Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Skřivan

Deformace 3D textury podle polygonálního modelu

Kabinet software a výuky informatiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. Ing. Jaroslav Křivánek, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Chtěl bych poděkovat doc. Ing. Jaroslavu Křivánkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady a odborný dohled. Děkuji také Mgr. Petru Kadlečkovi za pomoc a rady při zpracování této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Deformace 3D textury podle polygonálního modelu

Autor: Tomáš Skřivan

Katedra: Kabinet software a výuky informatiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Jaroslav Křivánek, Ph.D., Kabinet software a výuky informatiky

Abstrakt: Úkolem této bakalářské práce je navrhnout a implementovat algoritmus, který spočítá deformaci prostoru na základě deformace polygonálního modelu. Zaměříme se především na algoritmus, který počítá výslednou deformaci jako lineární kombinaci vrcholů zdeformovaného modelu. Koeficienty této lineární kombinace se nazývají zobecněné barycentrické souřadnice. V předchozí literatuře jsou zobecněné barycentrické souřadnice definovány pouze pro trojúhelníkové modely, navrhneme zde jejich další zobecnění pro obecné polygonální modely či parametrické plochy. Ve dvou dimenzích lze elegantně využít komplexních čísel a získat tak deformace, které jsou konformním zobrazením. Proto se zde pokusíme o zobecnění do třech dimenzí pomocí kvaternionů. Výsledný algoritmus implementujeme do programu Autodesk Maya a Mental Ray.

Klíčová slova: deformace prostoru, barycentrické souřadnice

Title: 3D Texture deformation according to a polygonal model

Author: Tomáš Skřivan

Department: Department of Software and Computer Science Education

Supervisor: doc. Ing. Jaroslav Křivánek, Ph.D., Department of Software and Computer Science Education

Abstract: Aim of this bachelor thesis is to design and implement algorithm, which deforms 3D space according to the polygonal model. We focus on algorithm, where we calculate deformation as linear combination of vertices of deformed polygonal mesh. Coefficients of this linear combination are called generalized barycentric coordinated. In preceding literature are generalized barycentric coordinated defined only for triangular meshes, we propose further generalization to more objects such as polygonal meshes or parametric surfaces. In two dimensions it is possible to use complex numbers and obtain a bigger class of deformations, such as conformal mappings. We propose generalization to three dimensions with quaternions. We implement final algorithm to program Autodes Maya and Mental Ray.

Keywords: space deformation, barycentric coordinates

Obsah

1 Deformace prostoru podle polygonálního modelu **3**
1.1 Metody deformace prostoru 4
1.2 Formulace problému 5

2 Barycentrické souřadnice **9**
2.1 Harmonické souřadnice 10
2.2 Meanvalue souřadnice 12
2.3 Barycentrické souřadnice pro libovolný polygonální model 13

3 Radiálně symetrické funkce **17**

4 Komplexní a hyperkomplexní barycentrické souřadnice **21**
4.1 Komplexní barycentrické souřadnice 21
4.2 Kvaterniony 23
4.3 Kvaternionové barycentrické souřadnice 24

5 Implementace a výsledky **29**
5.0.1 Harmonické souřadnice 30
5.0.2 Meanvalue souřadnice 31
5.0.3 Radiálně symetrické funkce 31
5.1 Porovnání metod 32

A Obsah přiloženého CD **39**

B Důkaz trvzení 2 **43**

Seznam použité literatury **47**

Značení

$C^n(\Omega)$ ... funkce z Ω do $\mathbb{R}$, které mají spojité parcialní derivace až do řádu n

$C(\Omega)$ ... to samé jako $C^0(\Omega)$

P_k^n ... polynomy na $\mathbb{R}^k$ stupně nejvýše n

P^n ... P_k^n kde k je zřejmé z kontextu

$f\big|_M$ ... restrikce f na množinu M

$\overline{M}$ ... uzávěr množiny M

∂M ... hranice množiny M

M^0 ... vnitřek množiny

n_y ... vnější normála v bodě y

∇_y ... operátor nabla vzhledem k proměnné y

Δ_y ... Laplaceův operátor vzhledem k proměnné y

δ_{ij} ... Kroneckerovo delta

$\mathrm{span}\{v_1,\ldots,v_n\}$ ... lineární obal $\{v_1,\ldots,v_n\}$

$\overline{xy}$ ... úsečka s koncovými body x a y

$\overrightarrow{xy}$ ... polopřímka začínající v bodě x a procházející bodem y

$B(x,r)$ ... otevřená koule se středem v x a poloměrem r

$S(x,r)$ ... sféra se středem v x a poloměrem r

$\Re(z)$ ... reálná část komplexního čísla nebo kvaternionu

$\Im(z)$ ... imaginární část komplexního čísla nebo kvaternionu

$\mathbb{H}$ ... množina všech kvaternionů

Kapitola 1

Deformace prostoru podle polygonálního modelu

Při tvorbě počítačové animace čelíme nesnadnému úkolu, neboť v každém snímku animace musíme nastavit všechny objekty do požadované polohy, ale chceme se vyhnout tomu, že bychom nastavovali každý bod objektu zvlášť. Potřebujeme nějaký nástroj, pomocí kterého dostaneme objekty do požadované polohy snadno a rychle. Například při animaci postavičky si nejprve vytvoříme její přibližnou kostru, kterou propojíme s postavičkou. Objektem tedy pohybujeme pomocí manipulace s kostrou. Ne vždy však animujeme postavičku, někdy je zapotřebí animovat skákající míč nebo doutnající kouř, u nichž by použití způsobu animace pomocí kostry nebylo vhodné. Je tedy nutné pro různé případy vymýšlet různé způsoby deformace objektu. My se zaměříme na způsob se širokou škálou použitelnosti, kterým je deformace prostoru. Tento způsob spočívá v tom, že definujeme deformaci celého prostoru a tak se nám zároveň s prostorem zdeformují objekty v něm. Výhodou tohoto přístupu je, že nezávisí na reprezentaci deformovaného objektu.

Cílem této bakalářské práce je implementovat algoritmus, který zdeformuje prostor na základě deformace polygonálního modelu. Zaměříme se především na využití zobecněných barycentrických souřadnic, kdy je výsledná deformace spočtena jako lineární kombinace vrcholů zdeformovaného modelu. Výhodou barycentrických souřadnic je, že výsledná deformace přesně kopíruje deformaci polygonálního modelu. Další výhodou je, že neřešíme žádnou komplikovanou nelineární úlohu, jak tomu je, pokud bychom prostor deformovali pomocí vhodně zvolených fyzikálních zákonů. Nevýhodou je, že v některých extrémních případech nemusí být deformace prostá a také jsou zobecněné barycentrické souřadnice definovány pouze pro trojúhelníkové modely. Proto zavedeme novou definici zobecněných barycentrických souřadnic, která nám umožní použít barycentrické souřadnice pro širší spektrum modelů, ať už jsou definovány pomocí polygonů nebo Béziérových ploch. Uvedeme si dva typy barycentrických souřadnic a to harmonické a meanvalue souřadnice. Na konci druhé kapitoly se zmíníme, jak by šlo využít naší definice zobecněných barycentrických souřadnic pro libovolné polygonální modely.

Poté se jen krátce zmíníme o tom, jak deformaci počítat pomocí radiálně symetrických funkcí. Nevýhodou tohoto přístupu je, že výsledná deformace nám nekopíruje přesně deformaci modelu.

Ve dvou dimenzích lze barycentrické souřadnice uvažovat nad komplexními

čísly. Takto můžeme získat deformace s vhodnými vlastnostmi, jako jsou například konformní zobrazení. Zobecnění do více dimenzí však není přímočaré, jelikož neexistuje jasný ekvivalent komplexních čísel ve více dimenzích. My zde navrhneme zobecnění komplexních barycentrických souřadnic do třech dimenzí pomocí kvaternionů.

Nakonec si ukážeme několik výsledků, kterých jsme dosáhli pomocí zmíněných algoritmů a porovnáme jejich vlastnosti.

1.1 Metody deformace prostoru

Metody založené na deformaci prostoru nám definují nějaké zobrazení f z oblasti zájmu $M \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$. Objekty pak již snadno zdeformujeme resp. zobrazíme pomocí tohoto zobrazení f.

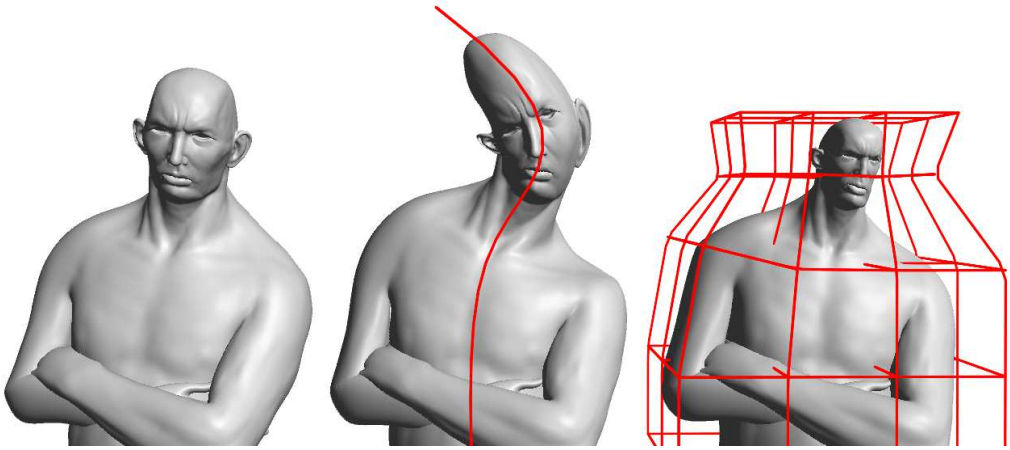
Mezi nejjednodušší způsoby jak deformovat prostor patří metody popsané v (Barr, 1984), kde je prostor deformován pomocí jednoduchých funkcí s několika volnými parametry. Příkladem je posunutí, rotace, škálování a různé druhy ohýbání a kroucení. Například kroucení podél osy z je definováno funkcí $f(x,y,z) = (x\cos(\alpha z) - \sin(\alpha z), x\sin(\alpha z) + y\cos(\alpha z), z)$, kde α je volný parametr, který určuje míru kroucení. Pomocí skládání těchto jednoduchých zobrazení můžeme v některých případech dosáhnou požadováného výsledku.

Další základní metodou deformace prostoru je tzv. free-form deformace (FFD) (Sederberg a Parry, 1986). Okolo objektu, který chceme deformovat, nejprve postavíme regulární mřížku. Tuto mřížku ručně zdeformujeme a na základě toho zdeformujeme i prostor. Tím se nám zdeformuje i onen objekt. Tato metoda je založena na konstrukci Bernsteinových polynomů na regulární mřížce. Ukázku takovéto deformace si můžete prohlédnout na obrázku 1.1. Extended free-form deformation Coquillart (1990) tento přístup zobecňuje i na mřížky, které se výlučně neskládají pouze z kvádrů ale mohou obsahovat i jiné tvary. Konkrétně se jedná o mřížky vzniklé z regulárních pomocí postupného slepování vrcholů. Rational free-form deformation Kalra a kol. (1992) je dalším zobecněním FFD, které však nevyužívá polynomů ale racionálních funkcí.

V některých případech, jako je animace hada nebo oblečení, můžeme velice dobře využít deformace pomocí křivky (Lazarus a kol., 1993) nebo parametrické plochy (Feng a kol., 1996). Deformace probíhá tak, že každý bod prostoru vyjádříme vzhledem k lokálnímu souřadnému systému na parametrické ploše. Křivku nebo plochu zdeformujeme, poté převedeme bod z lokálního souřadného systému do globálního a tím získáme požadovanou deformaci. Nevýhodou tohoto přístupu je, že daleko od parametrické plochy může být výsledná deformace nespojitá. A tak je tato metoda vhodná pouze pro deformaci objektů, které dobře kopírují tvar dané plochy nebo křivky. Na obrázku 1.1 si můžete prohlédnout deformaci pomocí křivky.

Radiálně symetrické funkce se standardně využívají pro interpolaci dat ve více dimenzích (Buhmann, 2004). A to v momentě pokud máme sadu bodů a v těchto bodech naměřené hodnoty. Lze je využít v případě deformace, kdy si zvolíme několik kontrolních bodů, kterými pak manipulujeme a podle toho se nám objekt deformuje, viz (Noh a kol., 2000), (Botsch a Kobbelt, 2005).

Cílem této práce je však najít deformaci prostoru, která přesně kopíruje zadanou deformaci polygonálního modelu. Tuto úlohu je možno řešit fyzikálně. Před-



Obrázek 1.1: Deformace polygonálního modelu pomocí křivky a regulární mřížky.

stavme si model jako kus elastického materiálu, pokud zdeformujeme povrch tohoto objektu, tak se nám i přirozeně zdeformuje i jeho vnitřek. Většina těchto metod je založena na minimalizaci deformační energie, což vede k nelineární úloze jako například v (Georgii a Westermann, 2006; Zhou a kol., 2005; Sumner a kol., 2007; Botsch a kol., 2007; Ben-Chen a kol., 2009). Další možností (Karan, 2000) je metoda velice podobná již zmíněné deformaci pomocí parametrické plochy. Bohužel s ní sdílí nevýhodu možné nespojitosti deformace daleko od modelu. My se zaměříme na deformaci pomocí zobecněných barycentrický souřadnic. Jedná se o zobecnění pojmu barycentrických souřadnic trojúhelníku pro uzavřené trojúhelníkové modely. Jejich využití lze najít například v metodě konečných prvků (Wachspress, 1975) nebo při konstrukci parametrických ploch (Loop a DeRose, 1989). My se podíváme na jejich využití pro deformaci modelů ve třech dimenzích (Ju a kol., 2005; Joshi a kol., 2007; Lipman a kol., 2008).

1.2 Formulace problému

Řekněme si přesněji, co máme za úkol. Mějme polygonální model P s vrcholy $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ a jeho zdeformovanou verzi P' s vrcholy $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_m$. Najděme zobrazení f takové, které splňuje $f(P) = P'$ tj. vrcholy, hrany i stěny původního modelu se zobrazí na příslušné vrcholy, hrany a stěny zdeformovaného modelu. Ve zbytku prostoru by mělo být f co „nejpřirozenější“. To není nijak přesně definováno, ale je zde několik přirozených požadavků. Pokud model pouze posuneme a otočíme, pak by f mělo být právě ono otočení a posunutí. Obecněji pokud model projde libovolným afinním zobrazením $\boldsymbol{v}'_i = A\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{t}$, kde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$, pak by f mělo být tímto afinním zobrazením tj. $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}$. Druhým přirozeným požadavkem je, aby výsledná deformace neobsahovala žádné skoky nebo ostré zlomy a tak požadujeme, aby f bylo spojité a mělo spojitou první derivaci. Tím nevylučujeme, že by výsledná deformace obsahovala nepřirozené deformace. Způsobů, jak zakázat nepřirozené deformace, je několik a tak zde žádnou obecnou podmínku neuvádíme.

Pokud se na tuto úlohu podíváme trochu více matematicky, máme zadánu nějakou plochu $\partial\Omega$ a zobrazení $f : \partial M \to \mathbb{R}^3$. Zdeformovaný model odpovídá

$f(\partial M)$. Cílem je rozšířit definiční obor f nejlépe na celé $\mathbb{R}^3$, ale v mnoha aplikacích stačí rozšíření pouze na vnitřek plochy ∂M. Prvním zásadním zjednodušením, které zde provedeme, je, že každou složku $f = (f_x, f_y, f_z)$ rozšíříme nezávisle. Zformulujme si přesněji co po onom rozšíření požadujeme.

Problém 1. *Pro $M \subset \mathbb{R}^3$ a $f : \partial M \to \mathbb{R}$ spojitou funkci nalezněte funkci $\overline{f} : M \to \mathbb{R}$ splňující:*

$$\overline{f} \in C^1(M) \cap C(\overline{M}) \tag{1.1a}$$

$$\overline{f}\big|_{\partial M} = f \tag{1.1b}$$

$$\exists g \in P^1 : f = g\big|_{\partial M} \implies \overline{f} = g\big|_M \tag{1.1c}$$

Jak již jsme zmínili, výsledná deformace nesmí obsahovat žádné skoky nebo ostré zlomy, to nám zaručuje podmínka 1.1a. Druhá podmínka 1.1b říká, že se jedná o rozšíření původní deformace. Dále jsme požadovali, abychom reprodukovali afinní zobrazení a jednotlivé složky afinního zobrazení jsou afinní funkce, proto požadujeme, aby rozšíření reprodukovalo afinní funkce, což říká podmínka 1.1c.

Problém 1 nechceme vyřešit pouze pro jednu konkrétní funkci zadanou na hranici, chceme najít nějaký algoritmus, jak jej řešit obecně. Každé funkci f definované na ∂M chceme přiřadit funkce $\overline{f}$ splňující předchozí podmínky, toto přiřazení zapíšeme jako $F(f) = \overline{f}$. Druhým zásadním zjednodušením je, že budeme uvažovat F lineární, což znamená, že pokud chceme rozšířit součet dvou funkcí, tak je jedno, jestli je nejprve rozšíříme a pak sečteme, nebo jestli je nejprve sečteme a pak rozšíříme, tj. $F(f + g) = F(f) + F(g)$.

Jak první zjednodušení, díky kterému rozšiřujeme deformaci po složkách, tak i druhé zjednodušení, které nám dává linearitu rozšíření, vychází z toho, jak se chovají barycentrické souřadnice. Mějme trojúhelník s vrcholy $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \boldsymbol{v}^3$, tento trojúhelník lze přirozeně transformovat na trojúhelník s vrcholy $\overline{\boldsymbol{v}}^1, \overline{\boldsymbol{v}}^2, \overline{\boldsymbol{v}}^3$ a to pomocí barycentrických souřadnic, což jsou funkce $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ splňující

$$\lambda_i \in P^1, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(\boldsymbol{x}) = 1 \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

$$\lambda_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}. \tag{1.4}$$

Tato transformace má předpis

$$T(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \overline{\boldsymbol{v}}^i \lambda_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \left(\overline{v}^i_x \lambda_i(\boldsymbol{x}), \overline{v}^i_y \lambda_i(\boldsymbol{x}) \right). \tag{1.5}$$

Hodnoty i-té složky $T(\boldsymbol{x})$ závisí pouze a jen na i-tých složkách vrcholů $\overline{\boldsymbol{v}}^1, \overline{\boldsymbol{v}}^2, \overline{\boldsymbol{v}}^3$.

Poznámka. Nezávislost jednotlivých složek můžeme ztratit, pokud bychom vrcholy trojúhelníka $\boldsymbol{v}^i$ chápali jako komplexní čísla $v^i_x + i v^i_y$ a funkce λ_i uvažovali komplexní. O tom více v kapitole 4.

Máme-li zadány libovolné hodnoty f_1, f_2, f_3 a g_1, g_2, g_3 ve vrcholech trojúhelníka, pak nezávisí na tom, jestli nejprve hodnoty f_i, g_i sečteme a poté je rozšíříme

nebo naopak.

$$\left(\overline{f+g}\right)(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3}(f_i + g_i)\lambda_i(\boldsymbol{x}) \tag{1.6}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} f_i\lambda_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{3} g_i\lambda_i(\boldsymbol{x}) = \overline{f}(\boldsymbol{x}) + \overline{g}(\boldsymbol{x}) \tag{1.7}$$

U tohoto příkladu s trojúhelníkem se mohlo zdát, že jsme rozšiřovali hodnoty z vrcholů do celého prostoru a ne z hranice trojúhelníku do prostoru. Uvažujme ale libovolný rovinný polygon. Deformace takového polygonu je určena posunutím jeho vrcholů, hrany se transformují přirozeně, ale není jasné, co se děje uvnitř polygonu. Pokud bychom měli něco jako barycentrické souřadnice i pro polygony, snadno bychom deformaci dodefinovali i uvnitř polygonu. Podívejme se podrobněji na to samé s trojúhelníkovým modelem. Trojúhelníkovým modelem máme na mysli uzavřený polygonální model, jehož stěny jsou tvořeny pouze trojúhelníky. Budeme používat zápis $M(V,E,F)$, kde V,E,F postupně značí množinu vrcholů, hran a stěn, M značí vnitřek modelu a ∂M povrch modelu[1]. Nyní když máme zadány hodnoty $\{f_i\}_{i=1}^{|V|}$ ve vrcholech $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^{|V|}$ modelu, lze je přirozeně rozšířit do všech stěn a to pomocí barycentrických souřadnic. Množinu všech takto vzniklých funkcí označme P^1M.

Definice 1 (prostor P^1M a jeho báze)**.** *Nechť $M(V,E,F)$ je trojúhelníkový model, $V = \{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{|V|}\}$. Pak definujme*

$$P^1M = \{g \in C(\partial M) : \forall T \in F\, g\big|_T \in P^1\}.$$

Funkce $\phi_1,\ldots,\phi_{|V|} \in P^1M$, splňující $\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ $i,j \in \{1,\ldots,|V|\}$, nazveme kanonickou bází P^1M.

Nyní můžeme zapsat deformaci trojúhelníkového modelu pomocí funkcí z P^1M. Mějme trojúhelníkový model ∂M s vrcholy $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ a jeho zdeformovanou verzi $\partial M'$ s vrcholy $\{\boldsymbol{v}'_1,\ldots,\boldsymbol{v}'_n\}$, pak zobrazení f zobrazující ∂M na $\partial M'$ má předpis

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}'_i\phi_i(\boldsymbol{x}) \qquad x \in \partial M. \tag{1.8}$$

Toto zobrazení potřebujeme rozšířit, zajímá nás čemu se rovná $F(f)$, což lze díky předešlým dvěma předpokladům na F rozepsat na

$$F(f) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}'_i\phi_i(\boldsymbol{x})\right) \tag{1.9}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}'_i F\left(\phi_i(\boldsymbol{x})\right). \tag{1.10}$$

Pokud si pro daný trojúhelníkový model spočteme rozšíření funkcí $\phi_i(\boldsymbol{x})$, pak již snadno rozšíříme každou jeho deformaci pomocí 1.10. Tento postup není ojedinělý

[1] Občas budeme mluvit o trojúhelníkovém modelu jako o M a občas jako o ∂M, mezi těmito zápisy budeme striktně rozlišoval pouze tehdy, pokud chceme říci, že nějaký bod $\boldsymbol{x}$ leží pouze na povrchu modelu, $\boldsymbol{x} \in \partial M$, nebo pokud může ležet i uvnitř, $\boldsymbol{x} \in M$.

pro trojúhelníkové modely, v počítačové grafice je mnoho geometrických objektů, pro které by si stačilo spočíst rozšíření pro konečně mnoho speciálních funkcí a pak lze libovolnou deformaci tohoto objektu rozšířit pomocí podobného vzorečku jako 1.10. Demonstrujme si to ještě na příkladu, ve kterém chceme deformovat rovinu pomocí uzavřené Béziérovy křivky.

Nechť Γ je Béziérova křivka dána parametrizací

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v}_i B_{i,n}(t) \qquad t \in [0,1), \tag{1.11}$$

kde $B_{i,n}$ i-tý Bernsteinův polynom n-tého stupně, $\boldsymbol{v}_i$ jsou kontrolní body křivky a pro uzavřenost křivky předpokládáme $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_n$. Pro body $\boldsymbol{x}$ ležící na křivce Γ označme $t(\boldsymbol{x})$ jako ten parametr, pro který platí $\boldsymbol{x} = \gamma\left(t(\boldsymbol{x})\right)$. Nyní když zdeformujeme křivku, tj. posuneme její kontrolní body na $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$, pak tato deformace má předpis

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v}'_i B_{i,n}\left(t(\boldsymbol{x})\right) \qquad \boldsymbol{x} \in \Gamma. \tag{1.12}$$

Chceme opět najít rozšíření této deformace. Zajímá nás, čemu se rovná $F(f)$, což lze rozepsat stejně jako pro trojúhelníkové modely.

$$F(f) = F\left(\sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v}'_i B_{i,n}\left(t(\boldsymbol{x})\right)\right) \tag{1.13}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{v}'_i F\left(B_{i,n}\left(t(\boldsymbol{x})\right)\right) \tag{1.14}$$

Vidíme, že nám opět nejprve stačí rozšířit funkce $B_{i,n}\left(t(\boldsymbol{x})\right)$, pak již snadno rozšíříme libovolnou deformaci pomocí 1.14.

Obecná formulace: Předchozí postup je poměrně obecný, v počítačové grafice vetšinou pracujeme s objekty, jejichž deformace lze popsat jako lineární kombinace několika speciálních funkcí. Ukázali jsme si, že v případě trojúhelníkového modelu to jsou funkce ϕ_i a pro Béziérovy křivky to jsou funkce $B_{i,n}\left(t(\boldsymbol{x})\right)$. To nás vede k poněkud abstraktnější formulaci našeho problému, kde máme objekt, který chceme deformovat $\partial\Omega$ a na něm prostor funkcí $\Lambda(\partial\Omega)$, který nám popisuje, jak je daný objekt možno deformovat. Pro trojúhelníkový model ∂M je $\Lambda(\partial M) = P^1 M = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ a pro Béziérovu křivku Γ je $\Lambda(\Gamma) = \operatorname{span}\{B_{i,n}\left(t(\cdot)\right)\}_{i=0}^{n}$.

Problém 2. *Nechť je $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Lambda(\partial\Omega)$ nějaký prostor funkcí z $\partial\Omega$ do $\mathbb{R}$ obsahující afinní funkce. Najděte lineární zobrazení $F : \Lambda(\partial\Omega) \to C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ takové, že:*

$$\forall f \in \Lambda(\partial\Omega) : F(f)\big|_{\partial\Omega} = f \tag{1.15a}$$

$$\forall f \in P^1 : F\left(f\big|_{\partial\Omega}\right) = f\big|_{\Omega} \tag{1.15b}$$

Podmínka 1.15a neříká nic jiného, že se jedná o rozšíření, po kterém jsme požadovali, aby reprodukovalo afinní funkce viz podmínka 1.15b.

V úvodu jsme řekli, že tento problém budeme řešit pomocí zobecněných barycentrických souřadnic. Nejedná se o nic jiného než o rozšíření bázových funkcí $\phi_i \in P^1 M$. O tom si řekněme podrobněji v následující kapitole.

Kapitola 2

Barycentrické souřadnice

Pokud chceme na obrazovku vykreslit barevný trojúhelník, jehož barvu máme zadánu pouze v jeho vrcholech, pak barvu v libovolném bodě dodefinujeme jako lineární kombinaci barev ve vrcholech. Máme-li zadány barvy $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$ ve vrcholech $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, barvu v bodě $\boldsymbol{x}$ uvnitř trojúhelníku definujeme jako

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{c}_i \lambda_i(\boldsymbol{x}), \tag{2.1}$$

kde λ_1,λ_2,λ_3 jsou afinní funkce splňující $\lambda_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$. Tyto funkce se nazývají barycentrické souřadnice trojúhelníka. Pokud máme libovolný bod v rovině $\boldsymbol{x}$ pak jej lze napsat jako afinní kombinace vrcholů pomocí barycentrických souřadnic

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{v}_i \lambda_i(\boldsymbol{x}). \tag{2.2}$$

Pomocí barycentrických souřadnic můžeme interpolovat hodnoty zadané ve vrcholech nebo určovat pozici bodů v prostoru. Ne vždy však pracujeme s jednoduchými tvary jako jsou trojúhelníky, rádi bychom měli barycentrické souřadnice i pro obecnější objekty jako jsou například trojúhelníkové modely. Proto zavedeme zobecněné barycentrické souřadnice, které se v literatuře (například v (Meyer a kol., 2002)) standardně definují právě tak, aby platila analogie vzorečku 2.2. Nechť $M(V,E,F)$ je trojúhelníkový model a $V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$, pak zobecněné barycentrické souřadnice $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ splňují

$$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{v}_i \mu_i(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \tag{2.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{x}) = 1, \tag{2.4}$$

$$\mu_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}, \tag{2.5}$$

$$c_i\big|_f \in P^1 \qquad f \in F. \tag{2.6}$$

Kde 2.3 je analogie vzorečku 2.2, rovnost 2.4 nám říká, že v 2.3 je $\boldsymbol{x}$ afinní kombinací vrcholů. Pokud vrcholy $\boldsymbol{v}_i$,$\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{v}_k$ tvoří trojúhelník M, pak nám podmínky 2.5 a 2.6 zaručují, že μ_i,μ_j,μ_k jsou klasickými barycentrickými souřadnicemi trojúhelníku $\boldsymbol{v}_i$,$\boldsymbol{v}_j$, $\boldsymbol{v}_k$.

Pokud máme zadány hodnoty $f_1, \ldots, f_m$ libovolné funkce ve vrcholech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ trojúhelníkového modelu, můžeme tuto funkci rozšířit pomocí barycentrických souřadnic.

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i(\boldsymbol{x}) f_i. \tag{2.7}$$

Všimněme si, že toto rozšíření má několik hezkých vlastností. Reprodukuje afinní funkce, pokud $f_i = h(\boldsymbol{v}_i)$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, kde h je afinní funkcí, pak $\overline{f} = h$, a to díky podmínkám 2.3 a 2.4. Na povrchu modelu je toto rozšíření ono přirozené rozšíření zadaných hodnot ve vrcholech pomocí barycentrických souřadnic, tedy $\overline{f}\big|_{\partial M}$ je prvkem P^1M a $\overline{f}(\boldsymbol{v}_i) = f_i$. Z toho všeho plyne, že zobecněné barycentrické souřadnice nám dávají řešení problému 2 pro trojúhelníkové modely. Konkrétně zobrazení F definované

$$F(f) = \sum_{i=1}^{m} f(\boldsymbol{v}_i)\mu_i \qquad f \in P^1M, \tag{2.8}$$

je řešení problému 2. Zobecněné barycentrické souřadnice jsou užitečným nástrojem v počítačové grafice, proto by bylo užitečné je mít i pro jiné objekty než jen trojúhelníkové modely. To nás vede k dalšímu zobecnění pojmu barycentrických souřadnic a k tomu co v této práci budeme chápat pod pojmem zobecněných barycentrických souřadnic.

Definice 2. *Nechť* $\Lambda(\partial\Omega) = span\{f_1, \ldots, f_m\}$. *Pak funkce* $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}$, *pro které je*

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overline{f_i} \tag{2.9}$$

řešení problému 2, nazveme zobecněné barycentrické souřadnice $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Barycentrické souřadnice nejsou dány jednoznačně, je několik možností jak je konstruovat. Mezi nejznámější barycentrické souřadnice patří Wachspress souřadnice (Wachspress, 1975), které se často využívají v metodě konečných prvků. Jejich nevýhodou je, že je lze definovat pouze pro konvexní oblasti a tak jsou pro nás nezajímavé. Tento problém řeší meanvalue souřadnice (Floater, 2003), jež lze definovat i pro nekonvexní oblasti. Dále je možné konstruovat harmonické souřadnice (Joshi a kol., 2007), jež mají velice pěkné vlastnosti, ale jejich největší nevýhodou je, že se obtížně počítají.

2.1 Harmonické souřadnice

Jak již jsme uvedli v úvodu, můžeme se na naši úlohu dívat fyzikálně a to tak, že máme kus elastického materiálu který deformujeme. Použití rovnic pro obecnou elasticitu by bylo příliš komplikované a vedlo by k řešení nelineárního problému. Můžeme se podívat co dostaneme pokud použijeme rovnice pro lineární elasticitu, které popisují deformaci homogenního izotropního materiálu

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \Delta\boldsymbol{u} = 0, \tag{2.10}$$

kde konstanty λ, μ definují vlastnosti materiálu a $\boldsymbol{u}$ je relativní posunutí tj. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{X}$ značí polohu částice v referenční poloze a $\boldsymbol{x}$ polohu stejné částice

ve zdeformované poloze. Tyto rovnice mají fyzikální smysl jen za předpokladu malých deformací. Název je lehce zavádějící, jelikož podmínka malých deformací požaduje, aby složky $\nabla \boldsymbol{u}$ byly malé. Bohužel pokud tělesem pouze otočíme, tak podmínka malých deformací není splněna. Jedním z našich základních požadavků bylo, aby nám výsledná deformace reprodukovala afinní zobrazení a tedy i rotace. Zdrojem těchto nepříjemností je člen $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$, který není rotačně invariantní. To znamená, že pokud zavedeme záměnu souřadnic $\boldsymbol{y} = R\boldsymbol{x}$, kde R je matice rotace, tak $\nabla_x(\nabla_x \cdot \boldsymbol{u}(0)) \neq \nabla_y(\nabla_y \cdot \boldsymbol{u}(0))$. Druhý člen $\Delta \boldsymbol{u}$ již rotačně invariantní je. Proto člen $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})$ vypustíme a zůstane nám rovnice

$$\Delta u = 0. \tag{2.11}$$

Jedná se o Laplaceho rovnici, jejíž řešení splňuje několik zajímavých vlastností. Například se jedná o funkci, která se v nějakém smyslu nejméně vlní a splňuje předepsané hodnoty na hranici. Přesněji řešení minimalizuje $\int_\Omega \|\nabla u\|^2$. Více informací o vlastnostech řešení Laplaceho rovnici lze najít například v Evans, 2010.

Tím jsme snad dostatečně motivovali, proč právě volíme Laplaceho rovnici. Nyní zavedeme harmonické souřadnice.

Definice 3 (harmonické souřadnice)**.** *Nechť* $\Lambda(\partial M) = span\{f_1, \ldots, f_m\}$. *Funkce* $\phi_1, \ldots, \phi_m \in C^2(M)$ *splňující* $\Delta\phi_i = 0$, $\phi_i\big|_{\partial M} = f_i$ *pro* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *nazveme harmonickými souřadnicemi* $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Poznámka. V případě, že M je trojúhelníkový model, $\Lambda(\partial M) = P^1 M$ a $\{f_1, \ldots, f_m\}$ je kanonická báze $P^1 M$, říkáme stručně harmonické souřadnice M.

Tvrzení 1. *Nechť* $\phi_1, \ldots, \phi_m$ *jsou harmonickými souřadnicemi* $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$, *pak jsou též barycentrickými souřadnicemi* $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Důkaz. Je třeba ověřit že funkce

$$F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i \tag{2.12}$$

splňuje podmínky 1.15a a 1.15b. Nechť $f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$, pak

$$F(f)\big|_{\partial M} = F\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i\right)\Bigg|_{\partial M} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i\big|_{\partial M} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i = f. \tag{2.13}$$

Podmínka 1.15a je tedy splněna.

Nyní ověřme podmínku 1.15b. Mějme afinní funkci $p \in P^1$, zajímá nás, jestli $F\left(p\big|_{\partial M}\right) = p\big|_M$. Jak $F\left(p\big|_{\partial M}\right)$, tak i $p\big|_M$ splňuje Laplaceho rovnici se stejnou okrajovou podmínkou, tedy díky jednoznačnosti řešení musí nutně platit $F\left(p\big|_{\partial M}\right) = p\big|_M$.

❑

2.2 Meanvalue souřadnice

Spočítat harmonické souřadnice je poměrně komplikované. I v případě, že nás zajímají pouze v jednom bodě, musíme řešit Laplaceho rovnici v celé oblasti. Je možné se inspirovat větou o střední hodnotě pro harmonické funkce[1] a získat tak meanvalue souřadnice(Floater, 2003; Ju a kol., 2005), které lze počítat explicitně.

Věta o střední hodnotě pro harmonické funkce říká, že funkční hodnota v bodě je průměrem hodnot na sféře okolo tohoto bodu. V našem případě známe jen funkční hodnoty na ∂M. Co můžeme udělat je, že okolo každého bodu uvažujme sféru, na kterou promítneme funkční hodnoty z ∂M. Poté spočteme vážený[2] průměr těchto hodnot a ten prohlásíme za funkční hodnotu v daném bodě.

Prozatím ještě předpokládejme, že M je konvexní množina, pak lze hranici M promítnout na sféru se středem v libovolném bodě $x \in M^0$, tj. pro každý bod $x \in M^0$ existuje bijekce $p_x : S(x,1) \to \partial M$ taková, že každý bod $y \in S(x,1)$ leží na polopřímce $\overrightarrow{xp_x(y)}$. Každou funkci $f \in C(\partial M)$ můžeme dodefinovat

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_{S(x,1)} w_x(y) f(p_x(y)) dS_y}{\int_{S(x,1)} w_x(y) dS_y} \qquad x \in M, \tag{2.14}$$

kde $w_x(y) = 1/\left(\|p_x(y) - x\|\right)$ je váhová funkce, která nám zaručí splnění podmínky 1.1b. Předpoklad, že M je striktně konvexní není zapotřebí a tak je možné rozšíření definovat i pro nekonvexní M.

Tvrzení 2. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená, ∂M je C^2 plocha[3] a $f \in C(\partial M)$, pak funkce:*

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} \frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} \frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3} dS_y} = \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \tag{2.15}$$

je řešení problému 1.

Důkaz. Důkaz je dlouhý a poměrně technický a tak jsme ho přesunuli do přílohy B.

❑

To, že integrál 2.15 je ekvivalentní integrálu 2.14 pro konvexní množiny, plyne z toho, že pokud plošný element dS_y plochy ∂M promítneme na jednotkovou sféru se středem v x, dostaneme plošný element o velikosti $\frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3} dS_y$.

Druhá rovnost v 2.15 platí díky následujícím identitám.

$$\nabla_y \|y - x\| = \frac{y - x}{\|y - x\|} \tag{2.16}$$

$$\nabla_y \frac{1}{\|y - x\|} = -\frac{\nabla_y \|y - x\|}{\|y - x\|^2} = -\frac{y - x}{\|y - x\|^3} \tag{2.17}$$

[1] Harmonické funkce jsou právě ty, které splňují Laplaceho rovnici.

[2] Jednoduchý aritmetický průměr by nestačil. Musíme použít vážený, abychom dosáhli požadovaných vlastností.

[3] Tato podmínka lze zeslabit například na to, že ∂M je trojúhelníkový model.

Definice 4 (meanvalue souřadnice)**.** *Nechť* $\Lambda(\partial M) = span\{f_1, \ldots, f_m\}$. *Pak funkce*

$$\phi_i = \frac{\int_{\partial M} \frac{f_i(y)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \qquad i \in_y \{1, \ldots, m\} \tag{2.18}$$

nazveme meanvalue souřadnicemi $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Poznámka. V případě, že M je trojúhelníkový model, $\Lambda(\partial M) = P^1 M$ a $\{f_1, \ldots, f_m\}$ je kanonická báze $P^1 M$, říkáme stručně meanvalue souřadnice M.

Tvrzení 3. *Nechť* $\phi_1, \ldots, \phi_m$ *jsou meanvalue souřadnice* $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$, *pak jsou též barycentrickými souřadnicemi* $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

Důkaz. Necht $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$. Označme

$$F(f)(x) := \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} n \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \qquad i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{2.19}$$

Dle tvrzení 2 je $F(f)$ řešení problému 1, tedy podle 1.1b je $F(f)\big|_{\partial M} = f\big|_{\partial M}$ a podle 1.1c pro $f = p \in P^1$ platí $F(f) = p\big|_M$. Jelikož je F lineární v f, lze $F(f)$ přepsat na

$$F(f) = \sum_{i=1}^m \alpha_i F(f_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i,$$

tedy $\phi_1, \ldots, \phi_m$ jsou barycentrické souřadnice $M, \{f_1, \ldots, f_m\}$.

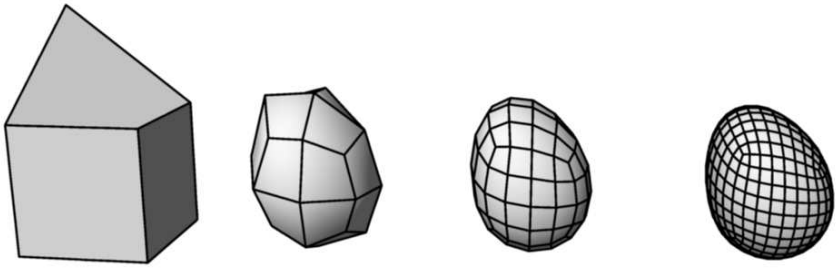
❑

Ukázali jsme si dva příklady zobecněných barycentrických souřadnic. Nyní si řekneme, jak lze využít naší obecné definice zobecněných barycentrických souřadnic 2 a definovat barycentrické souřadnice pro libovolný polygonální model.

2.3 Barycentrické souřadnice pro libovolný polygonální model

V praxi se často setkáváme nejen s trojúhelníkovými modely, ale i s polygonálními modely, jejichž stěny jsou tvořeny mnohoúhelníky, jejichž vrcholy ale nemusí ležet v jedné rovině. Na rozdíl od trojúhelníkových modelů nám polygonální model sám o sobě dobře nedefinuje nějakou plochu, definuje pouze takzvanou limitní plochu. Polygonální model lze postupně zjemňovat, například pomocí algoritmu Catmull-Clark (Catmull a Clark, 1978), a tím se postupně přibližovat limitní ploše. První tři iterace zjemňování zdeformované krychle si můžete prohlédnou na obrázku 2.1.

Každá deformace původního modelu odpovídá nějaké deformaci limitní plochy. Vrcholy původního modelu chápejme jako kontrolní body limitní plochy, pomocí kterých můžeme limitní plochu deformovat. Takovéto deformace lze opět zapsat jako lineární kombinace několika speciálních funkcí definovaných na limitní ploše. Řekněme si podrobněji čemu se tyto speciální funkce rovnají.



Obrázek 2.1: Jednotlivé iterace zjemňování polygonálního modelu. Jak si můžeme všimnout, vrcholy vrchní stěny původního modelu neleží v jedné rovině a tedy není jasné, kudy přesně vrchní stěna prochází. Limitní plocha je však dobře definována.

Označme ∂M^0 původní polygonální model[4], ∂M^k k-tou iteraci zjemňování a ∂M^∞ limitní plochu. Dále označme $\boldsymbol{v}_i^k$ jako i-tý vrchol k-té iterace. Pokud zjemňování počítáme pomocí algoritmu Catmull-Clark, tak každý vrchol nové iterace lze napsat jako lineární kombinace vrcholů iterace předešlé. Z toho plyne, že každý bod $\boldsymbol{v}_i^k$ lze napsat jako lineární kombinace vrcholů původního modelu

$$\boldsymbol{v}_i^k = \sum_{j=1}^{m} w_j^{k,i} \boldsymbol{v}_j^0, \tag{2.20}$$

kde m je počet vrcholů původního modelu a koeficienty lineární kombinace $w_j^{k,i}$ závisí jen na topologii[5] modelu původního polygonálního modelu. Nyní pro každý bod $\boldsymbol{v} \in \partial M^\infty$ existuje posloupnost bodů $\{\boldsymbol{v}_{i_k}^k\}_{k=0}^\infty$ takových, že

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_{i_k}^k = \boldsymbol{v}. \tag{2.21}$$

Předpokládejme, že předchozí rovnici můžeme upravit takto

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_{i_k}^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} w_j^{k,i_k} \boldsymbol{v}_j^0 = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j^0 \lim_{k\to\infty} w_j^{k,i_k} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{v}_j^0 w_j^\infty = \boldsymbol{v}. \tag{2.22}$$

Předpokládejme, že w_j^∞ nezávisí na volbě posloupnosti $\{\boldsymbol{v}_{i_k}^k\}_{k=0}^\infty$. Pak můžeme $w_j^\infty(\boldsymbol{v})$ chápat jako funkce definované na limitní ploše. Pokud nyní zdeformujeme původní model tak, že vrcholy $\boldsymbol{v}_j^0$ přejdou na vrcholy $\overline{\boldsymbol{v}}_j^0$, pak bod $\boldsymbol{v} \in \partial M^\infty$ přejde na bod

$$\sum_{j=1}^{m} \overline{\boldsymbol{v}}_j^0 w_j^\infty(\boldsymbol{v}) = \overline{\boldsymbol{v}}. \tag{2.23}$$

[4]Zde používáme symbol ∂, jako kdyby měl být polygonální model hranicí nějaké množiny, tu však nelze dobře definovat. Symbol ∂ používáme proto, že limitní plocha již je hranicí nějaké dobře definovatelné množiny.

[5]Pojmem topologie polygonálního modelu se myslí ty vlastnosti polygonálního modelu, které nezávisí na konkrétní poloze vrcholů modelu, tedy topologii modelu určuje pouze to, které vrcholy tvoří jaké hrany a stěny.

Funkce $\{w_j^\infty\}_{j=1}^m$ jsou ty speciální funkce, které popisují, jak je možno limitní plochu deformovat. Za barycentrické souřadnice původního polygonálního modelu můžeme pak prohlásit zobecněné barycentrické souřadnice ∂M^∞,$\{w_1^\infty, \ldots, w_m^\infty\}$.

Zbývá zjistit, zdali námi použité předpoklady platí a zdali lze například spočítat meanvalue souřadnice explicitně, tak jako pro trojúhelníkové modely. To přenecháme jako předmět dalšího zkoumání.

Kapitola 3

Radiálně symetrické funkce

Mezi jednu z nejčastěji používaných interpolačních metod ve více dimenzích patří interpolace pomocí radiálně symetrických funkcí. Používá se, pokud chceme přibližně vyhodnotit nějakou funkci f, ale její hodnoty známe pouze v předem daných bodech. Například pokud měříme teplotu povrchu Země, tu ale naměříme jen v několika málo místech. Teplota nás však může zajímat v libovolném bodě a tak je potřeba naměřená data nějakým způsobem interpolovat. K tomu se je právě vhodná interpolace pomocí radiálně symetrických funkcí. Zde nastíníme, jak je možné tuto metodu využít pro deformaci polygonálním modelem.

Úkolem interpolace pomocí radiálně symetrických funkcí je aproximovat funkci f, když známe pouze její hodnoty $\{f_i\}_{i=1}^k$ v bodech $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^k$. Chceme najít funkci $\overline{f}$, která se co nejméně liší od původní funkce f. Funkci $\overline{f}$ budeme hledat ve tvaru

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} w_i \phi(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|), \tag{3.1}$$

kde funkce $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nějaká funkce a w_i jsou vhodná čísla.

Nejradši bychom volili w_i tak, aby se funkce f a $\overline{f}$ lišili co nejméně, což není možné, protože neznáme f. Místo toho můžeme požadovat, aby se funkce $\overline{f}$ rovnala v bodech $\boldsymbol{x}_i$ původní funkci f a doufat, že se funkce $\overline{f}$ bude podobat původní funkci f. Požadujeme tedy, aby platilo

$$\overline{f}(\boldsymbol{x}_i) = f_i \qquad i \in \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}. \tag{3.2}$$

Pokud dosadíme do 3.2 za $\overline{f}$ výraz 3.1, dostáváme soustavu lineárních rovnic pro $(w_1, \cdots, w_k)$.

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} w_j \phi(\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|) \qquad i \in \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k\} \tag{3.3}$$

Tato soustava je ovšem řešitelná jen pro některé speciální funkce ϕ. Nejčastěji se používají

$$
\begin{aligned}
\phi(r) &= \left(c + r^k\right)^{\frac{1}{k}} \qquad c > 0, k > 0, \\
\phi(r) &= \frac{1}{\left(c + r^k\right)^{\frac{1}{k}}} \qquad c > 0, k > 0, \\
\phi(r) &= r^2 \ln(r), \\
\phi(r) &= e^{-r^2}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Volba těchto funkcí také zaručí, že pokud jsou body $\boldsymbol{x}_i$, kde známe hodnoty f, dostatečně hustě rozmístěny v oblasti zájmu Ω, pak se funkce f a $\overline{f}$ liší uvnitř Ω jen málo. Ucelenou matematickou teorii interpolace pomocí radiálně symetrických funkcí lze nalézt například v (Buhmann, 2004).

Podívejme se, jak můžeme řešit problém 1 pomocí radiálně symetrických funkcí. Mějme funkci f definovanou na ∂M a zvolme si body $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ přibližně rovnoměrně rozmístěné po ∂M. Jelikož chceme, aby řešení reprodukovalo afinní funkce (viz podmínka 1.1c), tak nalezneme afinní funkci $p \in P^1$, která nám nejlépe prokládá funkční hodnoty v těchto bodech, například ve smyslu nejmenších čtverců, tj. minimalizuje

$$
\sum_{i=1}^{m} |p(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_i)|^2. \tag{3.5}
$$

Poté pomocí radiálně symetrických funkcí rozšíříme funkci $f - p$. Najdeme čísla $w_1, \ldots, w_m$ tak, aby

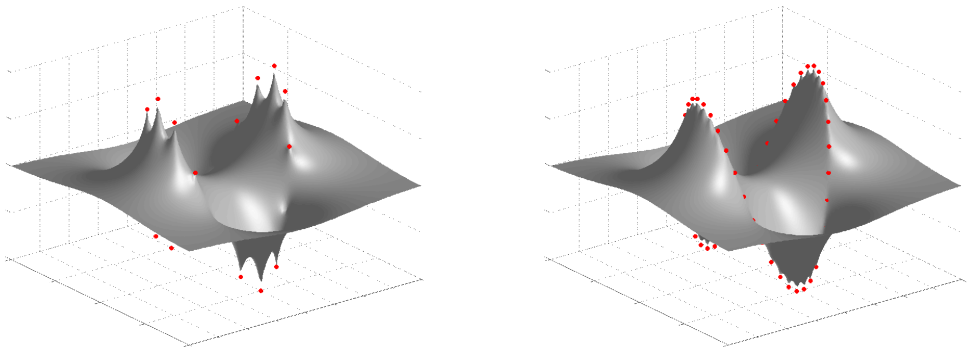
$$
f(\boldsymbol{x}_i) - p(\boldsymbol{x}_i) = \sum_{j=1}^{m} w_j \phi(\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|) \tag{3.6}
$$

platilo pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $\phi(r)$ je jedna z dříve zmíněných radiálně symetrických funkcí. Pak za řešení problému 1 označíme funkci

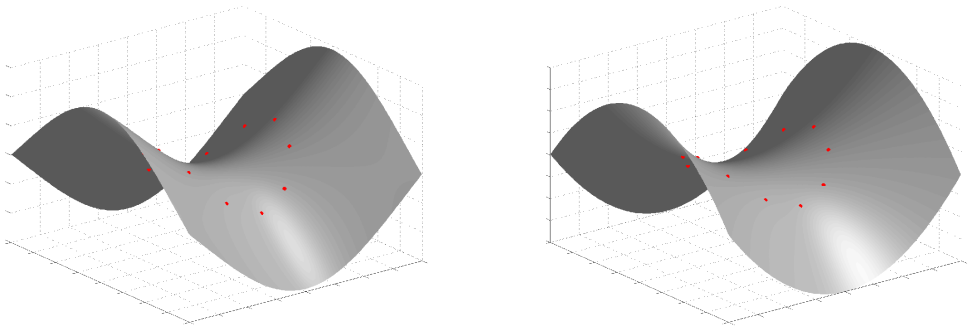
$$
\overline{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} w_i \phi(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i\|) + p(\boldsymbol{x}). \tag{3.7}
$$

Pokud existuje $q \in P^1$, že $q\big|_{\partial M} = f$, pak zajisté q minimalizuje 3.5 a tedy minimální polynom p je roven q. Podmínky 1.1a,1.1c problému 1 jsou splněny. Podmínka 1.1b však není splněna přesně, pokud ale jsou body $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m \in \partial M$ rozmístěny dostatečně hustě po ∂M, pak se f a $\overline{f}$ liší na ∂M jen málo, to si můžeme v konkrétním případě ukázat na obrázku 3.1.

Interpolace pomocí radiálně symetrických funkcí úzce souvisí s řešením některých parciálních diferenciálních rovnic, například s Laplaceho rovnicí. To si můžeme demonstrovat na příkladě interpolace funkce $\sin 2\theta$ definované na jednotkové kružnici $\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0,2\pi)\}$. Přesným řešením Laplaceho rovnice je funkce $u(x,y) = 2xy$, jelikož $u(\cos\theta, \sin\theta) = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$ a $\frac{\partial^2 2xy}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 2xy}{\partial y^2} = 0$. Nyní provedeme interpolaci pomocí $\phi(r) = (10 + r^2)^{\frac{1}{2}}$ na 12 bodech. Interpolovaná funkce se v tomto případě od přesného řešení Laplaceho rovnice liší uvnitř jednotkové kružnice nejvýš o 0,03. Grafy interpolované funkce a přesného řešení si můžete prohlédnou na obrázku 3.2.



Obrázek 3.1: Interpolace funkce $\sin 2\theta$ pomocí radiálně symetrické funkce $\phi(r) = 1/\left(0.1 + r^{0.8}\right)^{\frac{1}{0.8}}$. Můžeme si všimnout, že se zvyšujícím se počtem interpolovaných bodů se zlepšuje interpolace původní funkce $\sin 2\theta$.



Obrázek 3.2: Vlevo je interpolace funkce $\sin 2\theta$ pomocí radiálně symetrické funkce $\phi(r) = (10 + r^2)^{\frac{1}{2}}$. Napravo je pak přesné řešení Laplaceho rovnice s okrajovou podmínkou $\sin 2\theta$. Funkce se od sebe liší uvnitř jednotkové kružnice maximálně o 0,03.

Tím jsme si ukázaly, že můžeme očekávat podobné výsledky od radiálně symetrických funkcí jako od harmonických souřadnic.

Kapitola 4

Komplexní a hyperkomplexní barycentrické souřadnice

Doposud jsme původní úlohu řešili po složkách. Ve dvou rozměrech lze velice pěkně jednotlivé složky deformace provázat pomocí komplexních čísel. První komplexní barycentrické souřadnice byly uvedeny v (Weber a kol., 2009) a celkový přehled komplexních souřadnic byl proveden v (Weber a kol., 2011). Využití komplexních čísel pro barycentrické souřadnice je velice elegantní a je tak možné získat větší třídu deformací. Přirozenou otázkou je, jestli lze tento postup zobecnit do třech a více prostorových dimenzí. My se zde pokusíme o rozšíření do třech dimenzí pomocí kvaternionů. Nejprve se však podívejme na barycentrické souřadnice ve dvou rozměrech pomocí komplexních čísel.

4.1 Komplexní barycentrické souřadnice

Nechť nám posloupnost bodů $\{z_1, \ldots, z_m\}$ v komplexní rovině definuje uzavřenou jednoduchou lomenou čáru s vnitřkem M a body $\{\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_m}\}$ nám definují zdeformovanou lomenou čáru. Pak libovolný bod $z \in M$ zobrazme na bod

$$f(z) = \overline{z} = \sum_{i=1}^{m} c_i(z)\overline{z_i}, \tag{4.1}$$

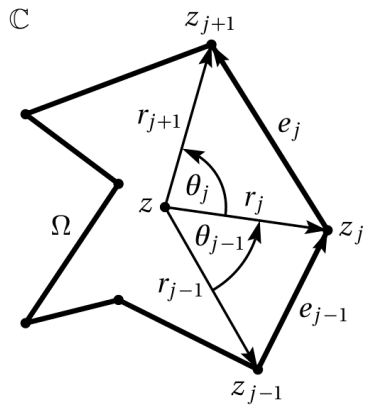
kde funkce $c_i : M \to \mathbb{C}$ splňují analogické rovnosti jako standardní zobecněné barycentrické souřadnice

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(z) = 1, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(z) z_i = z \qquad z \in M. \tag{4.3}$$

Takovéto komplexní funkce $\{c_1, \ldots, c_m\}$ nazveme komplexní barycentrické souřadnice.

Deformace pomocí komplexních barycentrických souřadnic nám již nemusí nereprodukovat libovolné afinní zobrazení, ale stále zachovávají posunutí, otočení a zvětšení. Pokud je lomená čára pouze posunuta, otočena a zvětšena, pak lze



Obrázek 4.1: Konstrukce komplexních barycentrických souřadnic. Zdroj Weber a kol. (2011)

body $\overline{z_i}$ psát jako $\overline{z_i} = rz_i + t$ pro vhodné $r,t \in \mathbb{C}$. Pronásobme rovnici 4.3 číslem r a přičtěme t

$$rz + t = \sum_{i=1}^{m} c_i(z)(rz_i + t) = \sum_{i=1}^{m} c_i(z)\overline{z_i}. \tag{4.4}$$

Tím jsme se přesvědčili o tom, že komplexní barycentrické opravdu reprodukují posunutí, rotace a zvětšení.

Poznámka. Všimněme si, že zde potřebujeme komutativitu komplexních čísel: $rc_i(z)z_i = c_i(z)rz_i$. To nám ve více dimenzích způsobí jisté problémy.

V článku (Weber a kol., 2009) je ukázáno, že libovolné komplexní barycentrické souřadnice lze napsat ve tvaru

$$c_i = \frac{\tilde{c_i}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{c_j}}, \tag{4.5a}$$

$$\tilde{c_i}(z) = \gamma_i(z)\frac{r_{i+1}}{e_i} - \gamma_{i-1}(z)\frac{r_{i-1}}{e_{i-1}}. \tag{4.5b}$$

Kde γ_i jsou libovolné komplexní funkce a $r_i = z_i - z$, $e_i = z_{i+1} - z_i$, viz obrázek 4.1. Tento tvar barycentrických souřadnic nám umožňuje jednotný pohled na několik typů barycentrický souřadnic a také lze snadno vytvářet zcela nové souřadnice. Zde je přehled, jak získat některé již zmíněné barycentrické souřadnice(Weber a kol., 2011):

$$\gamma_i = \frac{e_i}{\mathrm{Im}(\overline{r_i}r_{i+1})}\left(\frac{|r_{i+1}|^0}{r_{i+1}} - \frac{|r_i|^0}{r_i}\right) \qquad \text{Wachspress,}$$

$$\gamma_i = \frac{e_i}{\mathrm{Im}(\overline{r_i}r_{i+1})}\left(\frac{|r_{i+1}|^1}{r_{i+1}} - \frac{|r_i|^1}{r_i}\right) \qquad \text{Meanvalue,}$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) \qquad \text{Greenovy.}$$

Všimněme si, že $\frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)$ je holomorfní funkcí. Tedy pomocí Greenových souřadnic získáme konformní zobrazení.

Nyní bychom chtěli provést podobnou konstrukci i ve třech dimenzích. Pro tyto účely využijeme kvaternionů.

4.2 Kvaterniony

Na rozdíl od komplexních čísel obsahují kvaterniony hned tři komplexní jednotky i,j,k, pro které platí

$$\begin{aligned} i \cdot i &= -1, \\ j \cdot j &= -1, \\ k \cdot k &= -1, \\ i \cdot j \cdot k &= -1. \end{aligned}$$

Libovolný kvaternion lze zapsat ve tvaru $q = w{+}xi{+}yj{+}zk$. Kvaterniony lze také chápat jako prvky $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$, píšeme $q = (w,\boldsymbol{v})$, kde $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$. Pomocí tohoto zápisu lze snadno zapsat obecný součin dvou kvaternionů pomocí skalárního a vektorového součinu

$$(r,\boldsymbol{u})(s,\boldsymbol{v}) = (rs - \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, r\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}). \tag{4.6}$$

Podobně jako u komplexních čísel definujeme pro kvaterniony reálnou, imaginární část, komplexní sdružení a normu.

$$\Re(w,\boldsymbol{v}) = w \tag{4.7}$$

$$\Im(w,\boldsymbol{v}) = (0,\boldsymbol{v}) \tag{4.8}$$

$$(w,\boldsymbol{v})^* = (w, -\boldsymbol{v}) \tag{4.9}$$

$$\|(w,\boldsymbol{v})\|^2 = (w,\boldsymbol{v})(w,\boldsymbol{v})^* = w^2 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \tag{4.10}$$

Kvaternionová norma respektuje součin, tj. pro q,$p \in \mathbb{H}$ platí

$$\|qp\| = \|q\|\|p\|. \tag{4.11}$$

Kvaterniony jsou vhodné pro popis trojrozměrného prostoru a to zejména pro rotace. Trojrozměrný euklidovský prostor ztotožňujeme s imaginární částí kvaternionů a tak nebudeme nerozlišovat mezi vektorem $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ a kvaternionem $(0,\boldsymbol{v}) \in \mathbb{H}$. Každý jednotkový kvaternion $R \in \mathbb{H}$, $\|R\| = 1$ nám zadává rotaci v $\mathbb{R}^3$ pomocí

$$\overline{\boldsymbol{x}} = R^* \boldsymbol{x} R. \tag{4.12}$$

Opravdu se jedná o rotaci, jelikož se nám zachovávají vzdálenosti

$$\|\overline{\boldsymbol{x}}\| = \|R^*\|\|\boldsymbol{x}\|\|R\| = \|\boldsymbol{x}\| \tag{4.13}$$

a také se nám zachovává orientace. To lze nahlédnout z toho, jak se nám transformuje orientovaný objem rovnoběžnostěnu. Pokud máme rovnoběžnostěn zadán pomocí třech vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, pak jeho orientovaný objem je roven

$$V = -\Re(\boldsymbol{uvw}) \tag{4.14}$$

$$= -\Re((0,\boldsymbol{u})(0,\boldsymbol{v})(0,\boldsymbol{w})) \tag{4.15}$$

$$= -\Re((-\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v},\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})(0,\boldsymbol{w})) \tag{4.16}$$

$$= (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} \tag{4.17}$$

Pokud nyní všechny vektory otočíme pomocí R, tak se nám orientovaný objem nezmění.

$$V = -\Re(R^*\boldsymbol{u}R^*R\boldsymbol{v}R^*R\boldsymbol{w}R) \tag{4.18}$$
$$= -\Re(R^*\boldsymbol{uvw}R) \tag{4.19}$$
$$= -\Re(\boldsymbol{uvw}) \tag{4.20}$$

U poslední rovnosti jsme využili toho, že nám rotace otáčí pouze s imaginární částí kvaternionu, tj. pro $(w,\boldsymbol{v}) \in \mathbb{H}$ platí $\Re(R^*(w,\boldsymbol{v})R) = w$. O tom se lze snadno přesvědčit rozepsáním pomocí vzorečku 4.6.

Nyní se podívejme, jak lze pomocí kvaternionů rozšířit pojem komplexních barycentrických souřadnic do třech dimenzí.

4.3 Kvaternionové barycentrické souřadnice

Nechť je $M(V,E,F)$ je trojúhelníkový model v referenční poloze a $\tilde{M}(\tilde{V},\tilde{E},\tilde{F})$ je zdeformovaný trojúhelníkový model, $\boldsymbol{v}_i, \tilde{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbb{H}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ jsou vrcholy M a $\tilde{M}$. Podobně jako v komplexním případě můžeme zobrazit bod $\boldsymbol{u} \in \mathbb{H}$ na

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \Im\left(\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u})\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}\right),^{1} \tag{4.21}$$

kde funkce $W_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ splňují

$$\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u}) = 1, \tag{4.22}$$
$$\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}. \tag{4.23}$$

Nepříjemností 4.21 je, že nám nezachovává rotace. Pokud existuje rotace $R \in \mathbb{H}$ taková, že $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} = R^*\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}R$, pak

$$R^*\boldsymbol{u}R = R^*\Im\left(\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}\right)R = \Im\left(\sum_{i=1}^{m} R^*W_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}R\right) \neq \Im\left(\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u})R^*\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}R\right). \tag{4.24}$$

Vzoreček 4.21 je zapotřebí upravit. Myšlenka je přibližně následující. Od každého bodu $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}$ odečteme přibližnou rotaci [2] $R_i \in \mathbb{H}$ a posunutí $\boldsymbol{t}_i \in \mathbb{H}$, kterým model v daném bodě prochází, pak bod pronásobíme příslušnou kvaternionovou souřadnicí W_i a zpět přidáme transformaci $R_i,\boldsymbol{t}_i$. Vzoreček 4.21 upravíme na

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \Im\left(\sum_{i=1}^{m} R_i^*W_i(\boldsymbol{u})R_i(\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{t}_i)R_i^*R_i + W_i\boldsymbol{t}_i\right). \tag{4.25}$$

Jelikož R_i je jednotkový kvaternion, $R_i^*R_i = 1$, lze předchozí vzoreček upravit na

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \Im\left(\sum_{i=1}^{m} R_i^*W_i(\boldsymbol{u})R_i(\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{t}_i) + W_i\boldsymbol{t}_i\right). \tag{4.26}$$

[1] Výsledek může být libovolný kvaternion, který chceme interpretovat jako bod v prostoru, ignorujeme tedy jeho reálnou část a zajímáme se jen o imaginární.

[2] Co je myšleno touto přibližnou rotací R_i, bude vysvětleno vzápětí.

Intuitivně lze říci, že funkce W_i natáčíme pomocí R_i do správného směru.

Nyní je zapotřebí vysvětlit, jak volíme přibližné rotace R_i a posunutí t_i. Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lze v bodě x_0 lokálně aproximovat afinním zobrazením $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$. Toto afinní zobrazení lze dále aproximovat shodným zobrazením $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + R(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, kde R je rotační matice, která je nejvíce podobná $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, například minimalizuje $\|R - \nabla f(\boldsymbol{x}_0)\|_2$, kde $\|\cdot\|_2$ značí Frobéniovu normu. Podobně lze aproximovat zobrazení $f : M \to N$, kde M,N jsou dvourozměrné plochy v trojrozměrném prostoru. Lineární aproximace h je v tomto případě definována pouze na tečném prostoru bodu $\boldsymbol{x}_0$. My však můžeme rozšířit h na celý prostor tím, že požadujeme, aby se normála plochy M v bodu $\boldsymbol{x}_0$ zobrazila na normálu plochy N v bodě $f(\boldsymbol{x}_0)$. Takto rozšířené afinní zobrazení h opět aproximujeme shodným zobrazením $g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + R(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$, pak přibližnou rotací $R_{\boldsymbol{x}_0}$ a posunutím $t_{\boldsymbol{x}_0}$ v bodě $\boldsymbol{x}_0$ myslíme právě R a $f(\boldsymbol{x}_0) - R\boldsymbol{x}_0$.

Předchozí konstrukce bohužel funguje pro trojúhelníkové modely pouze pokud $\boldsymbol{x}_0$ leží uvnitř nějaké stěny, pak je dobře definován tečný prostor v $\boldsymbol{x}_0$ a f lze derivovat, nás ale zajímají přibližné rotace ve vrcholech. Proto počítáme přibližné rotace následujícím způsobem, který je inspirovaný předchozí myšlenkou.

Označme $\mathcal{N}_i$ množinu všech vrcholů, které jsou spojeny hranou s vrcholem $\boldsymbol{v}_i$. Pak najděme rotaci $R_i \in \mathbb{H}$ a posunutí $\boldsymbol{t}_i \in \mathbb{R}^3$, které nám co nejpřesněji transformuje vrchol $\boldsymbol{v}_i$ a sousedící vrcholy na vrchol $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ a jeho sousedy. Což můžeme říci tak, že R_i,$\boldsymbol{t}_i$ minimalizuje

$$(R_i,\boldsymbol{t}_i) = \underset{\|R_i\|=1,\boldsymbol{t}_i}{\arg\min} \|R_i^* \boldsymbol{v}_i R_i + \boldsymbol{t}_i - \tilde{\boldsymbol{v}}_i\|^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|R_i^* \boldsymbol{v}_j R_i + \boldsymbol{t}_i - \tilde{\boldsymbol{v}}_j\|^2. \tag{4.27}$$

Takovéto R_i,$\boldsymbol{t}_i$ lze najít pomocí Kabschova algoritmu (Kabsch, 1976).

Nyní se přesvědčeme, že 4.26 reprodukuje rotace a posunutí. Nechť $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} = R^* \boldsymbol{v}_i R + t$, pak R a t minimalizuje 4.27 přesně na nulu pro každé i. Tedy $R_i = R$ a $t_i = t$. Dosaďme $\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}} = R^* \boldsymbol{v}_i R + t$ do 4.26.

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{u}} &= \Im\left(\sum_{i=1}^{m} R_i^* W_i(\boldsymbol{u}) R_i (R^* \boldsymbol{v}_i R + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_i) + W_i \boldsymbol{t}_i\right) && (4.28)\\
&= \Im\left(\sum_{i=1}^{m} R^* W_i(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_i R + \sum_{i=1}^{m} W_i \boldsymbol{t}\right) && (4.29)\\
&= R^* \Im\left(\sum_{i=1}^{m} W_i(\boldsymbol{u}) \boldsymbol{v}_i\right) R + \left(\sum_{i=1}^{m} W_i\right) \boldsymbol{t} && (4.30)\\
&= R^* \boldsymbol{u} R + \boldsymbol{t} && (4.31)
\end{aligned}$$

Zbývá říci, jak volit W_i. Provedeme konstrukci podobnou jako v (Weber a kol., 2009) a získáme podobný vzoreček jako 4.5. Pokud máme dva vrcholy modelu $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$, pak libovolný bod $\boldsymbol{u}$ lze napsat jako jejich afinní kombinace nad $\mathbb{H}$.

$$\alpha \boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}, \tag{4.32}$$

$$\alpha + \beta = 1, \tag{4.33}$$

kde α,$\beta \in \mathbb{H}$, $\alpha = 1 - \beta$ a po dosazení dostáváme

$$(1 - \beta)\boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}, \tag{4.34}$$

$$\beta(-\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_i, \tag{4.35}$$

$$\beta = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_i)(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)^{-1}. \tag{4.36}$$

Obdobně dostáváme vztah pro α

$$\alpha = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)^{-1}. \tag{4.37}$$

Zaveďme značení

$$\alpha_{ij} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)^{-1}. \tag{4.38}$$

Rovnici 4.32 díky 4.33 přepišme do tvaru

$$\alpha_{ij}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}) + \alpha_{ji}(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{u}) = 0. \tag{4.39}$$

Pro každou hranu $\overline{v_i v_j}$ trojúhelníkového modelu $M(V,E,F)$ zvolme libovolnou funkci $\gamma_{ij} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$. Pronásobme 4.39 γ_{ij} a vysčítejme přes všechny hrany[3]

$$0 = \sum_{\overline{v_i v_j} \in E} \gamma_{ij} \left(\alpha_{ij}(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}) + \alpha_{ji}(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{u}) \right). \tag{4.40}$$

Rovnost 4.40 lze přepsat jako

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\gamma_{ij}\alpha_{ij} + \gamma_{ji}\alpha_{ij} \right) (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}), \tag{4.41}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\gamma_{ij} + \gamma_{ji} \right) \alpha_{ij} \right) \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \left(\gamma_{ij} + \gamma_{ji} \right) \alpha_{ij} \boldsymbol{v}_i. \tag{4.42}$$

Pokud zvolíme libovolné funkce γ_{ij} pak funkce W_i definovány pomocí

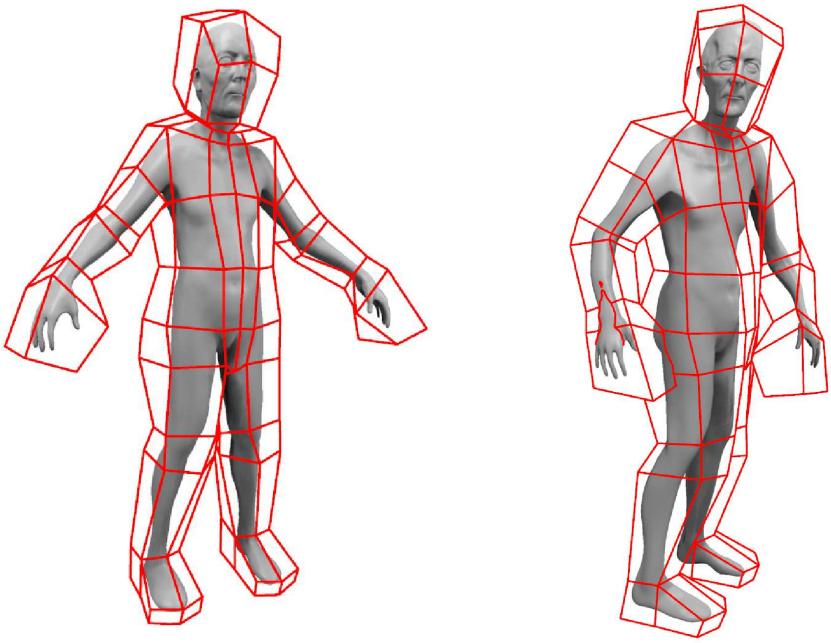
$$W_i(\boldsymbol{u}) = \left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{W}_i(\boldsymbol{u}) \right)^{-1} \tilde{W}_i(\boldsymbol{u}), \tag{4.43}$$

$$\tilde{W}_i(\boldsymbol{u}) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) + \gamma_{ji}(\boldsymbol{u}))\alpha_{ij}(\boldsymbol{u}), \tag{4.44}$$

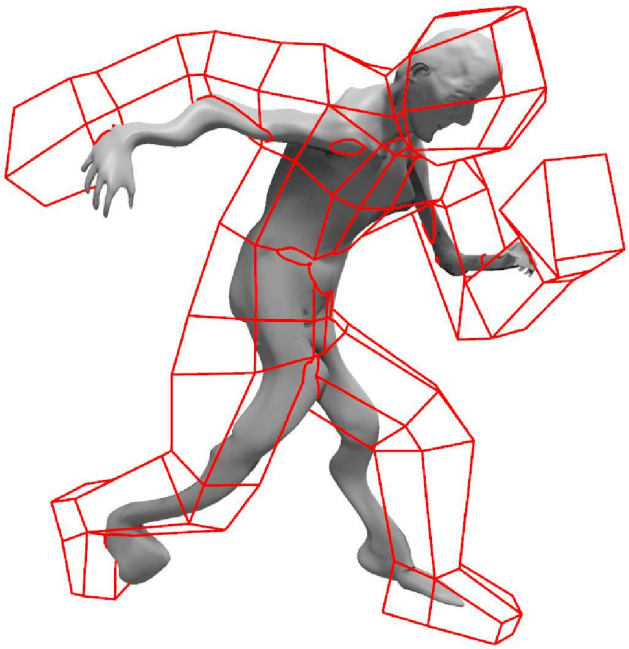
jsou kvaternionové barycentrickými souřadnicemi, tj. splňují 4.22 a 4.23.

Ne pro všechny volby γ_{ij} dostáváme rozumné deformace. Zatím nám nejí jasné, jak vhodně γ_{ij} volit. Experimentálně se nám nejvíce osvědčila volba $\gamma_{ij}(\boldsymbol{u}) = 1/\left(\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}_i\| + 1\right)$. S touto volbou γ_{ij} se výsledná deformace v případě malé změny referenčního modelu chová poměrně rozumně viz obrázek 4.2. Bohužel v případě větších změn referenčního modelu je výsledná deformace naprosto nepřirozená viz 4.3. Kvaternionové souřadnice se momentálně nacházejí v dosti experimentální fázi a je třeba zodpovědět ještě mnoho otázek, než je bude možné rozumně použít v praxi. Proto je nemá cenu porovnávat s ostatními metodami a tak je v následující kapitole vynecháme.

[3]Zde sčítáme přes každou hranu dvakrát, jelikož $\overline{v_i v_j}$ značí stejnou hranu jako $\overline{v_j v_i}$.



Obrázek 4.2: Ukázka deformace pomocí kvaternionových souřadnic. V případě malých deformací referenčního modelu je výsledná deformace poměrně rozumná.



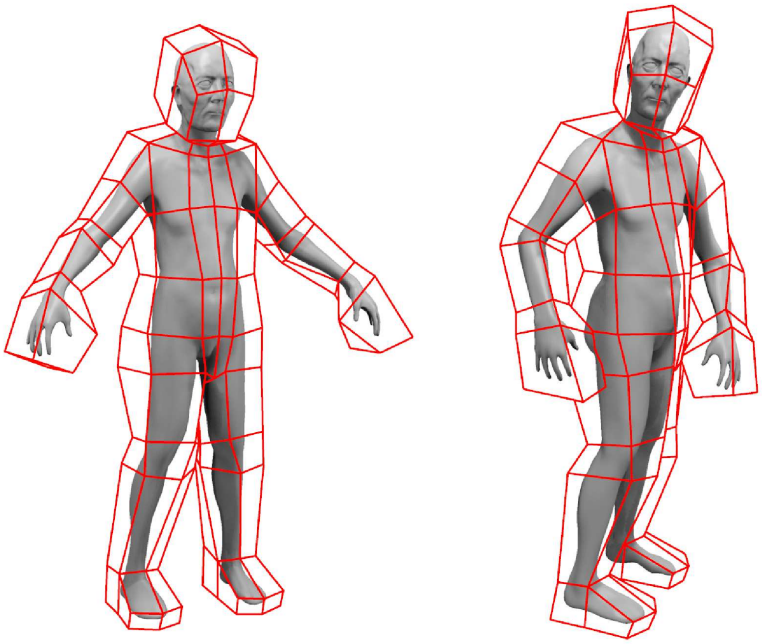
Obrázek 4.3: Ukázka deformace pomocí kvaternionových souřadnic. V případě větších deformací referenčního modelu se výsledná deformace nechová přirozeně.

Kapitola 5

Implementace a výsledky

Součástí zadání této bakalářské práce bylo naprogramovat v jazyce `C++` zásuvný modul do programu Autodesk Maya a rendereru Mental Ray, který umožní deformovat polygonální modely a 3d textury.

Polygonální model zdeformujeme pomocí zkonstruovaného zobrazeni f tak, že každý vrchol $\boldsymbol{v}$ polygonálního modelu přesuneme na pozici $f(\boldsymbol{v})$. Ukázku takovéto deformace si lze prohlédnout na obrázku 5.1.

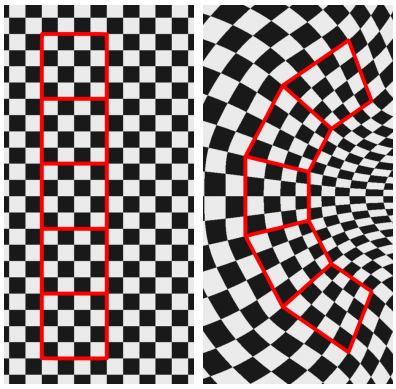


Obrázek 5.1: Ukázka deformace polygonálního modelu.

V případě 3D textur je situace poněkud jiná. Během renderování obrázku se ptáme, jaká je barva v bodě y. Potřebujeme vědět, jaká barva se do bodu $\boldsymbol{y}$ dostala pomocí zobrazení f, takže nás zajímá barva v bodě $\boldsymbol{x} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$. Nepříjemností je, že námi zkonstruované zobrazení f nemusí být prosté a tedy jeho inverze nemusí vůbec existovat. Tento problém lze snadno obejít tím, že zaměníme úlohu referenčního a zdeformovaného modelu. Zobrazení f jsme zkonstruovali tak, aby nám zobrazilo referenční model ∂M na zdeformovaný model $\partial \tilde{M}$. Pokud tedy stejným způsobem zkonstruujeme zobrazeni $f^{\dagger}$, které nám zobrazí zdeformovaný

model $\partial\tilde{M}$ na referenční ∂M, pak dostaneme něco jako inverzní zobrazení f, které splňuje $f(f^\dagger(\tilde{\partial M})) = \partial\tilde{M}$ a $f^\dagger(f(\partial M)) = \partial M$. Pokud nás tedy během renderování zajímá barva v bodě y, tak se podíváme jakou barvu má původní 3D textura v bodě $f^\dagger(\boldsymbol{y})$. Ukázku deformace 3D textury lze najít na obrázku 5.2, kde deformujeme 3D šachovnici pomocí kvádru. Na obrázku zobrazujeme jen rovinný řez touto 3D texturou.

Nyní si řekněme, jak jsme jednotlivé algoritmy implementovali.



Obrázek 5.2: Deformace šachovnice pomocí kvádru.

5.0.1 Harmonické souřadnice

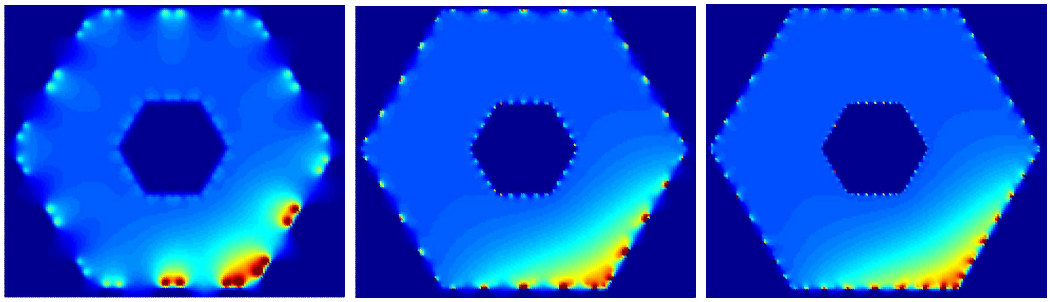
U harmonických souřadnic jsme nuceni použít numerické metody, jelikož explicitní řešení Laplaceho rovnice lze najít jen v několika málo speciálních případech. Zvolili jsme metodu hraničních prvků. Zde jen nastíníme, jak metoda funguje. Podrobnou teorii metody hraničních prvků lze najít například v (Steinbach, 2008). Tato metoda má nespornou výhodu oproti standardní metodě konečných prvků, protože není zapotřebí triangulovat výpočetní oblast. Metoda je založena na tom, že řešení u Laplaceho rovnice $\Delta u = 0$ na oblasti Ω lze napsat jako integrál přes hranici Ω.

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} U(y-x)\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)dS_y - \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial U}{\partial n_y}(y-x)dS_y, \tag{5.1}$$

kde $x \in \Omega$ a $U(x)$ je fundamentální řešení Laplaceho rovnice, ve třech dimenzích je $U(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|}$. Pokud známe hodnoty a normálové derivace řešení na hranici Ω, pak díky předešlému vzorečku 5.1 známe řešení v celé oblasti Ω. Většinou však máme zadány jen hodnoty řešení na hranici a normálové derivace neznáme. Ty lze však jednoznačně určit, tak aby platila rovnost

$$u(x) = \lim_{\overline{x}\in\Omega\to x} \int_{\partial\Omega} U(y-\overline{x})\frac{\partial u}{\partial n_y}(y)dS_y - \lim_{\overline{x}\in\Omega\to x} \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial U}{\partial n_y}(y-\overline{x})dS_y \qquad x \in \partial\Omega. \tag{5.2}$$

Metoda hraničních prvků diskretizuje předešlé integrály a předchozí rovnost převede na soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením je aproximace normálové derivace řešení. Pak můžeme využít vzoreček 5.1 a získat tak aproximaci řešení. Jelikož získáme jen aproximaci řešení, tak rovnost 5.2 není splněna přesně. S jakou přesností je tato rovnost splněna závisí na přesnosti diskretizace oněch integrálů, což si můžeme prohlédnout na obrázcích 5.3.



Obrázek 5.3: Přibližné hodnoty jedné harmonické souřadnice uvnitř anuloidu spočtené pomocí metody hraničních prvků. Vlevo je řešení s nejmenší přesností diskretizace. Červená barva značí hodnotu jedna, modrá hodnotu nula. Mimo anuloid, kde je barva tmavě modrá, není hodnota definována.

Metoda hraničních prvků je implementačně poměrně komplikovaná a tak jsme použili již hotovou knihovnu BEM++ (BEM++) napsanou v jazyce C++.

5.0.2 Meanvalue souřadnice

Velikou výhodou meanvalue souřadnic je, že pro trojúhelníkové modely lze integrál 2.15 vyhodnotit explicitně. Algoritmus na výpočet tohoto integrálu je popsán v článku (Ju a kol., 2005) a ten jsme také implementovali.

5.0.3 Radiálně symetrické funkce

Pro interpolaci radiálně symetrickými funkcemi jsme použili již hotovou knihovnu (Kahn), která provádí interpolaci pomocí funkce $\phi(r) = (r^2 + \tau^2)^{k/2}$. Výhodou této knihovny je, že umí vyhodnotit sumu

$$\overline{f}(x) = \sum_{i=1}^{N} w_i \phi(\|x - x_i\|) \tag{5.3}$$

se složitostí $\mathcal{O}(\log N)$. K tomu využívá rychlou multipólovou metodu. Ta je, zhruba řečeno, založena na tom, že pokud funkci $\phi(\|x - y\|)$ lze napsat jako

$$\phi(\|x - y\|) = \sum_{k=0}^{L} f_k(x) g_k(y), \tag{5.4}$$

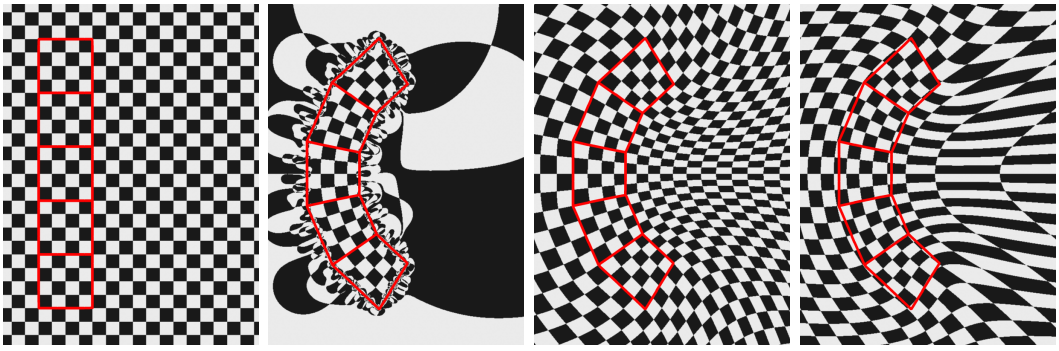
kde f_k,g_k jsou nějaké funkce, pak lze 5.4 přepsat na

$$\begin{aligned}
\overline{f}(x) &= \sum_{i=1}^{N} w_i \phi(\|x - x_i\|) && (5.5)\\
&= \sum_{i=1}^{N} w_i \sum_{k=0}^{L} f_k(x) g_k(x_i) && (5.6)\\
&= \sum_{k=0}^{L} f_k(x) \sum_{i=1}^{N} w_i g_k(x_i) && (5.7)\\
&= \sum_{k=0}^{L} f_k(x) Q_k. && (5.8)
\end{aligned}$$

Pokud si přepočítáme hodnoty $Q_k = \sum_{i=1}^{N} w_i g_k(x_i)$, pak složitost vyhodnocení funkce $\overline{f}$ nezávisí na N. Bohužel pro většinu zajímavých funkcí $\phi(r)$ se situace komplikuje. Rovnost 5.4 platí jen přibližně a ještě k tomu dost daleko od bodu y. Pak je třeba body x_i rozdělit do skupin (například pomocí BSP stromu) a pro každou skupinu bodů spočítat hodnoty Q_k zvlášť. Tím se nám zhorší složitost vyhodnocení funkce $\overline{f}$ na $\mathcal{O}(\log N)$. Podrobnější popis rychlé multipólové metody lze najít například v (Beatson a Greengard, 1997).

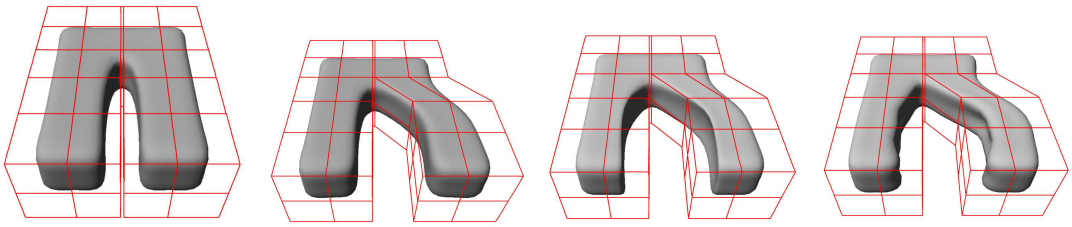
5.1 Porovnání metod

Zde se podíváme na několik případů, kde se metody výrazně liší. První velký rozdíl je, že harmonické souřadnice jsou definovány jen uvnitř modelu a ne v celém prostoru jako meanvalue souřadnice a radiálně symetrické funkce viz obrázek 5.4.



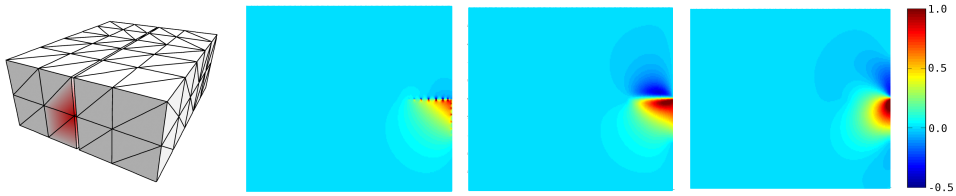
Obrázek 5.4: Ukázka deformace prostoru mimo model, zleva: nedeformovaný model, harmonické, meanvalue souřadnice a radiálně symetrické funkce.

Dále harmonické souřadnice jako jediné vykazují jistý druh lokálnosti, což lze nejlépe ilustrovat obrázkem 5.5, kde deformujeme prostor pomocí něčeho, co by se dalo nazvat podkovou. Když pohybujeme jedním ramenem podkovy, pak harmonické souřadnice nedeformují prostor uvnitř druhého ramene podkovy na rozdíl od meanvalue souřadnic a radiálně symetrických funkcí. Hodnoty jedné souřadnice uvnitř podkovy si můžeme prohlédnout na obrázku 5.6.



Obrázek 5.5: Deformace prostoru pomocí *podkovy*. Zleva je deformace pomocí harmonických, meanvalue souřadnic a deformace pomocí radiálně symetrických funkcí. Můžeme si všimnout, že když deformujeme jen jedno rameno *podkovy*, pak jen u harmonických souřadnic se nedeformuje prostor i v druhém rameni.

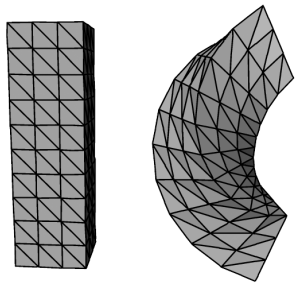
Meanvalue souřadnice nám přesně kopírují deformaci modelu, harmonické souřadnice jen do té míry jak přesnou zvolíme diskretizaci. Deformace pomocí radi-



Obrázek 5.6: V levém horním obrázku je červeně vyznačena bázová funkce P^1M, kterou rozšiřujeme. Na dalších obrázcích jsou grafy hodnoty těchto rozšíření v řezu onou *podkovou*. Postupně se jedná o harmonickou souřadnici meanvalue souřadnici a o rozšíření pomocí radiálně symetrických funkcí. Jedině harmonická souřadnice je skoro nulová v druhém rameni *podkovy*.

álně symetrických souřadnic kopírují deformaci jen ve vrcholech modelu, čehož si můžeme všimnout na obrázku 5.4.

Nakonec jsme porovnali rychlosti jednotlivých metod. Tabulka 5.1 obsahuje počet vyhodnocení za sekundu. Prostor jsme deformovali pomocí kvádru, viz obrázek 5.7, ten jsme zvolili proto, že jsme mohli snadno měnit počet vrcholů modelu. V případě harmonických souřadnic je nutné před samotným vyhodnocováním spočítat přibližné hodnoty $\partial_n u(x)$, viz 5.0.1, a v případě radiálně symetrických funkcí je nutné spočítat váhy w_i z 3.3. Tabulka 5.2 obsahuje inicializační časy. Vyhodnocení radiálně symetrických funkcí je řádově rychlejší, jelikož vyhodnocení jednoduché sumy 3.7 je podstatně rychlejší než vyhodnocování integrálů 5.1 a 2.15.



Obrázek 5.7: Metody jsme testovali na deformaci prostoru podle kvádru. Na obrázku kvádr s nejmenším počtem vrcholů, který jsme při testech použili.

model počet vrcholů/stěn	554/1104	2210/4416	4970/9936	8834/17664
harmonické souřadnice	4720	1206	524	300
meanvalue souřadnice	3427	885	391	221
radiálně symetrické funkce	73411	22365	10576	6296

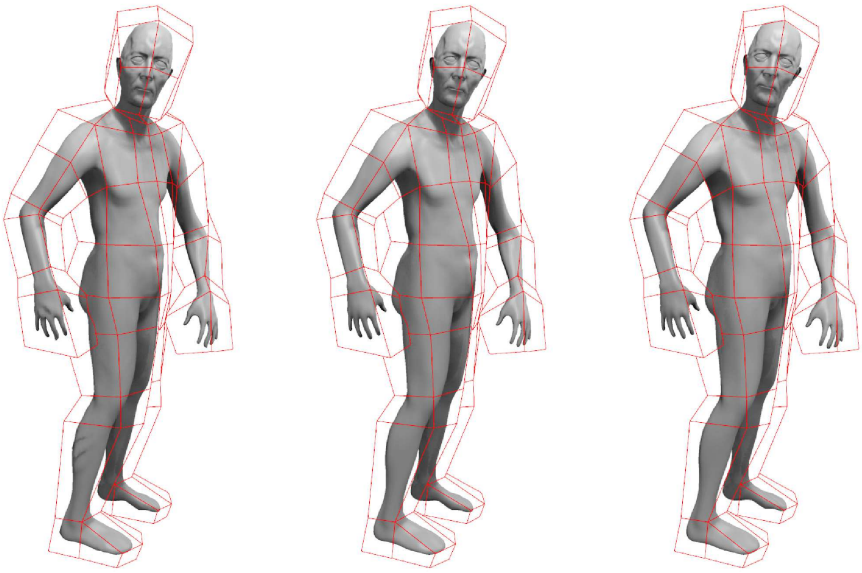
Tabulka 5.1: Počet vyhodnocení za sekundu jednotlivých metod.

model počet vrcholů/stěn	554/1104	2210/4416	4970/9936	8834/17664
harmonické souřadnice	1,6s	12,7s	60,4s	219,6s
radiálně symetrické funkce	0,4s	4,0s	18,3s	55,6s

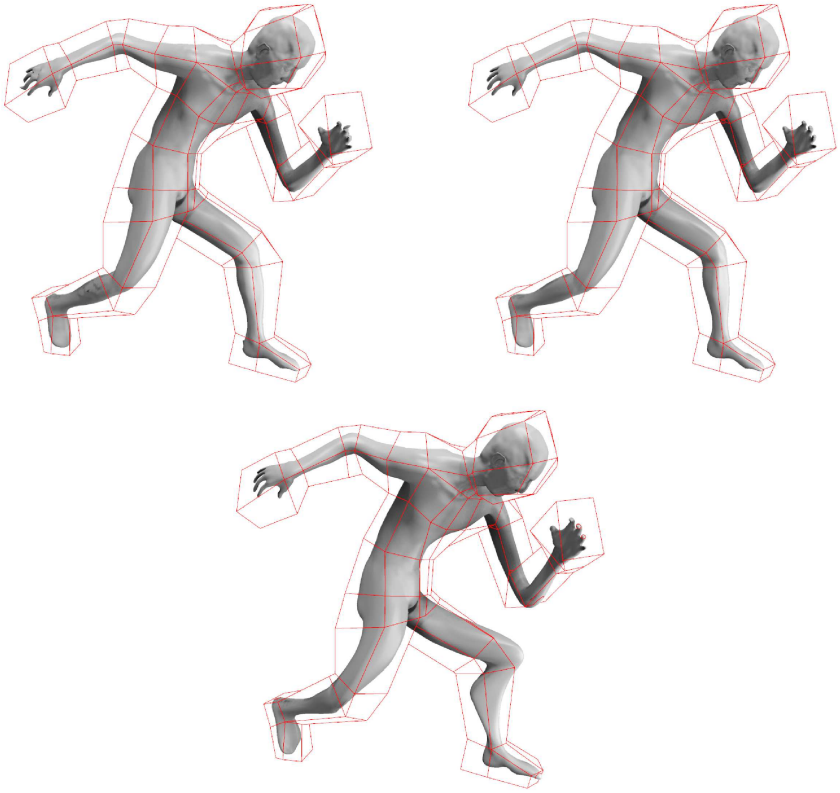
Tabulka 5.2: Inicializační časy jednotlivých metod. U meanvalue souřadnic není zapotřebí inicializace a tak zde nejsou uvedeny.

Použití

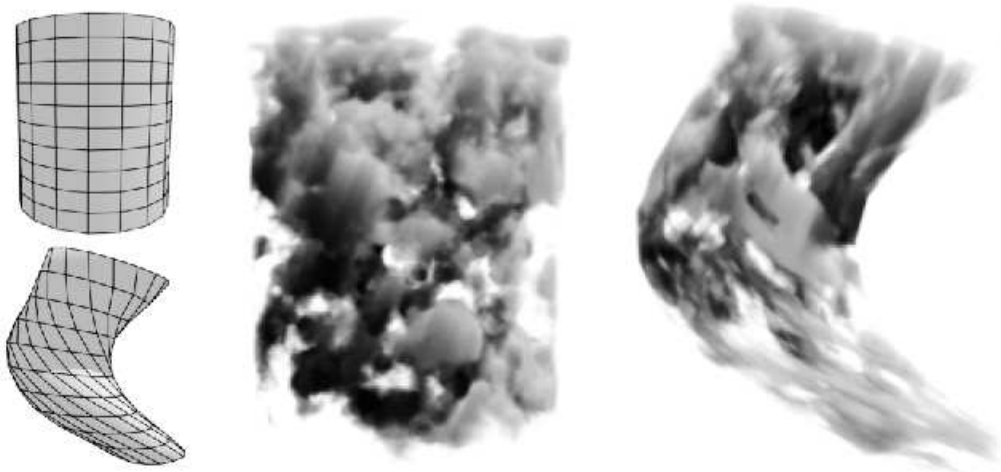
Tyto deformační metody lze využít například při animaci složitých modelů, kdy okolo nich vytvoříme jednodušší polygonální model, pomocí kterého deformujeme prostor a tedy deformujeme i onen složitý model. Toto si můžeme ilustrovat na obrázcích 5.8 a 5.9. Další aplikací je deformace volumetrických dat. Program Autodesk Maya obsahuje nástroj pro simulaci kapalin a plynů zvaný *Fluid Effects*. Simulace probíhá na regulární mřížce, kde každá její buňka obsahuje údaje, jako je hustota, teplota a rychlost plynu. My jsme nastavili hustotu v každé buňce na hodnotu námi zdeformované 3D textury. Maya umožňuje tato volumatrická data rychle vyrenderovat i s plnými volumetrickými stíny viz obrázek 5.10.



Obrázek 5.8: Deformace složitého polygonálního modelu pomocí jednoduchého modelu postupně pomocí harmonických, meanvalue souřadnic a radiálně symetrických funkcí. Pokud deformace nejsou veliké, pak výsledné deformace vypadají velice podobně.



Obrázek 5.9: Deformace složitého polygonálního modelu pomocí jednoduchého modelu postupně pomocí harmonických, meanvalue souřadnic a radiálně symetrických funkcí. Zde si můžeme všimnout stejného problému jako na obrázku 5.5. Nejvýraznější je špatná deformace kolene na spodním obrázku.



Obrázek 5.10: Ukázka deformace volumetrických dat pomocí radiálně symetrických funkcí.

Závěr

Prozkoumali jsme několik způsobů, jak deformovat prostor pomocí polygonálního modelu. Jejich použitelnost bychom mohli shrnout asi takto.

Harmonické souřadnice jsou vhodné, pokud je pro nás důležitá lokálnost souřadnic, například pokud animujeme prsty u rukou, kdy je důležité, aby se při deformaci jednoho prstu nedeformovaly prsty ostatní. Bohužel je zapotřebí se omezit jen na deformace uvnitř modelu, jelikož harmonické souřadnice jsou definovány jen uvnitř modelu.

Meanvalue souřadnice je vhodné použít, když má výsledná deformace přesně kopírovat deformaci modelu, například když chceme deformovat oblečení, které daný model obepíná.

Deformace pomocí radiálně symetrických funkcí je vhodné použít, pokud je pro nás důležitá rychlost výpočtu.

V budoucnu bychom se rádi zaměřili na zrychlení výpočtu harmonických a meanvalue souřadnic pomocí rychlé multiópové metody. Pro harmonické souřadnice to nebude problém, jelikož rychlá multipólová metoda se standardně používá pro urychlení metody hraničních prvků, bohužel ji námi použitá knihovna `BEM++` momentálně nepodporuje. U meanvalue souřadnic je třeba zjistit jestli má funkce $\frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^4}$ potřebný rozvoj 5.4, abychom byli schopni použít rychlou multipólovou metodu.

Dále bychom rádi rozvedli ideu nastíněnou na konci druhé kapitoly, jak zavést barycentrické souřadnice nejen trojúhelníkové modely, ale i pro obecné polygonální modely.

U kvaternionových souřadnic je zapotřebí zodpovědět ještě několik otázek. Nejdůležitější je zodpovědět jak volit funkce γ_{ij}, abychom dostali rozumné deformace. Také by mělo být poměrně přímočaré zobecnit kvaternionové souřadnice do libovolné dimenze pomocí geometrické (Cliffordovy) algebry.

Příloha A

Obsah přiloženého CD

Na přiloženém disku lze nalézt obrázky ve větším rozlišení, zdrojový kód výsledného programu a testovací scény.

Použití knihovny

Kompilace a instalace: Základní verze knihovny obsahuje pouze funkce, které umožňují deformaci pomocí meanvalue souřadnic, radiálně symetrických funkcí a kvaternionových souřadnic. Pokud chceme navíc zkompilovat i harmonické souřadnice a zásuvný modul pro Autodes Maya a Mental Ray, je zapotřebí sdělit během konfigurace, kde se nacházejí potřebné knihovny. Na správu kódu používáme program *cmake*. Základní verzi knihovny lze snadno zkompilovat posloupností příkazů:

```
$ cd /code/build/
$ cmake ..
$ make
```

Podrobný popis instalace se nachází v souboru */code/README.md*.

Struktura kódu: Základní strukturu knihovny tvoří dvě třídy `MeshIterator` a `DeformerBase`, které jsou definovány v souboru */code/deformers/deformers.h*.

Třída `MeshIterator` poskytuje informace o trojúhelníkovém modelu, jako je počet vrcholů modelu nebo pozice jednotlivých vrcholů. Má dva potomky `ObjMeshItarator` a `MayaMeshIterator`. `ObjMeshIterator` pracuje s modely uloženými ve formátu *.obj*. `MayaMeshIterator` pracuje přímo s interní datovou strukturou programu Autodesk Maya.

Třída `DeformerBase` zprostředkovává společné rozhraní všech deformátorů. Má celkem čtyři potomky `HarmonicDeformer`, `FastMultiQuadraticDeformer`, `QuaternionicDeformer` a `MeanValueDeformer`. Deformaci pomocí radiálně symetrických funkcí zprostředkovává `FastMultiQuadraticDeformer`[1].

Použití těchto tříd je velice snadné, což ilustruje následující kód, který se také nachází v */code/deformers/simpleTest/test.cpp*.

```
// Nejprve vytvorime iterator pro referencni
```

[1] Při implementaci jsme se bohužel dopustili chyby a třídu pojmenovali špatně. Interpolujeme pomocí funkce $\phi(r) = (r^2 + \tau^2)^{k/2}$, která se nazývá *multiquadric* a ne *multiquadratic*.

```
// a zdeformovany model.
ObjMeshIterator orgMesh( "orgMesh.obj" );
ObjMeshIterator defMesh( "defMesh.obj" );

// MeanValueDeformer zde muzeme nahradit
// libovolnym ze zminenych deformatoru.
MeanValueDeformer deformer;

// Rekneme deformatoru, podle kterych modelu ma deformovat.
deformer.loadMeshes( &orgMesh, &defMesh );

// Bod, ve kterem nas zajima hodnota deformace.
double p[] = { 1, 1, 1 };

double dp[3];

// Nakonec vyhodnotime deformaci v bodu 'p'
// vysledek se ulozi do 'dp'.
deformer.deformPoint( p, dp );
```

Funkce `loadMeshes` načte modely, podle kterých má deformace probíhat, a případně provede inicializaci deformátoru, což v případě třídy `HarmonicDeformer` a `FastMultiQuadraticDeformer` může trvat nezanedbatelný čas. `HarmonicDeformer` navíc obsahuje funkci `setAccuracy(int)`, která přijímá číslo od 0 po 15, které určí řád diskretizace. Čím vyšší hodnotu zvolíme, tím přesnější výpočet získáme. U třídy `FastMultiQuadraticDeformer` si můžeme zvolit parametry radiálně symetrické funkce $\phi(r) = (r^2 + \tau^2)^{k/2}$ pomocí funkcí `setTau(double)` a `setK(int)`.

Testy, pomocí kterých jsme naměřili časy v tabulkách 5.1 a 5.2, se nacházejí v */code/deformers/test*.

Zásuvný modul pro Autodesk Maya: Hlavní zásuvný modul `deformer.so`, jehož implementaci lze nalézt v */code/deformers/mayaShaders/*, definuje čtyři deformátory, pomocí kterých je možné deformovat polygonální modely. Následuje krátký návod jak tyto deformátory použít.

Otevřeme si scénu */scenes/deformerStart.ma*. Ta obsahuje model *meshToDeform*, který chceme zdeformovat podle modelů *orgMesh* a *defMesh*. Nejprve vytvoříme deformátor požadovaného typu pomocí jednoho z následujících `MEL` příkazů.

```
deformer -typ HarmonicDeformerNode -n deform
meshToDeform;
deformer -typ MeanValueDeformerNode -n deform
meshToDeform;
deformer -typ FastMultiQuadraticDeformerNode -n deform
meshToDeform;
deformer -typ QuaternionicDeformerNode -n deform
meshToDeform;
```

Nyní je potřeba říci deformátoru, podle kterých modelů má deformovat.

```
connectAttr orgMesh.outMesh deform.originalMesh;
```

```
connectAttr defMesh.outMesh deform.deformedMesh;
```

Výslednou scénu lze najít v */scenes/deformerEnd.ma*.

Druhý zásuvný modul pro Autodesk Maya `volumeInitializeCmd.so` obsahuje jediný příkaz, který umožňuje inicializaci fluid objektu, pomocí kterého renderujeme volumetrická data. Nasleduje krátký návod jak tento příkaz použít.

Otevřeme si scénu */scenes/volumeStart.ma*. Ta obsahuje fluid objekt *fluidShape1* a 3D texturu *stucco1*, kterou chceme deformovat podle modelů *orgMesh* a *defMesh*. Momentálně je podporována jen deformace pomocí radiálně symetrických funkcí. Jediným příkazem inicializujeme fluid objekt.

```
volumeInitializeCmd -s stucco1.outColor -d orgMesh
defMesh fluid1;
```

Výsledný obrázek by měl vypadat jako na */scenes/volumeEnd_render.png*.

Zásuvný modul pro Mental Ray: Je tvořen soubory `kernel.so /.mi` a `td_basic_deformers.so /.mi`, které obsahují shadery, pomocí kterých je možno deformovat 3D textury. Základem je shader `td_color_kernel`, který má dva parametry *color* a *point*. Ten vyhodnocuje shader připojený k parametru *color* v bodě daném parametrem *point*, ke kterému je zpravidla připojen nějaký deformační shader. Každý deformační shader má alespoň následující tři parametry *orgFile*, *defFile* a *point*. První dva parametry specifikují cestu k **.obj* souborů, ve kterých jsou uloženy modely, podle kterých chceme deformovat. Parametr *point* určuje, ve kterém bodě se deformace vyhodnotí. Nejčastěji je do něj připojen shader `td_identity`, který vrací aktuální pozici, kterou chce Mental Ray vyhodnotit. K dispozici jsou tři deformační shadery `td_meanvalue`, `td_harmonic` a `td_rbf`. Nyní si řekněme, jak tyto shadery správně použít.

Otevřeme si scénu */scenes/textureStart.ma*. Scéna obsahuje plochu, na které je aplikována textura *crater1*, kterou chceme zdeformovat pomocí modelů *orgMesh* a *defMesh*. Následujícími příkazy vytvoříme potřebné shadery a příslušně je zapojíme.

```
createNode td_color_kernel -n kernel;
// vytvorime pozadovany deformacni shader
// td_meanvalue, td_rbf nebo td_harmonic
createNode td_meanvalue -n deform;
createNode td_identity  -n identity;

// nyni vytvorene shadery spravne zapojime
connectAttr -f kernel.outValue lambert1.color;
connectAttr -f crater1.outColor kernel.color;
connectAttr -f deform.outValue kernel.point;
connectAttr -f identity.outValue deform.point;
```

Je zapotřebí ještě nastavit parametry *deform.orgFile* a *deform.defFile*. Abychom se vyhnuli ručnímu exportování modelů do souboru, napsali jsme jednoduchý modul, který automaticky exportuje modely z Mayi. Zdrojový kód tohoto modulu lze nají v */code/objExportNode/*. Dále vytvoříme exportery a správně nastavíme parametry *deform.orgFile* a *deform.defFile*.

```
createNode objExportNode -n orgExport;
```

```
createNode objExportNode -n defExport;

// nyni nastavime exportery
setAttr -type "string" orgExport.fileName "orgMesh.obj";
setAttr -type "string" defExport.fileName "defMesh.obj";
connectAttr orgMesh.outMesh orgExport.inMesh;
connectAttr defMesh.outMesh defExport.inMesh;

// nastavime parametry deformeru
connectAttr orgExport.fileName deform.orgFile;
connectAttr defExport.fileName deform.defFile;
```

Výsledný obrázek by měl vypadat jako na */scenes/textureEnd_render.png*.

Příloha B

Důkaz trvzení 2

Tvrzení. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená, ∂M je C^2 plocha a $f \in C(\partial M)$, pak funkce*

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} \frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} \frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3} dS_y} = \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \tag{B.1}$$

je řešení problému 1.

Důkaz.

Je třeba ověřit podmínky 1.1a, 1.1b a 1.1c.

Jelikož lze v B.1 prohodit derivaci s integrálem a funkce $g(x) = \frac{(y-x)}{\|y-x\|^4}$ je $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{y\})$, tak je funkce $\overline{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$. Dokázat spojitost $\overline{f}$ na $\overline{M}$ a $\overline{f}\big|_{\partial M} = f$ na ∂M je nejkomplikovanější a tak to ponecháme naposled.

Nyní se přešvědčme, že nám B.1 reprodukuje afinní funkce. Jelikož je B.1 lineární v f, lze to ověřit pouze pro souřadnícové funkce a konstantní jedničku. Ukážeme tedy, že pokud $f(x) = x_i$ na ∂M, pak i $\overline{f}(x) = x_i$ a pokud $f(x) = 1$ na ∂M, pak $\overline{f}(x) = 1$.

Pro jedničku je to snadné

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} = 1. \tag{B.2}$$

Pro souřadnicovou funkci chceme ověřit

$$\overline{f}(x) = \frac{\int_{\partial M} \frac{y_i}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} = x_i. \tag{B.3}$$

To lze přepsat jako

$$\overline{f}(x) = \int_{\partial M} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y = 0. \tag{B.4}$$

Nyní zvolme r dostatečně malé, že koule $B(x,r)$ je podmnožinou M. Pak předchozí

integrál lze pomocí Gaussovy věty o integraci přepsat na

$$\int_{\partial M} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y = \tag{B.5}$$

$$= \int_{M \setminus B(x,r)} \nabla_y \cdot \left(\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right) dV_y + \int_{S(x,r)} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y. \tag{B.6}$$

Člen $\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|}$ druhého integrálu je na sféře $S(x,r)$ roven i-té složce její vnější normály a člen $n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} = -\frac{(y-x)\cdot n_y}{\|y-x\|^3}$ je na sféře $S(x,r)$ roven $-\frac{1}{r^2}$. Tedy

$$\int_{S(x,r)} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y = -\frac{1}{r^2} \int_{S(x,r)} n_i dS_y = 0. \tag{B.7}$$

Jelikož integrál z normály přes uzavřenou plochu je roven nule. První integrál B.6 můžeme upravit následovně

$$\int_{M \setminus B(x,r)} \nabla_y \cdot \left(\frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right) dV_y = \tag{B.8}$$

$$= \int_{M \setminus B(x,r)} \left(\nabla_y \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \right) \cdot \left(\nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right) + \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \Delta_y \frac{1}{\|y-x\|} dV_y = \tag{B.9}$$

$$= \int_{M \setminus B(x,r)} \left(\nabla_y \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \right) \cdot \left(\nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right) dV_y. \tag{B.10}$$

Poslední rovnost platí, protože $\Delta_y \frac{1}{\|y-x\|} = 0$ pro $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$. Nyní ukážeme, že integrand v předchozím integrálu je roven nule bodově.

$$\left(\nabla_y \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|} \right) \cdot \left(\nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right) = \tag{B.11}$$

$$= \left((\nabla_y (y_i - x_i)) \frac{1}{\|y-x\|} - (y_i - x_i) \frac{(y-x)}{\|y-x\|^3} \right) \cdot \left(\frac{-(y-x)}{\|y-x\|^3} \right) = \tag{B.12}$$

$$= -e_i \cdot (y-x) \frac{1}{\|y-x\|^4} + (y_i - x_i) \frac{\|y-x\|^2}{\|y-x\|^6} = \tag{B.13}$$

$$= -(y_i - x_i) \frac{1}{\|y-x\|^4} + (y_i - x_i) \frac{1}{\|y-x\|^4} = 0 \tag{B.14}$$

Pokud by x neleželo uvnitř M lze důkaz snadno modifikovat, stačí pouze v B.5 nevyřezávat kouli okolo x, pak bychom v B.6 dostali pouze první integrál a místo $M \setminus B(x,r)$ bychom integrovali přes M. Zbytek důkazu lze ponechat. Vidíme tedy, že pokud je f afinní funkcí na ∂M pak $\overline{f}$ je stejnou afinní funkcí na celém $\mathbb{R}^3$.

Nyní dokážeme, že $\overline{f}$ je spojité i v bodech ∂M a že $\overline{f}$ je rovno f na ∂M. K tomu stačí dokázat následující limitu

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \stackrel{?}{=} f(x_0). \tag{B.15}$$

Ta lze přepsat na

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \left| \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y) - f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \right| = 0. \tag{B.16}$$

Tento výraz začneme odhadovat shora. Jelikož je f spojitá, tak pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že

$$\forall z \in \partial M : \|z - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(x_0)| < \epsilon. \tag{B.17}$$

Nyní můžeme začít odhadovat.

$$\left| \frac{\int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y + \int_{\partial M \cap B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \right| \leq \tag{B.18}$$

$$\frac{\left| \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right| + \left| \int_{\partial M \cap B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|} \leq \tag{B.19}$$

$$\frac{\left| \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|} + \epsilon \frac{\int_{\partial M \cap B(x_0,\delta)} \left| \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right| dS_y}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|} \tag{B.20}$$

Podívejme se podrobněji na první člen. Funkce f je spojitá a tak je omezená, tedy existuje $K > 0$, že $f \leq K$. Pokud je x blíž k x_0 než je $\frac{\delta}{2}$, pak

$$\|x - y\| \geq \frac{\delta}{2} \qquad \text{pro } y \in \partial M \setminus B(x_0,\delta) \tag{B.21}$$

a tedy

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \left| \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} \frac{f(y) - f(x_0)}{\|y - x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y - x\|} dS_y \right| \leq \tag{B.22}$$

$$\leq \lim_{x \to x_0, x \in M} \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} |f(y) - f(x_0)| \left| \frac{n_y \cdot (y - x)}{\|y - x\|^4} \right| dS_y \leq \tag{B.23}$$

$$\leq \lim_{x \to x_0, x \in M} \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} |f(y) - f(x_0)| \frac{1}{\|y - x\|^3} dS_y \leq \tag{B.24}$$

$$\leq \lim_{x \to x_0, x \in M} \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} 2K \frac{2^3}{\delta^3} dS_y \leq 2K \frac{2^3}{\delta^3} \Sigma_{\partial M}, \tag{B.25}$$

kde $\Sigma_{\partial M}$ je povrch ∂M. V kombinaci s tvrzením 4 dostáváme, že

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \frac{\left| \int_{\partial M \setminus B(x_0,\delta)} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|} \leq \frac{2K \frac{2^3}{\delta^3} \Sigma_{\partial M}}{\infty} = 0. \tag{B.26}$$

Nyní k druhému členu B.20. Díky tvrzení 5 máme, že

$$\lim_{x \to x_0, x \in M} \frac{\int_{\partial M \cap B(x_0,\delta)} \left| \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} \right| dS_y}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y \right|} \leq 4. \tag{B.27}$$

Kombinací B.26,B.27 dostáváme odhad

$$\lim_{x\to x_0, x\in M} \left| \frac{\int_{\partial M} \frac{f(y)-f(x_0)}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y}{\int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{\|y-x\|} dS_y} \right| \leq 4\epsilon. \tag{B.28}$$

Jelikož jsme volili ϵ libovolně, tak limita B.15 platí, tím je důkaz hotov.

❑

V důkazu jsme použili tvrzení 4 a 5, které dokázali uživatelé Andrew a Pragabhava na serveru math.stackexchange.com, kde lze nalézt originální znění důkazů viz (Andrew, 2013; Pragabhava, 2013).

Tvrzení 4 (Andrew, 2013)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená, ∂M je C^2 plocha, $f \in C(\partial M)$ a $x_0 \in \partial M$, pak*

$$\lim_{x\to x_0, x\in M} \int_{\partial M} \frac{1}{\|y-x\|} n_y \cdot \nabla_y \frac{-1}{\|y-x\|} dS_y = \infty. \tag{B.29}$$

Tvrzení 5 (Pragabhava, 2013)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}^3$ je omezená, ∂M je C^2 plocha, pak*

$$1 \leq f(x) = \frac{\int_{\partial M} \left| \frac{1}{||y-x||} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{||y-x||} \right| dS_y}{\left| \int_{\partial M} \frac{1}{||y-x||} n_y \cdot \nabla_y \frac{1}{||y-x||} dS_y \right|} \leq 4 \tag{B.30}$$

pro $x \in M$.

Seznam použité literatury

Andrew (2013). Důkaz tvrzení 4. URL http://math.stackexchange.com/questions/424805/limit-lim-x-rightarrow-x-0-x-in-m-int-partial-m-frac1y-x-n-y.

Barr, A. H. (1984). Global and local deformations of solid primitives. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, **18**(3), 21–30. ISSN 0097-8930. doi: 10.1145/964965.808573. URL http://doi.acm.org/10.1145/964965.808573.

Beatson, R. a Greengard, L. (1997). A short course on fast multipole methods. In *Wavelets, Multilevel Methods and Elliptic PDEs*, pages 1–37. Oxford University Press.

Ben-Chen, M., Weber, O. a Gotsman, C. (2009). Variational harmonic maps for space deformation. *ACM Trans. Graph.*, **28**(3), 34:1–34:11. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1531326.1531340. URL http://doi.acm.org/10.1145/1531326.1531340.

Botsch, M. a Kobbelt, L. (2005). Real-time shape editing using radial basis functions. In *Computer Graphics Forum*, pages 611–621.

Botsch, M., Pauly, M., Wicke, M. a Gross, M. H. (2007). Adaptive space deformations based on rigid cells. *Comput. Graph. Forum*, pages 339–347.

Buhmann, M. D. (2004). *Radial Basis Functions*. Cambridge University Press.

Catmull, E. a Clark, J. (1978). Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, **10**(6), 350 – 355. ISSN 0010-4485. doi: 10.1016/0010-4485(78)90110-0. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0010448578901100.

Coquillart, S. (1990). Extended free-form deformation: a sculpturing tool for 3d geometric modeling. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, **24**(4), 187–196. ISSN 0097-8930. doi: 10.1145/97880.97900. URL http://doi.acm.org/10.1145/97880.97900.

Evans, L. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society, Providence, R.I. ISBN 0821849743.

Feng, J., Ma, L. a Peng, Q. (1996). A new free-form deformation through the control of parametric surfaces. *Computers and Graphics*, **20**, 531–539.

Floater, M. S. (2003). Mean value coordinates. *Comput. Aided Geom. Des.*, **20**(1), 19–27. ISSN 0167-8396. doi: 10.1016/S0167-8396(02)00002-5. URL http://dx.doi.org/10.1016/S0167-8396(02)00002-5.

Georgii, J. a Westermann, R. (2006). A multigrid framework for real-time simulation of deformable bodies. *Comput. Graph.*, **30**(3), 408–415. ISSN 0097-8493. doi: 10.1016/j.cag.2006.02.016. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.cag.2006.02.016.

Joshi, P., Meyer, M., DeRose, T., Green, B. a Sanocki, T. (2007). Harmonic coordinates for character articulation. *ACM Trans. Graph.*, **26**(3). ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1276377.1276466. URL http://doi.acm.org/10.1145/1276377.1276466.

Ju, T., Schaefer, S. a Warren, J. (2005). Mean value coordinates for closed triangular meshes. *ACM Trans. Graph.*, **24**(3), 561–566. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1073204.1073229. URL http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073229.

Kabsch, W. (1976). A solution for the best rotation to relate two sets of vectors. *Acta Crystallographica Section A*, **32**(5), 922–923. doi: 10.1107/S0567739476001873. URL http://dx.doi.org/10.1107/S0567739476001873.

Kahn, E. C++ library - fast multipole interpolation (FMI). URL http://noodle.med.yale.edu/~kahn/software.html.

Kalra, P., Mangili, A., Thalmann, N. M. a Thalmann, D. (1992). Simulation of facial muscle actions based on rational free form deformations.

Karan, K. S. (2000). Skinning characters using surface-oriented free-form deformations. pages 35–42.

Lazarus, F., Coquillart, S. a Jancene, P. (1993). Interactive axial deformations. (RR-1891). URL http://hal.inria.fr/inria-00074780. Projet SYNTIM.

Lipman, Y., Levin, D. a Cohen-Or, D. (2008). Green coordinates. *ACM Trans. Graph.*, **27**(3), 78:1–78:10. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1360612.1360677. URL http://doi.acm.org/10.1145/1360612.1360677.

Loop, C. T. a DeRose, T. D. (1989). A multisided generalization of bezier surfaces. *ACM Trans. Graph.*, **8**(3), 204–234. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/77055.77059. URL http://doi.acm.org/10.1145/77055.77059.

Meyer, M., Lee, H., Barr, A. a Desbrun, M. (2002). Generalized barycentric coordinates on irregular polygons. *Journal of Graphics Tools*, **7**, 13–22.

Noh, J.-y., Fidaleo, D. a Neumann, U. (2000). Animated deformations with radial basis functions. In *Proceedings of the ACM symposium on Virtual*

reality software and technology, VRST '00, pages 166–174, New York, NY, USA, 2000. ACM. ISBN 1-58113-316-2. doi: 10.1145/502390.502422. URL http://doi.acm.org/10.1145/502390.502422.

Pragabhava (2013). Důkaz tvrzení 5. URL http://math.stackexchange.com/questions/435472/is-this-function-bounded-next-question-about-integral-int-partial-m-frac.

Sederberg, T. W. a Parry, S. R. (1986). Free-form deformation of solid geometric models. *SIGGRAPH Computer Graphics*, page 151–160.

Steinbach, O. (2008). *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems: Finite and Boundary Elements*. Texts in applied mathematics. Springer. ISBN 9780387313122. URL http://books.google.cz/books?id=46a56˙DLjkUC.

Sumner, R. W., Schmid, J. a Pauly, M. (2007). Embedded deformation for shape manipulation. *ACM Trans. Graph.*, **26**(3). ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1276377.1276478. URL http://doi.acm.org/10.1145/1276377.1276478.

BEM++. Modern open-source c++/python boundary element library. URL http://www.bempp.org/.

Wachspress, E. (1975). *A rational finite element basis*. Academic Press rapid manuscript reproductions. Academic Press. ISBN 9780127289502. URL http://books.google.cz/books?id=sCRiAAAAMAAJ.

Weber, O., Ben-Chen, M. a Gotsman, C. (2009). Complex barycentric coordinates with applications to planar shape deformation. *EUROGRAPHICS*.

Weber, O., Ben-Chen, M., Gotsman, C. a Hormann, K. (2011). A complex view of barycentric mappings. *Computer Graphics Forum*, page 1533–1542.

Zhou, K., Huang, J., Snyder, J., Liu, X., Bao, H., Guo, B. a Shum, H.-Y. (2005). Large mesh deformation using the volumetric graph laplacian. *ACM Trans. Graph.*, **24**(3), 496–503. ISSN 0730-0301. doi: 10.1145/1073204.1073219. URL http://doi.acm.org/10.1145/1073204.1073219.