Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Rudolf Stolař

Ramseyovské věty v geometrii

Katedra aplikované matematiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr.
Studijní program: Matematika, Matematické struktury

Na tomto místě bych chtěl poděkovat především Doc. RNDr. Pavlu Valtrovi, Dr. za cenné rady, připomíky, trpělivost a čas, který mi věnoval při psaní této práce.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 12. srpna 2006 Rudolf Stolař

Obsah

Abstrakt

Název práce: Ramseyovské věty v geometrii
Autor: Rudolf Stolař
Katedra (ústav): Katedra aplikované matematiky
Vedoucí diplomové práce: Doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr.
E-mail vedoucího: `valtr@kam.mff.cuni.cz`
Abstrakt: Euklidovská Ramseyho teorie se zabývá zkoumáním konfigurací bodů, pro které lze při každém obarvení n-dimenzionálního euklidovského prostoru najít v některé z barev jejich posunutou a otočenou kopii. Její asymetrická část potom verzemi tvrzení, v nichž pro každou barvu hledáme jinou konfiguraci bodů. V této práci se zabýváme především asymetrickými ramseyovskými větami a vlastnostmi n-dimenzionálních hyperkrychlí, pro které dokážeme několik nových odhadů. Velká část práce je věnována barvení více barvami a dosažené výsledky úzce souvisejí se známým problémem chromatického čísla euklidovského prostoru. Zmíníme se také o možnosti zobecnění pojmu chromatického čísla a o některých aspektech takového zobecnění. Pozornost obrátíme i k problémům spojeným s hledáním vícebarevných konfigurací a ukážeme horní odhad pro speciální případ dvoubarevných čtverců.
Klíčová slova: euklidovská Ramseyho teorie, hyperkrychle, chromatické číslo euklidovského prostoru

Title: Ramsey-type theorems in geometry
Author: Rudolf Stolař
Department: Department of Applied Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr.
Supervisor's e-mail address: `valtr@kam.mff.cuni.cz`
Abstract: Euclidean Ramsey theory is examining konfigurations of points, for which there exists n such that for every coloring of n-dimensional Euclidean space with r colors we can find translated and/or rotaded copy of our configuration in a single color. Asymetric branch deals with situations when we look for different configurations in every color. In this work we concern about asymetrical ramsey-type theorems and properties of n-cubes, for which we show several new bounds. Major part is dedicated to colorings with more colors and obtained results are closely related to the famous problem of chromatic number of Euclidean space. We will mention possible generalization of the chromatic number and some aspects of such generalization. We also consider problems connected to multi-color configurations and we will introduce upper bound for special case of two-color square.
Keywords: Euclidean Ramsey theory, n-cube, chromatic number of Euclidean space

Kapitola 1

Úvod

Ramseyho teorie je část diskrétní matematiky, zkoumající chování velkých objektů a podmínky, za kterých nelze navodit úplný chaos. Ukazuje se totiž, že dostatečně velké objekty nutně obsahují menší podobjekty dodržující nějaký řád, a dokonalý chaos tedy nemůže existovat. U zrodu této partie kombinatoriky stál Frank P. Ramsey, po kterém je také celá příbuzná oblast matematiky pojmenována. V roce 1930 vyslovil a dokázal tvrzení, že v libovolném dostatečně velkém grafu existuje jako podgraf buď úplný dané velikosti, nebo nezávislá množina na tomto daném počtu vrcholů (viz [18]). Důkaz se opírá o matematickou indukci. V obecnější podobě potom zaručuje existenci jednobarevného úplného podgrafu na n vrcholech v dostatečně velkém úplném grafu, jehož hrany jsou libovolně obarveny jednou z r barev. Nejmenší nutná velikost takového grafu, aby na obarvení nezáleželo, se potom zpravidla označuje $R_r(n)$. Přesné zjištění tohoto čísla se ukazuje jako velmi těžký problém, dosud jsou známy přesné hodnoty pouze pro triviální případy a několik málo dalších, obecné řešení je v nedohlednu. Idea důkazu dává pouze návod na hledání exponenciálního horního odhadu. Dolní odhady potom bývají obvykle dokazovány konstrukcí obarvení, které vylučuje existenci hledané konfigurace.

Obdobné věty platí i pro barvení řady dalších objektů, například hypergrafů, aritmetických posloupností, slov nad nějakou abecedou, bodů v n-dimenzionálním prostoru a podobně. Existují varianty tvrzení zaručujících za určitých podmínek existenci mnoha různých stejnorodých objektů nebo podstruktur v rozličných strukturách. Nejdůležitější výsledky týkající se konfigurací bodů v euklidovském prostoru si na úvod připomeneme.

V dalším průběhu se budeme zabývat zejména studiem ramseyovských vlastností hyperkrychlí. *Hyperkrychlí* přitom rozumíme množinu bodů v n-dimenzionálním euklidovském prostoru kongruentní s množinou $\{0,1\}^n$ pro nějaké n (hovoříme o *n-dimenzionální hyperkrychli*). Cílem této práce pak bude dokázat některé nové odhady.

Kapitola 2

Euklidovská Ramseyho teorie

2.1 Základní pojmy

Nejprve by neškodilo si přesně říci, co vlastně pojmem ramseyovská věta myslíme. Budeme tím rozumět tvrzení následujícího tvaru:

Tvrzení 2.1.1. *Nechť je dána množina S, třída jejích podmnožin $\mathcal{F}$ a přirozené číslo r. Pak pro libovolné rozdělení S na r množin $S = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$ existuje nějaké přirozené číslo i a nějaké $F \in \mathcal{F}$ tak, že $F \in C_i$.*

V našem případě bude S nejčastěji euklidovský prostor $\mathbb{E}^N$ nějaké velké dimenze N a $\mathcal{F}$ bude pak množina všech kongruentních kopií nějaké dané konfigurace bodů v euklidovském prostoru. Zmíníme ale také několik zajímavých výsledků, kde v roli S vystupuje n-dimenzionální sféra. Věty pak obvykle tvrdí, že pro danou konfiguraci bodů X a dané přirozené číslo r existuje N_0 takové, že pro každé $N \geq N_0$ obsahuje při libovolném rozdělení $\mathbb{E}^N$ na r množin $\mathbb{E}^N = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$ některá množina C_i kongruentní kopii X. Takováto formulace však stále ještě není příliš názorná, proto se jednotlivým množinám C_i přisuzují navzájem různé barvy. Místo o rozdělení na r podmnožin pak ekvivalentně hovoříme o obarvení všech bodů jednou z r barev a existence kongruentní kopie X v některé z množin C_i se stává existencí jednobarevné kongruentní kopie X. Slovíčka kongruentní kopie ovšem nejčastěji vynecháváme, neboť zmatení čtenáře obvykle nehrozí. Budeme tedy hovořit o potřebném počtu dimenzí N euklidovského prostoru $\mathbb{E}^N$, aby při libovolném obarvení jeho bodů r barvami existovala jednobarevná konfigurace bodů X, nebo často naopak o potřebném počtu barev r pro předem danou dimenzi N, aby existovalo obarvení N-dimenzionálního euklidovského prostoru $\mathbb{E}^N$ pomocí r barev takové, že v žádné z těchto barev neexistuje hledaná konfigurace bodů X.

2.2 Známé odhady

Začneme nejprve krátkým shrnutím některých základních výsledků Ramseyho teorie v euklidovském prostoru. Ještě jednou zdůrazněme, že pod geometrickým objektem (trojúhelníkem, čtvercem, krychlí, ...) budeme v této práci vždy rozumět množinu jeho vrcholů.

Věta 2.2.1. *Nechť je dáno libovolné obarvení euklidovské roviny $\mathbb{E}^2$ dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$. Pak pro každou z následujících konfigurací bodů X existuje její jednobarevná kopie:*

1. *X je trojúhelník s jedním z úhlů o velikosti $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ nebo $\frac{5\pi}{6}$* [19],
2. *X je trojúhelník s úhly o velikostech α, 2α a $\pi - 3\alpha$ pro nějaké $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$* [7],
3. *X je trojúhelník s úhly o velikostech $\pi - \alpha$, $\pi - 2\alpha$ a $3\alpha - \pi$ pro nějaké $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$* [7],
4. *X je degenerovaný trojúhelník o stranách a, $2a$ a $3a$* [7].

Ve 3-dimenzionálním euklidovském prostoru je pak známo následující:

Věta 2.2.2. *Nechť je dáno libovolné obarvení 3-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{E}^3$ r barvami $\mathbb{E}^3 = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$. Pak pro každou z následujících konfigurací bodů X existuje její jednobarevná kopie:*

1. *X je libovolný nedegenerovaný trojúhelník a $r = 2$* [7],
2. *X je nedegenerovaný pravoúhlý trojúhelník a $r = 3$* [1].

A ještě uvedeme jeden výsledek pro 5-dimenzionální euklidovský prostor:

Věta 2.2.3 (Tóth [22])**.** *Nechť je dáno libovolné obarvení 5-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{E}^5$ dvěma barvami $\mathbb{E}^5 = C_1 \cup C_2$. Pak existuje jednobarevný obdélník libovolných délek stran.*

Řadu dalších podobných tvrzení lze najít v [3], [5], [6], [7] a [19]. Existují ale také věty vylučující existenci některých jednobarevných konfigurací bodů při správném obarvení euklidovského prostoru určité dimenze. Jako první uvedeme známý výsledek pro rovnostranný trojúhelník:

Tvrzení 2.2.4. *Buď X trojice bodů tvořící rovnostranný trojúhelník. Pak existuje obarvení euklidovské roviny $\mathbb{E}^2$ dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$ takové, že žádná kopie X není jednobarevná.*

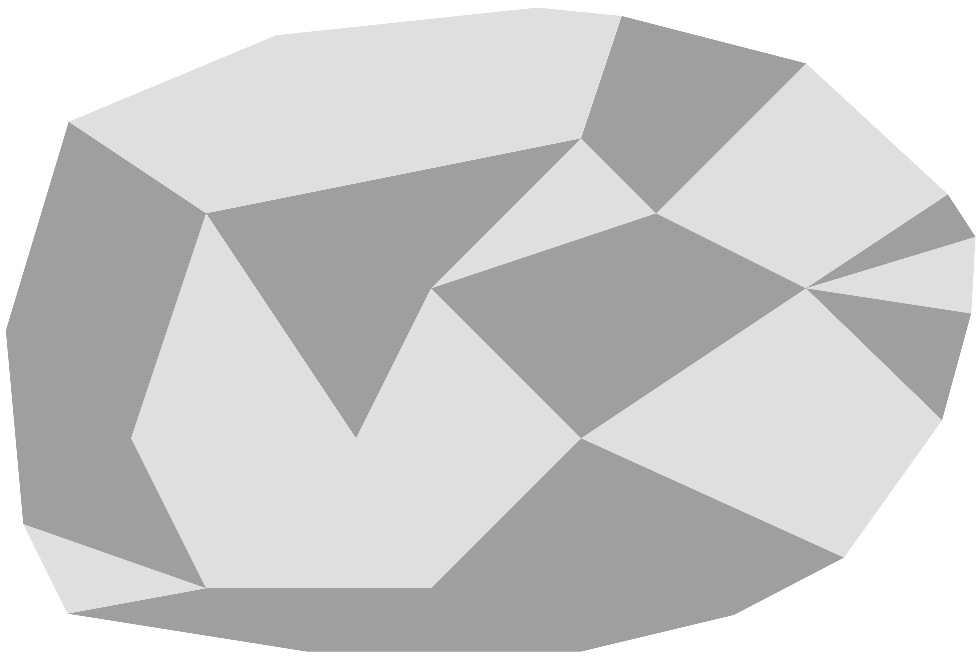
Dlouho se soudilo, že jediné obarvení euklidovské roviny, které neobsahuje rovnostranný trojúhelník s jednobarevnými vrcholy, je rozdělení roviny na rovnoběžné pruhy o šířce rovné výšce hledaného trojúhelníka (viz známá domněnka pánů Erdöse, Grahama, Montgomeryho, Rothschilda, Spencera a Strause v práci [7]). Volnost se předpokládala jen ve výběru barvy bodů na hranici, obvykle se hraniční přímky obarvovaly celé střídavě jednou a druhou barvou. Nedávno se nám však spolu s V. Jelínkem, J. Kynčlem, T. Vallou podařilo dokázat, že existuje celá třída takových obarvení, která neobsahují rovnostranný trojúhelník o dané délce strany se všemi vrcholy obarvenými stejnou barvou. Pokud se navíc omezíme na obarvení, kde hranici mezi oběma barvami tvoří lomené čáry, pak jsou nalezená obarvení jediná s touto vlastností (viz [12]). Přesněji zkoumaná obarvení charakterizuje následující definice:

Definice 2.2.5. *Řekneme, že obarvení euklidovské roviny dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$ je* polygonální*, jestliže splňuje následující podmínky:*

1. *Množiny C_1 i C_2 jsou obsaženy v uzávěru svého vnitřku.*

2. *Hranice obarvení je tvořena sjednocením úseček (budeme je nazývat* hraniční úsečky*). Dvě hraniční úsečky se mohou protínat pouze ve svých koncových bodech. Připouštíme tyto úsečky i nekonečné, tedy to mohou být i polopřímky nebo přímky. Koncový bod hraniční úsečky budeme nazývat* hraniční vrchol. *Můžeme požadovat, aby kdykoli se v nějakém hraničním vrcholu setkávají jen dvě hraniční úsečky, pak spolu nesvírají přímý úhel. (Jinak by bylo možné hraniční vrchol odstranit a tuto dvojici hraničních úseček nahradit jedinou).*

3. *Každou uzavřenou oblast protíná jen konečně mnoho hraničních úseček (z čehož vyplývá, že každá uzavřená oblast obsahuje jenom konečně mnoho hraničních vrcholů).*



Obrázek 2.1: příklad polygonálního obarvení

Příklad polygonálního zobrazení je uveden na obrázku 2.1. Další definice nám přiblíží nalezenou třídu obarvení s kýženou vlastností:

Definice 2.2.6. *Obarvení euklidovské roviny dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$ nazveme* vyhovující, *jestliže jeho hranice je disjunktním sjednocením nekonečně mnoha nekonečných křivek $\mathcal{L}_i$, $i \in \mathbb{Z}$ s následujícími vlastnostmi:*

1. *Existuje jednotkový vektor $\vec{x}$ takový, že pro každé $i \in \mathbb{Z}$ platí $\mathcal{L}_i + \vec{x} = \mathcal{L}_i$, neboli $\mathcal{L}_i$ je invariantní vůči posunutí o jednotkový vektor $\vec{x}$.*

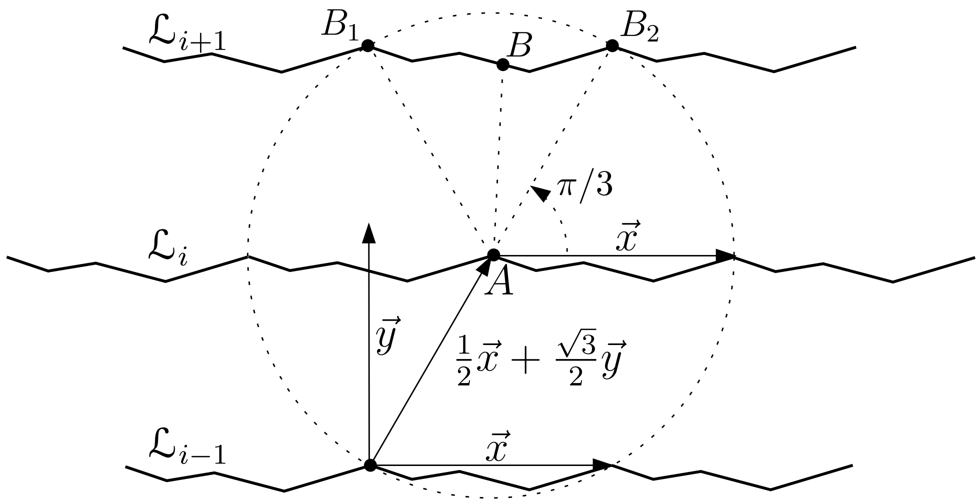
2. *Pro každé $i \in \mathbb{Z}$ platí, že křivka $\mathcal{L}_{i+1}$ je posunutou kopií křivky $\mathcal{L}_i$. Navíc existuje jednotkový vektor $\vec{y}$ kolmý na $\vec{x}$ takový, že platí*

$$\mathcal{L}_{i+1} = \mathcal{L}_i + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}.$$

Jinými slovy, pro libovolný $X \in \mathcal{L}_i$ bod na hranici platí, že body $Y = X + \vec{x}$ a $Z = X + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$ leží také na hranici. Povšimněme si, že XYZ je rovnostranný trojúhelník o jednotkové délce strany, a že platí $Y \in \mathcal{L}_i$ a $Z \in \mathcal{L}_{i+1}$.

3. *Pro každé $i \in \mathbb{Z}$ platí, že vnitřek oblasti ohraničené $\mathcal{L}_i \cup \mathcal{L}_{i+1}$ je obarven jinou barvou, než jakou je obarven vnitřek oblasti ohraničené $\mathcal{L}_{i-1} \cup \mathcal{L}_i$.*

4. *Pro dané dva body A a B označíme θ_{AB} velikost ostrého úhlu vymezeného přímkou AB a vektorem $\vec{x}$. Pak pro každé $i \in \mathbb{Z}$ a každé dva body $A \in \mathcal{L}_i$ a $B \in \mathcal{L}_{i+1}$ platí: $\|AB\| > 1$ právě tehdy, když $\theta_{AB} < \frac{\pi}{3}$. Poslední podmínka přitom může být ekviva-*



Obrázek 2.2: hranice obarvení z definice 2.2.6

lentně přeformulována takto: Nechť $A \in \mathcal{L}_i$ je libovolný bod na hranici. Uvažujme body $B_1 = A - \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$ a $B_2 = A + \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}$ (z předchozích podmínek vyplývá, že oba body B_1, B_2 leží na hraniční křivce $\mathcal{L}_{i+1}$) a dále $A' = A + \sqrt{3}\vec{y}$ (tedy $A' \in \mathcal{L}_{i+2}$). Potom platí, že část $\mathcal{L}_{i+1}$ mezi body B_1 a B_2 je v průniku vnitřků kruhů se středy v bodech A a A') a jednotkovými poloměry a žádný jiný bod $C \in \mathcal{L}_{i+1}$ neleží uvnitř tohoto průniku.

Zdůrazněme, že ne každé vyhovující obarvení je nutně polygonální. Na druhou stranu není těžké ověřit, že v rovině obarvené nějakým vyhovujícím obarvením při vhodném obarvení bodů na hranici neexistuje jednotkový rovnostranný trojúhelník, jehož všechny vrcholy by měly stejnou barvu. Jak jsme již předeslali, pro polygonální obarvení platí i opačná implikace. Aby se nám tvrzení lépe formulovalo, použijeme ještě jednu definici:

Definice 2.2.7. *Řekneme, že zobrazení ν' je* dvojčetem *zobrazení ν, jestliže se od něj liší jen obarvením bodů na hranici, neboli obarvení ν a ν' mají stejnou hranici a přiřazují stejné barvy vnitřkům oblastí.*

Dosažený výsledek pak můžeme shrnout do následující věty:

Věta 2.2.8 (Jelínek, Kynčl, Stolař, Valla [12])**.** *Nechť je dáno polygonální obarvení ν euklidovské roviny dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Obarvení ν je vyhovující polygonální obarvení.*
2. *Existuje dvojče obarvení ν takové, že neobsahuje žádný jednotkový rovnostranný trojúhelník, jehož vrcholy by měly všechny stejnou barvu.*

Pro čtverec potom platí obdobné snadné tvrzení, jako bylo Tvrzení 2.2.4 pro rovnostranný trojúhelník:

Tvrzení 2.2.9. *Buď X čtveřice bodů tvořící čtverec. Pak existuje obarvení euklidovské roviny $\mathbb{E}^2$ dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$ takové, že žádná kopie X není jednobarevná.*

Důkaz. Hledaným obarvením je opět například rozdělení roviny na rovnoběžné pruhy o šířce rovné délce strany hledaného čtverce. Pruhy obarvíme střídavě oběma barvami, hranice mezi nimi potom rovněž střídavě, aby nebyl žádný z pruhů uzavřený. □

Silnější výsledek potom nabízí následující věta:

Věta 2.2.10 (Cantwell [2])**.** *Buď X čtveřice bodů tvořící čtverec. Pak existuje obarvení 4-dimenzionálního euklidovského prostoru $\mathbb{E}^4$ dvěma barvami $\mathbb{E}^4 = C_1 \cup C_2$ takové, že žádná kopie X není jednobarevná.*

2.3 Chromatické číslo

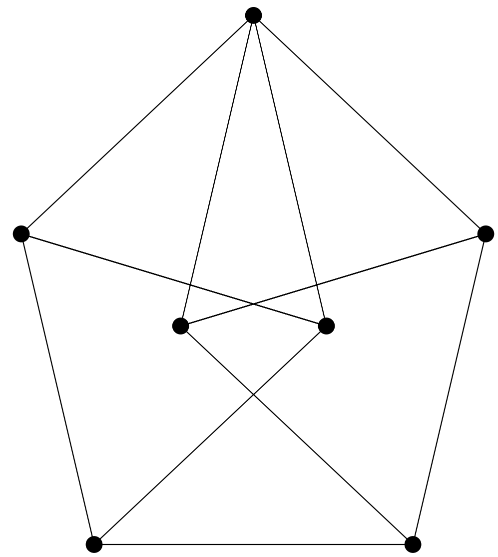
Zastavme se na chvíli u nejjednoduššího případu: dvojice bodů v dané pevné vzdálenosti. Je zřejmé, že 1-dimenzionální euklidovský prostor, tedy přímku, lze obarvit dvěma barvami tak, že žádná dvojice bodů v dané vzdálenosti nebude mít stejnou barvu. Na druhou stranu při každém obarvení 2-dimenzionálního euklidovského prostoru (tzn. roviny) dvěma barvami už lze nalézt jednobarevnou dvojici bodů v dané vzdálenosti od sebe. Totéž platí i při obarvení euklidovské roviny třemi barvami, návod kde hledat dva body stejné barvy ukazuje Moserův graf na obrázku 2.3. Všechny vyznačené hrany mají stejnou délku a graf má barevnost 4, nelze ho tedy obarvit třemi barvami.

Rozdělení euklidovské roviny na šestiúhelníkovou síť o průměru jednotlivých šestiúhelníků rovnému $0,9$-násobku dané délky a jejich vhodné periodické obarvení sedmi barvami pak zase ukazuje, že při použití sedmi barev už jednobarevná dvojice bodů v hledané vzdálenosti existovat nemusí (viz. obrázek 2.4). Abychom vyjádřili tuto vlastnost euklidovské roviny, budeme potřebovat následující definici:

Definice 2.3.1. *Buď* chromatické číslo *n-rozměrného euklidovského prostoru nejmenší počet barev takový, že lze s jejich pomocí obarvit n-rozměrný euklidovský prostor tak, aby neobsahoval jednobarevnou dvojici bodů v dané vzdálenosti. Budeme ho značit $\chi\left(\mathbb{E}^n\right)$.*

Potom nám konstrukce uvedené výše dávají následující odhady:

$$4 \leq \chi\left(\mathbb{E}^2\right) \leq 7. \tag{2.1}$$



Obrázek 2.3: Moserův graf

Zjištění přesné hodnoty chromatického čísla je velmi známý a hojně zkoumaný problém, jeho historií se zabývá např. [20]. Tyto odhady jsou známy více než půl století a dosud nejsou známy lepší. Jistý pokrok směrem ke zlepšení horního odhadu představoval výsledek A. Soifera. V práci [21] nalezl obarvení euklidovské roviny sedmi barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_7$, přičemž v žádné z barev C_1 až C_6 neexistuje dvojice bodů v dané vzdálenosti a ve zbývající sedmé barvě neexistuje dvojice bodů v pětinové vzdálenosti. Další podobné obarvení euklidovské roviny "téměř" zlepšující horní odhad pak ukážeme v kapitole 4.

Pro úplnost ještě dodáme, že nejlepší známé odhady pro 3-rozměrný euklidovský prostor jsou (viz [16], [17])

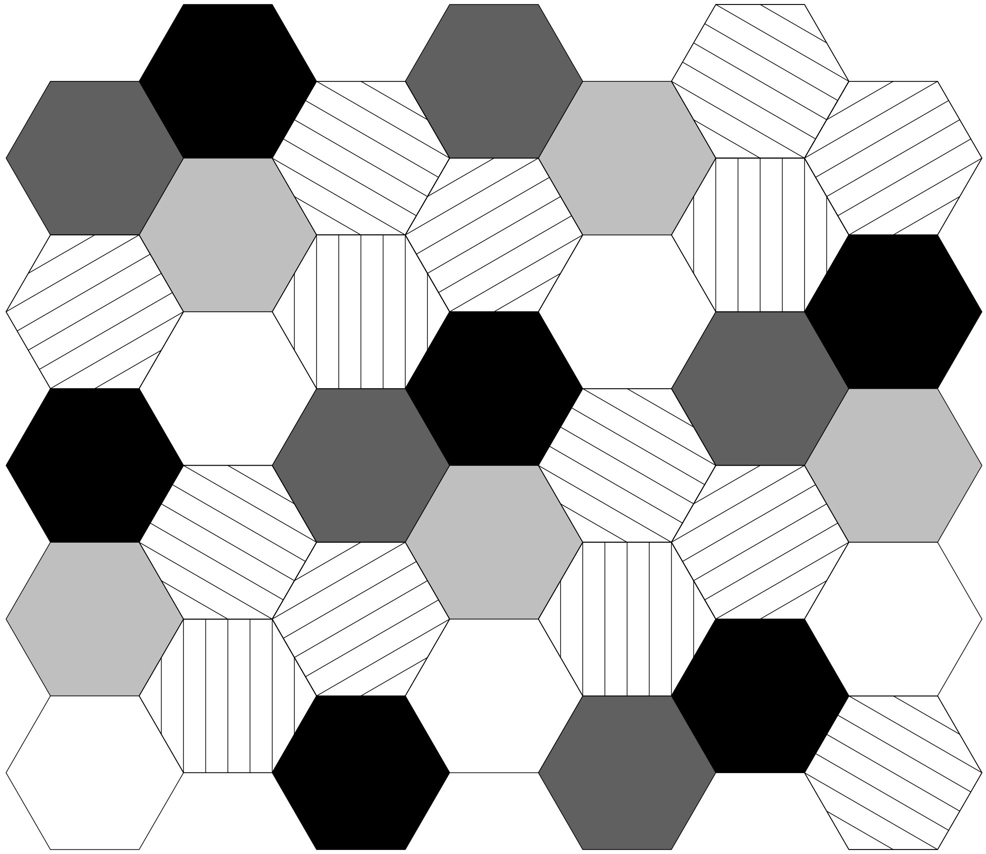
$$6 \leq \chi\left(\mathbb{E}^3\right) \leq 15, \tag{2.2}$$

a v obecném případě n-rozměrného euklidovského prostoru platí (viz [9], [3])

$$\left(6/5 + o\left(1\right)\right)^n \leq \chi\left(\mathbb{E}^n\right) \leq \left(3 + o\left(1\right)\right)^n. \tag{2.3}$$

2.4 Ramseyovské věty v euklidovském prostoru

Na závěr připomeneme několik velmi důležitých vět, které nám dodávají optimismus při hledání dalších odhadů. Ujišťují nás totiž o jejich existenci. Nejprve ale budeme potřebovat jednu definici:



Obrázek 2.4: periodické obarvení roviny sedmi barvami dokazuje horní odhad $\chi(\mathbb{E}^2)$

Definice 2.4.1. *Nechť je dána konfigurace X bodů v euklidovském prostoru nějaké dimenze. Řekneme o ní, že je* ramseyovská, *jestliže pro každý počet barev r existuje dimenze N taková, že pro každé obarvení N-rozměrného euklidovského prostoru $\mathbb{E}^N$ r barvami existuje barva i obsahující kongruentní kopii X.*

Pro demonstraci dobře poslouží následující příklad:

Příklad 2.4.2. *Dvojice bodů v libovolné pevně dané vzdálenosti je ramseyovská konfigurace bodů, neboť pro každý počet barev r lze uvážovat r-dimenzionální simplex s příslušnou délkou hrany, který nám existenci jednobarevné dvojice bodů zaručí.*

Nyní si vyslovíme větu, která nám umožní rozšířit naše poznání i na konfigurace, pro které zatím neznáme žádné horní odhady, na základě kterých by se dalo usoudit, že jsou ramseyovské:

Věta 2.4.3 (Erdös, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer, Straus [5]). *Jsou-li konfigurace X, Y bodů v euklidovských prostorech nějakých dimenzí ramseyovské, pak i jejich kartézský součin $X \times Y$ je ramseyovská konfigurace bodů.*

Na základě této věty a Příkladu 2.4.2 můžeme snadno odvodit následující důsledek:

Důsledek 2.4.4. *Každá hyperkrychle je ramseyovská.*

Další užtečné tvrzení nám říká, že při hledání jednobarevné hyperkrychle nemusíme chodit příliš daleko — místo v celém euklidovském prostoru stačí hledat na n-dimenzionální sféře. K vyslovení této věty budeme ale nejprve potřebovat následující definici:

Definice 2.4.5. *Nechť je dána konfigurace X bodů v euklidovském prostoru nějaké dimenze. Řekneme o ní, že je* sféricky ramseyovská, *jestliže pro každý počet barev r existuje dimenze $N = N(X, r)$ a poloměr $\rho = \rho(X, r)$ takové, že pro každé obarvení N-rozměrné sféry o poloměru ρ r barvami existuje barva i obsahující kongruentní kopii X.*

A nyní už slibovaná věta:

Věta 2.4.6 (Graham [10]). *Každá hyperkrychle je sféricky ramseyovská.*

Vyvstává pouze otázka, na jak velké sféře naši jednobarevnou hyperkrychli hledat. Na to nám odpovídá následující výsledek a významně tak zesiluje větu 2.4.6:

Věta 2.4.7 (Frankl, Rödl [8]). *Nechť je dána n-dimenzionální hyperkrychle X o poloměru 1 (jinými slovy ji lze vepsat do n-dimenzionální sféry o poloměru 1), libovolné reálné číslo $\epsilon > 0$ a libovolný počet barev r. Pak existuje dimenze $N = N(X, r, \epsilon)$ taková, že pro každé obarvení N-rozměrné sféry o poloměru $1 + \epsilon$ pomocí r barev existuje barva obsahující kongruentní kopii X.*

Slušelo by se poznamenat, že předcházející věta a věta 2.4.6 platí i v silnější podobě, kdy místo hyperkrychle uvažujeme množinu vrcholů hyperkvádru, neboli n-dimenzionálního pravoúhlého tělesa, které však na rozdíl od hyperkrychle nemusí mít všechny hrany stejné délky. Stejně tak jsme mohli v obecnější podobě vyslovit Důsledek 2.4.4, my se však spokojíme s těmito variantami tvrzení, neboť naším hlavním objektem zájmu budou právě hyperkrychle.

Pro další výsledky z oblasti eklidovské Ramseyho teorie lze čtenáře odkázat zejména na vyčerpávající přehled v práci [11].

Kapitola 3

Asymetrické ramseyovské věty

Asymetrické ramseyovské věty se dostávají ke slovu tehdy, když nevyžadujeme v každé barvě stejnou strukturu. Je známa celá řada vět, které hovoří o konfiguracích různé velikosti v každé barvě, popřípadě i o konfiguracích úplně různého druhu. Asymetrické ramseyovské věty rozšiřují a svým způsobem zobecňují poznatky získané studiem symetrických případů a dávají celé problematice další rozměr.

Vzhledem ke komplikovanosti zápisu tvrzení a zejména důkazů pro obecnou velikost hledaných konfigurací bodů v euklidovském prostoru budeme věty někdy vyslovovat a dokazovat jen pro jednotkovou velikost těchto konfigurací (tzn. místo pro obecný čtverec jen pro čtverec o straně jedna a podobně). Platí-li totiž nějaké tvrzení v takovéto zjednodušené podobě, triviálně z něj vyplývá i platnost jeho obecnější varianty, neboť můžeme každé obarvení v důkazu upravit pro příslušné měřítko, pokud je toho třeba.

Kde to prospěje lepší čitelnosti a snazší pochopitelnosti textu, budeme barvy označovat jmény místo abychom je číslovali. Obarvení bodů euklidovského prostoru modrou a červenou barvou dá jistě čtenáři lepší představu, zejména jde-li o komplikovanější konstrukci.

3.1 Známé výsledky

Na úvod zmíníme několik dřívějších výsledků z oblasti asymetrické ramseyovské teorie, které lze najít v dnes již základních pracích [5], [6], [7]:

Věta 3.1.1. *Nechť je dáno libovolné obarvení euklidovské roviny $\mathbb{E}^2$ dvěma barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$. Pak pro každou z následujících dvojic konfigurací bodů X_1, X_2 platí, že buď existuje v C_1 kongruentní kopie X_1, nebo v C_2 existuje kongruentní kopie X_2:*

1. *$X_1 \subset \mathbb{E}^2$ je libovolná dvoubodová konfigurace bodů a $X_2 \subset \mathbb{E}^2$ je libovolná tříbodová kofigurace bodů,*

2. *$X_1 \subset \mathbb{E}^2$ je dvojice bodů ve vzdálenosti 1 a $X_2 \subset \mathbb{E}^2$ je čtveřice bodů ležících na přímce, přičemž vzdálenost mezi dvěma sousedními body je vždy 1.*

Poslední část tvrzení lze ovšem podstatně zesílit, jak ukazuje následující výsledek:

Věta 3.1.2 (Juhász [13]). *Nechť je dáno libovolné obarvení euklidovské roviny* $\mathbb{E}^2$ *dvěma barvami* $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$. *Dále nechť* $X_1 \subset \mathbb{E}^2$ *je dvojice bodů ve vzdálenosti* 1 *a* $X_2 \subset \mathbb{E}^2$ *je libovolná čtyřbodová kofigurace bodů. Pak platí, že buď existuje v* C_1 *kongruentní kopie* X_1*, nebo v* C_2 *existuje kongruentní kopie* X_2.

Další věta se týká barvení 3-dimenzionálního euklidovského prostoru:

Tvrzení 3.1.3 (Erdös, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer, Straus [6]). *Nechť je dáno libovolné obarvení 3-rozměrného euklidovského prostoru* $\mathbb{E}^3$ *dvěma barvami* $\nu : E^3 \to \{modrá, červená\}$. *Pak existuje buď rovnoramenný pravoúhlý trojúhleník modré barvy, nebo čtyřbodová množina tvořící vrcholy čtverce v červené barvě.*

A na závěr našeho krátkého přehledu si připomeneme i jeden negativní výsledek:

Věta 3.1.4 (Csizmadia, Tóth [4]). *Existuje* $X \subset \mathbb{E}^2$ *konfigurace osmi bodů v euklidovské rovině a obarvení euklidovské roviny* $\mathbb{E}^2$ *dvěma barvami* $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2$ *takové, že množina* C_1 *neobsahuje žádnou dvojici bodů vzdálených od sebe přesně o* 1 *a množina* C_2 *neobsahuje žádnou kongruentní kopii konfigurace* X.

3.2 Horní odhad pro hyperkrychle

Ústředním tématem této práce a hlavním objektem našeho zkoumání jsou hyperkrychle a jejich ramseyovské vlastnosti. Již z kapitoly 2 víme, že pro každý počet dimenzí n a každý počet barev r existuje počet dimenzí N takový, že v libovolném obarvení N-dimenzionálního euklidovského prostoru r barvami $\mathbb{E}^N = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_r$ existuje n-dimenzionální hyperkrychle taková, že všechny její vrcholy jsou obarveny stejnou barvou. Obdobné tvrzení platí jak víme dokonce i pro barvení N-dimenzionální sféry o vhodném poloměru. Nás budou nejvíce zajímat asymetrické případy a začneme tím nejjednodušším — dvoubarevným. Nejprve budeme potřebovat následující definici:

Definice 3.2.1. *Buď* $N(k,l)$ *nejmenší možná dimenze* n *euklidovského prostoru taková, že pro libovolné obarvení* $\nu : E^n \to \{modrá, červená\}$ *jeho bodů existuje buď* k*-rozměrná jednotková hyperkrychle, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny modře, nebo* l*-rozměrná jednotková hyperkrychle, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny červeně. Takovýmto číslům* $N(k,l)$ *budeme říkat* ramseyovská čísla *pro příslušné hyperkrychle.*

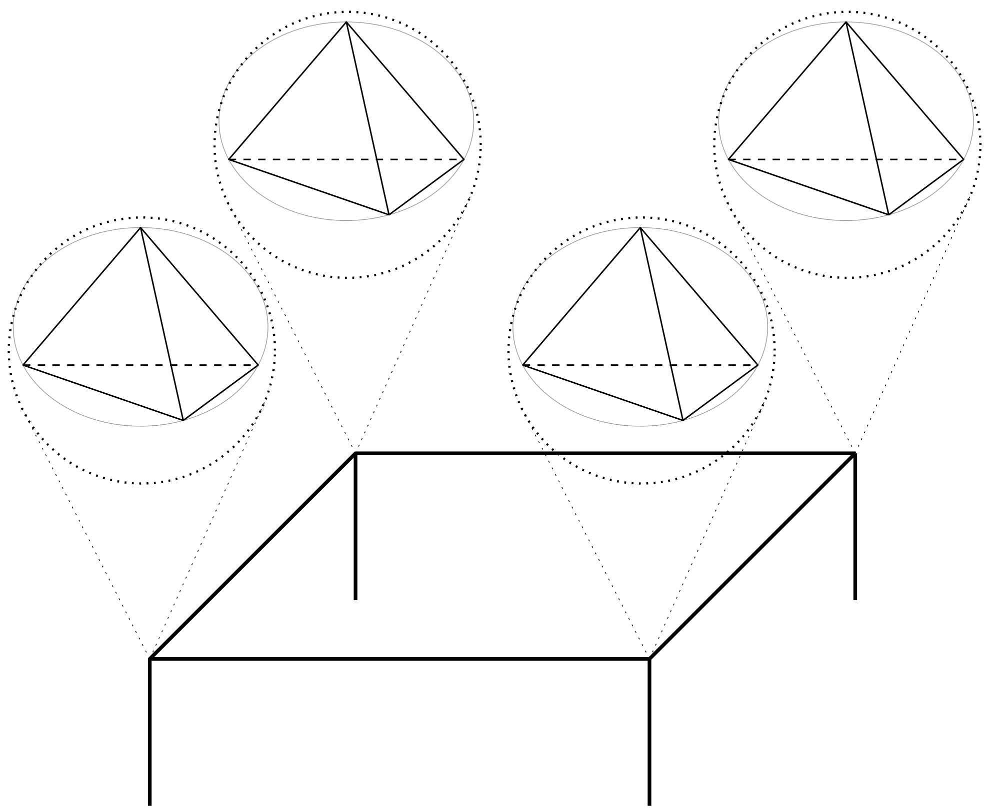
Nyní už můžeme ukázat horní odhad ramseyovského čísla pro speciální třídu případů, kdy jedna z hyperkrychlí má dimenzi pouze 1:

Věta 3.2.2. $N(k,1) \le 2^{k-1} + k$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle k.

1. $N(1,1) = 2$, neboť jednorozměrný euklidovský prostor lze snadno obarvit tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu, a naopak v euklidovské rovině obarvené dvěma barvami mají alespoň dva ze tří bodů tvořících rovnostranný trojúhelník o straně délky 1 stejnou barvu.

2. Předpokládejme, že při každém obarvení $\left(2^{k-2}+k-1\right)$-dimenzionálního euklidovského prostoru modrou a červenou barvou lze nalézt $(k-1)$-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny modře, nebo 1-rozměrná jednotková hyperkrychle (neboli úsečku délky 1), jejíž oba vrcholy jsou obarveny červeně. Mějme body $\left(2^{k-1}+k\right)$-dimenzionálního euklidovského prostoru obarveny modrou a červenou. Pak podle indukčního předpokladu existuje buď modrá $(k-1)$-rozměrná jednotková hyperkrychle, nebo dva červené body v jednotkové vzdálenosti. Ve druhém případě bychom byli hotovi, rozebereme tedy první:



Obrázek 3.1: konstrukce simplexů v důkazu věty 3.2.2

Tato modrá hyperkrychle leží v nějakém $(k-1)$-rozměrném podprostoru našeho obarveného $\left(2^{k-1}+k\right)$-dimenzionálního euklidovského prostoru, existuje zde tedy $\left(2^{k-1}+1\right)$-dimenzionální prostor na něj kolmý. V tomto podprostoru uvažujme sféry tvořené body v jednotkové vzdálenosti od vrcholů naší modré hyperkrychle. Na každé z těchto sfér si zvolím $2^{k-1}+1$ bodů tvořících simplex o hraně délky 1 (tedy pro každý vrchol modré hyperkrychle jeden simplex), což mohu, neboť takový simplex lze vepsat do 2^{k-1}-dimenzionální sféry o poloměru menším než 1 a takovou moje $\left(2^{k-1}+1\right)$-dimenzionální sféra obsahuje. Simplexy navíc zvolím tak, aby byly všechny "souhlasně orientované", tedy aby spojnice odpovídajících si vrcholů simplexů s k nim příslušnými vrcholy modré hyperkrychle byly rovnoběžné. Popsanou konstrukci simplexů nám nejlépe znázorňuje obrázek 3.1. Nyní mohou nastat dvě možnosti: buď některý ze simplexů obsahuje dva červené vrcholy — potom jsem ovšem nalezl 1-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli s vrcholy obarvenými na červeno, nebo obsahuje každý simplex nejvýše jeden červený vrchol.

Simplexů je ale tolik co vrcholů $(k-1)$-dimenzionální hyperkrychle, tedy 2^{k-1}, a každý má $2^{k-1}+1$ vrcholů. Existuje tedy vrchol takový, že on sám i všechny jemu odpovídající vrcholy v ostatních simplexech jsou obarveny modře. Všechny jsou ale v jednotkové vzdálenosti od jim odpovídajících vrcholů modré $(k-1)$-dimenzionální hyperkrychle a jejich spojnice s těmito vrcholy jsou kolmé na podprostor daný stávající hyperkrychlí a jsou vzájemně rovnoběžné, dohromady tedy tvoří k-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli se všemi vrcholy jsou obarvenými modrou barvou.

$\square$

Kapitola 4

Barvení více barvami

4.1 Definice

Jak jsme se již v úvodu zmiňovali, lze zkoumat také ramseyovské vlastnosti obarvení více než dvěma barvami. Dosud jsme se však zabývali jen ramseyovskými větami v euklidovském prostoru obarveném dvěma barvami. Nyní si dokážeme i některá tvrzení pro více barevná obarvení, nejprve však budeme potřebovat zobecnit definici definici ramseyovského čísla pro hyperkrychle:

Definice 4.1.1. *Buď $N(k_1, k_2, \ldots k_r)$ nejmenší možná dimenze n euklidovského prostoru taková, že pro libovolné obarvení $\nu : E^n \to \{1, 2, \ldots r\}$ jeho bodů existuje $i \in \{1, 2, \ldots r\}$ takové, že v i-té barvě existuje jednotková hyperkrychle dimenze k_i. Takovýmto číslům $N(k_1, k_2, \ldots k_r)$ budeme říkat* zobecněná ramseyovská čísla *pro příslušné hyperkrychle.*

4.2 Horní odhad

Nyní můžeme větu 3.2.2 formulovat trochu obecněji a dostáváme horní odhad pro speciální případ zobecněného ramseyovského čísla:

Věta 4.2.1. $N(k, \underbrace{1, 1, \ldots 1}_{l}) \leq l \cdot 2^{k-1} + k.$

Důkaz. Důkaz bude velmi podobný dvoubarevnému případu, opět budeme postupovat indukcí podle k.

1. $N(\underbrace{1, 1, \ldots 1}_{l+1}) \leq l + 1$, neboť v $(l + 1)$-dimenzionálním jednotkovém simplexu obarveném $l + 1$ barvami podle Dirichletova principu vždy existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti 1.

2. Předpokládejme, že při každém obarvení $\big(l \cdot 2^{k-2} + k - 1\big)$-dimenzionálního euklidovského prostoru l barvami lze nalézt $(k - 1)$-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli, jejíž všechny vrcholy jsou obarveny první barvou, nebo potom 1-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli (neboli úsečku délky 1) v některé z dalších barev. Mějme

body $\left(l \cdot 2^{k-1} + k\right)$-dimenzionálního euklidovského prostoru obarveny l barvami. Pak podle indukčního předpokladu existuje buď $(k-1)$-rozměrná jednotková hyperkrychle v první barvě, nebo dva body v jednotkové vzdálenosti obarvené některou ze zbývajících barev. Ve druhém případě bychom byli hotovi, rozebereme tedy první:

Tato jednobarevná hyperkrychle leží v nějakém $(k-1)$-rozměrném podprostoru našeho obarvného $\left(l \cdot 2^{k-1} + k\right)$-dimenzionálního euklidovského prostoru, existuje zde tedy $\left(l \cdot 2^{k-1} + 1\right)$-dimenzionální prostor na něj kolmý. V tomto podprostoru uvažujme sféry tvořené body v jednotkové vzdálenosti od vrcholů naší jednobarevné hyperkrychle. Na každé z těchto sfér si zvolím $l \cdot 2^{k-1} + 1$ bodů tvořících simplex o hraně délky 1 (tedy pro každý vrchol jednobarevné hyperkrychle jeden simplex), což mohu, neboť takový simplex lze vepsat do $\left(l \cdot 2^{k-1}\right)$-dimenzionální sféry o poloměru menším než 1 a takovou moje $\left(l \cdot 2^{k-1} + 1\right)$-dimenzionální sféra obsahuje. Simplexy navíc zvolím tak, aby byly všechny "souhlasně orientované", tedy aby spojnice odpovídajících si vrcholů simplexů s k nim příslušnými vrcholy modré hyperkrychle byly rovnoběžné. Pro lepší ilustraci opět viz obrázek 3.1 na straně 16. Nyní mohou nastat dvě možnosti: buď některý ze simplexů obsahuje dva vrcholy obarvené oba některou z barev 2 až $l+1$ — potom jsem ovšem nalezl 1-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli s vrcholy obarvenými touto barvou, nebo obsahuje každý simplex nejvýše jeden vrchol od každé z barev 2 až $l+1$.

Simplexů je ale tolik co vrcholů $(k-1)$-dimenzionální hyperkrychle, tedy 2^{k-1}, a každý má $l \cdot 2^{k-1} + 1$ vrcholů. Existuje tedy vrchol takový, že on sám i všechny jemu odpovídající vrcholy v ostatních simplexech jsou obarveny první barvou. Všechny jsou ale v jednotkové vzdálenosti od jim odpovídajících vrcholů jednobarevné $(k-1)$-dimenzionální hyperkrychle zaručení indukčním předpokladem a jejich spojnice s těmito vrcholy jsou kolmé na podprostor daný stávající hyperkrychlí a jsou vzájemně rovnoběžné, dohromady tedy tvoří k-rozměrnou jednotkovou hyperkrychli se všemi vrcholy obarvenými první barvou.

□

4.3 Dolní odhady

Dalším zajímavým problémem při barvení více barvami je potom otázka chromatického čísla n-dimenzionálního euklidovského prostoru $\chi\left(\mathbb{E}^n\right)$, kterou jsme otevřeli už v kapitole 2. Na tomto místě představíme několik výsledků, které souvisejí jak s tímto tématem, tak i s ramseyovskými čísly pro hyperkrychle:

Věta 4.3.1. *$N(2,1,1,1,1,1) \geq 3$.*

Důkaz. Existuje rozdělení euklidovské roviny na šest částí $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$ tak, že množina C_1 neobsahuje čtyři body tvořící čtverec o délce strany 1 a množiny C_2 až C_6 žádná neobsahují dvojici bodů ve vzdálenosti 1. Zkonstruujeme ho následovně: nejprve euklidovskou rovinu rozdělíme na rovnoběžné pruhy o šířce 1 a každý druhý obarvíme první barvou. Zbylé pruhy potom rozdělíme na šachovnici obdélníků o stranách $0,5$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Obdélníky obarvíme barvami 2 až 5 tak, že v každé sousední čtveřici se budou vyskytovat všechny 4 barvy, a to navíc na přeskáčku: jestliže byla některá barva jednou "nahoře", bude se příště vyskytovat "ob jeden sloupeček dole". V polovině šířky pruhu nám tak vznikne pás bodů, kde se setkávají všechny barvy. Nyní sestrojíme kruhy o poloměru 1 se středy v každém druhém z těchto bodů a průniky těchto kruhů budou obarvíme poslední zbylou barvou. Tak jsme zmenšili obdélníky natolik, aby nemohla vzniknout dvojice bodů stejné barvy, z nichž každý je v jiném obdélníku. Obdélníky samy přitom mají úhlopříčku délky 1, stačí tedy vhodně obarvit hranice všech oblastí a máme hledané obarvení. Formálně lze tuto konstrukci zapsat takto:

$$C_1 = \{[x,y] : y \in \langle 2k, 2k+1) \, , k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\begin{aligned}
C_2 = \Bigg\{ [x,y] : \quad & x \in \left\langle 2k\sqrt{3}, 2k\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{-4\left(y-2l\right)^2 + 4\left(y-2l\right) + 3}}{2} \right), \\
& k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l+1, 2l+\frac{3}{2} \right), l \in \mathbb{Z} \Bigg\} \cup \\
\Bigg\{ [x,y] : \quad & x \in \left\langle \left(2k+1\right)\sqrt{3}, \left(2k+1\right)\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{-4\left(y-2l\right)^2 + 4\left(y-2l\right) + 3}}{2} \right), \\
& k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l+\frac{3}{2}, 2l+2 \right), l \in \mathbb{Z} \Bigg\},
\end{aligned}$$

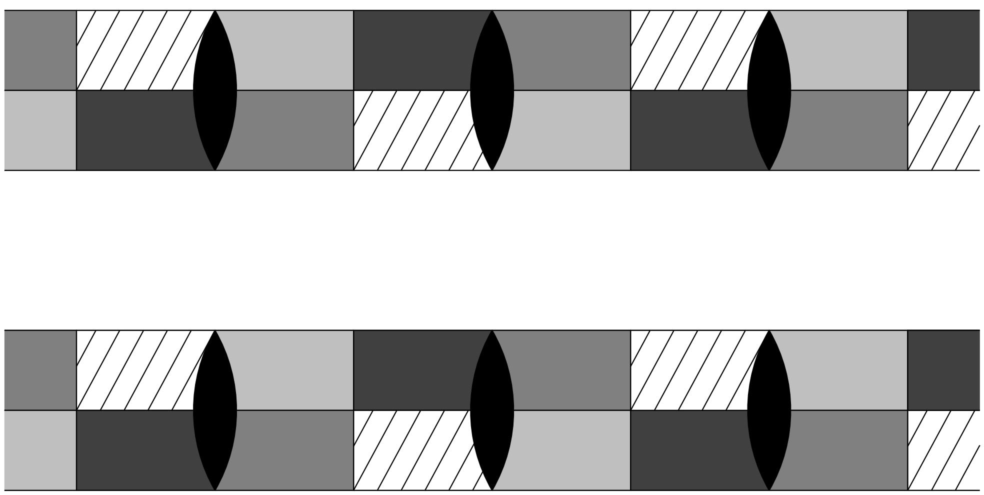
$$\begin{aligned}
C_3 = \Bigg\{ [x,y] : \quad & x \in \left\langle 2k\sqrt{3}, 2k\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{-4\left(y-2l\right)^2 + 4\left(y-2l\right) + 3}}{2} \right), \\
& k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l+\frac{3}{2}, 2l+2 \right), l \in \mathbb{Z} \Bigg\} \cup \\
\Bigg\{ [x,y] : \quad & x \in \left\langle \left(2k+1\right)\sqrt{3}, \left(2k+1\right)\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{-4\left(y-2l\right)^2 + 4\left(y-2l\right) + 3}}{2} \right), \\
& k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l+1, 2l+\frac{3}{2} \right), l \in \mathbb{Z} \Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = \Bigg\{ [x,y] : \quad & x \in \left(2k\sqrt{3} + \sqrt{-\left(y-2l\right)^2 + \left(y-2l\right) + \frac{3}{4}}, \left(2k+1\right)\sqrt{3} \right), \\
& k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l+1, 2l+\frac{3}{2} \right), l \in \mathbb{Z} \Bigg\} \cup
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{ [x,y] : \quad x \in \left((2k+1)\sqrt{3} + \sqrt{-(y-2l)^2 + (y-2l) + \frac{3}{4}}, (2k+2)\sqrt{3} \right), \right. \\
&\qquad \left. k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l + \frac{3}{2}, 2l+2 \right), l \in \mathbb{Z} \right\}, \\
C_5 = &\left\{ [x,y] : \quad x \in \left(2k\sqrt{3} + \sqrt{-(y-2l)^2 + (y-2l) + \frac{3}{4}}, (2k+1)\sqrt{3} \right), \right. \\
&\qquad \left. k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l + \frac{3}{2}, 2l+2 \right), l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \\
&\left\{ [x,y] : \quad x \in \left((2k+1)\sqrt{3} + \sqrt{-(y-2l)^2 + (y-2l) + \frac{3}{4}}, (2k+2)\sqrt{3} \right), \right. \\
&\qquad \left. k \in \mathbb{Z}, \quad y \in \left\langle 2l + 1, 2l + \frac{3}{2} \right), l \in \mathbb{Z} \right\},
\end{aligned}
$$

$$C_6 = \mathbb{E}^2 - (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5)\,.$$

Názornou představu o sestrojeném obarvení lze získat z obrázku 4.1. □



Obrázek 4.1: obarvení z důkazu věty 4.3.1

Tato věta nejen ukazuje dolní odhad pro konkrétní zobecněné ramseyovské číslo pro dané dimenze hyperkrychlí, ale snaží se také nastínit cestu ke zlepšení horního odhadu pro chromatické číslo euklidovské roviny $\chi(\mathbb{E}^2)$. Podobně motivované je i následující tvrzení, které opět představuje dolní odhad zobecněného ramseyovského čísla příslušných hyperkrychlí, ale míří také směrem ke zlepšení horního odhadu pro chromatické číslo 3-dimenzionálního euklidovského prostoru $\chi(\mathbb{E}^3)$. Důkaz přitom kombinuje techniky použité při důkazu horního odhadu chromatického čísla euklidovské roviny $\chi(\mathbb{E}^2)$ a při důkazu předchozí věty, která je dolním odhadem jiného, “menšího” zobecněného čísla. Naznačuje tak cestu, kterou se vydat pro odhady dalších zobecněných ramseyovských čísel.

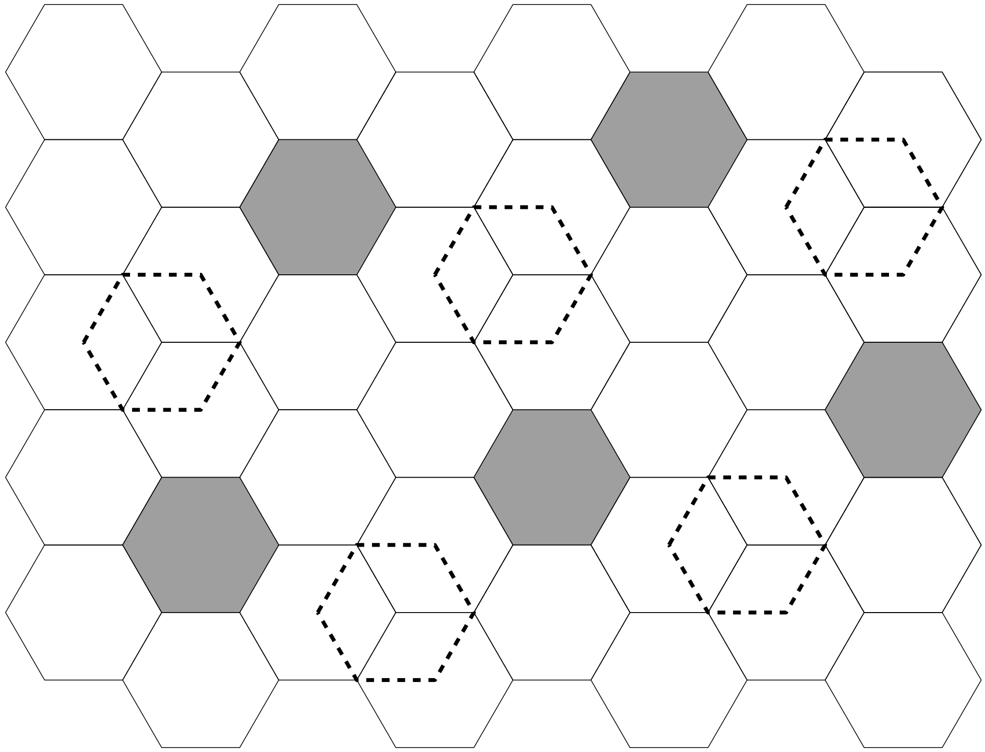
Věta 4.3.2. $N(2,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1) \geq 4$.

Důkaz. Důkaz této věty bude opět konstruktivní – sestrojíme obarvení 3-dimenzionálního euklidovského prostoru dvanácti barvami tak, že žádná z barev 1 až 5 neobsahuje vrcholy čtverce o straně délky 1, a žádná z barev 6 až 12 neobsahuje dvojici bodů ve vzdálenosti 1. Obdobně jako v předchozím případě rozdělíme prostor na pásy oddělené rovnoběžnými rovinami, tentokrát budou mít šířku střídavě $\sqrt{6/7}$ (těm budeme z dobrého důvodu říkat *sedmibarevné*) a $\sqrt{109/112}$ (ty budeme pro změnu nazývat *pětibarevné*). Pro snazší orientaci v dalším průběhu důkazu si jeden ze směrů rovnoběžných s těmito rovinami označíme jako *vodorovný* a další směr rovnoběžný s těmito rovinami, ale kolmý na náš vodorovný směr pak bude *svislý*.

Rovnoběžné pásy o šířce $\sqrt{6/7}$ pak rozdělíme na kolmé šestiboké hranoly o průměru podstavy $\sqrt{1/7}$ (podstavy budou přitom ležet v rovinách oddělujících jednotlivé pásy od sebe) a periodicky je obarvíme barvami 6 až 12 jako v důkazu horního odhadu chromatického čísla euklidovské roviny $\chi(\mathbb{E}^2)$ (viz též obrázek 2.4 na straně 12). Vzdálenost sousedních oblastí se stejnou barvou v řezu rovinou rovnoběžnou s pásy je potom přesně 1, je tedy třeba vhodně obarvit pláště hranolů, což však lze opět snadno provést periodicky — zvolíme nějaké tři sousední stěny jenoho hranolu, obarvíme je stejnou barvou, jakou má on sám, a zrovna tak odpovídající stěny u ostatních hranolů obarvíme barvou těch příslušných hranolů. Rozdělění na šestiboké hranoly a jejich barvení je však třeba provést v sousedních sedmibarevných pásech posunutě: směr šestiúhelníkové sítě dané podstavami zůstane zachován, ale střed šestiboké podstavy hranolu barvy i ($i \in \{6,7,8,9,10,11,12\}$) se bude nacházet na přímce, kterou spolu v sousedním sedmibarevném pásu sousedí hranoly tří barev, jež spolu na obvodu hranolu barvy i nesousedí. Situaci nejlépe přiblíží obrázek 4.2.

Díky tomuto posunutí a vhodné šířce pětibarevného pásu tak bude vzdálenost nejbližších oblastí se stejnou barvou v sousedních pásech opět přesně 1. Stejně tak má délku 1 i nejdelší tělesová úhlopříčka hranolů. Střídavým obarvením rovin oddělujících pásy barvami 1 až 5 a 6 až 12 podle obarvení v příslušném pásu (neboli přiřazení hraničních rovin střídavě pětibarevným a sedmibarevným pásům) lze však snadno zaručit, že nevznikne žádná jednobarevná dvojice bodů v jednotkové vzdálenosti.

Pětibarevné pásy potom obarvíme následovně: rozdělíme je na nekonečné pravoúhlé čtyřboké hranoly ubíhající svislým směrem. V řezu daném vodorovným směrem a směrem kolmým na rovinu pásů budou obdélníky odpovídající barvám 1 až 4 budou mít vodorovnou délku $\sqrt{339/448}$ a druhý rozměr rovný polovině šířky pětibarevného pásu. Uspořádány do budou čtveřic oddělených obdélníkem barvy 5, jež bude zabírat celou šířku pětibarevného pásu a ve vodorovném směru bude měřit $\sqrt{3/112}$, a toto uspořádání se bude periodicky opakovat. Jedná se tedy o velmi podobné rozdělení na oblasti, jaké se vyskytovalo už v důkazu věty 4.3.1. Celé uspořádání je zachyceno na obrázku 4.3.

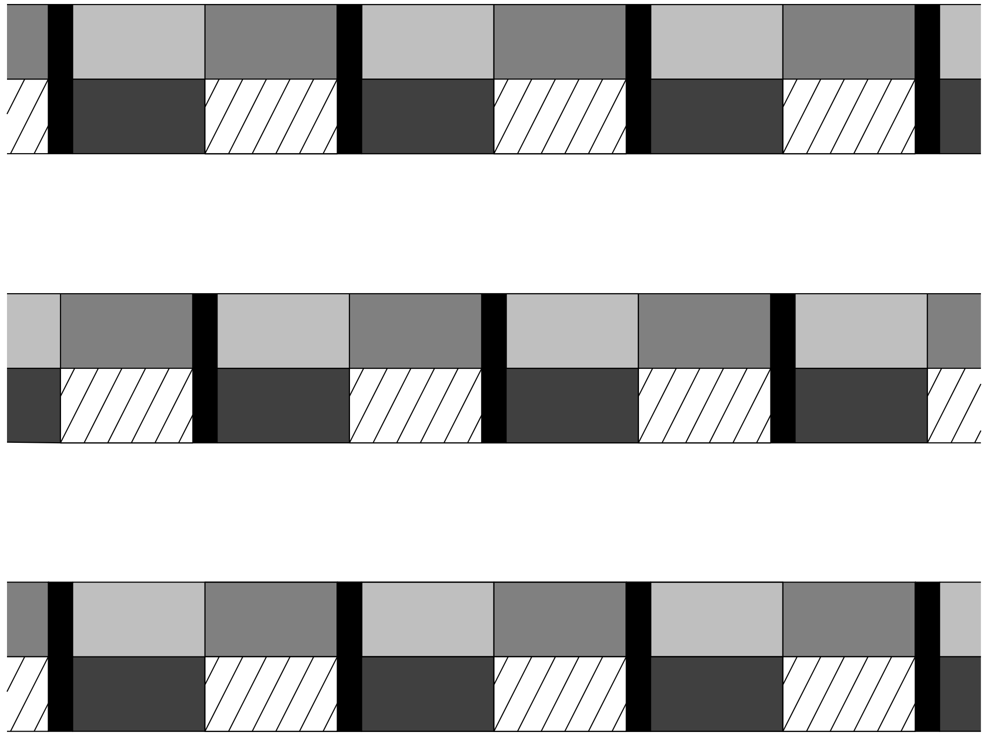


Obrázek 4.2: vzájemné posunutí podstav šestibokých hranolů

Úhlopříčka každého z obdélníků v tomto řezu je tedy přesně 1 a hrozilo by, že v příslušném nekonečném hranolu budou všechny 4 vrcholy čtverce o jednotkové délce strany. Obarvením rovin oddělujících pásy popsaným výše spolu s vhodným obarvením těch ploch dotyku hranolů, které jsou rovnoběžné s rovinami oddělujícími jednotlivé pásy (podle obrázku jsou to v našem případě plochy mezi hranoly barvy světle šedé a tmavě šedé a dále středně šedé a šrafované) tomu ale lze snadno zabránit. Vhodné obarvení vytvoříme například, přidáme-li každou z těchto ploch k hranolu, který nedostal na druhé straně část z roviny oddělující od sebe jednotlivé pásy. Není totiž těžké si všimnout, že záleží pouze na obarvení svislých přímek procházejících vrcholy obdélníků v našem řezu, a těm takto realizované obarvení přiřadí barvy aniž by jednobarevný jednotkový čtverec vzniknul.

Obarvení v sousedních pětibarevných pásech pak bude vůči sobě posunuto ve vodorovném směru, a to o polovinu periody, se kterou se v tomto směru opakuje. Díky šířce sedmibarevného pásu tak zabráníme tomu, aby vznikl čtverec o jednotkové délce strany, který by měl vrcholy v oblastech téže barvy v sousedních pásech. K dokončení důkazu si tak už pouze stačí povšimnout, že i sousední oblasti stejných barev v rámci jednoho pásu jsou od sebe vzdáleny o více než 1 a tedy nehrozí vznik čtverce s délkou strany 1, jehož vrcholy by se nacházely ve sousedních oblastech téže barvy uvnitř jednoho pětibarevného pásu. Formální zápis množin obarvených jednotlivými barvami pro jeho značnou složitost a malou přehlednost s laskavým dovolením čtenáře vynecháme. □

Na tomto místě se hodí poznamenat, že takovéto obarvení skýtá v některých místech ještě dost volnosti, například šířka oněch sedmibarevných pásů, v nichž se nesmí objevit



Obrázek 4.3: periodické obarvení pětibarevných pásů

dva body stejné barvy vzdálené od sebe přesně o 1, je větší než je nezbytně nutné pro "bezpečné" oddělení sousedních pětibarevných pásů. Také v barvách 1 až 4 jsou od sebe v rámci jednoho pásu sousední oblasti vzdáleny o něco málo více než je nezbytně nutné a ani nejsou umístěny střídavě na obou stranách pásu. Barva 5 má potom ještě více místa. Není tedy vyloučeno, že existuje obarvení na podobném principu, které vystačí s menším počtem barev, nebo bude v některé barvě splňovat ještě silnější podmínky (zde máme zejména na mysli případ, kdy v některé z prvních pěti barev nebude k nalezení ani dvojice bodů ve vzdálenosti přesně 1).

4.4 Zobecnění chromatického čísla

Při vyslovování předchozích vět jsme často upozorňovali na blízkou souvislost se známým problémem chromatického čísla euklidovského prostoru. Neřešili jsme však přesně stejnou otázku, ale jakási zobecnění, daná především naším primárním zájmem o hyperkrychle. Není ale na škodu se u možnosti zobecnění chromatického čísla euklidovského prostoru chvíli zastavit a zajímat se o jeho případné vlastnosti.

Logicky hned první na řadě je hledat v uvažovaném obarvení euklidovského prostoru místo jednobarevné úsečky například jednobarevný čtverec. Nemusíme se ovšem omezovat jen na čtverce, můžeme definovat takové zobecnění pro hyperkrychli libovolné dimenze:

Definice 4.4.1. *Buď k-té* chromatické číslo *n-rozměrného euklidovského prostoru nejmenší* *počet barev takový, že lze s jejich pomocí obarvit n-rozměrný euklidovský prostor tak, aby neobsahoval jednobarevnou k-dimenzionální hyperkrychli o jednotkové délce hrany. Budeme ho značit $\chi_k(\mathbb{E}^n)$.*

První chromatické číslo se shoduje s již dříve definovaným chromatickým číslem euklidovského prostoru, proto se budeme zabývat druhým chromatickým číslem. Obarvení euklidovské roviny sedmi barvami z důkazu horního odhadu chromatického čísla euklidovské roviny $\chi(\mathbb{E}^2)$, zobecněné při barvení sedmibarevných pásů v důkazu věty 4.3.2, nás přirozeně inspiruje k myšlence obarvit podobně celý 3-rozměrný euklidovský prostor. Rozdělením $\mathbb{E}^3$ na nekonečné šestiboké hranoly o průměru $0,9$ a jejich periodickým obarvením sedmi barvami podobně jako na obrázku 2.4 na straně 12 opravdu žádný jednobarevný čtverec o jednotkové délce strany nevznikne, můžeme proto formulovat následující pozorování:

Pozorování 4.4.2. $\chi_k(\mathbb{E}^3) \leq 7$.

Obecně ovšem situace není tak jednoduchá a prosté “protažení” nějakého zobrazení do nového rozměru nemusí stačit. Čtverec lze totiž snadno natočit a potom budou průměty jeho vrcholů do roviny, z níž vycházelo původní obarvení, od sebe vzdáleny o jinou než jednotkovou vzdálenost. Dané obarvení nám už o nich tedy nemusí poskytnout žádnou informaci.

Ve zobecňování chromatického čísla euklidovského prostoru ovšem můžeme pokračovat. Zvětšením počtu bodů, které v nějakém obarvení hledáme, se nám značně rozšířily možnosti. Na rozdíl od původního chromatického čísla euklidovského prostoru má totiž nyní smysl hovořit o existenci hledané množiny vrcholů ve sjednocení několika barev. Můžeme například požadovat, aby v daném obarvení neexistovala nejen jednobarevná, ale ani nejvýše r-barevná hyperkrychle. Dostaneme tak následující definici:

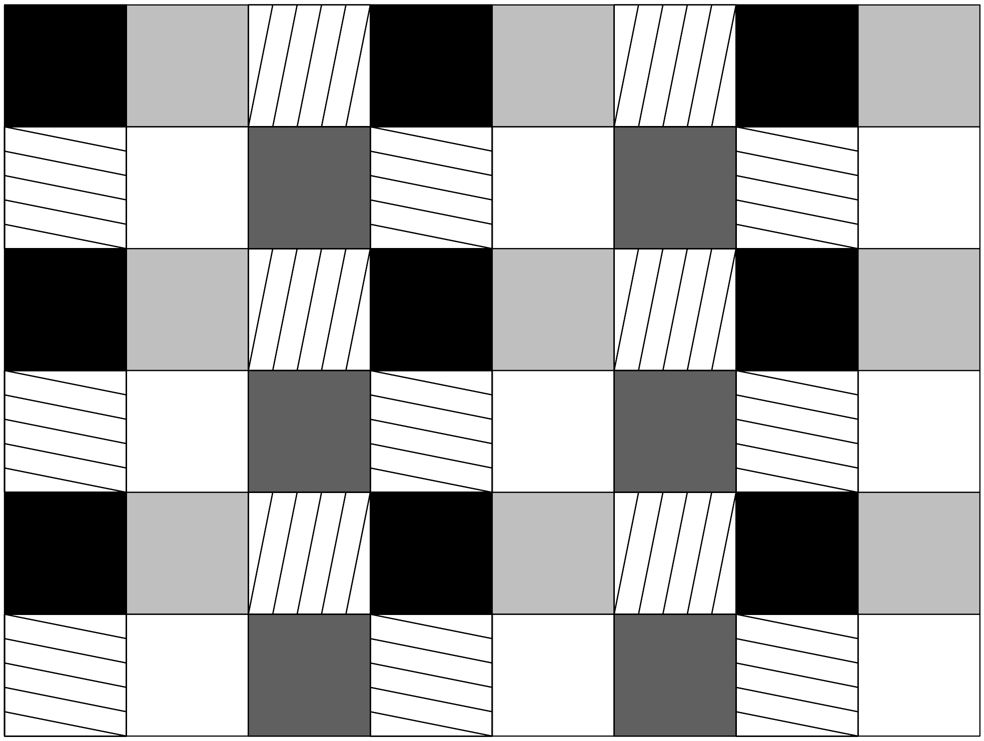
Definice 4.4.3. *Buď* k-té r-barevné chromatické číslo *n-rozměrného euklidovského prostoru nejmenší počet barev takový, že lze s jejich pomocí obarvit n-rozměrný euklidovský prostor tak, každá k-dimenzionální hyperkrychle o jednotkové délce hrany měla vrcholy obarveny více než r barvami. Budeme ho značit $\chi_k^r(\mathbb{E}^n)$.*

Pro nejjednodušší případ ukážeme následující horní odhad:

Věta 4.4.4. $\chi_2^2(\mathbb{E}^2) \leq 6$.

Důkaz. Jako obvykle bude důkaz konstruktivní — popíšeme si obarvení euklidovské roviny šesti barvami $\mathbb{E}^2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$ takové, že pro žádnou dvojici barev C_i, C_j neexistuje X čtveřice bodů v rovině tvořící vrcholy jednotkového čtverce taková, že $X \subseteq C_i \cup C_j$. Euklidovskou rovinu tentokrát rozdělíme na pravidelnou čtvercovou síť o straně délky 1.

Čtverce v lichých pruzích budou obarveny periodicky se opakujícími barvami 1, 2 a 3, čtverce v sudých pruzích potom analogicky barvami 4, 5 a 6 (viz obrázek 4.4). Hraniční přímky mezi pruhy i tentokrát přiřadíme střídavě k lichým a sudým pruhům, takže žádný nebude ani otevřený, ani uzavřený. Také úsečky, oddělující jednotlivé čtverce v rámci jednoho pruhu, přiřadíme těmto čtvercům opět tak, aby každý z nich získal jednu. Tak dosáhneme toho, že nebude možné najít žádný čtverec o jednotkové délce strany, který



Obrázek 4.4: obarvení z důkazu věty 4.4.4

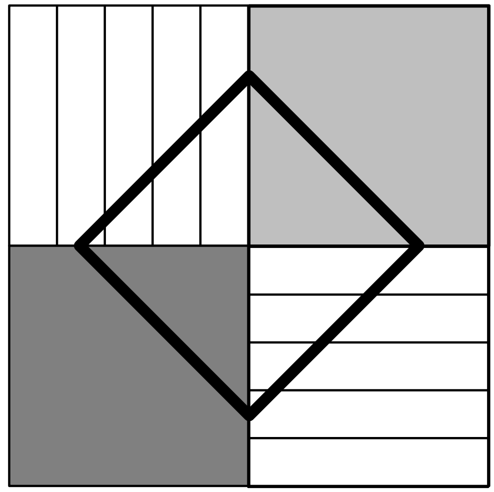
by měl alespoň 3 vrcholy v některé ze souvislých oblastí našeho obarvení. Neexistuje ani takový jednotkový čtverec, který by měl všechny vrcholy v jednom pásu.

Předpokládejme nyní pro spor, že v našem obarvení existuje čtverec jednotkové délky s vrcholy obarvenými dvěma barvami. Rozebereme několik případů:

1. V některém pruhu jsou 3 vrcholy předpokládaného čtverce. Pak ale tyto 3 vrcholy nemohou mít stejnou barvu, neboť nemohou být všechny ve stejném čtverci, a sousední čtverce stejné barvy mají mezi sebou mezeru šířky nejméně jedna. Jediná možnost by byla umístit tyto vrcholy do vrcholů čtverců daných obarvením, což ale právě kvůli obarvení hraničních přímek mezi pruhy není možné. Tyto tři vrcholy jsou tedy obarveny dvěma barvami, příslušný čtvrtý vrchol pak ale bude mít barvu různou předchozích dvou, neboť se nachází v jiném pásu.

2. V každém z pásů jsou nejvýše 2 vrcholy. Pak ale oba tyto vrcholy musí mít stejnou barvu a i zbylé dva vrcholy musí být obarveny shodně. Rozlišíme dvě možné situace:

   (a) Vrcholy leží ve dvou sousedních pruzích, tedy v každém z nich dva. Zřejmě pak musí ležet každá z těchto dvojic v jednom čtverci, neboť jinak by nemohly být obarveny stejnou barvou. Z obrázku 4.5 je patrné, jak by musela situace vypadat. Jakýmkoliv pootočením nebo posunutím čtverce zřejmě dojde k tomu, že některý z vrcholů přejde do jiného čtverce nebo dokonce do jiného pásu. (Stačí si rozmyslet, že u jinak natočeného čtverce je buď “levý” vrchol výše než “pravý”, nebo je “horní” vrchol více nalevo než “dolní”.) Díky obarvení hraničních přímek však ani čtverec na obrázku 4.5 nemá vrcholy obarveny pouze dvěma barvami.



Obrázek 4.5: mezní poloha hledaného dvoubarevného čtverce

(b) Vrcholy leží ve třech sousedních pruzích, tedy v prostředním z nich dva a v každém z krajních po jednom. Vzájemná vzdálenost vrcholů v prostředním pruhu pak ale musí být $\sqrt{2}$ (v opačném případě by musela být vzdálenost zbylých dvou vrcholů 1 a nemohly by tedy ležet ob jeden pás) a proto nemohou být obarveny oba stejnou barvou.

Ve všech případech jsme tedy dospěli ke sporu, čímž je důkaz hotov. Pro úplnost uvádíme ještě formální zápis množin obarvených jednotlivými barvami:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{[x,y] : x \in (3k, 3k+1\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l, 2l+1\rangle, l \in \mathbb{Z}\} \\
C_2 &= \{[x,y] : x \in (3k+1, 3k+2\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l, 2l+1\rangle, l \in \mathbb{Z}\} \\
C_3 &= \{[x,y] : x \in (3k+2, 3k+3\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l, 2l+1\rangle, l \in \mathbb{Z}\} \\
C_4 &= \{[x,y] : x \in (3k, 3k+1\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l+1, 2l+2\rangle, l \in \mathbb{Z}\} \\
C_5 &= \{[x,y] : x \in (3k+1, 3k+2\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l+1, 2l+2\rangle, l \in \mathbb{Z}\} \\
C_6 &= \{[x,y] : x \in (3k+2, 3k+3\rangle, k \in \mathbb{Z}, y \in (2l+1, 2l+2\rangle, l \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

□

Kapitola 5

Závěr

Na tomto místě se pokusíme nějak shrnout dosažené výsledky a nastínit, kudy se podle našeho názoru dále v bádání vydat. Nalezené asymetrické odhady pro hyperkrychle patrně nejsou příliš těsné, takže jednou z možností je jistě jejich vylepšování, a to zejména u horních odhadů. Jejich exponenciální velikost dává tušit, že je zde ještě dost prostoru pro další zlepšení. Také zatím není známa konstrukce pro obecný případ.

V případě dolních odhadů je prostor pro jejich vylepšování nejspíš daleko menší, i když ani zde neumíme odhadnout, jak by měly nejlepší možné odhady vypadat. Existuje však dlouhá řada zajímavých, přesto dosud nezkoumaných případů, které zatím čekají na své vyřešení. Za všechny jmenujme alespoň obarvení obarvení, které by v 3-dimenzionálním euklidovském prostoru vylučovalo v jedné barvě existenci 3-rozměrné krychle, a přirozeným způsobem tak zobecňovalo výsledek formulovaný ve větě 4.3.1.

Tak trochu ve stínu hyperkrychlí, jež byly naším hlavním zájmem, se v této práci nacházela chromatická čísla. Přesto si jistě také zaslouží pozornost a jejich zobecnění, nastíněné v sekci 4.4, by rozhodně stálo za bližší prozkoumání. Celá tato oblast pravděpodobně skýtá možnost ještě řady dalších výsledků, které by patrně mohly sloužit jako námět pro samostatnou práci. Nejzajímavější z nich je nejspíš otázka vzájemného vztahu zobecněných chromatických čísel $\chi_k(\mathbb{E}^n)$ a $\chi_{k+1}(\mathbb{E}^{n+1})$. První číslo by mohlo být horním odhadem pro druhé, důkaz však zatím nemáme. Dalším problémem je pak samozřejmě nalezení odhadu pro vícebarevná chromatická čísla.

Literatura

[1] M. Bóna a G. Tóth, A Ramsey-type problem on the right-angled triangles in space, *Discrete Math.*, 150:61–67, 1996.

[2] K. Cantwell, Finite Euclidean Ramsey theory, *J. Combin. Theory Ser. A*, 73:273–285, 1996.

[3] H.T. Croft, K.J. Falconer a R.K. Guy, *Unsolver Problems in Geometry*, Springer-Verlag, 1991.

[4] G. Csizmadia a G. Tóth, Note on the Ramsey-type problems in geometry, *J. Combin. Theory ser. A*, 65:302–306, 1994.

[5] P. Erdös, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer a E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems, *J. Combin. Theory Ser. A*, 14:341–363, 1973.

[6] P. Erdös, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer a E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems II, v *Infinite and Finite Sets I*, strany 529–557, North-Holland, 1975.

[7] P. Erdös, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer a E.G. Straus, Euclidean Ramsey theorems III, v *Infinite and Finite Sets II*, strany 559–583, North-Holland, 1975.

[8] P. Frankl a V. Rödl, A partition property of simplices in Euclidean space, *J. Amer. Math. Soc.*, 3:1–7, 1990.

[9] P. Frankl a R.M. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences, *Combinatorica*, 1:357–368, 1981.

[10] R.L. Graham, Euclidean Ramsey theorems on the n-sphere, *J. Graph Theory*, 7:105–114, 1983.

[11] R.L. Graham, Euclidean Ramsey Theory, v *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, 2004.

[12] V. Jelínek, J. Kynčl, R. Stolař a T. Valla, Monochromatic triangles in two-colored plane, přijato do *Combinatorica*, 2006.

[13] R. Juhász, Ramsey type theorems in the plane, *J. Combin. Theory ser. A*, 27:152–160, 1997.

[14] J. Matoušek, *Lectures on Discrete Geometry*, Springer 2002.

[15] J. Milne, Tips for Authors, *http://www.jmilne.org/math/tips.html*

[16] O. Nechustan, A note on the space chromtic number, *Discrete Math.*, 256:499–507, 2002.

[17] R. Radoiči a G. Tóth, Note on the chromtic number of the space, v *Discrete and Computational Geometry — The Goodman-Pollack Festschift*, *Algorithms Combin.*, strany 695–698, Springer-Verlag, 2003.

[18] F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.*, 30:264–286, 1930.

[19] L. Shader, All triangles are Ramsey in $\mathbb{E}^2$!, *J. Combin. Theory Ser. A*, 20:385–389, 1976.

[20] A. Soifer, Chromatic number of the plane: A historical survey, *Geombinatorics*, 1:13–14, 1991.

[21] A. Soifer, A six-coloring of the plane, *J. Combin. Theory Ser. A*, 61:292–294, 1992.

[22] G. Tóth, A Ramsey-type bound for rectangles, *J. Graph Theory*, 23:53–56, 1996.