Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Maroš Kuzmiak

Aplikace teorie her na oligopolní struktury

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Týmto by som rád poďakoval svojmu vedúcemu bakalárskej práce pánovi RNDr. Ing. Milošovi Kopovi, Ph.D. za jeho odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi pomohli s vypracovaním tejto práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Aplikace teorie her na oligopolní struktury

Autor: Maroš Kuzmiak

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této bakalářské práci se věnujeme teorii her a její aplikaci na ekonomické modely oligopolů. Zaměřujeme se na určení optimálních strategií v nekooperativním konfliktu a na problematiku formování koalic a přerozdělování výhry v kooperativním typu konfliktu. Získané poznatky a charakteristiky následně uplatňujeme na různé modely oligopolů. Jednotlivé kapitoly jsou doplněny o krátké numerické příklady, pomocí kterých demonstrujeme vyloženou teorii. Tato práce nalezne využití v oblastech, kde se modelují konfliktní situace s využitím znalostí o volbě optimálních strategií.

Klíčová slova: Teorie her, oligopoly, kooperativní hry

Title: Application of game theory on oligopoly structures

Author: Maroš Kuzmiak

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This bachelor thesis is devoted to the games theory and its application to economic models of oligopolies. We focus on determining optimal strategies in non-cooperative conflict and on the issue of coalitions forming and rewards redistribution in cooperative conflict. Lessons learned and characteristics obtained are afterwards applied to different models of oligopolies. Individual chapters are supplemented by short numerical examples which are used to demonstrate the explained theory. The application of this work is to be found in areas where conflict situations are modeled using the knowledge on the choice of optimal strategies.

Keywords: Game theory, oligopoly, cooperative games

Názov práce: Aplikácia teórie hier na oligopolné štruktúry

Autor: Maroš Kuzmiak

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Ing. Miloš Kopa, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto bakalárskej práci sa venujeme teórii hier a jej aplikácii na ekonomické modely oligopolov. Zameriavame sa na určenie optimálnych stratégií v nekooperatívnom konflikte a problematike formovania koalícií a prerozdeľovania výhry v kooperatívnom type konfliktu. Získané poznatky a charakteristiky následne uplatňujeme na rôzne modely oligopolov. Jednotlivé kapitoly sú doplnené o krátke numerické príklady, pomocou ktorých demonštrujeme vyloženú teóriu. Táto práca nájde využitie v oblastiach, kde sa modelujú konfliktné situácie s využitím znalostí o voľbe optimálnych stratégií.

Kľúčové slová: Teória hier, oligopoly, kooperatívne hry

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Cieľom tejto bakalárskej práce je predstaviť teóriu hier a ukázať jej aplikovateľnosť v oblastiach ľudského záujmu. Konfliktné situácie sprevádzajú ľudstvo už od nepamäti, rovnako ako hľadanie ich optimálneho riešenia. Teória hier, ako odvetvie matematiky, si dáva za cieľ práve modelovanie týchto konfliktov pomocou vhodného matematického aparátu. Snaží sa navrhnúť ich riešenia a v rámci teórie hier sa stretávame predovšetkým s pojmom hra, ktorý môžeme voľne interpretovať ako model konfliktu. Pole pôsobnosti teórie hier je široké. Doposiaľ si našla uplatnenie napríklad pri modelovaní súperenia konkurentov v rámci ekonomického, či politického prostredia alebo pri modelovaní chovania firmy v oligopole, či dokonca vo vojenských konfliktoch. Ukazuje sa, že potenciál teórie hier ešte zďaleka nie je dosiahnutý, o čom svedčí významný počet publikácií týkajúcich sa jej využitia.

Z historického hľadiska sa ako medzník vzniku teórie hier považuje kniha pánov J. von Neumanna a O. Morgensterna z roku 1944. Táto kniha predstavuje zhrnutie známych výsledkov, k základom ktorým prispeli páni E. Borel a samotný Neumann. Autori tieto výsledky rozvinuli a doplnili v mnohých smeroch. Otvorili tak dvere rýchlemu rozvoju teórie hier. Nasledovalo mnoho významných prác, o ktoré sa zaslúžila či už Princetonská univerzita, známi matematici J. Nash a J. C. C. McKinsey alebo mnohí ďalší. Vďaka tomu teória hier naberala na popularite a vznikali nové smery a druhy hier. Pre československých matematikov bola užitočná populárna práca od pána J. Willliamsa z roku 1954, ktorá vyšla i v českom jazyku. O rozvoj tejto matematickej disciplíny sa zapríčinili i českí a slovenskí autori M. Maňas, M. Chobot, A. Turnovcová, či F. Turnovec a iní. V súčasnej dobe predstavuje teória hier neoddeliteľnú súčasť základných nástrojov ekonomickej teórie.

Ako prvé sa v tejto práci stretávame so základnými definíciami a vlastnosťami obecne hier n hráčov. Zároveň zavádzame pojem hra v normálnom tvare, ktorý využívame v celej práci.

Nasledujúca kapitola sa podrobne venuje práve nekooperatívnej hre. Kapitola sa člení na tri časti. Prvá a druhá časť sa venuje hľadaniu optimálneho riešenia spomenutého typu hry pre dvoch hráčov a pre n hráčov. Ako riešiť situácie, v ktorých optimálne riešenie nebolo možné určiť, je popísané v tretej časti.

Ďalej definujeme pojem koalícia, ktorý sa uplatňuje v kooperatívnych hrách. Podrobne sa zaoberáme prípadmi, v ktorých môže dochádzať k vzniku koalícií. V náväznosti nato sa zaoberáme rozdelením výhry medzi hráčov v koalíciách.

Na záver kapitoly ešte zavádzame pojem Shapleyho hodnoty hry.

Plynulo prechádzame k modelom oligopolov, venujeme sa príčinám ich vzniku a objasňujeme pojmy kolúzia a kartel. Zavádzame významné modely oligopolov, akými sú Cournotov model, Bertrandov model a Stackelbergov model.

V záverečnej časti tejto práce sa sústreďujeme na aplikáciu vyloženej teórie v modeli kolúzneho Cournotovho oligopolu. Okrem toho, že sa snažíme ukázať, že kolúzny Cournotov model duopolu speje k obecnej hre typu Väzňovo dilema, na príklade tohto typu oligopolu aplikujeme uvedené poznatky kooperatívnych hier.

Kapitola 2

Základné pojmy a definície

2.1 Úvod do teórie hier

Teória hier sa venuje analýze rozhodovacích situácií. S rozhodovacou situáciou sa bežne stretávame napríklad pri hraní kartových hier, ale taktiež sa uplatňuje aj v pokročilejšej ekonomickej teórií oligopolu, kde každá firma zvažuje konanie ostatných účastníkov. Rozhodovacie situácie môžeme rozdeliť v závislosti na počte zúčastnených rozhodovateľov na *konfliktné* a *nekonfliktné*. V nekonfliktnej rozhodovacej situácií vystupuje len jeden rozhodovateľ a štúdiom danej problematiky sa nebudeme v tejto práci venovať. Konfliktnej situácie sa zúčastňujú aspoň dvaja rozhodovatelia, ktorých budeme nazývať *hráčmi* (players). Platí, že následok rozhodnutia prvého hráča je závislý na zvolených rozhodnutiach ostaných hráčov. Každý hráč ma danú množinu rozhodnutí, ktorú budeme nazývať *priestorom stratégií* (strategy space). Funkciu, ktorá kvantifikuje následok zvolenej stratégie prvého hráča a stratégií ostatných hráčov, budeme nazývať *výplatnou funkciou* (payoff function) prvého hráča. Zdrojom sú učebné texty (Maňas, 1974) a (Gibbons, 1992).

Matematickým modelom rozhodovacej situácie je hra v normálnom tvare (normal - form representation of a game).

Definícia 1. *Nech P je konečná, neprázdna, n prvková množina. Prvky množiny P očíslujeme $1, \ldots, n$ a nazveme ich hráčmi. Máme zadaných n množín $S_1, \ldots, S_n$ a n funkcií $U_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, U_n(s_1, \ldots, s_n)$, ktoré sú definované na kartézskom súčine $S_1 \times \cdots \times S_n$. Potom nazveme hrou n hráčov v normálnom tvare množinu:*

$$G = \{P; S_1, \ldots, S_n; U_1(s_1, \ldots, s_n), \ldots, U_n(s_1, \ldots, s_n)\}. \tag{2.1}$$

Množinu P nazveme *množinou hráčov*, pre zjednodušenie budeme značiť $P = \{1, 2, \ldots, n\}$, množinu S_i nazveme *priestorom stratégií* i-tého hráča, prvok $s_i \in S_i$ nazveme *stratégiou* i-tého hráča a funkciu $U_i(s_1, \ldots, s_n)$ nazveme *výplatnou funkciou* i-tého hráča. Kladnú hodnotu výplatnej funkcie $U_i(s_1, \ldots, s_n)$ po dosadení zvolených stratégií $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$, budeme nazývať *výhrou* i-tého hráča. Naopak zápornú hodnotu budeme nazývať *stratou* i-tého hráča. Konštantou n rozumieme počet hráčov.

2.2 Rozdelenie konfliktných situácií

Konfliktné situácie (konflikt) budeme členiť podľa spôsobu rozdelenia výhry. Majme hru $n \geq 2$ inteligentných hráčov, v ktorej skupina hráčov získa práve to, čo stratí skupina zvyšných hráčov nezávisle na zvolených stratégiách. Tento typ konfliktu nazývame *antagonistický konflikt.* Poznatky sme čerpali z knihy (Maňas, 1974).

Poznámka. Inteligentný hráč volí stratégie s úmyslom maximalizovať hodnotu svojej výplatnej funkcie.

Matematickým modelom pre antagonistický konflikt je hra v normálnom tvare s konštantným súčtom.

Definícia 2. *Hru v normálnom tvare, v ktorej pre všetky $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$ platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(s_1, \ldots, s_n) = c,$$

kde c je ľubovoľná konštanta, ktorej hodnota nie je závislá na voľbe stratégií $s_1, \ldots, s_n$, nazývame hrou s konštantným súčtom. Špeciálne pokiaľ sa $c = 0$, hovoríme o hre s nulovým súčtom.

Opakom antagonistického konfliktu je konflikt dvoch alebo viacerých inteligentných hráčov, ktorých zámery nemusia byť striktne protikladné a nazývame ho *neantagonistický konflikt.*

Modelom pre neantagonistický konflikt je hra v normálnom tvare s nekonštantným súčtom.

Definícia 3. *Hru v normálnom tvare pre ktorú platí:*

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(s_1, \ldots, s_n) = \theta(x), \tag{2.2}$$

kde $\theta(x)$ je funkcia definovaná na množine $S_1 \times \cdots \times S_n$, nazývame hrou s nekonštantným súčtom.

V neantagonistickom konflikte, vzhľadom k protichodnosti záujmov hráčov, môže nastať situácia, kedy určitá voľba stratégií bude vzájomne prospešná pre skupinu hráčov. V prípade, keď hráči môžu vzájomne spolupracovať hovoríme o *kooperatívnom type konfliktu.* V opačnom prípade ide o *nekooperatívny typ konfliktu.* Skupinu hráčov, ktorí vzájomne spolupracujú budeme nazývať *koalíciou.* Koalíciou označíme ako množinu $K \subseteq P$. S vznikom koalícií súvisí možnosť rozdelenia získanej výhry. Ak je možné výhru rozdeliť medzi členov koalície, hovoríme o *prenosnej výhre* a v opačnom prípade hovoríme o *neprenosnej výhre.*

2.3 Hra v normálnom tvare

Definícia 4. *Nech priestory stratégií hráčov S_i, $i = 1, \ldots, n$ sú konečné množiny. Potom hru v normálnom tvare nazývame konečnou hrou. Inak ju nazveme nekonečnou hrou.*

V reálnych problémoch sú priestory stratégií hráčov vždy konečné množiny. Ak uvažujme priestorom stratégií peňažné čiastky, potom hráči majú na výber konečný počet eventuálnych stratégií a je vhodné tieto stratégie popísať diskrétnou veličinou. V prípade časových okamžikov sú priestory stratégií opäť konečné množiny, ale pre aplikáciu matematického aparátu (množiny s desať tisícmi prvkov) je výhodnejšie stratégie definovať spojitou veličinou. Pri voľbe optimálnej stratégie je dôležitým faktorom informovanosť hráčov. Hru, kde výplatné funkcie hráčov sú všeobecne známe ostatným hráčom, nazývame ako *hru s úplnou informáciou* (game of complete information). Inak ide o *hru s neúplnou informáciou.*

Okrem hier inteligentných hráčov sa môžeme stretnúť aj s typom hry, ktorých sa účastní *náhodný faktor* (napr. príroda) alebo p-inteligentný hráč. Náhodný faktor si volí svoju stratégiu na základe nejakého rozdelenia pravdepodobnosti. V prípade, ak hráči poznajú pravdepodobnosti, s akou náhodný faktor volí svoje stratégie, potom hovoríme o *rozhodovaní pri riziku.* Inak hovoríme o *rozhodovaní pri neurčitosti.* P-inteligentný hráč sa javí ako kompromis medzi inteligentným hráčom a náhodným faktorom. Voľbu stratégií p-inteligentného hráča môžeme popísať parametrom $p = \langle 0, 1 \rangle$. Pokiaľ je $p = 0$, tak voľba stratégií tohto hráča je identická s voľbou náhodného faktora, kdežto $p = 1$ značí inteligentného hráča.

Táto práca sa zaoberá aplikáciou teórie hier na ekonomické otázky oligopolov, kde je vylúčená účasť náhodného faktora alebo p-inteligentných hráčov, a preto sa v ďalšom texte tejto práce obmedzíme na konečné hry $n \geq 2$ inteligentných hráčov s úplnou informáciou.

2.4 Konvexné množiny

V tejto podkapitole zavedieme pojem konvexná množina v konečne dimenzionálnom Euklidovskom priestore a definujeme niektoré jej vlastnosti. Čerpali sme z (Lachout).

Definícia 5. *Majme $S \subset R^n$. Množinu S nazývame konvexnou množinou, pokiaľ pre každé $s_1, s_2 \in S$ a $\lambda \in (0,1)$ je $\lambda \cdot s_1 + (1-\lambda) \cdot s_2 \in S$. Teda pre ľubovoľné dva body množiny $s_1, s_2 \in S$ ležia všetky ich konvexné lineárne kombinácie v S.*

Príklad. Úsečka, priamka, kruh, štvorec, ihlan, kváder atď. sú konvexné množiny. Nekonvexné množiny sú napríklad kružnica, guľová plocha a iné.

V nasledujúcom texte tejto práce budeme okrem obecného pojmu konvexnej množiny využívať špecifické konvexné množiny.

Definícia 6. *Majme špeciálne konvexné množiny:*

1. *nadrovina, ktorú definujeme ako $\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{s} = c\}$,*

2. *uzavretý polpriestor, ktorý definujeme ako $\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{s} \geq c\}$,*

3. *otvorený polpriestor, ktorý definujeme ako $\{\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n; \boldsymbol{\alpha}^\top \boldsymbol{s} > c\}$,*

4. *konvexná polyedrická množina, ktorá je prienikom konečne mnoho uzavretých polpriestorov,*

5. *konvexný polyedr, definovaný ako obmedzená konvexná polyedrická množina.*

Kapitola 3

Nekooperatívne hry

V tejto kapitole sa budeme podrobne venovať neantagonistickému konfliktu. Tento typ konfliktu, na rozdiel od antagonistického konfliktu, presnejšie modeluje bežné ekonomické situácie, a to práve z dôvodu, že záujmy jednotlivých hráčov nemusia byť nutne protikladné. Z tejto podstaty neantagonistického konfliktu vyplýva aj možnosť koordinácie stratégií. V tejto kapitole spoluprácu hráčov nebudeme uvažovať. Pomocou nasledujúcich definícií a viet sa budeme snažiť vysvetliť voľbu optimálnej stratégie pre všetkých hráčov s cieľom maximalizovať výhru. Podkladom celej tejto kapitoly sú diela (Maňas, 1974), (Maňas, 1991) a (Gibbons, 1992).

3.1 Nekooperatívna hra *2* hráčov

V tejto podkapitole sa obmedzíme na zjednodušený model nekooperatívnej hry dvoch inteligentných hráčov. Matematickým modelom je hra s nekonštantným súčtom (2.2) pre $n = 2$.

Definícia 7. *(Nashova rovnováha) Nech G je hra dvoch hráčov v normálnom tvare s nekonštantným súčtom:*

$$G = \{P; S_1, S_2; U_1(s_1, s_2), U_2(s_1, s_2)\}. \tag{3.1}$$

Potom rovnovážnym bodom (Nash equilibrium) tejto hry nazveme dvojicu stratégií s_1' a s_2', ak platia nasledujúce nerovnosti:

$$\begin{aligned} U_1(s_1,s_2') &\leq U_1(s_1',s_2') \\ U_2(s_1',s_2) &\leq U_2(s_1',s_2') \end{aligned} \tag{3.2}$$

pre všetky stratégie $s_1 \in S_1$ a $s_2 \in S_2$. Stratégia s_1' je rovnovážna stratégia hráča 1 a stratégia s_2' je rovnovážna stratégia hráča 2.

Táto definícia nám nehovorí nič o existencii rovnovážneho bodu. Z nerovností (3.2) vyplýva, že v hre (3.1) s práve jedným rovnovážnym bodom, je tento bod pre oboch hráčov optimálnou voľbou. Komplikácie nastávajú, ak hra (3.1) nemá žiaden rovnovážny bod alebo hra (3.1) má viacero rovnovážnych bodov. Prípadu hry (3.1), ktorá nemá žiaden rovnovážny bod, sa budeme venovať v texte práce neskôr. Pre hry (3.1) s viacerými rovnovážnymi bodmi zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 8. *Uvažujme hru v normálnom tvare* (3.1)*, označme* s_1', $s_1'' \in S_1$ *dve rôzne prípustné stratégie hráča 1.*

1. *Stratégia* s_1' *je dominovaná stratégiou* s_1''*, pokiaľ pre všetky prípustné kombinácie stratégií hráča 2 je výplata hráča 1 pre stratégiu* s_1' *nižšia alebo rovná ako výplata pre stratégiu* s_1''*:*

$$U_1(s_1', s_2) \leq U_1(s_1'', s_2)$$

pre každú stratégiu $s_2 \in S_2$ *z priestoru stratégií hráča 2.*

2. *Stratégia* s_1' *je striktne dominovaná stratégiou* s_1''*, ak pre všetky prípustné kombinácie stratégií hráča 2 je výplata hráča 1 pre stratégiu* s_1' *nižšia než výplata pre stratégiu* s_1''*:*

$$U_1(s_1', s_2) < U_1(s_1'', s_2)$$

pre každú stratégiu $s_2 \in S_2$ *z priestoru stratégií hráča 2.*

3. *Stratégia* s_1' *je nedominovaná stratégiou* s_1''*, ak existuje aspoň jedna stratégia hráča 2, kde výplata hráča 1 pre stratégiu* s_1' *je vyššia ako výplata pre stratégiu* s_1''*:*

$$U_1(s_1', s_2) > U_1(s_1'', s_2)$$

pre aspoň jednu stratégiu $s_2 \in S_2$ *z priestoru stratégií hráča 2.*

Táto definícia v striktnej verzii nám dáva návod ako môžeme hru (3.1) zjednodušiť. Ak stratégia $s_1' \in S_1$ je striktne dominovaná stratégiou $s_1'' \in S_1$ (za predpokladu, že obaja hráči sú inteligentní), hráč *1* eliminuje stratégiu s_1' z priestoru svojich stratégií S_1, pretože stratégia s_1'' mu pre akúkoľvek stratégiu $s_2 \in S_2$ zaručí vyššiu výhru. Hráč *2* si je vedomý tejto skutočnosti, a preto taktiež eliminuje stratégiu s_1' z priestoru stratégií S_1 hráča *1*. Tento proces môžeme iteratívne aplikovať (v prípade existencie ďalších striktne dominovaných stratégií) a hru (3.1) takto zjednodušíme.

Definícia 9. *Nech* (3.1) *je hra s viacerými rovnovážnymi bodmi a bod* (s_1', s_2') *je akýkoľvek rovnovážny bod tejto hry.*

1. *Rovnovážny bod* (s_1'', s_2'') *pre ktorý platí:*

$$\begin{aligned} U_1(s_1'', s_2'') &\geq U_1(s_1', s_2') \\ U_2(s_1'', s_2'') &\geq U_2(s_1', s_2') \end{aligned} \tag{3.3}$$

pre všetky rovnovážne body (s_1', s_2')*, nazývame dominujúci rovnovážny bod hry* (3.1).

2. *Rovnovážny bod* (s_1'', s_2'')*, pre ktorý existuje iný rovnovážny bod* (s_1', s_2') *taký, že:*

$$\begin{aligned} U_1(s_1'', s_2'') &\geq U_1(s_1', s_2') \\ U_2(s_1'', s_2'') &\leq U_2(s_1', s_2'), \end{aligned} \tag{3.4}$$

nazývame nedominujúci rovnovážny bod hry (3.1).

Za predpokladu, že hra (3.1) má viacero rovnovážnych bodov môžu na základe nerovníc (3.3) nastať dve situácie. Buďto hra (3.1) má práve jeden dominujúci rovnovážny bod a tento bod je zároveň pre oboch hráčov najvýhodnejšou voľbou stratégií. V prípade hry (3.1) s viacerými dominujúcimi rovnovážnymi bodmi nejde jednoznačne určiť dvojicu alebo dvojice najlepších stratégií. Pokiaľ hra (3.1) nemá dominujúci rovnovážny bod, tak nemá riešenie.

Definícia 10. *Uvažujme hru* (3.1) *a indexovú množinu* I *takú, že body* $(s_{1i},\ s_{2i})$, $i \in I$ *sú rovnovážnymi bodmi tejto hry. Pokiaľ pre každé* (s_{1m}, s_{1n}), $m, n \in I$ *a pre každé* (s_{2m}, s_{2n}) *platí:*

$$U_i(s_{1m}, s_{2m}) = U_i(s_{1n}, s_{2n}) \qquad i = 1, 2,$$

nazývame body $(s_{1i},\ s_{2i})$, $i \in I$ *zámennými.*

Na základe predošlých definícií si zrekapitulujme, kedy môžeme v neantagonistickej hre (3.1) určiť najlepšiu voľbu stratégií t.j. riešenie hry:

1. V hre (3.1) existuje práve jeden rovnovážny bod, ktorý je zároveň jediným dominujúcim rovnovážnym bodom.
2. V hre (3.1) existuje viacero dominujúcich rovnovážnych bodov a v tomto prípade sú všetky zámenné.

Pre hru (3.1) udáva nasledujúca veta postačujúce podmienky k existencii rovnovážneho bodu.

Veta 1. *Uvažujme hru* (3.1) *s nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. *Priestory stratégií* $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ *a* $S_2 \subset \mathbb{R}^m$ *sú kompaktné a konvexné množiny,*
2. *Pre každé* $s_2 \in S_2$ *je výplatná funkcia hráča 1* $U_1(s_1, s_2)$ *konkávna a spojitá v* s_1 *a pre každé* $s_1 \in S_1$ *je výplatná funkcia hráča 2* $U_2(s_1, s_2)$ *konkávna a spojitá v* s_2*,*
3. *Výplatné funkcie* $U_1(s_1, s_2)$ *a* $U_2(s_1, s_2)$ *sú spojité na množine* $S_1 \times S_2$*.*

Potom hra (3.1) *má aspoň jeden rovnovážny bod.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci Maňas (1974, str. 105 - 107). ❑

Príklad (1). Uvažujme klasický príklad typu manželský spor (The battle of the sexes). Hry sa účastnia dvaja hráči (dvojica, pár, manželia atď.), ktorí sa rozhodujú ako strávia spoločný večer. Na výber majú z dvoch možností. Buď návštevu opery alebo návštevu športového zápasu. Muž preferuje návštevu športového zápasu a žena preferuje návštevu opery, pričom obaja partneri budú radšej tráviť večer spoločne ako samostatne. Túto situáciu reprezentuje nasledujúca tabuľka:

		Muž	
		Opera	Zápas
Žena	Opera	2,1	0,0
	Zápas	0,0	1,2

Tabuľka 3.1: Tabuľka hry *súboj pohlaví*

Hra popísaná tabuľkou (3.1) má dva rovnovážne body (Opera, Opera) = (2, 1) a (Zápas, Zápas) = (1, 2). Žena samozrejme preferuje bod (2, 1) a Muž dáva prednosť bodu (1, 2). Podľa definície (9) sú oba body nedominujúce rovnovážne body, a preto táto hra nemá riešenie.

Poznámka. Uvažujme situáciu, keď si obaja hráči zvolia stratégie prislúchajúce svojmu rovnovážnemu bodu. V takomto prípade by pre oboch hráčov nastal najhorší možný variant, a to bod (Opera, Zápas).

3.2 Nekooperatívna hra n hráčov

Definície zavedené v predošlej podkapitole rozšírime na obecný model nekooperatívnej hry n inteligentných hráčov. Matematickým modelom je hra s nekonštantným súčtom (2.2).

Obdobne ako v predošlej hre *2* hráčov zavedieme definíciu rovnovážnej stratégie i-tého hráča.

Definícia 11. *Máme hru n hráčov v normálnom tvare s nekonštantným súčtom:*

$$G = \{P; S_1, \dots, S_n; U_1(s_1, \dots, s_n), \dots, U_n(s_1, \dots, s_n)\}. \tag{3.5}$$

Rovnovážnym bodom tejto hry nazveme n-ticu stratégií $s' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_n)$ *za platnosti:*

$$U_i(s'_1, s'_2, \dots, s'_{i-1}, s_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n) \le U_i(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) \qquad i = 1, \dots, n, \tag{3.6}$$

pre všetky stratégie $s_i \in S_i$, $i = 1, \dots, n$. *Stratégiu* s'_i *nazývame rovnovážnou stratégiou i-tého hráča.*

Identickú úvahu ako v prípade hry *2* hráčov aplikujeme na hru n hráčov. Ak hra (3.5) má práve jeden rovnovážny bod, potom z nerovnice (3.6) vyplýva, že tento bod je najlepšou voľbou pre všetkých hráčov. Hre (3.5), ktorá nemá žiaden rovnovážny bod sa budeme venovať v texte tejto práce neskôr.

Definícia 12. *Označme v hre* (3.5) s'_i, $s''_i \in S_i$ *dve rôzne prípustné stratégie i-tého hráča.*

1. *Stratégiu* s'_i *nazveme dominovaná stratégiou* s''_i, *ak pre všetky možné kombinácie stratégií ostatných hráčov je výplata i-tého hráča pre stratégiu* s'_i *nižšia alebo rovná než výplata pre stratégiu* s''_i.

   $$U_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \le U_i(s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n),$$

   pre všetky kombinácie $(s_1, s_2 \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, *ktoré môžeme zostrojiť z priestorov stratégií ostatných hráčov* $(S_1, S_2 \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$.

2. *Stratégiu s'_i nazveme striktne dominovaná stratégiou s''_i, ak pre všetky možné kombinácie stratégií ostatných hráčov je výplata i-tého hráča pre stratégiu s'_i nižšia ako výplata pre stratégiu s''_i.*

   $$U_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < U_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

   pre všetky kombinácie $(s_1, s_2 \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, ktorú môžeme zostrojiť z priestorov stratégií ostatných hráčov $(S_1, S_2 \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n)$.

3. *Stratégiu s'_i nazveme nedominovaná stratégiou s''_i, ak existuje jedna kombinácia stratégií ostatných hráčov taká, že výplata i-tého hráča je pre stratégiu s'_i vyššia než výplata pre stratégiu s''_i.*

   $$U_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) > U_i(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \ldots, s_n),$$

   pre aspoň jednu kombináciu $(s_1, s_2 \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$, ktorú môžeme zostrojiť z priestorov stratégií ostatných hráčov $(S_1, S_2 \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n)$.

V prípade existencie striktne dominovaných stratégií môžeme hru (3.5) zjednodušiť obdobným postupom, ktorý sme popísali za Definíciou (8).

Definícia 13. *Uvažujme hru* (3.5) *s viacerými rovnovážnymi bodmi. Rovnovážny bod $s'' = (s''_1, s''_2, \ldots, s''_n)$ nazveme dominujúci rovnovážny bod, ak platí:*

$$U_i(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \leq U_i(s''_1, s''_2, \ldots, s''_n) \qquad i = 1, \ldots, n,$$

pre akýkoľvek rovnovážny bod $s' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$.

Pokiaľ má hra (3.5) práve jeden rovnovážny bod, je tento bod zároveň aj dominujúcim rovnovážnym bodom. V tomto prípade je pre všetkých hráčov najlepšou voľbou práve tento bod. V prípade hry (3.5) s viacerými rovnovážnymi bodmi zavedieme nasledujúce definíciu.

Definícia 14. *Nech máme zadanú hru* (3.5) *a indexovú množinu K tak, že body $s'_k = (s'_{1k}, s'_{2k}, \ldots, s'_{nk})$ pre $k \in K$ sú rovnovážnymi bodmi tejto hry. Pokiaľ hodnota výplatnej funkcie:*

$$U_i(s'_{1k}, s'_{2k}, \ldots, s'_{nk}) = c_i \qquad i = 1, \ldots, n,$$

kde c_i je konštanta nezávislá na k, nazveme body $(s'_{1k}, s'_{2k}, \ldots, s'_{nk})$ zámennými.

V nekooperatívnej hre n hráčov môžeme určiť riešenie hry (3.5) v týchto prípadoch:

1. Hra (3.5) má práve jeden rovnovážny bod, ktorý je zároveň dominujúcim rovnovážnym bodom.

2. Hra (3.5) má viacero dominujúcich rovnovážnych bodov, ktoré sú v tomto prípade zámenné.

Pre nekooperatívnu hru n hráčov (3.5) uvedieme vetu o postačujúcich podmienkach existencii rovnovážneho bodu, ktorá je zobecnením Vety 1.

Veta 2. *Uvažujme hru* (3.5) *s nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. *Priestory stratégií* $S_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$ *sú kompaktné a konvexné množiny.*

2. *Pre všetky* $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$ *sú výplatné funkcie* $U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *konkávne v premenných* $s_i \in S_i$, $i = 1, \ldots, n$.

3. *Funkcia* $\sum_{i=1}^{n} U_i(s_1, \ldots, s_n)$ *je spojitá na celom definičnom obore* $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$.

4. *Na množine* $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$ *sú pre každé* $s_i \in S_i$ *výplatné funkcie* $U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ *spojité vzhľadom k* $s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n$, *pre* $i = 1, \ldots, n$.

Potom nekooperatívna hra n hráčov (3.5) *má aspoň jeden rovnovážny bod.*

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v práci Maňas (1974, str. 135). ❏

3.3 Dvojmaticové hry

V tejto podkapitole sa opäť obmedzíme na model nekooperatívnej hry *2* hráčov ako v sekcii (3.1), kde sme vymedzili situácie, pre ktoré zatiaľ nedokážme určiť optimálne stratégie oboch hráčov. Boli to situácie, kde hra (3.1) nemala žiaden rovnovážny bod alebo situácia hry (3.1) s viacerými nedominujúcimi rovnovážnymi bodmi. V tejto sekcii uvedieme definície a vety, ktoré nám umožnia vždy určiť optimálne stratégie hry (3.1).

Nech priestor stratégií hráča *1* S_1 je m-prvková množina, kde $1 \leq m < \infty, m \in M$ a priestor stratégií hráča *2* je n-prvková množina S_2, $1 \leq n < \infty, n \in N$.

Definujeme matice A, B typu $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

kde prvky $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ matice A odpovedajú hodnote výplatnej funkcie hráča *1* $U_1(s_i, s_j)$, pre stratégie $s_i \in S_1, s_j \in S_2$ a prvky $b_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ matice B odpovedajú hodnote výplatnej funkcie hráča *2* $U_2(s_i, s_j)$, pre $s_i \in S_1, s_j \in S_2$.

Pre lepšiu prehľadnosť prepíšeme obe matice do dvojmatice:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & \ldots & a_{1n}, b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, b_{m1} & \ldots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Definícia 15. *Dvojmaticovou hrou nazývame konečnú hru 2 hráčov v normálnom tvare:*

$$G = \{P; S_1 = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}, S_2 = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}; U_1(s_i, s_j) = a_{ij}, U_2(s_i, s_j) = b_{ij}\}, \tag{3.9}$$

kde prvky a_{ij} sú prvkami matice A a b_{ij} sú prvkami matice B (3.7).

V úvode tejto kapitoly sme definovali situácie, kedy v hre (3.1) neexistujú optimálne stratégie, preto riešenie tejto hry obnáša neistotu hráčov spojenú s voľbou stratégie. Z inteligentnej povahy oboch hráčov vyplýva, že v týchto situáciách bude snahou oboch hráčov čo najlepšie odhadnúť voľbu protihráča.

Definícia 16. *Uvažujme hru v normálnom tvare* (3.1) *s priestorom stratégií hráča 1 $S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1m}\}$, kde stratégiu $s_{1i} \in S_1, i = 1, \ldots, m$ budeme nazývať čistou (rýdzou) stratégiou (pure strategy) hráča 1 a priestorom stratégií hráča 2 $S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2n}\}$, kde stratégiu $s_{2j} \in S_2, j = 1, \ldots, n$ budeme nazývať čistou stratégiou hráča 2. Potom priestorom zmiešaných stratégií (mixed strategy) hráča 1 je vektor pravdepodobností na priestore čistých stratégií S_1:*

$$\boldsymbol{p_1} = (p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1m}), \tag{3.10}$$

kde $p_{1k} \geq 0, k = 1, \ldots, m$ a $\sum_{k=1}^{m} p_{1k} = 1$. Prvky z priestoru $\boldsymbol{p_1}$ budeme nazývať zmiešanými stratégiami hráča 1. Priestorom zmiešaných stratégií hráča 2 je vektor pravdepodobností na priestore čistých stratégií S_2:

$$\boldsymbol{p_2} = (p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2n}), \tag{3.11}$$

kde $p_{2l} \geq 0, l = 1, \ldots, n$ a $\sum_{l=1}^{n} p_{2l} = 1$. Prvky z priestoru $\boldsymbol{p_2}$ budeme nazývať zmiešanými stratégiami hráča 2.

Poznámka. Priestor zmiešaných stratégií taktiež zahŕňa všetky čisté stratégie. Napríklad zmiešaná stratégia $\boldsymbol{p_1} = (1, 0, \ldots, 0)$ znamená, že hráč *1* bude s pravdepodobnosťou 1 voliť prvú stratégiu a s pravdepodobnosťou 0 bude voliť ostatné stratégie.

Definícia 17. *Zmiešaným rozšírením dvojmaticovej hry* (3.9) *je hra 2 hráčov s priestorom stratégií hráča 1* (3.10) *a priestorom stratégií hráča 2* (3.11) *a výplatnými funkciami $U_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{1i} a_{ij} p_{2j} = p_1^\top A p_2$ a $U_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{1i} b_{ij} p_{2j} = p_1^\top B p_2$.*

V zmiešanom rozšírení dvojmaticovej hry (3.9) zavedieme pojem *priemerná zaručená výhra* každého hráča.

Definícia 18. *Majme dvojmaticovú hru 2 hráčov* (3.9) *zadanú maticami* (3.7) *s priestorom stratégií prvého hráča* (3.10) *a s priestorom stratégií druhého hráča* (3.11). *Priemerná zaručená výhra hráča 1 je:*

$$\max_{\boldsymbol{p_1}} \min_{j} \sum_{i=1}^{m} p_{1i} a_{ij},$$

kde p_{1i} je prvok z priestoru $\boldsymbol{p_1}$ (3.10). *Priemerná zaručená výhra hráča 2:*

$$\max_{\boldsymbol{p_2}} \min_{i} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_{2j},$$

kde p_{2j} je prvok z priestoru $\boldsymbol{p_2}$ (3.11).

V úvode tejto podkapitoly sme uviedli situácie, v ktorých zatiaľ nedokážeme určiť optimálne stratégie nekooperatívnej hry dvoch hráčov. V týchto situáciách musíme uvažovať priestory zmiešaných stratégií, tak ako sme ich definovali v (16). O zmiešanom rozšírení dvojmaticovej hry platí dôležitá veta.

Veta 3. *Nech G je dvojmaticová hra* (3.9). *Potom pre každú hru G má jej zmiešané rozšírenie aspoň jeden rovnovážny bod.*

Dôkaz. Dôkaz nájdeme v práci Maňas (1974, str. 110).

❑

Nasledujúca veta nám dáva návod, ako nájdeme tento rovnovážny bod.

Veta 4. *Nech $\boldsymbol{u}$ je m-zložkový jednotkový vektor, $\boldsymbol{v}$ je n-zložkový jednotkový vektor a A, B sú kladné matice typu $m \times n$. Vektory $\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{s}' \neq \boldsymbol{0}$ sú riešením úlohy:*

$$\max F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \max \boldsymbol{r}^\top (A+B)\boldsymbol{s} - \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{s} \tag{3.12}$$

pri obmedzeniach:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{s} &\leq \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{0}, \\ B^\top \boldsymbol{r} &\leq \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{r} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

práve vtedy a len vtedy, ak $\boldsymbol{p_1} = b\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p_2} = a\boldsymbol{s}'$ sú rovnovážnym bodom zmiešaného rozšírenia dvojmaticovej hry (17), *pričom:*

$$\begin{aligned} a &= 1/\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{s}', \\ b &= 1/\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{r}'. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pre vektory $\boldsymbol{r}'$ a $\boldsymbol{s}'$ platí:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}'^\top A\boldsymbol{s}' &= \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{r}' \\ \boldsymbol{r}'^\top B\boldsymbol{s}' &= \boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{s}' \end{aligned} \tag{3.15}$$

takže $F(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}') = 0$.

Dôkaz. Dôkaz je podrobne popísaný v práci Maňas (1974, str. 111 - 112).

❑

Poznámka. Vo vete 4 požadujeme, aby matice A a B boli kladné. Bez ujmy na obecnosti môžeme pripočítať to isté číslo ku všetkým prvkom matíc A a B a získame nové matice s kladnými prvkami také, že dvojmaticová hra nimi popísaná, má rovnaké rovnovážne stratégie ako pôvodná hra a taktiež zmiešané rozšírenia oboch hier majú rovnaké rovnovážne stratégie.

Príklad (2). Pokračovanie Príkladu 1. Uvažujme dvojmaticovú hru popísanú tabuľkou (3.1) zadanú v tvare matíc:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Táto hra nemala riešenie v čistých stratégiách, pretože žiaden z rovnovážnych bodov nie je dominujúcim rovnovážnym bodom. Podľa Vety 4 budeme hľadať riešenie v rámci zmiešaných stratégií. Optimalizačná úloha má tvar:

$$\max F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}) = \max 3r_1 \cdot s_1 + 3r_2 \cdot s_2 - r_1 - r_2 - s_1 - s_2 \tag{3.17}$$

pri obmedzeniach:

$$\begin{aligned} 2s_1 \leq 1, \qquad s_2 \leq 1, \qquad s_1, s_2 \geq 0, \\ r_1 \leq 1, \qquad 2r_2 \leq 1, \qquad r_1, r_2 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ide o úlohu nelineárneho programovania, kde zohľadňujeme $\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{s}' \neq \boldsymbol{0}$. Využitím teórie z (Lachout, kap. 3) získame riešenie:

$$\begin{aligned} r_1' = 1, \qquad r_2' = 1/2, \qquad b = 2/3, \\ s_1' = 1/2, \qquad s_2' = 1, \qquad a = 2/3. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dosadením $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}'$ jednoducho overíme, že $F(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}') = 0$. Zmiešané stratégie získame prepočtom $\boldsymbol{p_1} = b\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p_2} = a\boldsymbol{s}'$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p_1} &= (2/3, 1/3), \\ \boldsymbol{p_2} &= (1/3, 2/3). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Pomocou priestorov zmiešaných stratégií sme získali riešenie tejto hry, kde *Žena* bude s pravdepodobnosťou 2/3 voliť stratégiu *Opera* a s pravdepodobnosťou 1/3 stratégiu *Zápas*. *Muž* bude s pravdepodobnosťou 1/3 voliť stratégiu *Opera* a s pravdepodobnosťou 2/3 stratégiu *Zápas*. Stredná hodnota výhry *Ženy* v zmiešanom rozšírení je rovná $a = 2/3$ a stredná hodnota výhry *Muža* je $b = 2/3$.

V závere tejto kapitoly zavedieme definíciu zmiešaných stratégií nekooperatívnej hry n hráčov.

Definícia 19. *Majme hru v normálnom tvare* (3.5) *s priestorom stratégií i-tého hráča* $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}\}$, *kde stratégiu* $s_{ij} \in S_i, j = 1, \ldots, k$ *budeme nazývať čistou stratégiou i-tého hráča. Potom priestorom zmiešaných stratégií i-tého hráča je vektor pravdepodobností na priestore čistých stratégií* S_i:

$$\boldsymbol{p_i} = (p_{i1}, p_{i2}, \ldots, p_{ik}), \tag{3.21}$$

kde $p_{ij} \geq 0, j = 1, \ldots, k$ *a* $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$. *Prvky z priestoru* $\boldsymbol{p_i}$ *budeme nazývať zmiešanými stratégiami i-tého hráča.*

Veta 5. *Nech G je hra n hráčov* (3.5). *Zmiešané rozšírenie každej hry G má aspoň jeden rovnovážny bod.*

Dôkaz. Dôkaz vety nájdeme v práci Maňas (1974, str. 136 - 137). ❑

Kapitola 4

Kooperatívne hry

V tejto kapitole sa budeme zaoberať neantagonistickým typom konfliktu, v ktorom je možné, aby hráči vzájomne spolupracovali (*kooperatívny typ konfliktu*). Predpokladáme, že zisk je možné rozdeliť medzi hráčov (*prenosná výhra*). Našou snahou bude ukázať, za akých podmienok má zmysel pre jednotlivých hráčov uzatvárať spoluprácu, voľbu optimálnej stratégie v prípade uzatvorenia spolupráce a samozrejme spôsob, akým sa bude rozdeľovať výhra medzi spolupracujúcich hráčov. Využívali sme diela (Maňas, 1974), (Maňas, 1991) a (Hykšová).

4.1 Kooperatívna hra n hráčov

Základnou dilemou kooperatívnej hry n hráčov je pre každého hráča voľba vhodnej spolupráce. K lepšiemu vysvetleniu tejto problematiky zavedieme nasledujúce definície a pojmy.

Definícia 20. *Nech G je hra n hráčov v normálnom tvare* (2.1)*, kde P je množina hráčov. Koalíciou nazveme množinu hráčov $K \subseteq P$, ktorý vzájomne spolupracujú pri voľbe stratégií. Koaličnou štruktúrou budeme nazývať množinu koalícií tejto hry.*

Poznámka. Koalície budeme značiť veľkým tlačeným K s indexom i v závislosti na poradí koalície a koaličnú štruktúru budeme značiť hranatými zátvorkami. Napríklad pre hru G s množinou hráčov $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ značí $K_1 = \{1, 2, 3\}$ koalíciu hráčov $\{1, 2, 3\}$, kdežto $[\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}]$ značí koaličnú štruktúru, kde hráči $\{1, 2, 3\}$ vzájomné spolupracujú a hráči $\{4\}$, $\{5\}$ hrajú samostatne.

Podľa prípustných koaličných štruktúr rozdeľujeme hry do dvoch skupín.

(i) hry, v ktorých žiaden hráč nesmie byť súčasne v dvoch alebo viacerých koalíciách. Tento typ hry nazývame *hry s voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou.* Počet všetkých možných koaličných štruktúr v hre n hráčov je rovný:

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k),$$

kde

$$S(n, k) = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k - i)^n.$$

Pre n = 2 je P(2) = 2, n = 3 je P(3) = 5, n = 4 je P(4) = 15, n = 5 je P(5) = 52, n = 6 je P(6) = 203 atď.

(ii) hry n hráčov, v ktorých jeden hráč môže byť súčasne v niekoľkých koalíciách nazývame *hry s voľnou nedisjunktnou koaličnou štruktúrou.* Všetkých potenciálnych koaličných štruktúr je $2^m - 1$, kde $m = 2^n - 1$.

Hry s voľnou nedisjunktnou koaličnou štruktúrou je náročné doviesť do konca, a to z dôvodu veľkého počtu koaličných štruktúr. Taktiež je náročné simulovať správanie sa hráča v jednotlivých koalíciách. Preto sa v ďalšom texte tejto práce obmedzíme na model hry s voľnou disjunktnou koaličnou štruktúrou.

Definícia 21. *Nech G je hra n hráčov v normálnom tvare* (3.5)*, kde $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina hráčov a $K \subseteq P$ je ľubovoľná koalícia. Potom reálnu funkciu v definovanú na množine všetkých koalícií, pre ktorú platia rovnosti:*

$$v(\emptyset) = 0,$$

$$v(K) = \max_{S(K)} \min_{S(P \setminus K)} \sum_{i \in K} U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

$$v(P) = \max_{\boldsymbol{s} \in \Theta} \sum_{i \in P} U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

kde $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ a $\Theta = S_1 \times \cdots \times S_n$, nazývame charekteristickou funkciou tejto hry.

Poznámka. Funkčné hodnoty charakteristickej funkcie udávajú silu jednotlivých koalícií. Majme napríklad koalíciu $K = \{i, j\}$, namiesto $v(\{i, j\})$, kde budeme značiť charakteristickú funkciu koalície K iba $v(K)$.

Charakteristická funkcia v udáva maximálnu výhru, ktorú si koalícia K môže zabezpečiť, ak ostatní hráči $P \setminus K$ sa jej snažia čo najviac uškodiť. To znamená, že koalícia K si môže vybrať svoju stratégiu tak, že pri ľubovoľnej akcii ostaných hráčov bude jej výhra aspoň $v(K)$. Výplata i-tého hráča nemusí byť rovná hodnote $U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, pretože v koalíciách dochádza k prerozdeľovaniu výhier. Rozdeľovaním výhry koalície K sa budeme venovať v tejto práci neskôr.

Príklad (3). Uvažujme hru troch hráčov, v ktorej zisk koalície je rovný súčtu ziskov jej členov, popísanú nasledujúcou tabuľkou:

Trojice stratégií	Výplatné vektory
(1,1,1)	(0,3,1)
(1,2,1)	(4,2,3)
(1,1,2)	(2,1,1)
(1,2,2)	(1,0,0)
(2,1,1)	(1,0,0)
(2,2,1)	(0,0,1)
(2,1,2)	(1,1,1)
(2,2,2)	(0,1,1)

Tabuľka 4.1: Výplatné vektory pre jednotlivé trojice stratégií

Naším cieľom je nájsť charakteristickú funkciu υ tejto hry. Množina hráčov je $P = \{1, 2, 3\}$, všetky možné koalície sú $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$. Automaticky máme hodnotu $\upsilon(\emptyset) = 0$. Pre koalíciu P je jednoduché určiť $\upsilon(P)$, pretože táto hodnota je rovná najvyššiemu súčtu zložiek každého výplatného vektora. Toto tvrdenie spĺňa stratégia $(1, 2, 1)$, hodnota $\upsilon(P) = 9$. Majme koalíciu $K = \{1\}$ a protikoalíciu $\bar{K} = \{2, 3\}$, hodnotu $\upsilon(1)$ spočítame z výplatnej matice koalície K nasledovne: Hľadáme prvky a_{ij}, ktoré splňujú podmienku, že a_{ij} je minimálny prvok i-tého riadku. Potom hodnota $\upsilon(1)$ je podľa definície (4.2) rovná $\max\{a_{1j}, \dots, a_{nj}\}$.

		Protikoalícia $\overline{K}$			
	Stratégie	1,1	1,2	2,1	2,2
Koalícia K	1	0	2	4	1
	2	1	1	0	0

Tabuľka 4.2: Výplatná matica koalície K

Charakteristická funkcia prvého hráča je rovná $\upsilon(1) = \max\{0, 0\} = 0$. Rovnakým postupom získame ostatné hodnoty charakteristickej funkcie:

$$\upsilon(2) = 0, \qquad \upsilon(3) = 0,$$

$$\upsilon(1, 2) = 3, \qquad \upsilon(1, 3) = 1, \qquad \upsilon(2, 3) = 2.$$

Veta 6. *Nech G je kooperatívna hra n hráčov (3.5) a υ je charakteristická funkcia tejto hry. Pre ľubovoľné dve koalície K_1 a K_2 splňujúce podmienku $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, platí:*

$$\upsilon(K_1) + \upsilon(K_2) \leq \upsilon(K_1 \cup K_2). \tag{4.1}$$

Poznámka. Z racionality hráčov predpokladáme, že pre ľubovoľné dve koalície K_1 a K_2 splňujúce podmienku $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ tak potom koalícia $K_1 \cup K_2$, pre ktorú platí $\upsilon(K_1) + \upsilon(K_2) > \upsilon(K_1 \cup K_2)$, nikdy nevznikne.

Dôkaz. Označme $K = \{i_1, \dots, i_k\}$ a $L = \{j_1, \dots, j_n\}$ dve disjunktné koalície, množinu ostatných hráčov $O = P - (K \cup L) = \{m_1, \dots, m_{n-k-l}\}$, množinu stratégií koalície K ako $S(K) = S_{i_1} \times \dots \times S_{i_k}$, množinu stratégií koalície L ako $S(L) = S_{j_1} \times \dots \times S_{j_l}$ a množinu stratégií ostatných hráčov O ako $S(O) = S_{m_1} \times \dots \times S_{m_{n-k-l}}$. Nech $\boldsymbol{s_k}$ je prvkom množiny $S(K)$, $\boldsymbol{s_l}$ je prvkom množiny $S(L)$ a $\boldsymbol{s_o}$ je prvkom množiny $S(O)$. Ďalej označme:

$$U_K(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) = \sum_{i \in K} U_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

a

$$U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) = \sum_{j \in L} U_i(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Majme stratégie $\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s''_l}, \boldsymbol{s''_o}$, pre ktoré platí:

$$\upsilon(K) = U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s''_l}, \boldsymbol{s''_o}) = \max_{S(K)} \min_{S(L) \times S(O)} U_K(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}),$$

obdobne majme stratégie $\boldsymbol{s''_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s''_o}$ také, že:

$$v(L) = U_L(\boldsymbol{s''_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s''_o}) = \max_{S(L)} \min_{S(K)\times S(O)} U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}).$$

Následne pre všetky $\boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o} \in S(L) \times S(O)$ platí:

$$v(K) \leq U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}),$$

takisto pre všetky $\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_o} \in S(K) \times S(O)$ platí:

$$v(L) \leq U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o}).$$

Súčtom $v(K)$ a $v(L)$ získame nerovnosť:

$$v(K) + v(L) \leq U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) + U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o}),$$

ktorá platí pre všetky $(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) \in S(K) \times S(L) \times S(O)$. Pre všetky $(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}) \in S(K) \times S(L)$ platí:

$$v(K) + v(L) \leq \min_{S(O)}[U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) + U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o})]$$

a taktiež aj:

$$v(K) + v(L) \leq \min_{S(O)}[U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o}) + U_L(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o})].$$

Platí:

$$\min_{S(O)}[U_K(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o}) + U_L(\boldsymbol{s'_k}, \boldsymbol{s'_l}, \boldsymbol{s_o})] \leq \max_{S(K)\times S(L)} \min_{S(O)}[U_K(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o}) + U_L(\boldsymbol{s_k}, \boldsymbol{s_l}, \boldsymbol{s_o})] = v(K \cup L)$$

a tým je táto veta dokázaná.

❑

Definícia 22. *Množinovú funkciu v nazveme superaditívnu, pokiaľ pre ľubovoľné dve koalície K_1 a K_2 splňujúce podmienku $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, platí* (4.1). *Pokiaľ pre ľubovoľné dve koalície K_1 a K_2 splňujúce podmienku $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, platí $v(K_1) + v(K_2) = v(K_1 \cup K_2)$ tak potom nazveme funkciu v aditívnu.*

Nech hodnoty $v(1), \ldots, v(n)$ sú ľubovoľné čísla a nech platí, že pre každú koalíciu K je:

$$v(K) = \sum_{j \in K} v(j).$$

Potom funkcia v je aditívna. Pre aditívnu charakteristickú funkciu platí, že uzatváranie koalícií nemá vplyv na výhru jednotlivých hráčov.

Veta 7. *Majme množinu hráčov $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ a nech v je superaditívna funkcia definovaná na množine všetkých neprázdnych koalícií $K \subseteq P$. Existuje hra v normálnom tvare taká, že v je jej charakteristickou funkciou.*

Dôkaz. Dôkaz vety nájdeme v Maňas (1974, str. 149 - 150).

❑

Definícia 23. *Hru nazývame nepodstatnou, ak funkcia υ je aditívna. Hra, ktorá nie je nepodstatná je podstatná.*

Riešenie nepodstatných hier je elementárne, preto sa obmedzíme v ďalšom texte tejto práce na podstatné hry.
V podstatných hrách chceme opäť zistiť akú koaličnú štruktúru budú hráči preferovať, a akým spôsobom si budú hráči v koalíciách rozdeľovať výhru. Podľa Vety (6) vieme, že pre akúkoľvek disjunktnú koaličnú štruktúru $K_1, K_2, \ldots, K_s$ vzhľadom k superaditivite platí $\upsilon(K_1) + \upsilon(K_2) + \cdots + \upsilon(K_s) \leq \upsilon(P)$. To znamená, že najvyššiu výhru je možné získať v prípade, ak budú všetci hráči spolupracovať. V tejto situácií budú hráči voliť stratégie $\boldsymbol{s'} = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) \in \Theta$, pre ktoré platí:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n) = \max_{\boldsymbol{s} \in \Theta} \sum_{i=1}^{n} U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \upsilon(P). \tag{4.2}$$

Nech α_i značí čiastku, ktorú získa i-ty hráč po rozdelení výhry. Vektor

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

rozdelenia výhry medzi hráčov budeme nazývať *rozdelením.* Čiastka α_i nemusí byť totožná s výhrou $U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, pretože v koalíciách dochádza k prerozdeľovaniu výhier. Aby rozdelenie $\boldsymbol{\alpha}$ bolo akceptovateľné pre všetkých hráčov, musí spĺňať aspoň nasledujúce axiómy:

1. Najväčšia výhra $\upsilon(P)$, ktorú je možné získať v kooperatívnej hre n hráčov (3.5) musí byť celá rozdelená. Tento axióm nazývame *princíp kolektívnej racionality*:
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \upsilon(P). \tag{4.3}$$

2. Čiastka α_i i-tého hráča po prerozdelení výhry musí byť aspoň rovnaká ako výhra, ktorú si je schopný hráč i zaistiť sám. Tento axióm nazývame *princíp individuálnej stability*:
$$\alpha_i \geq \upsilon(i) \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$
Ak by pre nejaké i platilo $\alpha_i < \upsilon(i)$, potom by inteligentný hráč nemal dôvod sa účastniť sa takejto koalície, pretože jeho výhra bude po prerozdelení nižšia, ako si je schopný zaistiť samostatne.

3. Pre všetky možné koalície $K \subseteq P$ požadujeme aby platilo:
$$\sum_{i \in K} \alpha_i \geq \upsilon(K). \tag{4.5}$$
Tento axióm obsahuje požiadavku (4.4) a nazývame ho *princíp skupinovej stability.*

Tieto axiómy môže splňovať jedno rozdelenie $\boldsymbol{\alpha}$ alebo viacero rozdelení $\boldsymbol{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_s}$ alebo môže nastať situácia, kde žiadne rozdelenie $\boldsymbol{\alpha}$ nesplňuje tieto axiómy, preto zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 24. *Jadrom kooperatívnej hry n - hráčov G (3.5) zadanej charakteristickou funkciou υ nazývame množinu rozdelení α, splňujúcich podmienky (4.3) a (4.5).*

Jadro kooperatívnej hry n - hráčov G (3.5) získame riešením rovnice (4.3) a nerovníc (4.5) a je to buď prázdna množina alebo konvexný polyedr.

Príklad (4). Majme hru troch hráčov s charakteristickou funkciou υ:

$$\upsilon(1) = \frac{1}{2} \qquad \upsilon(2) = 0 \qquad \upsilon(3) = \frac{3}{4}$$

$$\upsilon(1,2) = 3 \qquad \upsilon(1,3) = \frac{5}{2} \qquad \upsilon(2,3) = 2$$

$$\upsilon(1,2,3) = 9.$$

Množinu všetkých rozdelení v jadre tejto hry získame riešením sústavy jednej rovnice a šiestich nerovníc:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 \geq 3$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 \geq \frac{5}{2}$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 \geq 2$$
$$\alpha_1 \geq \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_3 \geq \frac{3}{4}$$

Jednoducho dopočítame, že príslušné jadro hry obsahuje nekonečne mnoho rozdelení $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Jadro je konvexný polyedr a príslušné krajné body sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

	α_1	α_2	α_3
1.	7	5/4	3/4
2.	7/4	13/2	3/4
3.	7	0	2
4.	3	0	6
5.	1/2	13/2	2
6.	1/2	5/2	6

Tabuľka 4.3: Krajné body jadra

Definícia 25. *Uvažujme kooperatívnu hru n hráčov G (3.5) s neprázdnym jadrom. Optimálnymi stratégiami nazveme stratégie $\boldsymbol{s'} = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$, splňujúce podmienku (4.2). Vektor stredných hodnôt $\boldsymbol{\alpha'} = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n)$ rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti definovaného na jadre, nazývame optimálne rozdelenie. Dvojicu $(\boldsymbol{s'}, \boldsymbol{\alpha'})$ nazývame riešením tejto hry.*

Zložku α'_i vektora stredných hodnôt $\boldsymbol{\alpha'}$ môžeme vyjadriť Lebesque - Steltejsovým integrálom v tvare:

$$\alpha'_i = \int_J \alpha_i dF(\boldsymbol{\alpha}), \qquad i = 1, \ldots, n$$

kde J značí jadro a $F(\boldsymbol{\alpha})$ je distribučná funkcia rovnomerného rozdelenia pravdepodobnosti na J.

Kooperatívna hra n hráčov (3.5), ktorej jadro hry je neprázdne, má vždy riešenie, ktoré zodpovedá otázky akú koaličnú štruktúru budú hráči preferovať, a akým spôsobom si následne rozdelia výhru. V niektorých modeloch reálnych situácií je ale jadro hry prázdna množina. Pre tieto prípady sa budeme snažiť ukázať návod k optimálnemu jednaniu.

Definícia 26. *Koalíciu $K \subset P$ kooperatívnej hry G (3.5) nazveme stabilnou, pokiaľ existuje riešenie sústavy:*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in K} \alpha_i &= v(K), \\ \sum_{i \in L} \alpha_i &\geq v(L), \end{aligned} \tag{4.6}$$

kde $L \subset K$.

Poznámka. Jednoprvkové koalície sú vždy stabilné, pretože sústava (4.6) sa nám zredukuje na rovnice $\alpha_i = v(i), i = 1, \ldots, n$.

V prípade kooperatívnej hry s prázdnym jadrom budeme hľadať maximálnu stabilnú koalíciu (podľa počtu členov) tak, že budeme postupne riešiť sústavu (4.6) pre každú $n-1, n-2, \ldots$ atď. člennú koalíciu. V hrách existuje vždy maximálna stabilná koalícia. Ak nastane situácia, kedy bude existovať viacero maximálne stabilných koalícií, potom inteligentní hráči budú preferovať koalíciu s vyššou hodnotou charakteristickej funkcie, pretože táto koalícia im zaručuje najvyššiu spoločnú výhru. Hráči koalície K budú voliť stratégie $(s'_{i_1}, s'_{i_2}, \ldots, s'_{i_k}) \in S(K)$, v ktorých spolu so stratégiami $(s'_{j_1}, s'_{j_2}, \ldots, s'_{j_{n-k}}) \in S(P \setminus K)$ nastáva extrém:

$$v(K) = \max_{S(K)} \min_{S(P \setminus K)} \sum_{i \in K} U_i(s_1, s_2, \ldots, s_n). \tag{4.7}$$

Hráči, ktorí sa neúčastnia koalície K zistia, či koalícia $P \setminus K$ je stabilná. Pokiaľ koalícia $P \setminus K$ bude stabilná, tak účastníci tejto koalície budú postupovať obdobne ako hráči v koalícií K. Ak koalícia $P \setminus K$ nebude stabilná, budú hráči mimo koalície K testovať všetky podkoalície $L \subset P \setminus K$, až pokým opäť nenájdu maximálnu stabilnú koalíciu. Hráči z koalície L budú postupovať rovnako ako hráči v koalícií K a ostatní hráči z $P \setminus K \setminus L$ budú opäť hľadať maximálnu stabilnú koalíciu. Tento postup sa bude opakovať až do situácie, kedy neostávajú žiadni hráči. Označme $v(K)$ výhru koalície K zadanú charakteristickou funkciou. V skutočnosti môže nastať situácia, kedy koalícia K získa reálnu čiastku $v'(K) > v(K)$, ktorá je vyššia ako zaručená čiastka. Hráči si rozdelia strednú hodnotu rovnomerného rozdelenia definovaného na konvexnom polyedry:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in K} \alpha_i &= v'(K) \\ \sum_{i \in L} \alpha_i &\geq v(L), \end{aligned} \tag{4.8}$$

kde $L \subset K$ a $v'(K)$ je reálna získaná výhra koalície K.

Tento algoritmus tvorby koalícií a rozdeľovania výhry pre hry s prázdnym jadrom zhrnieme v nasledujúcej definícii.

Definícia 27. *Uvažujme kooperatívnu hru n hráčov G* (3.5) *s prázdnym jadrom, nech $K \subset P$ je maximálna stabilná koalícia tejto hry. Optimálnymi stratégiami hráčov z koalície K nazveme stratégie $(s'_{i_1}, s'_{i_2}, \ldots, s'_{i_k}) \in S(K)$, pre ktoré spolu s nejakými stratégiami $(s'_{j_1}, s'_{j_2}, \ldots, s'_{j_{n-k}}) \in S(P \setminus K)$ nastáva extrém v* (4.7)*. Strednú hodnotu rovnomerného rozdelenia pravdepodobností definovaného na množine riešení* (4.8)*, nazývame optimálnym K - rozdelením. Dvojicu $(\boldsymbol{s'}, \boldsymbol{\alpha'})$ nazýveme riešením tejto hry, kde $\boldsymbol{s'}$ je n - tica stratégií pozostávajúca z optimálnych stratégií najväčšej stabilnej koalície K, najväčšej stabilnej koalície $L \subset P \setminus K$ a najväčšej stabilnej podkoalície $P \setminus K \setminus L$ atď. Vektor $\boldsymbol{\alpha'}$, ktorý nazývame optimálne rozdelenie, je zostavený z odpovedajúceho optimálneho K - rozdelenia, L - rozdelenia atď.*

Príklad (5). Uvažujme hru troch hráčov, v ktorej každý hráč má dve možnosti: Hlasovať pre návrh alebo proti. K schváleniu návrhu sú potrebné dva hlasy. Ak je návrh schválený dvoma hlasmi dostanú hráči, ktorí hlasovali za návrh výhru 1 od hráča, ktorý hlasoval proti návrhu. Ak pre návrh hlasoval iba jeden hráč, zaplatí čiastku 1 hráčom, ktorí hlasovali proti. V prípade, ak zahlasujú všetci traja hráči za návrh alebo všetci proti návrhu, nedostane nikto nič. Hra má charakteristickú funkciu:

$$\begin{gathered} v(1) = v(2) = v(3) = -1, \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = 1, \\ v(1,2,3) = 0. \end{gathered}$$

Jednoducho overíme, že jadro tejto hry zadané nasledovne:

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1, \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq 1, \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 1, \\ \alpha_1 \geq -1, \quad \alpha_2 \geq -1, \quad \alpha_3 \geq -1 \end{gathered}$$

je prázdna množina.

V prípade hry s prázdnym jadrom hľadáme maximálne stabilnú koalíciu tak, že budeme riešiť sústavu (4.6) pre každú dvojčlennú koalíciu. Majme koalíciu $K = \{1, 2\}$, potom sústava (4.6) je v tvare:

$$\begin{gathered} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ \alpha_1 \geq -1, \quad \alpha_2 \geq -1. \end{gathered}$$

Optimálne rozdelenie pre koalíciu K je $(\alpha'_1, \alpha'_2) = (1/2, 1/2)$. Koalície $\{1, 3\}$ a $\{2, 3\}$ sú tiež stabilné a ich optimálne rozdelenie je rovnaké ako pre koalíciu K. Keďže všetky dvojčlenné koalície majú rovnakú hodnotu charakteristickej funkcie, tak výsledkom tejto hry je, že ak ktorýkoľvek dvaja hráči sa dohodnú proti zostávajúcemu hráčovi, vyhrajú čiastku 1 a rozdelia si ju na polovicu.

Ak kooperatívna hra n hráčov má charakteristickú funkciu, vždy existuje riešenie tejto hry, buď v zmysle Definície (25) alebo v zmysle Definície (27).

4.2 Ďalšia možnosť riešenia

V predchádzajúcej podkapitole sme ukázali exaktné riešenie otázok, kde je pre hráčov výhodné uzatvárať koalície, optimálnu voľbu stratégií a spôsob, akým si hráči rozdelia výhru. V tejto sekcii sa zameriame na analýzu kooperačného konfliktu so zámerom objasniť postupy, ktoré súvisia s vyjednávaním rozdelenia výhier. Cieľom tejto metódy je zlepšiť orientáciu hráčov v kooperatívnom konflikte a pomôcť im k úspešnému zvládnutiu tejto situácie.

4.2.1 Shapleyho hodnota

V teórie hier predstavil Loyd S. Shapley koncept riešenia kooperatívneho konfliktu, ktorého podstatou je príspevok i-tého hráča do koalície, ktorej je členom.

Uvažujme hru n hráčov v tvare charakteristickej funkcie v. Potom Shapleyho hodnota hry (Shapley value) je n-zložkový vektor, ktorého i-tá zložka vyjadruje odhad strednej hodnoty prínosu i-tého hráča ku všetkým koalíciám, ktorých môže byť členom. Prínos hráča i, ktorý sa pridá ako posledný, t.j. k-tý člen do koalície K, je rovný hodnote:

$$v(K) - v(K \setminus \{i\}).$$

V hre n hráčov môžeme $k-1$ člennú koalíciu $K \setminus \{i\}$ vytvoriť

$$\binom{n-1}{k-1}$$

spôsobmi, pričom hráč i vstupuje do koalície vždy ako posledný. Stredná hodnota prínosu i-tého hráča ku všetkým k-členným koalíciam je rovná:

$$h_i(k) = \sum_{K \subset P, k=|K|} \frac{v(K) - v(K \setminus \{i\})}{\binom{n-1}{k-1}}$$

Pre všetky jednočlenné koalície, dvojčlenné koalície atď., je stredná hodnota prínosu i-tého hráča rovná hodnote:

$$H_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_i(k)}{n} = \sum_{K \subset P} \frac{(n-k)!(k-1)!}{n!} [v(K) - v(K \setminus \{i\})]$$

Definícia 28. *Majme hru n hráčov v tvare charakteristickej funkcie. Potom vektor*

$$\boldsymbol{H} = (H_1, H_2, \ldots, H_n) \tag{4.9}$$

nazývame Shapleyho hodnotou tejto hry.

Príklad (6). Uvažujme hru troch hráčov s charakteristickou funkciou v:

$$v(1) = \frac{1}{2}, \qquad v(2) = 0, \qquad v(3) = \frac{3}{4},$$

$$v(1,2) = 3, \qquad v(1,3) = \frac{5}{2}, \qquad v(2,3) = 2,$$

$$v(1,2,3) = 9.$$

V tomto prípade pre $k = 1$ je:

$$h_1(1) = \upsilon(1) = \frac{1}{2}, \qquad h_2(1) = \upsilon(2) = 0, \qquad h_3(1) = \upsilon(3) = \frac{3}{4},$$

pre $k = 2$ je:

$$h_1(2) = \frac{[\upsilon(1,2) - \upsilon(2)] + [\upsilon(1,3) - \upsilon(3)]}{2} = \frac{19}{8},$$

$$h_2(2) = \frac{[\upsilon(1,2) - \upsilon(1)] + [\upsilon(2,3) - \upsilon(3)]}{2} = \frac{15}{8},$$

$$h_3(2) = \frac{[\upsilon(1,3) - \upsilon(1)] + [\upsilon(2,3) - \upsilon(2)]}{2} = 2,$$

pre $k = 3$ je:

$$h_1(3) = [\upsilon(1,2,3) - \upsilon(2,3)] = 7,$$

$$h_2(3) = [\upsilon(1,2,3) - \upsilon(1,3)] = \frac{13}{2},$$

$$h_3(3) = [\upsilon(1,2,3) - \upsilon(1,2)] = 6.$$

Celkom je teda:

$$H_1 = \frac{h_1(1) + h_1(2) + h_1(3)}{3} = \frac{79}{24},$$

$$H_2 = \frac{h_2(1) + h_2(2) + h_2(3)}{3} = \frac{67}{24},$$

$$H_3 = \frac{h_3(1) + h_3(2) + h_3(3)}{3} = \frac{35}{12}.$$

Shapleyho hodnota hry je rovná:

$$\boldsymbol{H} = (\frac{79}{24}, \frac{67}{24}, \frac{35}{12}).$$

Shapleyho hodnota hry je jednoznačne určená pre každú hru. Bohužiaľ Shapleyho hodnota nemusí ležať v jadre hry, a preto sa musíme pri jej použití vzdať riešenia, ktoré nám poskytuje jadro. Nevýhodou Shapleyho hodnoty je predpoklad, ktorý prikladá všetkým koalíciám s rovnakým počtom členov identickú pravdepodobnosť vzniku, čím uvažuje aj koalície, ktoré by v reálnom konflikte nemali šancu vzniknúť. Shapleyho hodnota je vhodné informačné kritérium pre hráčov, ktorý sa slabšie orientujú v zložitých problémoch formovania koalícií a prerozdeľovania výhier.

Kapitola 5

Modely oligopolu

V tejto kapitole sa zameriame na konkrétne ekonomické modely oligopolov, na ktorých budeme demonštrovať uvedenú teóriu. Oligopol je nedokonalá tržná štruktúra, v ktorej existuje iba niekoľko predávajúcich firiem, ktoré môžu ovplyvniť trhovú cenu, a preto ho radíme k nedokonalej konkurencii. Opakom tejto situácie je dokonalé konkurenčné prostredie, v ktorom jestvuje veľa malých firiem, pričom všetky vyrábajú rovnaký produkt a žiadna z firiem nedokáže ovplyvniť trhovú cenu. Extrémnym prípadom nedokonalej konkurencie je monopol, kde v danom odvetví pôsobí na trhu jediná firma, ktorá úplne kontroluje toto odvetvie a nejestvuje iné odvetvie so substitučným produktom. V bežných trhových štruktúrach sa najčastejšie stretávame práve s oligopolmi. Príčinou vzniku konkurenčne nedokonalých trhov sú najmä tieto faktory: *náklady* (vysoké vstupné náklady do odvetvia, vysoké prevádzkové náklady), *bariéry konkurencie* (veľké úspory z rozsahu, rôzne vládne obmedzenia) a *strategická interakcia* (obchodná stratégia je do veľkej miery závislá na správaní sa konkurenčných subjektov). V oligopolnej štruktúre sa subjekty môžu rozhodnúť pre kooperatívne alebo nekooperatívne správanie. V prípade, keď firmy nespolupracujú a konajú samostatne, potom takýto stav vedie k cenovým vojnám. Pokiaľ firmy spolupracujú v rámci oligopolu, hovoríme o *kolúznom oligopole.* Firmy, ktoré spoločne spolupracujú si stanovia svoje ceny alebo objemy výroby a rozdelia si medzi sebou trh. V súčasnosti sú vo vyspelých tržných ekonomikách zavedené *protitrustové zákony*, ktoré pod hrozbami vysokých pokút majú snahu zabrániť možnosti vzniku *trustov* alebo *kartelov. Kartelom* nazveme tajnú obchodnú dohodu medzi nezávislými firmami, ktoré produkujú podobné výrobky s cieľom zvýšiť cenu a obmedziť objem výroby. Ako sme uviedli rozhodovanie oligopolistov je závislé od konania ich konkurentov, preto sa budeme pomocou uvedenej teórie snažiť vysvetliť správanie oligopolistov. Zdrojmi poznatkov v tejto kapitole sú (Gibbons, 1992), (Hykšová), (Mankiw, 2009) a (Samuelson a Nordhaus, 2000).

5.1 Cournotov model

Cournotov model je ekonomický model oligopolu, ktorý v kontexte tržnej situácie predbehol o takmer storočie definíciu Nashovej rovnováhy. Tento model nesie meno významného francúzskeho filozofa a matematika A. Cournota (1801 - 1877) a je jedným zo základných kameňov teórie priemyselnej organizácie. Cournotov model oligopolu má nasledujúce predpoklady:

1. Existujú aspoň dve firmy, pričom ich počet je fixne daný a vyrábajú homogénny produkt.
2. Firmy konajú samostatne (nenastáva kolúzia).
3. Objem produkcie jednotlivých firiem je náhodný, konkurujú si v objeme produkcie.
4. Firmy prijímajú rozhodnutia o objeme výroby súčasne a každá z nich považuje výstup svojho konkurenta za fixný.
5. Firmy sú inteligentnými účastníkmi konfliktu s jediným cieľom maximalizovať vlastný zisk.

5.1.1 Cournotov model duopolu

Uvažujme zjednodušený Cournotov model dvoch firiem (duopol). Označme q_1 vyrábané množstvo firmou *1* a q_2 vyrábané množstvo firmou *2*. Nech

$$P(Q) = \max\{a - Q, 0\}$$

je funkcia tržnej ceny, kde $a > 0$ je nejaká konštanta a $Q = q_1 + q_2$ je agregovaná tržná produkcia. Predpokladajme, že celkové náklady firmy i sú:

$$C_i(q_i) = c \cdot q_i \qquad i = 1, 2, \tag{5.1}$$

kde $c \in (0, a)$ je ľubovoľná konštanta. V tomto modeli sú fixné náklady nulové a medzné náklady sú konštantné. Na základe uvedenej teórie sa pokúsime tento oligopolný konflikt transformovať na problém hry v normálnom tvare. Množina hráčov je v tvare $P = \{1, 2\}$, kde hráčom *1* myslíme *firmu 1* a hráčom *2* *firmu 2*. V Cournotovom modeli si obe z firiem určia objem produkcie, teda priestory stratégií sú v tvare $S_i = \langle 0, \infty)$, kde za predpokladu racionality hráčov sa môžeme obmedziť na $S_i = \langle 0, a \rangle$, pretože pre $q_i > a$ je $P(Q) = 0$. Výplatnou funkciou firiem je ich zisk a pre hru dvoch hráčov v normálnom tvare ju zapíšeme nasledovne:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i \cdot [P(Q) - c] = q_i \cdot [a - (q_i + q_j) - c] \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Z definície (7) vieme, že Nashove equilibrium hry dvoch hráčov v normálnom tvare je bod, v ktorom platia nerovnosti (3.2). V Cournotovom modeli duopolu je dvojica (q_1', q_2') Nashovou rovnováhou, ak pre každú firmu i je q_i' riešením:

$$\max_{0 \leq q_i \leq a} \pi_i(q_i, q_j') = \max_{0 \leq q_i \leq a} q_i \cdot [a - (q_i + q_j') - c] \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Je jednoduché overiť, že funkcia $\pi_i(q_i, q_j')$ je kvadratická a konkávna na celom intervale $\mathbb{R}$. A tak svoje maximum nadobúda v stacionárnom bode, t.j. kde sa prvá derivácia funkcie rovná nule. Optimálny objem produkcie q_1' firmy *1* získame z rovnice:

$$\frac{\partial \pi_i(q_i, q_j')}{\partial q_i} = a - 2q_i - q_j' - c = 0 \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Ak je dvojica (q'_1, q'_2) Nashovou rovnováhou, potom pre objem produkcie firiem musí platiť:

$$q'_1 = \frac{a - q'_2 - c}{2}, \tag{5.2}$$

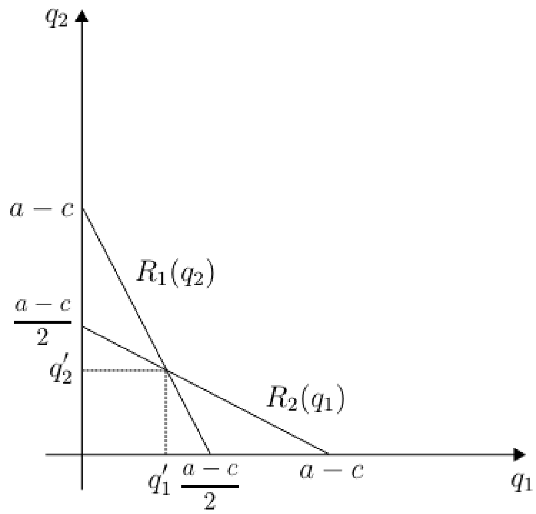
$$q'_2 = \frac{a - q'_1 - c}{2}. \tag{5.3}$$

Vyriešením tejto dvojice rovníc získame optimálnu produkciu firmy *1* a firmy *2*:

$$q'_1 = q'_2 = \frac{a - c}{3}.$$

Vzhľadom na to, že $0 < c < a$ je q'_i globálne maximum funkcie $\pi_i(q_i, q'_j)$ vnútri intervalu $\langle 0, a \rangle$. Cena, za ktorú budú duopolisti predávať produkt je $P(Q) = \frac{a+2c}{3}$ a zisk každého duopolistu je $\pi_1(q'_1, q'_2) = \pi_2(q'_1, q'_2) = \frac{(a-c)^2}{9}$.

Na základe rovnice (5.2) zavedieme funkciu $R_1(q_2) = \frac{a-q_2-c}{2}$, ktorá udáva pre firmu *1* najlepšiu reakciu na ľubovoľne zvolený objem produkcie firmy *2*, maximalizuje $\pi_1(q_1, q_2)$. Obdobne podľa rovnice (5.3) stanovíme funkciu $R_2(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2}$ pre firmu *2*. Funkcie R_1 a R_2 budeme nazývať *reakčnými krivkami.*



Obr. 5.1: Reakčné krivky R_1 a R_2 pre Cournotov duopol

Z grafickej interpretácie (5.2) vidíme, že reakčné krivky R_1 a R_2 sa pretínajú v bode (q'_1, q'_2).

5.1.2 Obecný Cournotov model

Konflikt dvoch oligopolistov z predošlej kapitoly zobecníme na Cournotov model n firiem, kde každá z firiem prispieva do celkovej produkcie Q nezanedbateľnou časťou. Označme funkciu tržnej ceny:

$$P(Q) = \max\{a - Q, 0\},$$

kde $a > 0$ je nejaká konštanta a nech q_i je vyrábané množstvo *firmou i*. Potom celkovú agregovanú produkciu označme ako $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$. Celkové náklady firmy i definujeme ako:

$$C_i(q_i) = c \cdot q_i \qquad i = 1, \dots, n,$$

kde $c \in (0, a)$ je ľubovoľná konštanta. Podobne ako v predošlej podkapitole riešime úlohu maximalizovať výplatnú funkciu jednotlivých firiem v tvare:

$$\pi_i(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_i \cdot [P(Q) - c] = q_i \cdot [a - \sum_{j=1}^{n} q_j - c] \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Opäť riešime optimalizačný problém rovnakým postupom ako v modeli duopolu:

$$\max_{0 \le q_i \le a} \pi_i(q_1', \dots, q_{i-1}', q_i, q_{i+1}', \dots, q_n'). \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Z nasledujúcich podmienok:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, q_2', \dots, q_n')}{\partial q_1} = a - c - 2q_1 - q_2' - \dots - q_n' = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2(q_1', q_2, \dots, q_n')}{\partial q_2} = a - c - q_1' - 2q_2 - \dots - q_n' = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial \pi_n(q_1', q_2', \dots, q_n)}{\partial q_n} = a - c - q_1' - q_2' - \dots - 2q_n = 0$$

získame sústavu rovníc:

$$2q_1 + q_2' + \dots + q_n' = a - c$$

$$q_1' + 2q_2 + \dots + q_n' = a - c$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$q_1' + q_2' + \dots + 2q_n = a - c.$$

Vyriešením týchto rovníc získame optimálne produkcie firiem $1, 2, \dots, n$:

$$q_1' = q_2' = \dots = q_n' = \frac{a - c}{n + 1}.$$

Tržná cena, za ktorú budú oligopolisti predávať produkt, je rovná $P(Q) = \frac{a + n \cdot c}{n+1}$ a zisk oligopolistov bude rovný $\pi_1(q_1', \dots, q_n') = \dots = \pi_n(q_1', \dots, q_n') = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2}$.

5.2 Bertrandov model duopolu

Tento model, formulovaný francúzskym matematikom J. Bertrandom (1822 - 1900), je odozvou na Cournotov model, ktorému vytýkal opomenutie faktu, že firmy sú schopné určovať tržnú cenu. Cieľom Betrandovho modelu je určiť rovnovážne ceny. Predpoklady Bertrandovho modelu sú nasledujúce:

1. Existuje fixný počet firiem, pričom minimum sú dve firmy.

2. Firmy vyrábajú homogénny produkt.

3. Firmy konajú samostatne (nenastáva kolúzia), konkurujú si navzájom cenami.

4. Firmy sú inteligentnými účastníkmi konfliktu s jediným cieľom maximalizovať vlastný zisk.

Majme model Cournotovho duopolu s dvoma firmami vyrábajúcimi dokonale substitučné produkty a spotrebiteľa dokonale indiferentného voči tomu, či daný produkt vyrába firma *1* alebo firma *2*. Ak by jedna z firiem stanovila cenu nižšiu ako $P(Q) = \frac{a+2c}{3}$, ovládla by celý trh. Druhá firma by v náväznosti na túto skutočnosť musela cenu dorovnať na úroveň prvej firmy, poprípade stanoviť cenu nižšiu ako jej konkurent. V tomto modeli, kde obe firmy majú identickú nákladovú funkciu, sa rovnovážna cena ustáli na hodnote $p = c$.

Uvažujme Bertrandov model duopolu, v ktorom firmy produkujú odlišné produkty. Nech firma *1* stanoví cenu p_1 a firma *2* stanoví svoju cenu p_2. Nech agregovaný dopyt pre firmu i je rovný:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + b \cdot p_j \qquad i, j = 1, 2; i \neq j,$$

kde $b \in \langle 0, 1 \rangle$ je nejaká konštanta, ktorá vyjadruje mieru substitúcie medzi produktom firmy *1* a firmy *2*. Ak je hodnota $b = 0$ potom sú oba produkty nezávislé a ak je $b = 1$, potom produkty sú dokonalými substitútmi. Rovnako ako v Cournotovom modeli duopolu, predpokladáme nulové fixné náklady a konštantné medzné náklady. Označme:

$$C(Q) = c \cdot q_i \qquad i = 1, 2$$

nákladovú funkciu firmy i, kde $c \in (0, a)$ je nejaká konštanta. Obdobne ako v prípade Cournotovho duopolu je naším cieľom transformovať tento model na hru dvoch hráčov v normálnom tvare a určiť Nashovu rovnováhu. Priestorom stratégií firmy i je $S_i = \langle 0, \infty)$, stratégiou s_i budeme rozumieť voľbu ceny $p_i \geq 0$. Výplatnou funkciou firmy i budeme uvažovať jej vlastný zisk. Zisk firmy i vzhľadom k cene p_i a cene konkurenta p_j je rovný:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j) \cdot [p_i - c] = (a - p_i + b \cdot p_j) \cdot (p_i - c) \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Dvojica (p_1', p_2') je Nashovou rovnováhou, pokiaľ pre každú firmu i cena p_i' rieši:

$$\max_{0 \leq p_i \leq \infty} \pi_i(p_i, p_j') = \max_{0 \leq p_i \leq \infty} (a - p_i + b \cdot p_j') \cdot (p_i - c) \qquad i, j = 1, 2; i \neq j,$$

kde p_i' získame rovnakým postupom ako v modeli Cournotovho duopolu z rovnice:

$$\frac{\partial \pi_i(p_i, p_j')}{\partial p_i} = a - 2p_i + b \cdot p_j' + c = 0 \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Riešenie optimalizačného problému pre firmu i je:

$$p_i' = \frac{a + b \cdot p_j' + c}{2} \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Ak dvojica cien (p'_1, p'_2) má byť Nashovou rovnováhou, potom firmy musia zvoliť ceny, ktoré splňujú podmienky:

$$p'_1 = \frac{a + b \cdot p'_2 + c}{2}, \tag{5.4}$$

$$p'_2 = \frac{a + b \cdot p'_1 + c}{2}. \tag{5.5}$$

Vyriešením tejto dvojice rovníc (5.4) a (5.5) získame optimálne ceny oboch firiem:

$$p'_1 = p'_2 = \frac{a + c}{2 - b}.$$

5.3 Stackelbergov model duopolu

H. Stackelberg (1905 - 1946) navrhol dynamický model duopolu, kde firma *1* má dominantné postavanie (leader) a firma *2* má minoritné postavenie (follower). Nech

$$P(Q) = \max\{a - Q, 0\}$$

je funkcia tržnej ceny, kde $a > 0$ je nejaká konštanta a $Q = q_1 + q_2$ je agregovaná tržná produkcia. Nech

$$C(Q) = c \cdot q_i, i = 1, 2$$

je nákladová funkcia firmy i, kde $c \in (0, a)$ je ľubovoľná konštanta. V porovnaní s Cournotovým modelom, kde si obe firmy volili objemy produkcie súčasne, v Stackelbergovom modely si volia firmy svoje objemy produkcie postupne. Postup hry je nasledovný: Firma *1* si zvolí objem produkcie $q_1 \geq 0$, firma *2* sleduje voľbu q_1 a na jej základe si volí vlastné $q_2 \geq 0$. Výplatná funkcia firmy i je rovná ziskovej funkcii:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i \cdot [P(Q) - c] \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Najprv spočítame reakciu firmy *2* pre ľubovoľný objem produkcie firmy *1*:

$$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2(a - q_1 - q_2 - c).$$

Riešením rovnice:

$$\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = a - q_1 - 2q_2 - c = 0,$$

získame reakčnú funkciu $R_2(q_1)$:

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2},$$

pre ktorú platí $q_1 < a - c$.

Poznámka. Reakčná funkcia $R_2(q_1)$ v Stackelbergovom modeli duopolu je identická s reakčnou funkciou v Cournotovom modeli duopolu.

Pretože firma *1* je inteligentným hráčom, je schopná riešiť optimalizačný problém firmy *2*. Firma *1* bude kalkulovať svoj objem produkcie q_1 na základe reakčnej funkcie firmy *2* $R_2(q_1)$. Optimalizačná úloha firmy *1* je v tvare:

$$\max_{q_1 \geq 0} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \max_{q_1 \geq 0} q_1 \cdot (a - q_1 - R_2(q_1) - c) = \max_{q_1 \geq 0} q_1 \cdot \frac{a - q_1 - c}{2},$$

riešením rovnice:

$$\frac{\partial \pi_1(q_1, R_2(q_1))}{\partial q_1} = \frac{1}{2}(a - 2q_1 - c) = 0,$$

získame optimálny objem produkcie firmy *1*:

$$q_1' = \frac{a-c}{2}.$$

Dosadením q_1' do $R_2(q_1)$ získame optimálny objem produkcie firmy *2*:

$$q_2' = R_2(q_1') = \frac{a-c}{4}.$$

Agregovaný objem produkcie duopolistov v Stackelbergovom modeli ($\frac{3(a-c)}{4}$) je vyšší ako v prípade Cournotovho modelu ($\frac{2(a-c)}{3}$), kdežto tržná cena v prípade Stackelbergovho modelu ($\frac{a+3c}{4}$) je nižšia ako v Cournotovom modeli ($\frac{a+2c}{3}$). Zisk firmy *1* je rovný $\frac{(a-c)^2}{8}$ a zisk firmy *2* je $\frac{(a-c)^2}{16}$. V porovnaní s Cournotovým modelom (kde zisk oboch firiem bol rovnaký $\frac{(a-c)^2}{9}$) je zisk firmy *1* vyšší a firma *2* získala naopak menej.

Kapitola 6

Kolúzny oligopol

Kolúzia je zvyčajne tajná dohoda medzi konkurenčnými firmami, ktoré spolupracujú pre ich vzájomný prospech. Takáto dohoda sa najčastejšie odohráva v tržných štruktúrach oligopolov, kedy rozhodnutie niekoľkých firiem vzájomne kooperovať má signifikantný dopad na dané tržné odvetvie. Zdrojom poznatkov sú (Koubek) a (Kašpar).

6.1 Kolúzny Cournotov duopol

Majme Cournotov model duopolu, tak ako sme ho definovali v podkapitole (5.1.1), v ktorom predpokladáme, že duopolisti môžu uzavrieť kartelovú dohodu. Nech $P(Q)$ je funkcia tržnej ceny definovaná nasledovne:

$$P(Q) = \max\{a - Q; 0\}, \tag{6.1}$$

kde $Q = q_1 + q_2$ je celkový agregovaný objem produkcie oboch firiem, $a > 0$ je nejaká konštanta. Nákladovou funkciou firmy i budeme rozumieť funkciu:

$$C_i(q_i) = c_1 + c_2 \cdot q_i \qquad i = 1, 2, \tag{6.2}$$

kde $0 < c_1 + c_2 < a$ sú ľubovoľné konštanty. V tomto prípade sú fixné náklady rovné c_1 a medzné náklady $\frac{\partial C_i(q_i)}{\partial q_i} = c_2$. Ziskovú funkciu firmy i definujem nasledovne:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i \cdot [a - (q_i + q_j)] - c_1 - c_2 \cdot q_i \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

V kolúznom modeli duopolu predpokladáme, že firmy maximalizujú zisk tak, ako keby boli jediným producentom. Riešime teda optimalizačnú úlohu v tvare:

$$\max_{q_i \geq 0} \pi_K(q_i, q'_j), \qquad i, j = 1, 2; i \neq j,$$

$$\pi_K(q_i, q'_j) = (q_i + q'_j) \cdot [a - (q_i + q'_j)] - c_1 - c_2 \cdot q_i - c_1 - c_2 \cdot q'_j. \tag{6.3}$$

Funkcia (6.3) je konkávna na celom intervale $\langle 0, \infty \rangle$. A tak svoje maximum nadobúda v stacionárnom bode, t.j. kde sa prvá derivácia funkcie rovná nule. Vyriešením rovníc:

$$\frac{\partial \pi_K(q_1, q'_2)}{\partial q_1} = a - 2q_1 - 2q'_2 - c_2 = 0, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial \pi_K(q_1', q_2)}{\partial q_2} = a - 2q_1' - 2q_2 - c_2 = 0, \tag{6.5}$$

získame optimálny objem produkcie oboch firiem v kartelovej dohode:

$$q_{1K}' = q_{2K}' = \frac{a - c_2}{4}.$$

Uvažujme model konkurenčného Cournotovho duopolu (5.1.1), ktorý je definovaný funkciou tržnej ceny (6.1) a nákladovou funkciou (6.2). Jednoducho vypočítame optimálny objem produkcie podľa postupu uvedeného v podkapitole (5.1.1). Označme optimálny objem produkcie oboch firiem (q_{1S}', q_{2S}') konkurenčného Cournotovho duopolu. Nashovou rovnováhou je dvojica:

$$(q_{1S}', q_{2S}') = (\frac{a - c_2}{3}, \frac{a - c_2}{3}). \tag{6.6}$$

V nasledujúcej tabuľke porovnávame kolúzny a konkurenčný model Cournotovho duopolu:

Typ oligopolu	Objem výroby firmy i	Zisk firmy i	Cena výrobku
Kolúzny	$\frac{a-c_2}{4}$	$\frac{a^2-8c_1-2a\cdot c_2+{c_2}^2}{8}$	$\frac{a+c_2}{2}$
Konkurenčný	$\frac{a-c_2}{3}$	$\frac{a^2-9c_1-2a\cdot c_2+{c_2}^2}{9}$	$\frac{a+2c_2}{3}$

Tabuľka 6.1: Porovnanie kolúzneho a konkurenčného Cournotovho duopolu

V kolúznom duopole je agregovaný objem produkcie nižší ako v konkurenčnom duopole, čoho priamym následkom je vyššia tržná cena. Napriek nižšej produkcii firiem v kolúzii je ich profit vyšší ako v konkurenčnom prostredí. Z pohľadu spotrebiteľa, ktorý vníma iba jediný faktor tržnú cenu, je konkurenčný model duopolu prospešný.

Ukázali sme, že kolúzia v duopole je pre firmy výnosnejšia ako konkurenčný boj. Napriek tomu je často krát pre firmy výhodnejšie podvádzať - buď zmenou objemu produkcie alebo zmenou ceny, za ktorú predávajú svoj produkt.

Uvažujme kartelovú dohodu z predošlej analýzy duopolu, ktorú popisuje tabuľka (6.1). Predpokladajme, že firma i sa rozhodne podvádzať. Firma i sa domnieva, že firma j nezmení svoj objem produkcie a chce zistiť, či môže profitovať z porušenia kartelovej dohody. Optimalizačná úloha je v tvare:

$$\max_{q_{iP} \geq 0} \pi_{iP}(q_{iP}, q_{jK}') = \max_{q_{iP} \geq 0} q_{iP} \cdot (a - q_{iP} - q_{jK}') - c_1 - c_2 \cdot q_{iP} \qquad i, j = 1, 2; i \neq j,$$

kde q_{iP} je objem produkcie firmy i, ktorá podvádza v kartelovej dohode. Nový optimálny objem produkcie q_{iP}' získame vyriešením rovnice:

$$\frac{\partial \pi_{iP}(q_{iP}, q_{jK}')}{\partial q_{iP}} = a - 2q_{iP} - \frac{a - c_2}{4} - c_2 = 0 \qquad i, j = 1, 2; i \neq j. \tag{6.7}$$

Riešením rovnice (6.7) sme získali optimálny objem produkcie:

$$q_{iP}' = \frac{3(a - c_2)}{8}.$$

Produkcia firmy i, ktorá porušila kartelovú dohodu je vyššia ako v prípade kolúzie, čo má za následok zníženie tržnej ceny na hodnotu:

$$P_P(Q) = \frac{3a + 5c_2}{8}.$$

Zisk firmy i je rovný:

$$\pi_{iP}(q_{iP}, q'_{jK}) = \frac{9a^2 - 64c_1 - 18a \cdot c_2 + 9{c_2}^2}{64} \qquad i, j = 1, 2; i \neq j.$$

Porovnaním zisku $\pi_{iP}(q_{iP}, q'_{jK})$ a $\pi_{iK}(q'_{iK}, q'_{jK})$ získame:

$$\frac{9a^2 - 64c_1 - 18a \cdot c_2 + 9{c_2}^2}{64} - \frac{8a^2 - 64c_1 - 16a \cdot c_2 + 8{c_2}^2}{64} = \frac{(a - c_2)^2}{64} > 0,$$

z podmienky $0 < c_1 + c_2 < a$. Firma i porušením kartelovej dohody zvýši svoj zisk, kdežto firma j, ktorej objem produkcie sa nezmenil získa menej, pretože vplyvom porušenia kartelovej dohody sa tržná cena znížila. Zisk firmy j je teda rovný:

$$\pi_{jP}(q'_{iP}, q'_{jK}) = \frac{3a^2 - 32c_1 - 6a \cdot c_2 + 3{c_2}^2}{32}. \qquad i, j = 1, 2; i \neq j$$

Model Cournotovho duopolu, ktorý sme analyzovali v kapitolách (5.1.1) a (6.1) môžeme prepísať do tvaru dvojmaticovej hry, kde priestorom stratégií firmy i sú stratégie *kartel* a *podvod*. Výplatné funkcie sú spoločne determinované voľbou stratégií oboch firiem. Dvojmaticová hra Cournotovho duopolu je v tvare:

		Firma *2*	
		Kartel	Podvod
Firma *1*	Kartel	$\pi_{1K}(q'_{1K}, q'_{2K})$, $\pi_{2K}(q'_{1K}, q'_{2K})$	$\pi_{1P}(q'_{1K}, q'_{2P})$, $\pi_{2P}(q'_{1K}, q'_{2P})$
	Podvod	$\pi_{1P}(q'_{1P}, q'_{2K})$, $\pi_{2P}(q'_{1P}, q'_{2K})$	$\pi_{1S}(q'_{1S}, q'_{2S})$, $\pi_{2S}(q'_{1S}, q'_{2S})$

Tabuľka 6.2: Dvojmaticová hra *Cournotovho duopolu*

kde

$$\pi_{1K}(q'_{1K}, q'_{2K}) = \pi_{2K}(q'_{1K}, q'_{2K}) = \frac{a^2 - 8c_1 - 2a \cdot c_2 + {c_2}^2}{8},$$

$$\pi_{1P}(q'_{1P}, q'_{2K}) = \pi_{2P}(q'_{1K}, q'_{2P}) = \frac{9a^2 - 64c_1 - 18a \cdot c_2 + 9{c_2}^2}{64},$$

$$\pi_{1P}(q'_{1K}, q'_{2P}) = \pi_{2P}(q'_{1P}, q'_{2K}) = \frac{3a^2 - 32c_1 - 6a \cdot c_2 + 3{c_2}^2}{32},$$

$$\pi_{1S}(q'_{1S}, q'_{2S}) = \pi_{2S}(q'_{1S}, q'_{2S}) = \frac{a^2 - 9c_1 - 2a \cdot c_2 + {c_2}^2}{9}.$$

Je jednoduché ukázať platnosť nasledujúcich nerovností:

$$\pi_{iP}(q'_{iP}, q'_{jK}) > \pi_{iK}(q'_{iK}, q'_{jK}) > \pi_{iS}(q'_{iS}, q'_{jS}) > \pi_{iP}(q'_{iK}, q'_{jP}). \qquad i, j = 1, 2; i \neq j \tag{6.8}$$

Hra zadaná dvojmaticou (6.2), pre ktorú platia nerovnosti (6.8) sa nazýva Väzňova dilema.

Výška tržných cien jednotlivých scenárov duopolu:

$$P_K(Q) = \frac{a + c_2}{2}, \qquad P_S(Q) = \frac{a + 2c_2}{3}, \qquad P_P(Q) = \frac{3a + 5c_2}{8}, \tag{6.9}$$

kde $P_K(Q)$ je tržná cena v prípade kartelovej dohody, $P_S(Q)$ je cena v prípade konkurenčného boja a $P_P(Q)$ je cena v situácií, keď jeden duopolista poruší kartelovú dohodu. Porovnaním (6.9) získame nerovnosť:

$$P_K(Q) > P_P(Q) > P_S(Q).$$

Pre spotrebiteľa je optimálna situácia kedy duopolisti vedú konkurenčný boj, čo má za následok nižšiu tržnú cenu.

6.2 Kolúzny Cournotov oligopol

Majme oligopol n firiem, ktoré vyrábajú identický produkt. Predpokladáme, že firmy môžu v tomto modeli uzatvárať kartelové dohody. Funkcia tržnej ceny je definovaná nasledovne:

$$P(Q) = \max\{a - b \cdot Q; 0\},$$

kde $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$, $q_i \geq 0$ značí objem produkcie firmy i. Nákladová funkcia firmy i je rovná:

$$C_i(q_i) = c_{1i} + c_{2i} \cdot q_i.$$

Narozdiel od predošlých modelov nebudeme pracovať s jednotlivými firmami, ale s koalíciami. Označme $q_{\{K\}}$ budúci objem výroby koalície $K \subseteq \{1, \ldots, n\}, K \neq \emptyset$. Predpokladajme, že výroba sa rozdelí medzi členov koalície následovne: Nech firma i vyprodukovala v sledovanom období (mesiac, kvartál, rok atď.) P_i kusov produktu. Koalícia K potom vyrobila spoločne:

$$P_{\{K\}} = \sum_{i \in K} P_i$$

kusov. Budúci objem produkcie člena i koalície K určíme ako:

$$q_i = q_{\{K\}} \cdot (P_i / P_{\{K\}}).$$

Nákladovou funkciou koalície K budeme rozumieť:

$$C_K(q_{\{K\}}) = c_{1\{K\}} + c_{2\{K\}} \cdot q_{\{K\}},$$

kde

$$c_{1\{K\}} = \sum_{i \in K} c_{1i} \tag{6.10}$$

sú celkové fixné náklady členov koalície a

$$c_{2\{K\}} = \sum_{i \in K} c_{2i} \cdot P_i / P_{\{K\}} \tag{6.11}$$

sú medzné náklady koalície K. Výplatnú (ziskovú) funkciu koalície K budeme značiť:

$$\pi_{\{K\}} = (a - b \cdot Q) \cdot q_{\{K\}} - c_{1\{K\}} - c_{2\{K\}} \cdot q_{\{K\}}. \tag{6.12}$$

Aby sme mohli analyzovať formovanie koalícií na základe uvedenej teórie, potrebujeme si vyjadriť charakteristickú funkciu v. Uvažujme pevne danú koaličnú štruktúru (20) $[S_1, S_2, \ldots, S_M]$ a predpokladáme, že firmy alebo koalície budú postupovať tak, aby maximalizovali celkový zisk:

$$\max_{q_1,\ldots,q_M} \sum_{m=1}^{M} \pi_m(q_1, \ldots, q_M) = (a - b \cdot Q) \cdot Q - \sum_{m=1}^{M} (c_{2m} \cdot q_m) - \sum_{m=1}^{M} c_{1m}. \tag{6.13}$$

Ďalej predpokladáme, že firma alebo koalícia môže zmeniť objem produkcie oproti minulému sledovanému obdobiu o maximálne $z \in (0, 1)$ a platí:

$$(1 - z) \cdot P_{Sm} \leq q_m \leq (1 + z) \cdot P_{Sm} \qquad m = 1, \ldots, M, \tag{6.14}$$

kde kalkulujeme, že zmeny objemu produkcie koalíciu nič nestoja. Spojením (6.13) a (6.14) dostaneme úlohu, ktorú riešime využitím teórie z (Lachout, kap. 2):

$$\max_{q_1,\ldots,q_M} (a - b \cdot Q) \cdot Q - \sum_{m=1}^{M} (c_{2m} \cdot q_m) - \sum_{m=1}^{M} c_{1m} \tag{6.15}$$

za podmienok

$$(1 - z) \cdot P_{Sm} \leq q_m \leq (1 + z) \cdot P_{Sm} \qquad m = 1, \ldots, M.$$

Charakteristickú funkciu v spočítame nasledovne: Pre koalíciu K spočítame riešenie (6.15) pre všetky možné rozdelenia firiem $n \setminus K$. Potom zo všetkých riešení $q'_{\{K\}}$ vyberieme minimum $\pi_{\{K\}}$ pre odpovedajúce $q'_{\{K\}}$, ktoré sa bude rovnať $v(K)$.

Uvažujme oligopol *3* firiem. Nech tržná cena je:

$$P(Q) = \max\{275 - 0{,}0025Q; 0\}.$$

Nech nákladová funkcia firmy *1* je $60000 + 100q_1$, nákladová funkcia firmy *2* je $65000 + 85q_2$ a nákladová funkcia firmy *3* je $78000 + 75q_3$. V poslednom sledovanom období vyprodukovala firma *1* 15000 kusov, firma *2* 17000 kusov a firma *3* 18000 kusov. Zmenu objemu produkcie stanovíme na maximálne 40%.

Charakteristickú funkciu $v(1)$ spočítame nasledovne: Pre obe koaličné štruktúry $[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$ a $[\{1\}, \{2, 3\}]$ spočítame pomocou (6.15) optimálne q'_1 a vyberieme minimálny zisk π_1 z oboch koaličných štruktúr. Pre koaličnú štruktúru $[\{1\}, \{2\}, \{3\}]$ je optimalizačná úloha v tvare:

$$\max_{q_1,q_2,q_3} (275 - 0{,}0025Q) \cdot Q - c_{21} \cdot q_1 - c_{22} \cdot q_2 - c_{23} \cdot q_3 - c_{11} - c_{12} - c_{13}$$

za podmienok

$$0{,}6P_1 \leq q_1 \leq 1{,}4P_1$$

$$0{,}6P_2 \leq q_2 \leq 1{,}4P_2$$

$$0{,}6P_3 \le q_3 \le 1{,}4P_3$$

Výpočtom získame riešenie:

$$q_1' = 9000, \qquad q_2' = 10200, \qquad q_3' = 20800. \tag{6.16}$$

Dosadením (6.16) do ziskovej funkcie (6.12) vypočítame zisk firmy *1* $\pi_1 = 615000$.

Pre koaličnú štruktúru $[\{1\},\{2,3\}]$ je optimalizačná úloha v tvare:

$$\max_{q_1, q_{\{2,3\}}} (275 - 0{,}0025Q) \cdot Q - c_{21} \cdot q_1 - c_{2\{2,3\}} \cdot q_{\{2,3\}} - c_{11} - c_{1\{2,3\}} \cdot q_{\{2,3\}}$$

za podmienok

$$0{,}6P_1 \le q_1 \le 1{,}4P_1$$

$$0{,}6(P_2 + P_3) \le q_{\{2,3\}} \le 1{,}4(P_2 + P_3)$$

Optimálne riešenie je v tvare:

$$q_1' = 9000, \qquad q_{\{2,3\}}' = 30028.$$

V koaličnej štruktúre $[\{1\},\{2,3\}]$ je zisk firmy *1* rovný $\pi_1 = 636870$. Hodnota charakteristickej funkcie $v(1)$ sa rovná $\min\{615000, 636870\} = 615000$. Ak dopočítame rovnakým spôsobom aj ostatné hodnoty v, získame nasledujúcu charakteristickú funkciu:

$$v(1) = 615000, \qquad v(2) = 853000, \qquad v(3) = 2005000,$$

$$v(1,2) = 1468000, \qquad v(1,3) = 1719000, \qquad v(2,3) = 2789920,$$

$$v(1,2,3) = 3375880.$$

Poznámka. Výsledky optimalizačných úloh t.j. optimálne produkcie sme pri výpočte ziskov zaokrúhlili nadol.

Platí, že:

$$v(1) + v(3) = 615000 + 2005000 = 2620000 > 1719000 = v(1,3), \tag{6.17}$$

z toho plynie, že charakteristická funkcia v nie je pre tento model troch oligopolistov superaditívna. Ukážme, aký je predpoklad superaditivity dôležitý pre vznik koalícií. Síce platí, že:

$$v(1,3) + v(2) = 1719000 + 853000 = 2572000 < 3375880 = v(1,2,3), \tag{6.18}$$

ale z nerovnosti (6.17) je zrejmé, že koalícia $\{1,3\}$ nemôže vzniknúť, pretože zaručená výhra koalície je nižšia, než sú si schopné obe firmy zabezpečiť samostatne. Taktiež platí:

$$v(1) + v(2) = 615000 + 853000 = 1468000 = 1468000 = v(1,2),$$

ale pre firmy *1* a *2*, ktorých jediným cieľom je maximálny zisk, je táto koalícia neopodstatnená. Z analýzy hodnôt charakteristickej funkcie v môžeme teda vysloviť záver, že v tomto modeli oligopolu nemá žiadna z firiem motiváciu uzatvárať koalíciu. Dôsledkom toho je zrejmé, že každá z firiem bude pôsobiť v danom odvetví samostatne.

Teraz predpokladajme, že do odvetvia vstúpi nová firma *4*. Vzhľadom na to tomu, že je začínajúcim účastníkom oligopolu, jej náklady spojené s produkciou budú vyššie. Nákladová funkcia firmy *4* je v tvare $100000 + 95q_4$. Napriek faktu, že v predošlom sledovanom období sa firma nezúčastnila oligopolu, definujeme jej predošlý objem produkcie na 12000 kusov. Na základe hodnôt charakteristickej funkcie υ budeme skúmať, či firma *4* utvorí koalíciu s nejakou etablovanou firmou. K výpočtu υ použijeme rovnaký postup, ktorý sme uplatnili v modeli troch oligopolistov. Charakteristická funkcia υ modelu štyroch oligopolistov:

$$\upsilon(1) = 615000, \qquad \upsilon(2) = 853000, \qquad \upsilon(3) = 1285000, \qquad \upsilon(4) = 476000,$$

$$\upsilon(1,2) = 1468000, \qquad \upsilon(1,3) = 1719000, \qquad \upsilon(1,4) = 1091000,$$
$$\upsilon(2,3) = 2087390, \qquad \upsilon(2,4) = 1329000, \qquad \upsilon(3,4) = 1668200,$$
$$\upsilon(1,2,3) = 2695120, \qquad \upsilon(1,2,4) = 1944000,$$
$$\upsilon(1,3,4) = 2231000, \qquad \upsilon(2,3,4) = 2557920,$$
$$\upsilon(1,2,3,4) = 3209580.$$

Pre charakterisitickú funkciu υ v tomto modeli platí, že:

$$\upsilon(1) + \upsilon(3) = 615000 + 1285000 = 1900000 > 1719000 = \upsilon(1,3).$$

To znamená, že funkcia υ nie je superaditívna. Rovnako ako v prípade troch oligopolistov, aj v tomto modeli existujú koalície K_1 a K_2, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, pre ktoré platí $\upsilon(K_1) + \upsilon(K_2) = \upsilon(K_1 \cup K_2)$. Pokiaľ je ale jediným cieľom firiem maximalizácia ich vlastného zisku, tak neexistuje racionálny dôvod k vzniku takejto koalície. Teda, aj keď do ekonomického odvetvia vstúpil nový hráč v podobe firmy *4*, tak vzhľadom na hodnoty charakteristickej funkcie υ, nemá žiadna z firiem motiváciu uzatvárať koalíciu. A tak bude každá z firiem pôsobiť v danom odvetví samostatne.

Kapitola 7

Záver

V práci sme postupne vyložili poznatky z teórie hier a zamerali sme sa na výklad problematiky nekooperatívnych a kooperatívnych hier. V časti venovanej nekooperatívnym hrám, sme sa sústredili na nájdenie riešenia tohto typu hier. Ukázalo sa, že narozdiel od čistých stratégií, pri uvažovaní zmiešaného rozšírenia vždy existuje riešenie. V kooperatívnych hrách, za predpokladu superaditivity, sme sa zamerali na formovanie koalícií a prerozdeľovania výhier jednotlivým hráčom. Bolo predvedené, že i v prípade neexistencie jadra hry, existuje riešenie kooperatívneho konfliktu. Ďalej sme predstavili významné modely oligopolov a s využitím predošlej teórie sme našli ich optimálne riešenia. Vyústením tejto bakalárskej práce je aplikácia kooperatívnej teórie na oligopolné štruktúry. V kolúznom Cournotovom modeli duopolu sme potvrdili predpoklad, že tento model speje k obecnej hre typu Väzňovo dilema. Na záver sme modelovali kolúzny Cournotov oligopol troch firiem, kde sa ukázalo, že vzniknutie koalície je determinované vhodným tvarom charakteristickej funkcie.

Zlepšenie konkrétneho modelu kolúzneho oligopolu s rozšírením, ktorý sme uvažovali v praktickej časti práce, by mohlo byť v uvažovaní kvadratickej, či eventuálne kubickej nákladovej funkcie. Tú je avšak problematické odhadnúť na základe dostupných dát. To by malo za následok realistickejší odhad nákladov firmy. To isté môžeme vysloviť i o funkcii tržnej ceny z hľadiska odhadu tržného dopytu. Tieto návrhy by mohli byť impulzom k väčšiemu záujmu o problematiku modelovania oligopolov.

Zoznam použitej literatúry

GIBBONS, R. (1992). *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press, Princeton. ISBN 9780691003955.

HYKŠOVÁ, M. *Teorie her.* Skripta k prednášce na MFF UK.

KAŠPAR, M. *Analýza jádra kooperativních her.* Diplomová práce, MFF UK.

KOUBEK, I. *Mikroekonomie II*. Učební text k přednášce Mikroekonomie II, FSV UK.

LACHOUT, P. *Matematické programování.* Pracovní text k přednášce Optimalizace I, MFF UK.

MAŇAS, M. (1974). *Teorie her a optimálniho rozhodování.* První vydání. SNTL, Praha. ISBN 04-012-74.

MAŇAS, M. (1991). *Teorie her a její aplikace.* První vydání. SNTL, Praha. ISBN 04-022-91.

MANKIW, N. G. (2009). *Zásady ekonomie.* První vydání. Grada, Praha. ISBN 978-80-7169-891-3.

SAMUELSON, P. a NORDHAUS, W. (2000). *Ekonómia.* Prvé vydanie. Elita, Bratislava. ISBN 80-8044-059-X.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek