

POSUDEK OPONENTA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Název: Frakcionální Lévyho proces

Autor: Jan Kislinger

CELKOVÉ HODNOCENÍ PRÁCE

Bakalářská práce Frakcionální Lévyho proces zavádí základní pojmy z moderní stochastické analýzy (náhodné procesy - Wienerův a složený Poissonův, martingaly, Wienerův stochastický integrál) a s jejich pomocí definuje Lévyho proces, jehož vzájemný vztah s výše zmíněnými procesy je přiblížený formulací věty o Lévyho-Itoově rozkladu. Završením celé práce je nejprve frakcionální Wienerův proces a následně frakcionální Lévyho proces spolu s velmi stručným pojednáním o jeho vlastnostech.

Toto poněkud náročnější téma bylo přiměřeně zpracováno podle zadání práce, autor v této čistě rešeršní práci shrnul potřebné pojmy a jejich vlastnosti a zavedl výše zmíněné procesy a práce tak dobře poslouží jako výchozí bod pro další studium frakcionálního Lévyho procesu.

Matematická úroveň textu je ovšem spíše slabší. Značení není mnohdy včas, případně vůbec, zavedeno, místy chybí kvantifikátory a definice dále používaných znaků. Mnohdy se ovšem jedná o odstranitelné nedostatky, jejichž nápravu si čtenář snadno domyslí, ale místy se vyskytne i nepřesná či dokonce nesprávná formulace známé věty či neodůvodněné tvrzení (viz příložený seznam). Takovéto chyby spíše přisuzují nepozornosti než nepochopení, nicméně čitelnost textu se tím snižuje.

Oceňuji, že v případě těžších vět jsou uvedeny odkazy na literaturu, kde lze důkaz konkrétního tvrzení nalézt. V případě lehčích vět bych ocenil formálnější zápis důkazů místo jeho označení za zřejmé případně náznaků důkazu typu „plyne z“ (Věty 1.5, 3.1, 3.6, 4.4, 4.5). Za jednoznačně pozitivní považuji, že autor doplňuje a dále rozpracovává některá tvrzení nalezená v literatuře (Věty 1.4, 2.1, 2.4, 3.8), leč u mnohých dalších důkazů nebyl jasný zdroj (Věty 1.3, 3.2, 3.3, 3.4, 3.7, 3.11, 4.1).

Práce je přehledně členěná do kapitol a logických celků, které na sebe velmi pěkně navazují. Formální a stylistická stránka práce nasvědčuje tomu, že rychlost dopisování posledních částí textu se zvyšovala s přibližujícím se termínem odevzdání práce a mnohé překlepy tak mohly být odstraněny a vzorce správně zarovnané, kdyby měl autor více času na korektury.

PŘIPOMÍNKY A OTÁZKY K OBHAJOBĚ PRÁCE

1. Vzhledem k absenci závěru a místy nejasným zdrojům u mnohých důkazů - jaký je přínos samotné práce a která tvrzení dokazoval autor sám, případně jaký je autorův vlastní přínos?
2. Sekce o Itoově integrálu je dosti vágní a nepřesná. Proč nelze zavést stochastický integrál v Lebesgue-Stieltjesově smyslu? Co je hlavním nástrojem při rozšiřování integrálu z jednoduchých funkcí na funkce z L^2 prostoru?
3. Na str. 12 se vyskytuje formulace „Nyní prozkoumáme možnost vytvořit z libovolného procesu martingal.“ Bohužel je na tomto místě již jen definice komenzátoru. Kdy to tedy lze? Existuje nějaké tvrzení?

ZÁVĚR

Celkově práci považuji za průměrnou a doporučuji ji uznat jako práci bakalářskou.

Petr Čoupek
26.8. 2014

-
- V. 1.4 - Chybí explicitní zdůvodnění záměny sumy a integrálu.
 - V. 1.6 - Co je to A ?
 - V. 1.7 - V předchozím odstavci bylo řečeno, že $\mu^{*1/n}$ nemusí existovat, tj. nemělo by se ve (ii) napsat, že existuje?
 - D. 1.6 - Znak μ není nikde použit a naopak je použit ν
 - V. 1.8 - Poznámka pod větou: (μ, σ^2, ν) - nevhodné značení, doposud bylo μ míra.
 - D. 2.2 - U $\lim_{s \rightarrow t} X_s \stackrel{d}{=} X_t$ chybí formální zápis.
 - D. 2.3 - Definice je formulována jako tvrzení, to je neobratné: *Potom pro každé $\omega \in \Omega$ existuje funkce ...*
 - V. 2.1 - Zde je na místě poznámka, že stačí jeden typ z uvedených spojitostí.
 - D. 2.6 - Nezavedené značení t_i , lze jej volit např. $t_1 < t_4 < t_2 < t_5 < \dots$, co je to n ?
 - D. 2.7 - Nezavedený symbol $\stackrel{d}{=}$, co když 0 ani $t - s$ nenáležejí T (to je možné, neboť v D. 2.1 požadujeme pouze, aby $T \subset \mathbb{R}$ interval)?
 - D. 2.8 - Nemají být nerovnosti v $1 \geq k \geq n$ naopak?
 - D. 2.9 - Není uvedeno, co je \mathcal{A} .
 - V. 2.5 - Co je to $\min\{\}$? Minimum prázdné množiny?
 - D. 3.1 - Nezávislé přírůstky - chybí formální zápis. Dále $W_0 = 0$ skoro jistě.
 - V. 3.1 - V důkazu: tvrzení plyne z uvedených ingrediencí, ale bylo by dobré, kdyby to autor ukázal.
 - D. 3.2 - Dělení jakého intervalu? Konečný, nebo nekonečný interval? Co je n ?
 - D. 3.3 - Co je symbol \mathbb{R} ?
 - D. 3.4 - $g_n(t)$ jsou čísla, g_n jsou funkce; nestačí, aby g byla měřitelná, ale musí být z L^2 , $(W_t, t \in [0, t])$ - co je teda t a které t v následujícím textu je myšleno? V citovaném textu (Hlubinka, str. 17, pozn. 3.35) je G_n L_2 -martingal, jak je to tedy s korektností uvedené limity v případě deterministických integrandů, co tyto musí splňovat? Ve výrazu (3.3) chybí s , podle kterého se integruje.
 - V. 3.2 - Opět funkce g musí být z L^2 prostoru, měřitelnost sama nestačí; vzorcům chybí kvantifikátory - co je t ?
 - V. 3.3 - Chybí zmínka o linearitě integrálu - měla by být zmíněna po druhé rovnosti v závěru důkazu a podobně chybí zmínka o měřitelnosti $\int_0^q g(s) dW_s$ vůči \mathcal{F}_q .
 - D. 3.5 - Co je to nezávislost přírůstků? Co je X_{t-} ? Chybí zavedení značení.
 - D. 3.6 - Formální zápis minima (chybí $t : \dots$).
 - D. 3.8 - Nezávislost přírůstků.
 - D. 3.9 - Je \mathcal{B} obecná σ -algebra nebo borelovská σ -algebra nad \mathbb{R} ? Náhodnou míru lze zavést i nad okruhem. Je vhodné psát, že ona rodina n.v. je náhodná míra na nějakém prostoru (třeba na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$). Chybí pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, aby se mohlo jednat o náhodnou veličinu. Chybí citace (Applebaum).
 - D. 3.10 - Co je \mathcal{A} ? V D.3.9 se používalo \mathcal{B} a zde není \mathcal{A} zavedeno.
 - V. 3.12 - Chybí kvantifikátor pro t .
 - D. 4.1 - U (fW1) chybí, že $W_0^H = 0$ s.j.
 - V. 4.1 - Kolmogorovova-Čencovova věta neukazuje spojitost trajektorií, ale existenci verze procesu se spojitými trajektoriemi. Chybí slovo "věty".
 - V. 4.2 - V citaci (M. a van Ness) je správná formule následující:

$$X_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 \left((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right) dW_s + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dW_s \right)$$

tedy v práci chybí konstanta. Není vhodné toto uvést jako větu, neboť v citovaném zdroji se jedná o definici. Vhodnější by bylo jako poznámka. Jak se to má s chováním W_t^H v závislosti na parametru H ?