se konal v kabinetě a trval 18 minut.

Učebnice, kterou učitelé KV, MM, DK a JP používají, je od autorů Odvárko a Kadleček (Prometheus), dále učitelka IP používá učebnici pro gymnázia od autorů

Hermana, Chrápavé, Jančovičové a Šimsy (Prometheus 2004), dále využívají různé sbírky a cvičebnice a také materiály, které nashromáždili během své praxe.

3.3.2 Popis rozhovorů

Otázky, které jsem kladla u rozhovorů s učiteli, jsem zaměřila na průběh výuky zlomků. Nejprve jsem se ptala, v jakém ročníku a do jaké hloubky se žáci poprvé setkají se zlomky. Dále jsem se ptala, jakých modelů využívají při výuce zlomků a také, zda si vytvářejí a používají i vlastní materiály. Následovalo několik otázek na početní operace se zlomky (např. zda při sčítání a odečítání zlomků hledají společného jmenovatele, resp. společný násobek jmenovatelů či nejmenší společný jmenovatel, resp. nejmenší společný násobek jmenovatelů) a v čem učitelé vidí největší úskalí, když žáci počítají se zlomky; co činí žákům největší problémy. Dále jsem se vyptávala, podle jakých učebnic učí a zda využívají i nějakých cvičebnic. Připravené otázky jsem využívala spíše volněji, kladla jsem doplňující otázky podle toho, jakým směrem se rozhovor ubíral.

Audiozáznamy rozhovorů jsem přepsala do protokolů, jejichž část je na ukázku k nahlédnutí v příloze 2. Celé přepisy jsou k dispozici v rámci projektu GAČR Kritická místa matematiky – analýza didaktických praktik učitelů.

3.3.3 Výsledky analýzy rozhovorů s učiteli

Výsledky analýzy rozhovorů s učiteli představím ve stejné struktuře jako v kapitole publikace Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů (Vondrová, Žalská, 2013), aby bylo možné mé výsledky srovnat s výsledky obou autorek.

a) Problémy a jejich příčiny

Podobně jako Vondrová a Žalská i já jsem zjistila, že u zlomků, jak učitelé MM, IP, JP, DK a KV zmiňují, je problémem osvojení si početních operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení) a také operace využívající ekvivalence dvou zlomků (krácení a rozšiřování). Učitelé JP a DK se shodují, že žákům dělá největší problém rozšiřování zlomků (JP 52: „…oni často nechápou, že se ten zlomek nezmění …, když ho rozšíříš, tak ho rozšiřuješ, tak já se čitatele a jmenovatele stejným číslem, to není, tam je stejný jenom to slovíčko vynásobím, to jako se musí odlišit no, no oni řeknou, já to vynásobím dvěma, nevynásobíš dvěma, to se ten zlomek změní.“ KD 53: „…tohle to je pro ně fakt problém, že jedna polovina, je to samý jako dvě čtvrtiny…“). Učitelé MM, JP a DK zmiňují, že pro žáky není problém pochopit jednotlivé operace zvlášť, ale následně je využívat v různých úlohách (MM 33: „Oni jako to téma, když se bere sčítání, to zvládnou, sčítání, odčítání to je prostě, to zvládnou, ale pak, jakmile se začnou psát už souhrnný, tak to je už šílenej hokej.“ DK 146: „No oni si to pak pletou, když se naučí, my je nejdřív učíme sčítat a odčítat, pak se učí násobit, dělit, takže oni zapomenou, jak se sčítá a jak se násobí.“ JP 148: „Ale jako jinak přitom, dokud se to nesmíchá, tak to jde, protože sčítání se dělá takhle a násobení takhle, ale jakmile v příkladu je sčítání, násobení, tak jako samozřejmě, sčítat čitatele jmenovatele mezi sebou a zase jsou experti, kteří násoběj tak, že to převedou na společnýho jmenovatele“). Nejčastější příčiny neúspěchu žáků učitelka KV spatřuje v nedostatečné znalosti malé násobilky, učitelé MM, JP a DK neúspěch přisuzují nedostatečnému zvládnutí a pochopení principu rozšiřování a krácení zlomků (viz výše) (MM 30: „Tam je největší problém asi v tom, v tom, že když už najdou společnýho jmenovatele, tak neupravujou třeba čitatele, protože oni hoděj společnýho jmenovatele, ale sečtou čitatele.“).

b) Didaktické postupy a techniky

Konceptuální porozumění

Učitelé MM, IP, KV, DK i JP se shodují, že názornost je velmi důležitá (DK 38: „Protože na ty zlomky, tam to chce názorně, názorně, názorně.“), a dále uvádějí modely, které ve výuce zlomků využívají, a to model koláče, pizzy (kruhový model) (KV 38, IP 14, DK 18, 19, JP 20), čokolády (obdélníkový model) a číselné osy (úsečkový model) (MM 39: „…abychom přišli na znázornění zlomků na číselné ose, tak vlastně udělám jeden dlouhej obdélník, rozdělím to, a pak jakoby krásně ten obdélník nahoře smažu a oni to viděj.“ KV 44: „Znázorňujeme na číselné ose samozřejmě, oni to musí na tý číselný ose znát a tam se dostáváme hlavně s desetinným zlomkem a ten desetinný zlomek dokážeme postupně krátit, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{10}$.“). Ani jeden z dotazovaných učitelů zřejmě žákům neuvádí diskrétní model, jako je např. pytlík s kuličkami (alespoň se o tom v rozhovoru nezmínili). Pomocí spojitých modelů učitelé modelují princip ekvivalence a tedy i postup krácení zlomků: na kruhovém modelu v činnostním učení to dělá učitelka KV (žáci si vyrobí ze čtvrtky či z barevných papírů několik kruhových modelů, kde jeden kruh nechají celý, další kruh jiné barvy rozstřihnou na poloviny, další na čtvrtiny, další na šestiny, případně i na osminy; ve výuce se pak tyto pomůcky používají při určování části celku a také při rozšiřování a krácení, kde si žáci vezmou jednu polovinu, přes tuto polovinu přiloží dvě čtvrtiny a tak vidí, že se dokonale překrývají, a tedy jsou stejné) a pomocí zlomkovnic učitelé DK a JP (jde o kruhy, kde jeden je prázdný a další jsou rozděleny na poloviny, čtvrtiny, pětiny, osminy a jsou také barevně odlišeny, následně se jednotlivé části na sebe přikládají a žáci tedy vidí, že zlomky např. $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$ jsou stejné).

Procedurální zběhlost

Učitel MM svým žákům ukazuje sčítání a odčítání zlomků v jednotlivých etapách (ve zkratce: nalezení společného jmenovatele, úprava čitatelů, následně sečíst čitatele), jež jsou popsány v přepisu rozhovoru MM 79-87. Učitelka IP konstatuje, že pro zvládnutí operací je podstatné procvičování. Možná to bude tím, že IP učí na gymnáziu, kde je výuka koncipovaná jinak než na základní škole (IP 21: „Hm, no oni to, ono je to hloupý říct, ale ono i časově je člověk tlačený, takže ono už i ty samy prezentace, zjistila jsem, že jsem už ve skluzu, že jsem toho využívala, a pak teda je to na úkor procvičování teda, když si hrajeme, já s tímhle nemám dobrou zkušenost. Takže pak hodně počítat.“).

Motivace

Učitelka IP motivuje žáky takto: „ … a teďkon máte to nejhorší za sebou, teď nás čeká v podstatě už to jednodušší, násobení, dělení …“; toto žákům sdělí po zavedení operace sčítání a odčítání zlomků. Ostatní učitelé se o motivaci vůbec nezmínili.

3.3.4 Shrnutí rozhovorů s učiteli

V úvodu rozhovorů s učiteli jsem byla překvapená, že v některých školách již v pátém ročníku žáci sčítali zlomky se stejným jmenovatelem a na jiných školách se žáci seznámili pouze s tím, co je celek a jeho část. (Ovšem v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání platném v době rozhovorů se zlomky na prvním stupni vůbec neobjevují; v nově upraveném RVP pro ZV se již propedeutika zlomků a sčítání zlomků se stejným jmenovatelem na první stupeň vrátila.)

Učitelé využívají hlavně kruhových modelů, kdy se žáky krájejí koláče či pizzy, a také obdélníkový model, kdy lámou čokoládu. Využívají i číselnou osu, kdy buď přecházejí z obdélníkového modelu jako MM nebo zakreslují zlomky pomocí desetinných zlomků jako KV. K výuce zlomků využívá učitelka DK a učitel JP zlomkovnice (nejčastěji kruhové modely), nástěnné tabule, kde žáci vidí princip rozšiřování a krácení zlomů, a také digitální učební materiály, které si sami vytvářejí. Učitelka KV ve výuce zlomků využívá činnostního učení.

K procvičení početních operací se zlomky učitelé často využívají sbírky úloh a vlastní materiály, které za svou praxi nashromáždili. Učitelé DK, KV a JP se snaží žákům názorně ukázat, co jsou zlomky a jak se s nimi pracuje. Zaměřují se tedy spíše na pochopení pojmu zlomek než na množství vyřešených úloh.

Učitelé také zmiňují chyby, kterých se žáci dopouštějí v tématu zlomky. Tyto chyby jsou zmíněny níže v souvislosti s rozhovory se žáky.

V neposlední řadě zmíním problém nuly ve zlomku, který nebyl v zadaných úlohách pro klinické rozhovory se žáky, ale učitelé JP a DK ho v našich rozhovorech zmiňují. Hlavně tedy umístění nuly ve jmenovateli, kde si žáci pletou tuto skutečnost s nulou v čitateli.

3.3.5 Shrnutí rozhovorů s žáky a rozhovorů s učiteli

V tomto oddíle se budu věnovat těm aspektům rozhovorů, které se objevily jak v rozhovorech s učiteli, tak s žáky.

Žákům dělalo největší problém odhadování hodnot na číselné ose. Pomáhali si desetinnými čísly a tím i desetinnými zlomky, se kterými se v reálném životě setkávají více než se zlomky. O využívání souvislostí s desetinnými čísly hovořili explicitně učitelé KV a JP. V početních operacích žáci dělali početní chyby; hlavně v malé násobilce, což ovlivňuje krácení a rozšiřování a určování nejmenšího společného násobku, a tedy nejmenšího společného jmenovatele. Tuto obtíž zmínila učitelka KV a učitel JP. Když žáci našli společného jmenovatele, následně špatně rozšířili čitatele, nebo ho vůbec neupravili. Na tento problém upozornili učitelé MM, DK a IP. Objevily se i chyby v zápisu (prohození čitatele a jmenovatele), i když bylo vidět, že početní algoritmy mají žáci zažité. Dále se vyskytly chyby v terminologii, kdy žáci říkali, že „dělí“ zlomek místo „krátí“ zlomek nebo „násobí“ místo „rozšiřují“. Stejný jev popisují učitelé MM a IP.

Největší problém spatřuji stejně jako všichni mnou tázaní učitelé v pochopení, co zlomek vůbec vyjadřuje. Žáci měli problémy s pochopením textu slovní úlohy, což učitelé KV, MM, JP a DK zmiňují i v rozhovorech. I když si žáci úlohu přečetli několikrát, neuměli odpovědět na otázky, které vyplývají z textu.

Dále též bylo učiteli řečeno, že žákům dělá problém, jak zmiňuje učitelka IP, odečítání smíšených čísel, kdy mají od menší zlomkové části odečíst větší zlomkovou část. Tento problém je možno vidět v klinickém rozhovoru s Jindřiškou v úloze 2.

4 *Závěr*

V úvodu diplomové práce je nastíněno pět otázek, jejichž zodpovězení bylo předmětem této práce.

- Jak přistupují k zavedení zlomků a operací s nimi nejčastěji používané učebnice?
- Jaké řešitelské strategie použijí žáci u vybraných úloh zaměřených na zlomky a jaké obtíže jsou překážkou v jejich úspěšném řešení? Jaké jsou jejich představy zlomků?
- Jaké didaktické praktiky používají vybraní učitelé matematiky při výuce zlomků (s důrazem na aditivní operace se zlomky)?
- Jedná se o běžné praktiky nebo si učitelé vytvářejí vlastní metody či postupy?
- Co považují vybraní učitelé za největší úskalí u tématu zlomky?

První stanovený cíl, tj. jak přistupují k zavedení zlomků a operací s nimi nejčastěji používané učebnice, jsem zjišťovala na základě analýzy těchto učebnic. Většina mnou analyzovaných učebnic používá při modelování úvodních situací, jež se zabývají početními operacemi mj. sčítáním zlomků, spojitých modelů (nejčastěji model kruhový). Pouze v učebnici Matematického ústavu (2000) jsem narazila na využití diskrétního modelu, a to v prvním díle učebnice, kdy se autoři zabývají zaváděním zlomků. Většina učebnic, které jsem analyzovala, byla zaměřená na pochopení kalkulu. Vycházím z toho, že většina učebnice používá aritmetických úloh již od začátku zavedení početních operací. Autoři učebnice Matematického ústavu se zaměřují na celkové pochopení dané problematiky tak, že využívají ve větším množství slovních úloh, jež modelují reálné situace, se kterými se žáci mohou setkat v běžném životě. Také je důležité ukázat žákům různé druhy úloh, kde se žáci setkají se zlomky. Učebnice Matematického ústavu má největší škálu různých druhů úloh, a to slovní, aritmetické, „Najdi a oprav chybu“, „Napište slovní úlohu“, součtové a rozdílové hrozny, magické čtverce a egyptské trojúhelníky a čtverce.

Druhý stanovený cíl jsem zjišťovala na základě provedených klinických rozhovorů s třemi vybranými žáky. Počet žáků je samozřejmě malý, nelze tedy dělat zobecnění. Jde spíše o identifikaci jevů, které se v jejich řešení objevily. Největším úskalím pro žáky bylo zakreslit jednotlivé hodnoty zlomků na číselné ose a odhadnout hodnotu zlomku pro zakreslený bod na ose. Aby tento druh úloh žáci vyřešili, využívali odhadů desetinných čísel, které následně převáděli na smíšená čísla a dále na zlomky. Dále se ukázalo, že žáci k vyřešení zadaných úloh využívají přednostně desetinná čísla, i když byla úloha jednoznačně zadaná ve smyslu, že zakreslený bod mají vyjádřit v podobě zlomku. Lze tedy říci, že žáci o hodnotě zlomku nemají reálnou představu. Důvodem může být, že v běžném životě se se zlomky převážně nesetkávají a ve výuce na to nebyl kladen dostatečný důraz.

Třetím cílem mého zkoumání bylo zjistit u zkušených vybraných učitelů, jaké didaktické praktiky používají při výuce zlomků. Dotazovaní učitelé nejčastěji využívají spojitých modelů, kterými jsou modely kruhové, obdélníkové a čtvercové. Ty se objevují také v učebnicích. Učebnici, kterou mají učitelé nejčastěji k dispozici, je od autorů Odvárko a Kadleček (čtyři učitelé z pěti). Učitelům pouze učebnice nestačí, a tak využívají různých zdrojů, jako jsou sbírky úloh či materiál nashromážděný za roky praxe.

A tím se dostávám ke čtvrtému cíli práce. Těmito metodickými pomůckami jsou např. modely (zlomkovnice), jež si žáci sami vytvářejí vystřihováním z papíru a následně s nimi pracují tak, že je různě překrývají, čímž se názorně učí pochopit téma rozšiřování či zkracování zlomků. Dále učitelé používají magnetickou tabuli, zlomkovnici průsvitnou a interaktivní tabuli. Učitelé se shodují, že názornost (např. načrtnutí obrázků, vystřihování modelů, překrývání jednotlivých modelů při rozšiřování či zkracování zlomků atd.) v tomto tématu je nezbytnou součástí výuky.

Posledním stanoveným cílem bylo zjistit, v jaké části tohoto tématu vybraní učitelé spatřují největší úskalí a jak je překonávají v rámci výuky. Nejvíce žáci chybují u početních operací se zlomky, které souvisí se sčítáním a odčítáním zlomků s různými jmenovateli, což je úzce spjato se znalostí rozšiřování a krácení zlomků. Příčinou jsou nedostatky ve znalosti malé násobilky, neboť při těchto početních operacích musejí žáci zlomky převést na stejného jmenovatele a čitatel tak vynásobit číslem, kterým vynásobili původního jmenovatele. Dále podle učitelů žáci nejčastěji chybují v tom, že rozšíří jmenovatele na společného jmenovatele, ale opomenou rozšířit čitatele.

Učitelé též uvedli, že když jsou žákům vysvětleny aditivní a multiplikační operace se zlomky, tak si žáci jejich algoritmy pletou (např. při sčítání zlomků sečtou čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem).

Další zásadní úskalí učitelé spatřují ve slovních úlohách, neboť žáci mají velké obtíže porozumět samotnému textu. Nejsou schopni rozeznat, jakou početní operaci mají pro konkrétní úlohu použít. Tento problém vyvstává zřejmě z nedostatku představivosti žáků z reálného života, neboť slovní úlohy vycházejí z praxe. Má vize do budoucna je spíše skeptická. Chtěla bych poukázat na skutečnost, že z nejstarší odborné literatury (staré téměř sto let) zmíněné v této práci vyplývá, že nejčastější chyby, kterých se žáci dopouštějí při aditivních operacích, se nemění. Možná je to tím, že se žáci se zlomky v reálném životě prakticky nesetkávají a tak nemají ani potřebu zlomky pochopit a pracovat s nimi. Překvapilo mne, že i nyní je výuka zaměřená spíše na zvládání početních operací a povrchní pochopení učiva a už méně se zaměřuje na celkové pochopení dané problematiky. Učím na střední odborné škole, a když narazím na téma lomené výrazy a početní operace s nimi, tak žáci dělají základní chyby, které jsou popsány v odstavci 2.3. Pokud se vrátím k úloze, kdy mají sečíst dva zlomky, kde v čitateli a ve jmenovateli jsou čísla, tak to dokáží bez většího problému, dokonce i popíší postup, ale tento postup již neumí aplikovat, pokud se místo čísel objeví písmena či závorky s mnohočleny.

Podle mnou získaných výsledků a také podle mých zkušeností by bylo zajímavé vystavět soustavu takových úloh, která by danou problematiku žákům pomohla lépe pochopit a posunout tak proces poznání do větší hloubky. Možná by bylo dobré rozšířit tuto práci právě o hledání soustavy těchto úloh. Práce se samozřejmě dá rozšířit počtem zkoumaných učitelů a žáků.

Při tvorbě práce jsem se seznámila s některými anglicky psanými odbornými texty a zejména s přístupy některých učebnic k výuce zlomků. To bude pro mou učitelskou praxi důležité. Dále jsem získala inspiraci k výuce zlomků od učitelů (např. model zlomkovnice). Důležitá pro mě byla také zkušenost s klinickým rozhovorem s žáky zejména s analýzou jejich řešitelského procesu. To je dovednost, která je pro každého učitele nezbytná.

5 *Literatura*

BEČVÁŘ, J. a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha: Prometheus, 2001.

BLAŽKOVÁ, R., SYTAŘOVÁ, I. *Několik poznámek k Didaktice matematiky*. s. 5., In: [online]. 2005 [cit. 8.5.2013]. Dostupné z: www.ped.muni.cz/wmath/Staff/Blazkova_Ruzena/clanekCPV.doc

BRUECKNER, L. J. *The Elementary school journal: Analysis of Errors in Fractions*. Chicago: The University of Chicago Press, 1928. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/995217

GÁBOR, O., KOPANEV, O., KRIŽALKOVIČ, K. *Teória vyučovania matematiky* 1. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladatelství. 1989.

HEJNÝ, M. Zlomky. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004, 343–355.

HEJNÝ, M. Mechanismus poznávacího procesu. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky:* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004, 23–42.

HEJNÝ, M., KUŘINA, F. *Dítě, škola a matematika*: *Konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009.

HEJNÝ, M., LITTLER, G. Transmisivní a konstruktivistický přístup k vyučování. In Stehlíková, N.(ed.), *Náměty na podnětné vyučování v matematice:* Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2007, 11–30.

HEJNÝ, M., STEHLÍKOVÁ, N. Zkoumání číselných představ dítěte a žáka. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 1999, roč. 44, č. 2, 148–167.

JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1978.

KALHOUS, Z., OBST. O., a kol. *Školní didaktika.* 1. vydání. Praha: Portál, 2002.

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968.

KUŘINA, F. Matematická kultura a vyučování matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, 2010, roč. 55, č. 3, 243–255.

MAREŠ, M. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 1. vyd. Příbram: Pistorius, 2008.

SKALKOVÁ, J. *Obecná didaktika*. Praha: Grada Publishing a.s., 2007.

STEHLÍKOVÁ, N., CACHOVÁ, J. Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF, 2006 [cit. 10.7.2013]. CD ROM.

STRUIK, D. J. *Dějiny matematiky*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1963.

TICHÁ, M., MACHÁČKOVÁ, J., Rozvoj pojmu zlomek ve vyučování matematice. In: *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu.* 1. vyd. Praha: JČMF, 2006, [cit. 10.7.2013]. CD ROM.

VONDROVÁ, N., ŽALSKÁ, J. Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl, M., Vondrová, N. a kol. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Prace, Pedagogická fakulta, 2013, 73–79.

VYMAZALOVÁ, H. *Staroegyptská matematika.* Hieratické matematické texty. [online]. 2006, 13–17 [cit. 13.6.2013].
Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401071/DejinyMat_31-2006-1_7.pdf

Seznam analyzovaných učebnic:

KOMAN, Milan, Marie TICHÁ, František KUŘINA a Pavel ČERNEK. *Matematika: pro 7. ročník základní školy, 2. díl*. 1. vyd. Praha 6: Matematický ústav AV ČR, 2000.

ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 7: 1. díl*. 1. vyd. Praha 1: Prometheus, spol. s.r.o., 1999.

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMSA. *Matematika: Racionální čísla. Procenta*. 2. vyd. Praha 4: Prometheus, spol. s.r.o., 2004.

CIHLÁŘ, Jiří a Milan ZELENKA. *Matematika 7*. 1. vyd. Praha 4: Pythagoras Publishing, a.s., 1998.

OVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl*. 1. vyd. Praha 1: Prometheus, spol. s.r.o., 1999.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK a MÜLLEROVÁ. *Matematika 7 pro základní školy: aritmetika*. 1. vyd. Praha 2: Státní pedagogické nakladatelství, 2008.

TREJBAL, Josef, Darina JIROTKOVÁ a Václav SÝKORA. *Matematika: pro 7. ročník základní školy 1. díl*. 1. vyd. Praha 2: Státní pedagogické nakladatelství, 1999.

TAIŠL, Jan, Štefan MALINA a Josef VOJÁČEK. *Aritmetika: pro sedmý ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1958.

6 *Přílohy*

Příloha 1 **– Ukázka přepisu videozáznamů žáků**

H: Honza

T: Tázající

1 T: Přečti si, co máš dělat, a když nebudeš něčemu rozumět, tak si to vysvětlíme.
2 H: To mám doplnit, jo?
3 T: Hm.
4 Kreslí …
5 T: Tak, kolik tam máš těch čtverečků?
6 H: 15
7 T: A jak si na to přišel?
8 H: To, že tady je jedna pětina, tak jsem to vynásobil pěti, abychom měli pět pětin.
9 T: Takže si musel dokreslit pětkrát co ještě? Nebo čtyřikrát co?
10 H: Tři.
11 T: Dalo by se to vypočítat nebo udělat nějak jinak kolik by to mohlo bejt čtverečků bez toho aniž bysme kreslili? Máš nějakej jinej způsob?
12 H: Ne
13 T: dobře necháme to být. Tak, co ten druhej? Klidně povídej. Budu ráda, když řekneš cokoliv.
14 Kreslí …
15 T: Tak, jak si to udělal?
16 H: Dvanáct, čtrnáct.
17 T: 14 koleček, dobře. A jak si na to přišel?
18 H: Jsem vynásobil třemi tadyto a plus jednu polovinu z toho.
19 T: A proč polovinu z toho? Kolik je polovina z toho?
20 H: Dva
21 T: Dvě kolečka, ale my vidíme, že ty čtyři kolečka jsou dvě sedminy, tak proč si to teda vydělil dvěma vlastně? Co si vlastně získal, když si vydělil dvěma.
22 H: Tu jednu sedminu.
23 T: Dobře, tak poslední obrázek.
24 kreslí …
25 T: Jenom takhle jsme dokreslili dvě, dobře. Jak jsi na to přišel?
26 H: Jsme to vydělili pěti, takže to je jedna šestina a vynásobili šesti.
27 T: A kolik je teda jedna šestina hvězdiček?
28 H: Jedna šestina je dvě.
29 T: Dvě hvězdičky. Dobře.
30 T: Teď je tu jednoduchá slovní úloha. Tak si jí přečti. A zkus jí vypočítat. A povídej, co mi tam píšeš.
31 H: No, že tohle to jsou, to je vlastně snížení o tu jednu třetinu, tak to jsou ty dvě třetiny zbylý a že musíme vydělit dvěma a vynásobit třema.
32 T: Když vydělíš dvěma, tak získáš co?
33 H: Jednu třetinu.
34 T: Tak kolik ti vyšlo? A co to teda je za výsledek?
35 H: 1134 korun je původní cena.
36 T: Klidně se můžeš pustit do tý druhý.
37 T: Rozumíš všemu?
38 H: Asi jo.
39 T: Kolik že ti vyšlo?

40 H: 4776 korun.
41 T: Opravdu? Tam je chyba v početní operaci toho násobení, tak si to zkus ještě opravit, překontrolovat.
42 T: Osm krát dva je šestnáct. Jedničku držím. Osm krát sedm je?
43 H: Padesát šest.
44 T: K tomu jedna je.
45 H: Padesát sedm.
46 T: Takže si držím pětku.
47 H: Á pět.
48 T: Proč si vydělil pěti a vynásobil osmi?
49 H: Musíme, kolik stojí jedna osmina, abychom mohli vypočítat, kolik stojí osm osmin.
50 T: Dobře.
51 T: Tak číselné osy.
52 T: První úloha. Budeme znát čísla *G* a *Q*, víme, že jsou to zlomky. A ty mi na číselný ose, můžeš si vybrat kde, znázorníš čísla. *G* tam je, to vidíme a pak *Q* a pak k tomu bude ještě další rovnice. Takže víme, že *G* je sedmnáct čtvrtin. A máme najít *Q*, který je devatenáct šestin na tý číselný ose. Tak mi přibližně najdi to *Q*.
53 T: Rozumíš mi?
54 H: Ehm.
55 T: Nad čím přemejšlíš? Co počítáš?
56 H: No těch devatenáct šestin.
57 T: A jak?
58 H: Musím najít číslo v rovnici, kde se vejde devatenáct šestin.
59 T: Na tý číselný ose?
60 H: Ehm.
61 T: Tak pojďme najít, mezi jakýma dvěma celýma číslama bude ležet těch devatenáct šestin. Umíme nějak jinak převíst ten zlomek?
62 H: Jo.
63 T: A jak?
64 H: Že devatenáctku vydělíme šesti.
65 T: To je kolik?
66 H: To je tři. Tři celé
67 T: A kolik šestin ještě zbývá?
68 H: Jedna.
69 T: Takže už víme, mezi jakýma dvěma číslama bude ležet?
70 H: Mezi trojkou a čtyřkou.
71 T: A zbývá nám ten kousíček, a ten je kolik?
72 H: Jedna šestina.
73 T: Tak to zkus od oka. Klidně na tu samou osu. A tam bude teda ten bod *Q*.
74 T: Teďkon víme, že máme rovnici $G + Q = N$. A máme odhadnout a pak vypočítat.
75 H: Odhadnout nejdřív?
76 T: Ehm. Kde to asi bude přibližně.
77 T: Zase mezi jakým dvěma číslama. Jak bysme to udělali.
78 H: Bysme sečetli zlomky.
79 T: A to už bysme vypočítali. Ale jak bysme to odhadli, bez toho abysme nemuseli počítat?
80 T: Podívej se na tu osu, kde jsou přibližně ty čísla. Nebo ty písmenka. Tak přibližně, když mám sčítat obě dvě tak.
81 H: Tady.
82 T: Tam je *G*, viď.

83 H: No.
84 H: To bude tady ne, když sečtu tuhledu část a tuhletu část, tak to bude tady. (Ukazuje na G)
85 T: Určitě?
86 T: Tak to zkusme vypočítat.
87 Počítá …
88 T: Když tak tady máš pomocnou kalkulačku.
89 T: Když už teda máme výsledek, tak kde nám to N bude ležet? Tak stejně jako jsme dělali to Q.
90 H: Vydělíme dvanácti.
91 T: Kolik to bude přibližně.
92 H: Sedm
93 T: A kolik zbyde? Nebo na desetiný čísla?
94 T: Tak kde přibližně bude ležet to číslo?
95 H: Tady. (Ukazuje mezi sedmičku a osmičku)
96 T: Tak vidíš a jak velkej kus jsme se spletli?
97 H: Ehm.
98 T: Proč myslíš, že to tak je? Zkus si vzít jenom ty čísla, mezi kterejma leží ty písmenka Q a G. Tak N vidíme, že bude někde, když to máme sčítat?
99 H: Tadytu část tu od nuly až G plus tu Q. (Přenáší vzdálenosti)
100 T: Výborně přeneseme tu vzdálenost. Takže bysme mohli klidně sčítat jenom ty celý čísla. Tam je to u trojky, tam je to mezi čtyřkou a pětkou, takže to bude ležet mezi sedmičkou a osmičkou.
101 T: Jdeme na další. Zase G je třicet devět dvanáctin, Q je patnáct devítin. G máme znázorněný na ose, teďkon znázorníme Q, a pak bude další rovnice. Takže nejdřív to Q znázorníme.
102 T: Tak proč zrovna tam?
103 H: Protože patnáct děleno devíti to je jedna celá sedm asi.
104 T: A rovnice zní $G - Q = N$
105 T: Zkusme zase nejdřív odhadnout, kde bude ležet to N a pak to můžeme vypočítat nebo to vyřešit jiným způsobem.
106 H: Někde tady.
107 T: Mezi jedničkou a dvojkou, dobře. Si nad to můžeme udělat třeba otazník jestli to bude ono. No tak teď to zkusme vypočítat. $G - Q$ = N. Nebo jestli máš nějakej jinej způsob řešení, jak by si to vyřešil?
108 Počítá …
109 T: Já se omlouvám, to není padesát jedna, devět, dvanáctin, ale třicet devět.
110 H: Aha
111 T: Jsem se ukoukla, pardon. Třicet devět dvanáctin je G.
112 H: Jedna celá pět.
113 T: A je to přesný výsledek?
114 H: Já nevím?
115 T: Jak já nevím?
116 H: Asi ne.
117 T: Proč ne?
118 H: Jsem to vždycky zaokrouhlil.
119 T: A my chceme přesný výsledek. Tak to zkusme vypočítat přesně. Tady máš místo.
120 T: Je to přesný? Obávám se, že ty devítiny na přesný výsledek nepůjdou. To je nekonečnej desetinnej rozvoj, takže bohužel. Zkusme to jako normálně odečítání zlomků.

121 Počítá …
122 T: Máš tam třicet devět dvanáctin? Počítáš s devítkou a ne se čtyřkou?
123 H: Jo. To je devítka.
124 T: Tak tam budeš mít numerickou chybu. Klidně využívej kalkulačku.
125 Počítá …
126 T: Tak kolik nám vyšlo teda? Padesát sedm třicetišestin? Je to celý výsledek? Nemůžeme to nějak upravit? Abysme si zjistili, jestli opravdu máme správně položený ten odhad?
127 H: Zkrátit to nějak.
128 T: Tak to zkraťme. Tak jde to dvojkou?
129 H: Ne.
130 T: A trojkou?
131 H: Ehm, trojkou.
132 T: Tak zkrátíme trojkou. No co teď?
133 H: Devatenáct dvanáctin mi vyšlo.
134 T: A zase to můžeme nějak upravit? Abysme zjistili, kolik to bude na tý číselný ose? Jestli je to opravdu mezi jedničkou a dvojkou? Je devatenáct dvanáctin větší jak jedna?
135 H: Je.
136 T: Jakto?
137 H: Protože, když vydělíme devatenáct děleno dvanácti tak je to větší jak jedna.
138 T: Takže čitatel je větší
139 H: Než jmenovatel
140 T: Takže je to jedna celá kolik? A ne desetinné číslo, ale necháme to v tom smíšeném tvaru.
141 H: Sedm
142 T: Dvanáctin.
143 T: Učili jste se ve škole smíšená čísla?
144 H: Ehm.
145 T: Tak podíváme se na ten náš odhad.
146 H: Je jedna celá pět.
147 T: Přibližně. A vychází to přibližně ten zbyteček, těch sedm dvanáctin, že je polovina?
148 H: Ne.
149 T: Jakto?
150 T: Kolik by to musel bejt dvanáctin, aby to byla jedna polovina?
151 H: Pět.
152 T: Pět dvanáctin je jedna polovina?
153 H: Ehm.
154 T: Určitě?
155 T: Tak si to napiš dolu třeba. Víme, chceme vědět, kolik bude dvanáctin, aby to byla jedna polovina. Takže jedna polovina, a chceme vědět kolik je to dvanáctin. Takže? Sedm dvanáctin tam máš, nebo kolik? Jo to je otazník. No a co jsme s těma jmenovatelema udělali? S tou dvojkou a dvanáctkou?
156 H: Zkrátili?
157 T: Jak zkrátili? Jak to myslíš? Že dvanáctku jsme zkrátili nějakým číslem, abychom dostali dvojku, nebo? Obráceně?
158 H: Jedna polovina je šest dvanáctin.
159 T: Takže co jsme udělali teda?
160 H: Zjistili jsme polovinu těch dvanáctin.
161 T: Kolik by to bylo přibližně. Takže nám ten odhad sedí je to vlastně přibližně k tý jedný polovině, jo?

162 T: Tak jo jdeme dál. Teďkon víme, zase G je kolik?

163 H: Sedm.

164 T: Sedm dobře. A Q bude sedm jedenáctin. Tak určíme, kde bude sedm jedenáctin, kde bude ležet to Q.

165 H: Zjistíme kolik je jedna jedenáctina. Ne.

166 T: Zatím chce jenom odhadnout, kde bude ležet to Q. Mezi jakými dvěma přirozenými nebo celými čísly bude ležet Q? Myslím mezi nulou jedničkou, jedničkou dvojkou, dvojkou trojkou? Atd.

167 T: Co počítáš?

168 H: Kde. Za sedmičkou a výš.

169 T: Za sedmičkou a výš bude ležet Q?

170 H: Nevím, myslím.

171 T: Takže Q je víc jak jeden celek?

172 T: Jak to zjišťuješ? Nad čím přemejšlíš?

173 H: No když vydělíme sedmičku jedenáctkou. Tak by měla vyjít poloha toho bodu Q.

174 T: Přibližná. Tak vyděl. Takže mezi jakým dvěma čísly bude ležet?

175 H: Mezi nulou a jedničkou.

176 T: Mohl by si mi nějak vysvětlit, nebo říct, když jsme počítali příklad před tím, tak jsme věděli, že to bude víc jak jedna. Podívej se na ten zlomek. Těch patnáct devatenáctin. Podívej se na čitatele a jmenovatele. Vidíme, že čitatel je tady?

177 H: Větší než jmenovatel.

178 T: A co tady?

179 H: Je menší než jmenovatel.

180 T: Takže už vidíme, že když bude čitatel menší než jmenovatel, tak to bude?

181 H: Menší než jedna.

182 T: Přibližně tam napiš, kde bude sedm jedenáctin. Dobře někde u tý poloviny.

183 T: A teďkon jak zní ta rovnice. G x Q = N.

184 T: A taky přibližně, kde bude ležet to N. Tak jako před tím. Než začneme počítat.

185 H: Někde tady. (Ukazuje kousek za čtyřkou)

186 T: Proč myslíš?

187 H: Protože šest krát sedm je čtyřicet dva. Bude kolem čtyři celé dva. Protože ještě nemáme přesný číslo.

188 T: Takže přes to desetinné číslo, přibližné desetinné číslo si to zkusil. Dobře.

189 T: Tak pojďme teda vypočítat přesný výsledek G x Q = N.

190 T: To nebude přesný výsledek, že ne?

191 H: Ne.

192 T: Hm? Zase je to nekonečný desetinný rozvoj. Musíme prostě počítat s těma zlomkama. Jinak by to nebylo přesné číslo.

193 T: Klidně můžeš využít celej ten papír.

194 T: Kolik že ti vyšlo?

195 H: Čtyřicet devět jedenáctin.

196 T: Tak zase abychom to dobře určili na tý číselný ose, jestli je ten náš odhad správný, tak to zase převedeme na?

197 H: Na desetinná čísla?

198 T: To bude zase přesnej výsledek?

199 H: Ne.

200 T: Tak na co?

201 H: Na, zkrátíme.

202 T: A čím chceme zkrátit?

203 T: Takhle budeš vědět určitě, kde to leží? Čtyřicet devět jedenáctin, víš, že to je tady.

204 H: No.
205 T: Určitě? A jak to přesně víš?
206 T: Tak zase si to pojďme převíst na kolik celků tam bude a kolik ten zbytek.
207 H: Budou čtyři celky a zbyde pět jedenáctin.
208 T: Víš, jak se tenhle ten tvar jmenuje?
209 H: Smíšený.
210 T: Takže na smíšený číslo budeme převádět.
211 T: Takže už je to jednodušší už vidíme hned, že to bude přes čtyři celé a těch pět jedenáctin bude to někde přibližně u tý?
212 H: Poloviny.
213 T: Takže přesně bysme to mohli ještě posunout dál. Ho posuň, kde bude. Takže náš odhad byl docela správný.
214 T: Šlo by to určit ještě nějak jinak? Než takhle početně?
215 T: Už jenom, že tam máme sedm krát sedm jedenáctin. Podle tý rovnice. Šlo by to nějak jinak?
216 T: U toho prvního příkladu, jestli se k němu můžeme vrátit, jak bylo to sčítání, tak jsi řekl, že vememe tohlencto a přidáme k tomu, že by se to dalo. Šlo by stejným způsobem i nějak tenhlecten příklad udělat? Kde máme to *Q* ještě teda? Napišme to tam, kde je to *Q*.
217 H: Tady.
218 T: A šlo by to nějakým stejným způsobem udělat, jako když jsi to udělal s tím sčítáním?
219 H: Vynásobit sedmi.
220 T: No ale jak by si to udělal? Ne početně ale jenom tak jsi předtím posouval o tu část, tak jestli by to šlo tady taky.
221 H: Šlo.
222 T: A jak?
223 H: Takhle několikrát to.
224 T: Kolikrát?
225 H: Sedmkrát.
226 T: Takže bysme vzali tuhle vzdálenost a nanesli bysme jí sedmkrát a zjistili bysme N.
227 H: Ehm.
228 T: Výborně. Jdeme na další příklad.
229 T: Kolik myslíš, že bude *G* přibližně, když se na něj podíváš.
230 H: Dvě celé dvě.
231 T: A když počítáme se zlomkama celou dobu, tak kolik myslíš, že to bude ve zlomku? Nebo ve smíšeném čísle, třeba.
232 H: Dvě celé a dvě desetiny.
233 T: Tak když by to bylo dvě celé dvě desetiny, kolik to bude teda ve zlomku?
234 H: Dvacet dva desetin.
235 T: Dvacet dva desetin, výborně, ale jsme se o trošinku spletli, je to dvacet osm třináctin *G*.
236 T: A *Q* je čtyřicet pět sedmin. Zase přibližně najdeme *Q*, rovnice zní G x $Q = N$. Pak si přibližně určíme, kde bude N, a pak ho vypočítáme. Stejnej postup jako v předchozích příkladech.
237 H: Bude někde tady?
238 T: Za sedmičkou? Určitě? Proč?
239 H: Jsme vydělili čtyřicet pět děleno sedmi.
240 T: Kolik to je?
241 H: Šest.

242 T: Šest celých no. Takže určitě to bude za sedmičkou?
243 H: Za šestkou, tady.
244 T: A kolik ještě zbývá? Šest celých a?
245 H: Tři.
246 T: Tři sedminy, zase to bude blízko?
247 H: Šestky.
248 T: Šest a půl.
249 H: Šest a půl.
250 T: Proč? Napiš si to. Šest celých tři sedminy. A proč to bude zase u tý poloviny?
251 H: Trojka je polovina sedmičky.
252 T: Blíž k polovině, proto to bude takhle.
253 T: Tak máme teda zkusit najít to N. Nejdřív odhad. Kde myslíš, že bude ležet N?
254 T: Když je to vlastně G x Q.
255 H: Někde tady za dvanáctkou.
256 T: Ano dobře takže budeme používat tu druhou osu. Takže někde za dvanáctkou, tak zkus tam někam udělat otazník, kam píchneme to N.
257 T: Tak a teď ho pojďme teda přesně spočítat.
258 Počítá …
259 T: Tak kdybychom neměli kalkulačku, jak bysme si pomohli s počítáním?
260 H:Bysme zkrátili.
261 T: A co bysme zkrátili? S čím?
262 H: Dvacet osm a sedm.
263 T: Na? Čtyřku a jedničku. Dobře a teď to můžeme vynásobit, nebo se tam dá ještě něco zkrátit?
264 H: Už nejde.
265 T: Tak můžeme vypočítat.
266 T: Čtyři krát čtyřicet pět. Bude určitě menší než dvacet osm krát čtyřicet pět.
267 H: Sto osmdesát třináctin.
268 T: Teď zjistíme, kolik to opravdu bude, jestli jsme dobře mezi dvanáctkou a třináctkou. Takže zase smíšené číslo. Kolikrát se vejde třináctka do sto osmdesáti?
269 H: Třináct, třináct krát.
270 T: A kolik zbyde? Zkus (kalkulačku).
271 H: Já počítám bez (kalkulačky).
272 T: no to budeme mít desetinné číslo a ne ten zbytek.
273 H: Sto šedesát devět a jedenáct.
274 T: Čeho?
275 H: Třináctin.
276 T: Podívej se na ten náš odhad a na výsledek z počítání, tam nám vyšlo, že se blížíme skoro až?
277 H: Dvanáct a půl.
278 T: Jo to odhad.
279 H: Skoro ke čtrnácti.
280 T: Tak to je naše vypočítaný N. A nebyli jsme moc daleko od pravdy.
281 T: Šlo by to vypočítat nebo určit nějak jinak? Zase graficky?
282 H: Zase.
283 T: Víme přesně, kolikrát tam máme vzít tu určitou vzdálenost?
284 H: Nevíme.
285 T: Nevíme, bylo by to mnohem těžší.
286 T: Předposlední příklad.
287 T: G je přibližně kolik?

288 H: Pět celých sedm.
289 T: Zase zlomek zkusíme.
290 H: Pět celých sedm desetin.
291 T: Kolik to bude teda ve zlomku?
292 H: Třicet pět desetin, ne.
293 T: Těch pět celých je kolik desetin?
294 H: Padesát sedm desetin.
295 T: A to jsme se zase trošičku sekli, G je přesně sedmnáct třetin a Q osm jedenáctin. Přibližně určit Q a rovnice zní stejně jako v předchozím příkladě G x Q = N.
296 T: Když tak ten náš odhad G dej do kroužku, abychom věděli, že to je odhad. Jo? Abysme s tím nepočítali.
297 T: Q je teda osm jedenáctin. Kde bude teda ležet Q? Mezi jakými čísly?
298 H: Tady někde.
299 T: Ano mezi nulou a jedničkou, a bude to určitě před nebo za půlkou?
300 H: Za.
301 T: Proč?
302 T: Kolik těch jedenáctin by to mělo bejt, aby to byla polovina?
303 H: Pět.
304 T: Pět a půl.
305 T: Tak někam šoupni to Q, když víme, že je za půlkou. Teďkon víme, máme zlomek menší než jedna a máme zlomek větší než pět, a máme je vypočítat, kde myslíš, že bude výsledek? Vynásobit je máme mezi sebou. Kde myslíš, že bude výsledek?
306 H: Někde mezi čtyřkou a pětkou.
307 T: Dobře tak to tam někam napiš, zase otazníček tam dáme, jestli to bude takhle. A proč si myslíš, že mezi čtyřkou a pětkou?
308 H: Protože je to nula celá osm asi, krát. Čtyři něco.
309 T: G je čtyři něco?
310 H: Ne když se to vynásobí.
311 T: Aha. Pětkou si to vynásobíme.
312 T: Tak teď si to teda vypočítáme.
313 T: Dá se tam něco zkrátit? Abysme nepočítali s velkýma číslama.
314 H: Třicet tři ne.
315 T: Dejme to teda na smíšené číslo a uvidíme.
316 T: Šlo to teda nějak zkrátit?
317 H: Šlo.
318 T: A jakým číslem šlo zkrátit ten zlomek?
319 H: Třemi.
320 T: Určitě? Hořejšek je dělitelný třemi?
321 H: Ne, není.
322 T: A proč není?
323 H: Protože ten ciferný součet není dělitelný třemi.
324 T: Tak výborně. Chytrej kluk, pamatuje si.
325 T: Tak opravdu bude ležet mezi čtyřkou a pětkou a myslíš, že blíž ke čtyřce nebo pětce?
326 H: Ke čtyřce.
327 T: Ke čtyřce, protože je to jenom čtyři třiceti třetiny. Znázorni nám tam náš výsledek. Na tu číselnou osu.
328 T: Tak poslední číselná osa.
329 T: Kolik si myslíš, že bude G?
330 H: Sedm desetin.

331 T: Přibližný výsledek. Dobře. Ale správně mám tady sedm devítin. A zase dej do kroužku, že jsme to odhadli. A skutečné G je sedm devítin. Q je šest dvanáctin. Zase odhadneme, kde bude přibližně ležet. A pak zase vynásobíme a ještě ten výsledek zkusíme odhadnout, a pak vypočítat.
332 T: Proč tam bude ležet Q?
333 H: Protože je to polovina z jedný.
334 T: Tak si to klidně napiš, že to je jenom půlka.
335 T: Budeme počítat s touhle tou číselnou osou nebo si vybereme trošičku jinou, abysme tam měli větší
336 H: Vynásobit.
337 T: Počkej, jestli budeme pracovat s touhle tou číselnou osou nebo jestli budeme s touhle s touhle nebo s touhle, tak jako před tím, jak jsme měli těch třinámct.
338 H: S touhle (ukazuje na osu od nuly do dvou).
339 T: Proč bysme tuhle tu vybrali?
340 H: Protože budeme jenom tady to. Dvě.
341 T: Takže jsi mi i rovnou odpověděl skoro na otázku, kde bude přibližně ležet to N.
342 H: Někde tady?
343 T: Za jedničkou?
344 H: Ne tady někde.
345 T: Proč myslíš?
346 H: Protože když vynásobíme desetinná čísla, tak to bude mezi nulou a jedničkou.
347 T: Takže to převádíš na ty desetinné čísla. Při tom přibližným výsledku si to vypočítám přes ty desetinné. Dobrá.
348 T: Tak mi znázorni jak Q tak G na týhle číselný ose.
349 T: A kde bude přibližně ležet to N?
350 T: Už víme, že bude ležet mezi nulou a jedničkou, a teď záleží na tom, jestli před Q, za Q, před G, za G.
351 H: Za, tady mezi nulou a Q.
352 T: Tak tam někam šoupneme otazník. A pojďme to teda vypočítat.
353 T: Sedm osmnáctin, dobře. Ještě než ho zakreslíme, se zeptám, museli jsme nutně napsat šest dvanáctin? Krát šest dvanáctin?
354 H: Jednu polovinu.
355 T: Klidně jsme mohli napsat jednu polovinu. Abysme si ulehčili.
356 T: Kde teda bude ležet těch sedm osmnáctin?
357 H: Tady někde, jak jsme vyznačili.
358 T: A bude to blíž ke Q nebo blíž k nule? Je sedm osmnáctin blíž k půlce?
359 H: Za Q.
360 T: Před Q jak ukazuješ.
361 H: No před.
362 T: Takže blíž ke Q než k nule.
363 H: Hm.
364 T: Tak to tam znázorni.
365 T: Tak a teď se tě zeptám, proč myslíš, že blíž ke Q?
366 H: Protože sedmička je necelá polovina tý osmnáctky. Proto to půjde víc k polovině.
367 T: Paráda. A teď slovní úlohy.
368 T: Nechceš si odpočinout, před tím?
369 H: Ne.
370 T: Dobře, tak přečti klidně na hlas.
371 H: Musíme vypočítat, kolik bude potřebovat kilogramů mouky.
372 T: Co teď počítáš?

373 H: To kolik budeme potřebovat tý mouky.
374 T: A četl sis to celý?
375 H: Ehm.
376 T: Aby koláč vystačil pro celou rodinu, musí ho matka upéct z dvojnásobku množství surovin.
377 H: Takže šest osmin. Ne počkej.
378 T: No dvojnásobek, když vezmu tři osminy a ještě jednou tři osminy, kolik teda budu mít osmin?
379 H: Šest.
380 T: Takže šest osmin kilo mouky. Jako kdybych vařila vlastně dva koláče, že jo?
381 T: Kolik je to teda kilo mouky, když se to vykrátí?
382 T: Čím můžeš zkrátit šestku a osmičku?
383 H: Dvojkou.
384 T: Tři čtvrtě kila mouky je potřeba teda?
385 H: Ehm.
386 T: Co máslo?
387 H: To je půl, ne bude potřebovat čtvrt kila.
388 T: Takže vlastně?
389 H: Vynásobíme.
390 T: Balení. Čtvrt kila másla.
391 T: Co ten cukr?
392 H: Jednu polovinu.
393 T: A kolik vajec?
394 H: Šest.
395 T: Šest vajec. Dobře.
396 T: To bysme měli teda první otázku.
397 T: Na kolik dílů se koláč nakrájí?
398 H: Na pět?
399 T: Jenom na pět? Pořádně si to přečti.
400 H: Takže na deset. Když to vynásobíme.
401 T: Ne, to je přece jeden koláč. Akorát z dvojnásobku těch surovin. Je jenom větší.
402 T: Kolik sní otec dílů?
403 H: Tři.
404 T: Kolik sní matka dílů?
405 H: Tři.
406 T: Napišme otce a matku, tři a tři.
407 H: Šest.
408 T: Děti sní o třetinu více než rodiče.
409 H: O dva více, takže osm každý dětí.
410 T: Každý osm? Nebo dohromady osm?
411 H: Každý. Ne dohromady osm.
412 T: Každý z nich sní o jeden díl víc než rodiče, že jo?
413 T: A co babička?
414 H: O jednu třetinu méně, než každý z rodičů. Takže o dva méně. Čtyři sní.
415 T: Babička sní čtyři? Kolik sní každý z rodičů? Ne kolik snědli rodiče, ale kolik snědl každý z rodičů?
416 H: Tři.
417 T: Tři. Takže babička snědla o třetinu míň.
418 H: Takže snědla dva.
419 T: Tak na kolik dílů je potřeba rozdělit ten koláč?

420 H: Na šestnáct.
421 T: Tak a teď ta druhá část slovní úlohy.
422 T: Tak nejdřív začneme s těma dílama. Kolik dílů sní vlastně ta rodina Nešetřílkova?
423 T: Teta a strýc sní stejně jako ona a otec. Tak kolik dílů snědla ona a otec?
424 H: Šest dohromady.
425 T: Takže teda i strýc sní?
426 H: Šest.
427 T: Tak si to napišme.
428 T: Bratranec sní určitě stejně jako každé z jejich dětí. Kolik snědli děti?
429 H: Osm.
430 T: Dvě děti. Tak kolik sní teda bratranec?
431 H: Čtyři.
432 T: Bratranec sní čtyři. A co sestřenice?
433 H: Dva.
434 H: To máme dvanáct dílů.
435 T: Ten koláč, kterej vlastně upeče paní Šetřílková bude muset rozdělit na dvanáct dílů.
436 T: A teď se podívejme, že má bohužel jenom pět vajec. Tak kolik bude muset přidat mouky, kolik másla a cukru, když má jenom pět vajec.
437 T: Jak to budeme počítat?
438 T: Víme, že na tři vajíčka potřebuje tolik surovin. Na šest vajíček potřebuje tolik surovin. Ale my těch vajíček máme pouze pět. Jak to budeme počítat?
439 H: Musíme spočítat, kolik budeme potřebovat množství na to jedno vejce.
440 T: Výborně na jedno vejce a pak?
441 H: Vynásobíme počtem vajec.
442 T: Ano výborně. Tak do toho.
443 T: Budeme pracovat s těma šesti vajíčkama?
444 T: Nebude lepší dělit menším číslem, když tady máme na tři vajíčka?
445 T: Tři osminy nebo jak to teda chceš počítat? Nebo tři čtvrtiny na těch šest vajíček? Vyber si.
446 H: Se špatně převádí, ty tři osminy.
447 T: Stejně budeš muset počítat přesně a ne na desetiné čísla. Stejně budeš pracovat se zlomkama.
448 T: Tak vememe to s těma třema vajíčkama. Takže tři osminy potřebujeme na tři vajíčka.
449 H: Na jedno vajíčko potřebujeme jednu osminu.
450 T: Dobře jednu osminu kila, jak jsi to vypočítal?
451 H: Vydělil.
452 T: Jednu polovinu čtvrt kila másla.
453 T: Stejným způsobem. Tak jednu polovinu vydělíme třema. Kolik to bude? Klidně si to napiš.
454 H: Děleno třema. Jednu šestinu.
455 T: Tak jednu čtvrtinu vydělíme.
456 H: Jednu dvanáctinu.
457 T: A jedno vajíčko, že jo. A my těch vajec máme pět.
458 H: Takže vynásobíme pěti.
459 T: Kolik bude potřeba mouky?
460 H: Pět osmin.
461 H: Pět šestin másla.
462 T: A pět šestin kilo, a nebo pět šestin čtvrt kila?
463 H: Pět osmin kilo mouky.

464 T: Určitě bude másla pět šestin kilo másla? Podívej se, z čeho jsme počítali. Z jedný poloviny čtvrt kila, že jo?
465 H: Pět šestin čtvrt kilogramu.
466 H: A cukru pět dvanáctin kilogramu.
467 H: Pět vajec.
468 (1:27:00)

Příloha 2 – **Ukázka přepisu rozhovorů s učiteli**

Rozhovor s učitelkou DK a učitele JP, ZŠ v Kadaň (29. 05. 2013)

T: Tázající

JP: Učitel JP

DK: Učitelka DK

1 T: Vyvstává taková ta úvodní otázka, jak dlouho máte praxi.

2 JP: Ježišmarja, od 85 já učím.

3 DK: Já od 86.

4 JP: Takže to bude 30 let za chvilku.

5 T: No takže jí si to potom přepočítám, když tak.

6 JP: Bylo by to 28 let.

7 DK: Já 27, ty 28.

8 T: První otázka by zněla. Zavádění zlomků, jak zavádíte zlomky?

9 JP: No oni už jsou zavedený, když vejdeme do 6. třídy, oni už jako takový ty základní zlomky berou v 5. třídě.

10 DK: No už i dřív, dřív jako pojem. Teďka podle Frauze jedou, už dřív.

11 JP: Teďka jako úplně, vím, že se to v pátý třídě dělávalo, zapisoval se čitatel a jmenovatel,

12 DK: No a představa malování zlomkovnice, že jo obdélníky, čtverce, kruhy, čokoláda se malovala.

13 T: Jo a jenom teda malujete obrázky na tabuli nebo?

14 DK: My ne my ne, my jsme vyšší stupeň, my máme děti od šestky.

15 T: Jo…

16 JP: Nejvíc se zlomky dělaj v sedmičce, v sedmičce. Tam jako se dělá sčítání, odčítání, násobení, dělení, úpravy zlomků, krácení, rozšiřování, to je takový ten základ, porovnávání zlomků. Převádění desetinných čísel na zlomky, ze zlomků na desetinná čísla, smíšená čísla a všechny tyhle ty věci dohromady.

17 T: Jo a používáte na to nějaký modely, praktický?

18 DK: Určitě, máme zlomkovnice, máme malý zlomkovnice, kde je jakoby kruh prázdnej, teď je rozdělenej a barevně k tomu máme zobrazený jedna čtvrtina, jedna pětina, jedna osmina, takže oni, krásně vidí, že třeba když se krátí zlomky nebo když se rozšiřují zlomky, tak to přikládaj na sebe, že jedna polovina jsou dvě čtvrtiny atd.

19 DK: Jo to máme a pak máme takový velký nástěnný tabule, která vždycky visí v třídě a tam právě jsou tyhle ty obrázky, ty obdélníky rozdělěnej

20 JP: Na čtvrtiny, poloviny, ták na třetiny.

21 DK: Čtverec, kruh a to je asi všecko.

22 T: A ještě bývají diskrétní modely, kde máte třeba kuličky, používáte i tyhle ty modely, že se rozdělí kuličky do dvou, pro dva lidi.

23 JP: Ne to ne.

24 T: Že se rozdělí vlastně na polovinu, takže diskrétní vůbec.

25 JP: Ne.

26 T: Dobře, chtěla jsem se ještě zeptat, k těm modelům používáte i IT, nebo informační techniky.

27 DK: My máme v každé třídě interaktivní tabuli, takže jo.

28 T: A vytváříte si vlastní materiály?

29 DK: Ano.

30 JP: Vytváříme, no.

31 JP: Dumy.

32 T: Dumy vytváříte.

33 T: A vytváříte i na ty zlomky přímo.

34 DK: No tak já třeba ne, protože tam neučím letos, ale až tam budu učit, tak jo a ti co tam učí tak ano.

35 JP: No ten projekt, ty dumy ty běží vlastně z loňska. Předtím, i když interaktivní tabule jsou tady dýl, ale konkrétně tenhle ten projekt s těma dumama, že jo když se to platí, ověřuje atd., to běží asi rok a čtvrt.

36 T: A předtím už jste si nějaký materiály vyráběly nebo pracovní listy nebo.

37 DK: Určitě.

38 DK: Protože na ty zlomky, tam to chce názorně, názorně, názorně.

39 T: Přesně, to je nejhorší pro ty děti.

40 DK: A lámeme čokoládu. Krájíme koláče.

41 T: Dobře, tak asi bych se teď přesunula na to sčítání, sčítání zlomků než na to krácení.

42 T: Jak to zavádíte v tý třídě.

43 JP: No tak to začíná tím, že oni jako intuitivně, sčítají zlomky se stejným jmenovatelem, tak to maj, že první příklady jsou čtvrtiny sčítat, pětiny, takže ty části si oni můžou dávat na těch modelech dohromady a není problém a pak jako se, když jsou jiní jmenovatelé, jsou jiní jmenovatelé, si to musí vlastně uvědomovat.

44 DK: Rozšířením na stejnýho jmenovatele.

45 T: A jak zavádíte stejnýho jmenovatele, přes nejmenší společný násobek nebo jenom společný násobek.

46 DK: Já nejmenší společný násobek teda.

47 JP: No tak i no obecně můžou jakýkoliv násobek ale samozřejmě nejvýhodnější je ten nejmenší kvůli numerickejm problémům. Poloviny, čtvrtiny a někdo tam dá osminy, to samozřejmě chyba není.

48 DK: Není to chyba, ale vedeme je k tomu, aby hledali nejmenší společný násobek.

49 T: Na co kladete důraz při tohle tom vysvětlování sčítání a odčítání zlomků při tý výuce.

50 DK: Aby při tom rozšiřování nezapomněli rozšířit čitatele i jmenovatele, že to je hlavní takovej problém.

51 T: Jo, takže v tom dělaj nejvíc chyb?

52 JP: No oni často nechápou, že se ten zlomek nezmění, že jo. To je takovýto základní že jo, prostě vynásobit třeba já hodně trvám na tom, že oni, jak ten zlomek upravíš, já ho vynásobím dvěma, nevynásobíš ho dvěma, to bude dvakrát tak velkej, to musíš upravit jenom, vynásobím čitatele a to je stejný, to není stejný. Když budeš násobit zlomek celým číslem, tak vynásobíš čitatele, když to bude zlomkem tak násobíš čitatele jmenovatele mezi sebou a když ho rozšíříš, tak ho rozšiřuješ, tak já se čitatele a jmenovatele stejným číslem, to není, tam je stejný jenom to slovíčko vynásobím, to jako se musí odlišit no, no oni řeknou, já to vynásobím dvěma, nevynásobíš dvěma, to se ten zlomek změní.

53 DK: Já třeba, protože tohle to je pro ně fakt problém, že jedna polovina, je to samý jako dvě čtvrtiny, takže já třeba používám to, že když jsme měli magnetický tabule nebo kde je, dobrý, tak máme číselnou osu, že jo a mám třeba osu od nuly do jedný, a teď dávám pod sebe máme na to vyloženě pomůcky, že jo, takovou slzu, kde jsou všechny zlomky, který leží na tý číselný ose, tady třeba kde je jedna polovina, tak jsou tam vypsaný, že jo, takže oni pak by měli dostat do hlavy, že všechny tydle zlomky znamenají jedno a to samý číslo a to leží tady, no.

54 T: Takže pomocí číselné osy.

55 DK: Třeba i.

56 JP: I číselné osy.

57 JP: Třeba. Anebo to pokládání na sebe.

58 DK: Nebo ta zlomkovnice průsvitná, kdy oni to viděj, že tady jedna polovina je to samý jako dvě čtvrtiny atd. to přikládáme a oni to viděj, že jo.

59 T: A to je to nejdůležitější, aby oni prostě viděli názorně, jak se to dělá, že to takhle nejvíc pomáhá?

60 DK: No určitě, názorně.

61 JP: Názorně.

62 DK: Bez toho, bez těhle těch pomůcek si neumím představit učit.

63 JP: No ono pár dětí je samozřejmě chytrých, tak to pojme takhle, ale většina těch dětí to potřebuje vidět, to je důležitý.

64 T: Jo teda, ještě jsem se chtěla teda zeptat, používáte učebnice, jak sem slyšela Frauze.

65 JP: Frauze na nižším stupni.

66 DK: Ne my nepoužíváme Frauze ale učebnice používáme.

67 T: A jaký, jestli můžu se zeptat.

68 DK: Odvárko, Kadleček.

69 T: Používáte i cvičebnice k tomu.

70 DK: Ano.

71 JP: Doplňkově.

72 JP: No já třeba nenosí to furt, ale když se třeba se mi zdá, že je tam málo příkladů nebo potřebujem, tak si je donesou, ale nenosej pořád dvě knížky jo. Já třeba řeknu, vemte si cvičebnice na příště, takže pořád ji jako nemaj u mě.

73 DK: A já to používám samozřejmě na domácí úkoly, aby ni mohli teda hlavně mít doma a ještě mám z Nový školy Brno, máme nakoupený ty pracovní sešity, ty jsou taky výborný a z toho množíme nebo děláme podobný dumy, že jo aby to měli před sebou.

74 T: Ještě jsem se chtěla zeptat slovní úlohy a zlomky, dáváte dětem hodně slovních úloh, aby si procvičovali i to logický myšlení.

75 DK: Jako co to je hodně no.

76 T: Já jsem v některých učebnicích třeba, když jsem dělala analýzu tak jsem se nesetkala skoro se žádnou slovní úlohou.

77 DK: Jako to jsou slovní úlohy, že jo, tyhle ty čokolády, dělení, krájení dortu to všechno jsou slovní úlohy, že jo, takže určitě, ale i hodně ústní, na začátku hodiny ústní že jo, pojď, krájíme dort, ty dostaneš dvě třetiny, kolik my jich tady zbyde atd.

78 JP: Tam se musí odlišit ta dovednost, jak to s těmi zlomkami udělat a pak to umět aplikovat v tý praxi, takže ten základ to gró, co by se měli naučit všichni samozřejmě, když to mám sečíst, tak to umím sečíst, umím to vynásobit, umím to zkrátit a v těch slovních úlohách je samozřejmě problém protože je. Tam už to není o dovednosti konkrétní. Tam už je to logický myšlení, o nápadu atd.

79 T: A co s těma zlomkama vlastně má dělat.

80 JP: Snažíme se dělat slovní úlohy co nejvíc, ale jednak je to časově náročný. A jednak i ta dovednost si myslím, že je důležitější alespoň v tom začátku, co je mu platný když rozumí slovní úloze, ale neumí ty zlomky sečíst, že jo. Takže tu dovednost by měli zvládnout prakticky všichni i ty nejslabší, jak to potom aplikujou v konkrétních úlohách to už je potom, jak je komu dáno, samozřejmě snažíme se to jako dělat co nejvíc atd., ale to je problém, ty slovní úlohy protože. Tam se prolíná spousta věcí, že jo. Porozumění textu.

81 DK: My po nich chceme, aby mysleli, že jo. Což je problém, oni nechtěj.

82 JP: A tam je zásadní porozumění textu protože se to prolíná hodně s češtinou a já jim řeknu tak na co se tě ptaj a on na mě kouká 5 minut a není schopnej mi vlastně říct, co je otázka, co má vlastně vypočítat. Tam papouškuje nějaký čísla, papouškuje tam nějaký výraz, ten měl o tři více, ten měl o tři méně, a na co se teda ptáš, co máš zjistit a půlka dětí na to kouká, že jo.

83 DK: A nebo nádherná úloha v učebnici je, že v průvodu šli určitý počet těch lidí a teď oni odpoví, že v průvodu šli dvě třetiny člověka. Vůbec jim to nepříjde divný. Takže to je taky problém u zlomků. Že v praxi to třeba někdy není ani možný.

84 T: Ještě jsem se teda chtěla zeptat, k tomu, pardon k těm zdrojům, ze kterých čerpáte příklady, máte i jiný než Odvárko?

85 DK: Máme. Máme toho spoustu. Za ty roky.

86 JP: Takový nejosvědčenější jsou ty starší jo, já používám takovou žlutou knížku příkladů z algebry, pak se nám ještě osvědčil Běloun, což je takovej jako soubor úloh, kterej třeba já konkrétně používám v matematickém semináři, což je vlastně v devítce, to bereme jako příklady na přijímací zkoušky a takový celkový shrnutí, tam jako třeba v tý žlutý učebnici tam je toho mraky.

87 DK: No a já mám ještě ráda ty počtářský chvilky z tý Nový školy Brno, ty tam toho je jako spousta věcí a i takový jako hravou formou jo, jsou tam třeba obrázky, že si může vybarvit třeba obrázky. Ty menší jako oni to dělaj rádi.

88 JP: Znázorni dvě třetiny, když je to čtverec, znázorni jednu polovinu, když je to kruh a tak.

89 T: A ještě jsem se chtěla zeptat, co symbolické zavádění sčítání a odčítání?

90 JP: Co to je.

91 DK: Taky nevím, co to je.

92 T: Že máte třeba zlomek a\b + c\d.

93 JP: Ne, písmenka až v osmičce.

94 T: Takže vůbec symbolika.

95 DK: To jim dělá šílenej problém, to my jsme rádi, když pochopí to s tím číslem.

96 JP: 2+3 a 2a+3a to jsou úplně rozdílný příklady, to je úplně něco jinýho.

97 T: No to vidím teď i na střední škole.

98 JP: Vůbec, ta algebra do toho vlítne až v tý osmičce. A už je problém jenom, vzorce a takovýhle ty věci, no to ne, algebraický vzorce až v tý osmičce.

99 T: Co nula ve jmenovateli?

100 JP: No to je klasickej problém.

101 DK: To už na tom nižším stupni no, nesmí se. Nulou nelze dělit. Tudle větu jako maj mít naučenou.

102 T: Nulou nelze dělit, a že nesmí být ve jmenovateli to už je pro ně další jakoby nová věta, to oni si neuvědomujou často.

103 DK: To oni docela některý to už z tý národky uměj.

104 JP: Některý jsou vystrašený, takže nechtěj mít nulu ani v čitateli radši. Nejsou si jistý, bylo to ve jmenovateli nebo v čitateli.

105 DK: Docela jako necejtím v tom problém.

106 DK: Některý v tom maj velkej problém, stane se, když jim dám třeba do tý rozcvičky. 5 děleno 0, no něco tam vypočítaj, ale celkem jako opravdu to maj v tý hlavě zafixovaný. Když se to furt omýlá, jako nulou nelze dělit, jako tahle věta se jim do tý hlavy dostane. Oni jí pak potřebujou i v těch vyšších ročnících, právě v tý algebře, když příjdou ty lomený výrazy, takže docela jo, tohle jo.

107 T: Ještě, co historie a zlomky? Dáváte jim třeba nějaký historický příklady, že zlomky vymysleli Egypťané a že s nima počítali.

108 DK: Tam jsou v učebnici.

109 JP: Něco tam je.

110 DK: No ten Odvárko tam má vždycky úvod.

111 T: Takže aspoň něco.

112 JP: I středověký úlohy tam jsou atd. třeba tři čtvrtiny, jako něčeho si odnesl a kolik zůstalo atd., takže něco tam je, ale není to jako nějak moc.

113 DK: A to je zrovna ta úloha jak jsem vzpomínala, že je na úvod, je tam někde napsáno, že šel historický průvod a nevím, dvě třetiny panošů, tři pětiny zbrojnošů, že a kolik šlo lidí v tom průvodu. Tak to zrovna je taková ta úloha.
114 T: A ještě smíšená čísla, kdy uvádíte smíšená čísla až po sčítání, odčítání, násobení a dělení zlomků, nebo průběžně?
115 DK: Hned na začátku, jakmile začínám zlomky, už převádíme, protože oni to viděj na tý zlomkovnici, že jsou to dva kruhy. Nebo že je to jeden kruh a kousek.
116 DK: Já teda hned.
117 JP: Určitě.
118 JP: Ještě než se začne sčítat a odčítat, jakmile má čitatele většího než jmenovatele, tak hned jako automaticky a já dokonce to chci hned, aby to převáděli hned na smíšený čísla.
119 DK: A podle mě i na tý národce tohle malujou.
120 JP: To si nejsem jistej teď úplně.
121 DK: Jo malujou ty kruhy. Jo jo, myslím, že jo. Hmn, v tý pátý třídě to maj.
122 DK: Protože já ty počtářský chvilky používám někdy pro šestou, ale jsou pro pátou třídu, takže tam už tu představu toho většího zlomku maj.
123 T: Tak jsem se někde setkala, že sčítání zlomků se stejným jmenovatelem se probírá v šestý třídě, je to i tady tak?
124 DK: V pátý.
125 T: Už v pátý?
126 T: V pátý třídě počítaj sčítání zlomků se stejným jmenovatelem.
127 T: Aha.
128 JP: Už v pětce. V šestce tam jsou zlomky, tam jsou minimálně.
129 DK: Tam vlastně vůbec nejsou zlomky.
130 JP: Vlastně je to od desetinných čísel prakticky celý tam jsou prakticky celý a to je minimum, to se tam objeví.
131 DK: Tam je gró, desetinný číslo.
132 JP: Dvakrát třikrát se to objeví v celým textu a to je všechno. Když tam maj desetinný čísla,
133 DK: Desetinnej zlomek, jo objeví a to je pak zmínka, kde se převádí desetinný číslo na zlomek, aby měli představu, že to je teda to samý číslo, ale teda jinak se zlomkama v šestce vůbec, ale v pětce v tý pětce jo.
134 DK: Tam fakt sčítaj a odčítaj zlomky se stejným jmenovatelem.
135 T: A záporné zlomky, řešíte?
136 DK: Ne. Až v sedmičce až po celých číslech.
137 JP: V osmičce.
138 T: A máte speciální kapitolu záporné zlomky.
139 DK: V osmičce?
140 JP: V osmičce. Na začátku osmičky.
141 T: Takže máte zlomky rozdělený vlastně do třech až čtyřech.
142 DK: Kladný a záporný.
143 JP: No. O záporných se vůbec nemluví do tý sedmičky, prostě se vůbec o tom neuvažuje. Oni jakmile maj třeba od menšího čísla odečíst větší, tak je problém, to se tam prostě jako vůbec neřeší. Tam ty záporný zlomky jsou až někdy v polovině osmičky. Oni se nejdřív musí naučit záporný celý čísla mínus dvě, mínus tři, a pak teprve můžou to převíst na desetinný čísla, takže to je odhaduju tak půlka osmičky.
144 JP: V sedmičce, jako ze sedmičky by měli umět jako perfektně počítání se zlomkama, všechny početní výkony, převádění atd., ale záporný zlomky vlastně v osmičce.

145 T: Ještě na to hledání společného jmenovatele, v čem děti dělaj nejvíc chyby, nebo s čím si to pletou?

146 DK: No oni si to pak pletou, když se naučí, my je nejdřív učíme sčítat a odčítat, pak se učí násobit, dělit, takže oni zapomenou, jak se sčítá a jak se násobí. Protože to je něco jinýho. Takže když už uměj všechny ty početní úlohy, tak se jim to plete, ale když se učej jenom sčítat a odčítat tak nevím s čím by si to pletli, to asi si nepletou.

147 JP: No tam kdo má problémy s dělitelností, no a tři, sedm a tam najít společný násobek, takže tam jako někdo.

148 JP: Ale jako jinak přitom, dokud se to nesmíchá, jako to jde, protože sčítání se dělá takhle a násobení takhle, ale jakmile v příkladu je sčítání, násobení tak jako samozřejmě, sčítat čitatele jmenovatele mezi sebou a zase jsou experti, kteří násoběj tak, že to převedou na společnýho jmenovatele.

149 DK: Oni zapomenou. Oni automaticky potom sečtou čitatele s čitatelem a jmenovatele s jmenovatelem, to je klasická chyba.

150 DK: Když už umí potom násobit, takže.

151 DK: Ale jako dokud se to dělá zvlášť, tak je to docela dobrý.

Příloha 3 **– seznam tabulek a obrázků**

Tabulka 3.1 Souhrn analýzy učebnice

Tabulka 3.2 Shrnutí analýzy klinických rozhovorů žáků

Obrázek 2.1 Teorie generických modelů

Obrázek 3.1 Úvodní úloha sčítání zlomků se stejným jmenovatelem (str. 36)

Obrázek 3.2 Úvodní úloha sčítání zlomků s různými jmenovateli (str. 37)

Obrázek 3.3 Posloupnost úloh na sčítání zlomků (str. 37)

Obrázek 3.4 Nestandardní aritmetická úloha (str. 38)

Obrázek 3.5 Úloha na hledání nejmenšího společného jmenovatele (str. 39)

Obrázek 3.6 Model obdélníku k úloze na odečítání zlomků (str. 40)

Obrázek 3.7 Co jsou smíšená čísla (str. 44)

Obrázek 3.8 Počítání se smíšenými čísly (str. 44)

Obrázek 3.9 "Egyptské čtverce a trojúhelníky" (str. 45)

Obrázek 3.10 Umístění nuly ve zlomku (str. 93)

Obrázek 3.11 Úvodní úloha se slovním popisem (str. 127)

Obrázek 3.12 Úvodní úloha na sčítání smíšených čísel (str. 131)

Obrázek 3.13 Odečítání zlomků (str. 135)

Obrázek 3.14 Řešení úvodní úlohy na odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 136)

Obrázek 3.15 Druhý způsob řešení úlohy (str. 139)

Obrázek 3.16 Grafické řešení (str. 50)

Obrázek 3.17 Číselná osa (str. 55)

Obrázek 3.18 Pravidla o sčítání a odčítání záporných zlomků (str. 64)

Obrázek 3.19 Řešení úlohy odečítání zlomků se stejnými jmenovateli (str. 60)

Obrázek 3.20 Řešení úlohy odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 61)

Obrázek 3.21 Úloha na dosazení zlomků (str. 66)

Obrázek 3.22 Úvodní úloha (str. 51)

Obrázek 3.23 Nejmenší společný jmenovatel (str. 51)

Obrázek 3.24 Vyjádření barevných ploch (str. 52)

Obrázek 3.25 Autotest (str. 54)

Obrázek 3.26 Řešení úvodní úlohy (str. 34)

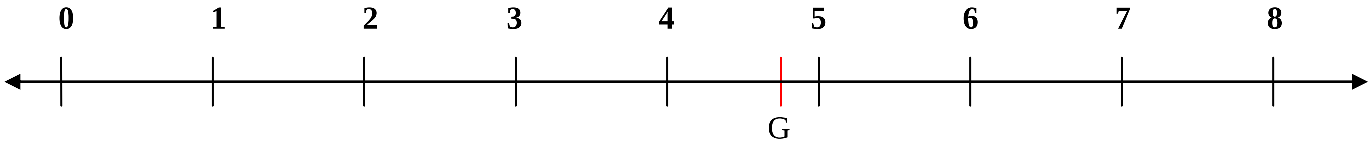
Obrázek 3.27 Řešení úlohy odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 37)

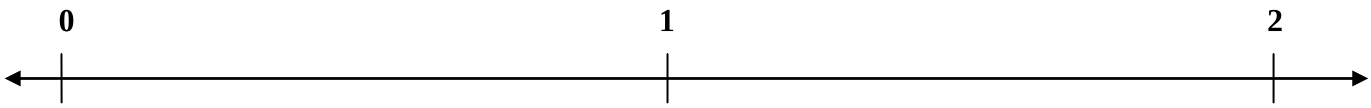
Obrázek 3.28 Poznámka z historie zlomků (str. 17)

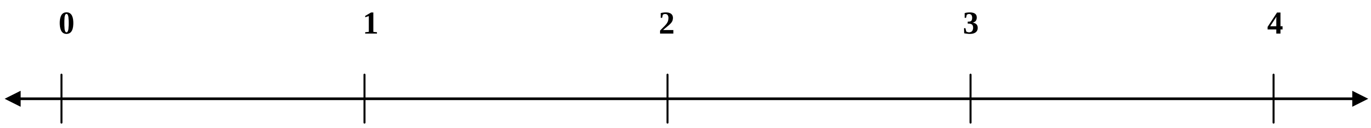
Obrázek 3.29 Krácení zlomků (str. 18)
Obrázek 3.30 Řešení úvodní úlohy s číselnou osou (str. 26)
Obrázek 3.31 Pravidlo sčítání zlomků s různými jmenovateli (str. 27)
Obrázek 3.32 Úvodní úloha na odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 27)
Obrázek 3.33 Symbolická formulace odečítání zlomků s různými jmenovateli (str. 28)
Obrázek 3.34 "čtverec" (str. 30)
Obrázek 3.35 Zadání první úlohy
Obrázek 3.36 Ceny – Honza
Obrázek 3.37 Úloha 2 – Honza
Obrázek 3.38 Úloha 5 – Honza
Obrázek 3.39 Úloha 7 – Honza
Obrázek 3.40 Celky – Jindřiška
Obrázek 3.41 Ceny – Jindřiška
Obrázek 3.42 Úloha 1 – Jindřiška
Obrázek 3.43 Úloha 2 – Jindřiška
Obrázek 3.44 Úloha 3 – Jindřiška
Obrázek 3.45 Úloha 5 – Jindřiška
Obrázek 3.46 Úloha 7 – Jindřiška
Obrázek 3.47 Slovní úloha – Jindřiška
Obrázek 3.48 Celky – Lucka
Obrázek 3.49 Úloha 1 – Lucka
Obrázek 3.50 Úloha 2 – Lucka
Obrázek 3.51 Úloha 3 – Lucka
Obrázek 3.52 Úloha 5 – Lucka
Obrázek 3.53 Úloha 6 – Lucka
Obrázek 3.54 Úloha 7 – Lucka
Obrázek 3.55 Slovní úloha – Lucka

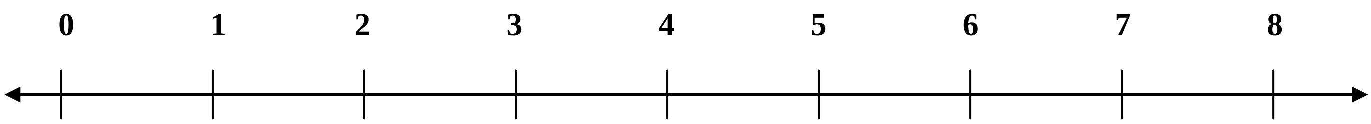
Příloha 4 **– Zlomky na číselné ose**

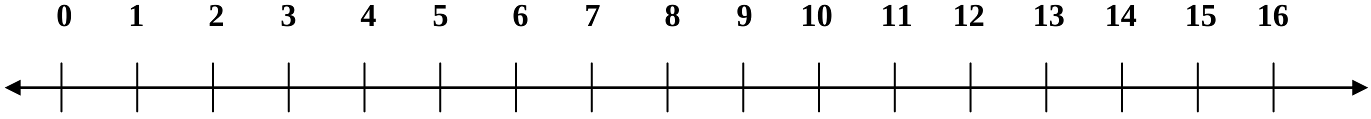
Zlomky na číselné ose – úloha 1



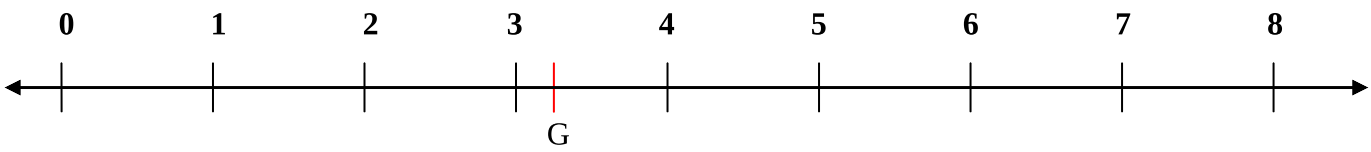


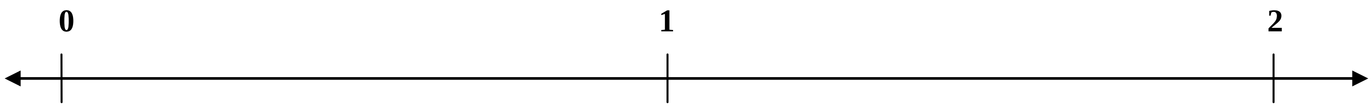


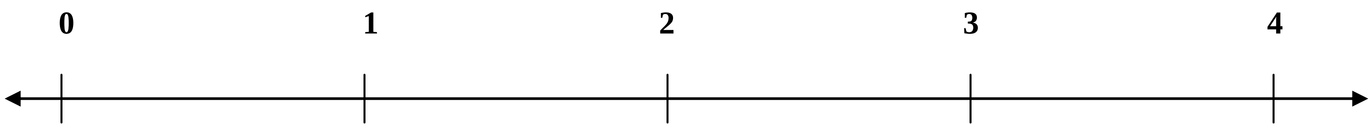


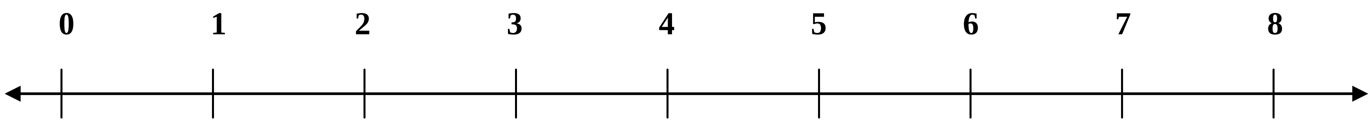


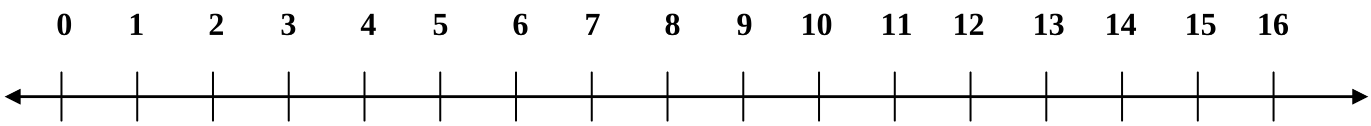
Zlomky na číselné ose – úloha 2



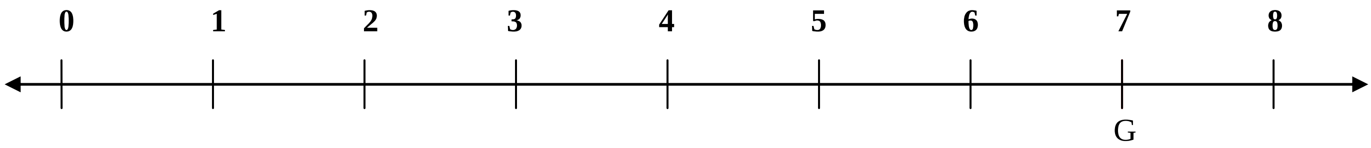


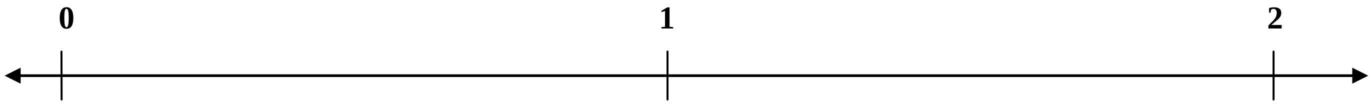


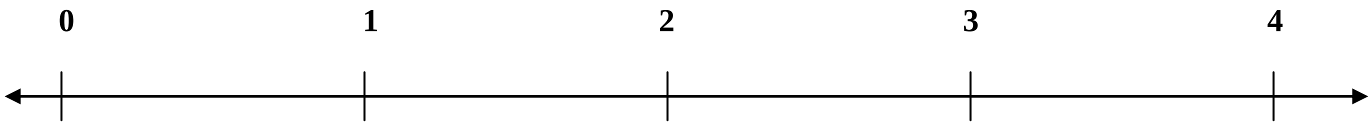


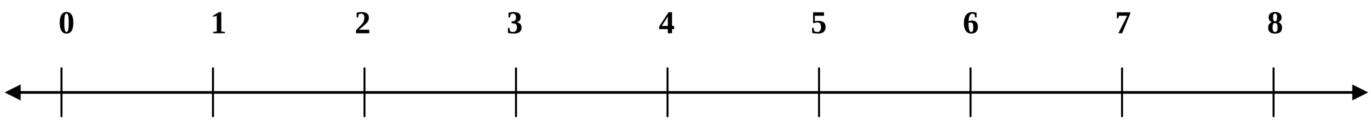


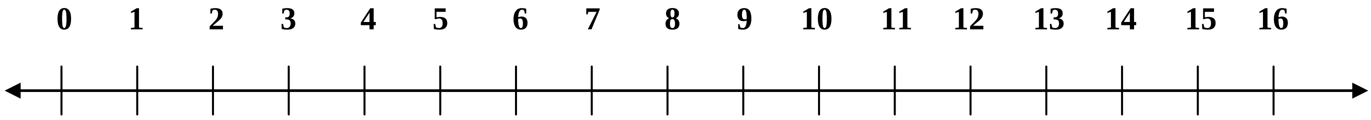
Zlomky na číselné ose – úloha 3



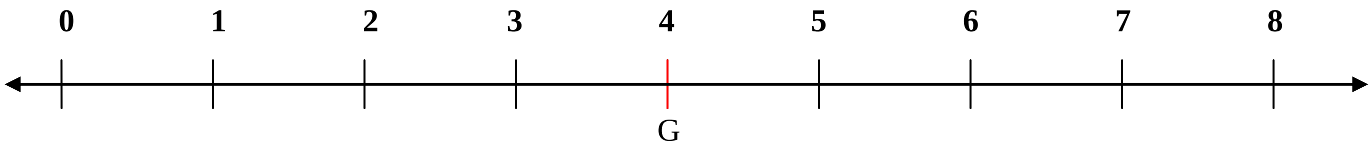


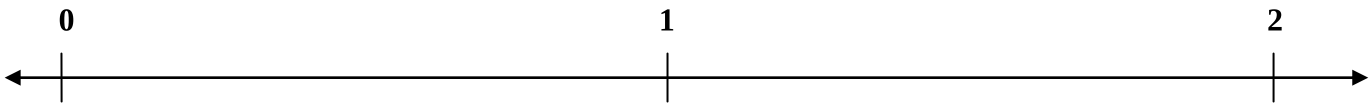


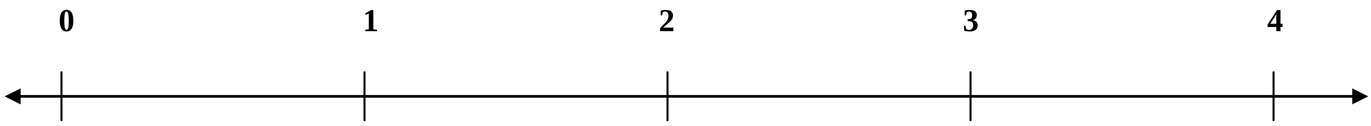


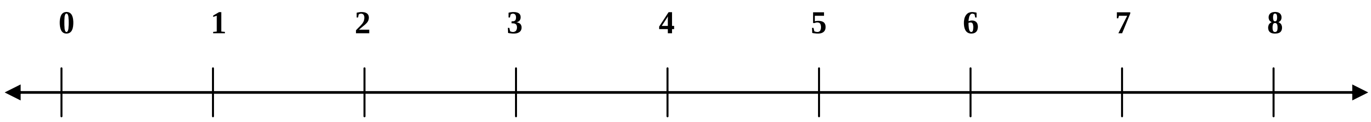


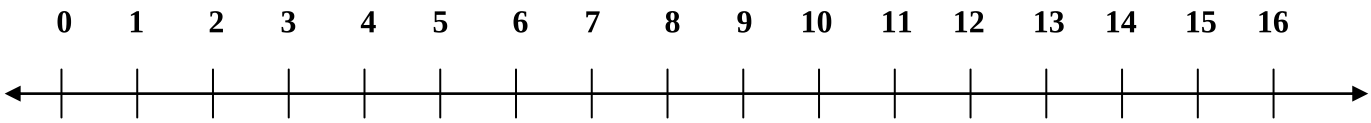
Zlomky na číselné ose – úloha 4



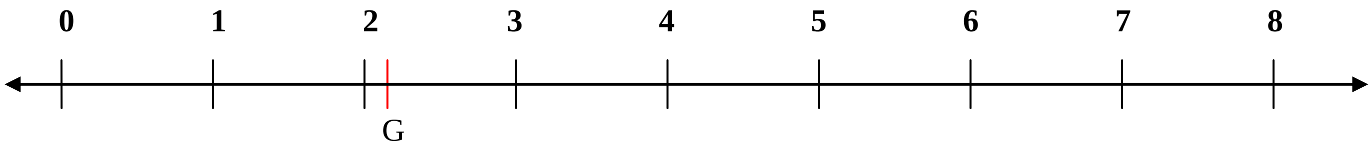


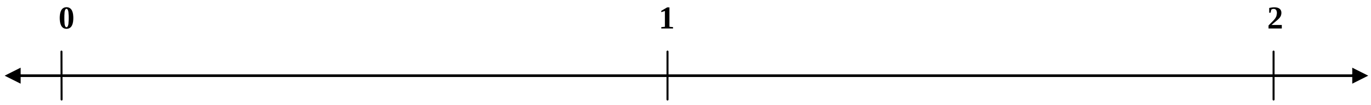


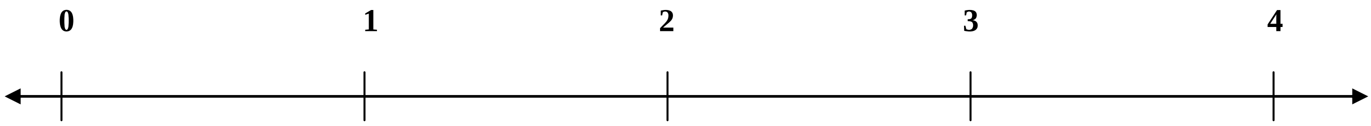


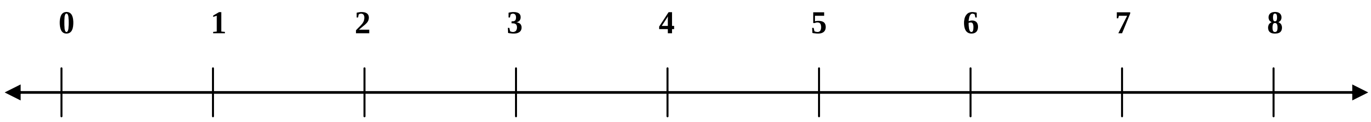


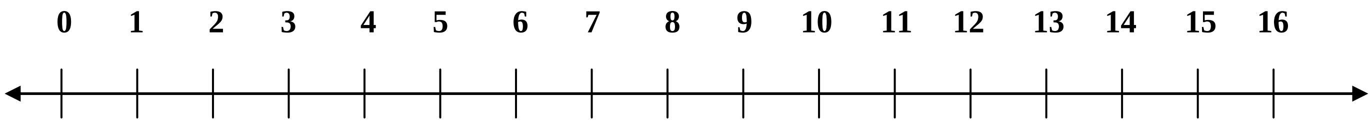
Zlomky na číselné ose – úloha 5



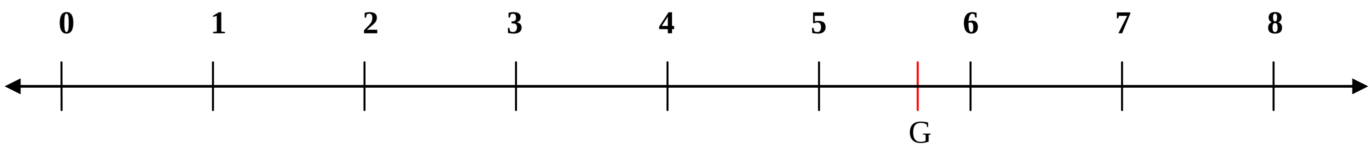


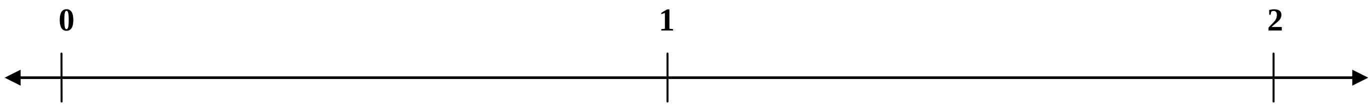


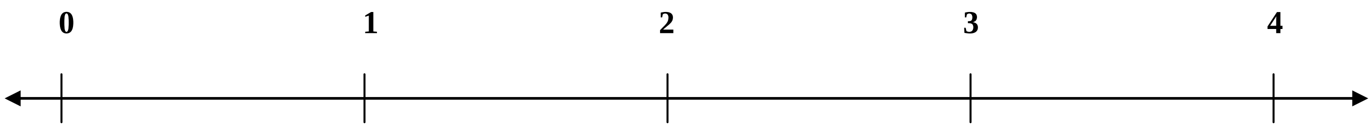


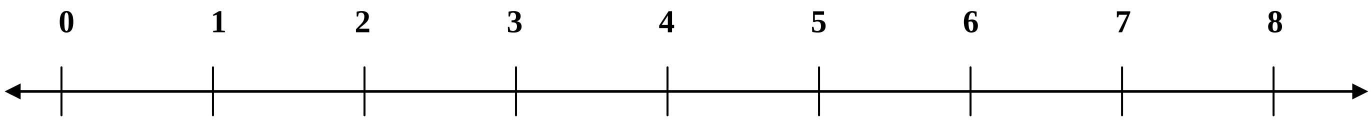


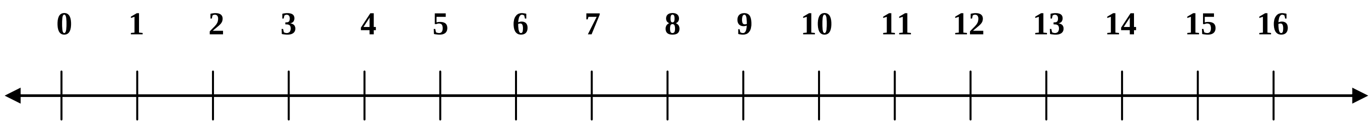
Zlomky na číselné ose – úloha 6











Zlomky na číselné ose – úloha 7