Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Barycentrické souřadnice

Barycentric Coordinates

Autor bakalářské práce: Zora Mašatová

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.

Praha 2014

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně a citovala všechny použité prameny a literaturu.

Dále prohlašuji, že práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Souhlasím s trvalým uložením elektronické verze mé práce v databázi meziuniverzitního projektu Theses.cz za účelem soustavné kontroly podobnosti kvalifikačních prací.

V Praze 26. června 2014

……………………………..

Zora Mašatová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala všem, kteří mi pomohli s vypracováním předkládané bakalářské práce, zvláště doc. RNDr. Jaroslavu Zhoufovi, Ph.D. za konzultace a odborné vedení bakalářské práce.

ABSTRAKT

Záměrem v této práci je pojednat o barycentrických souřadnicích. Nejdříve se čtenář může seznámit s historií a vývojem těchto souřadnic, které jsou alternativou k souřadnicím kartézským. Úvod do problematiky barycentrických souřadnic se věnuje soustavám hmotných bodů, s nimiž pracoval již Archimedes. Soustavy hmotných bodů nám umožňují odvodit překvapivě snadno některé obecně známé vztahy v trojúhelníku. Další část práce je věnována normalizovaným barycentrickým souřadnicím. Jsou definovány nejdůležitější vztahy a objekty, které se běžně vyskytují v analytické geometrii v kartézských souřadnicích. Na závěr jsou předvedeny některé způsoby použití a je poukázáno na možné výhody těchto souřadnic.

KLÍČOVÁ SLOVA

August Ferdinand Mőbius, barycentrické souřadnice, soustava ohodnocených bodů

ABSTRACT

An intention of this text is to discuss barycentric coordinates. In the beginning, the reader is informed about the historical background and development of this type of coordinates, which are the option to the Cartesian coordinates. The introduction is devoted to the systems of evaluated points, which Archimedes was operating with. The systems of evaluated points enable derivation of some of basic known principles valid in triangles surprisingly easily. The next part of the work is focused on the barycenric coordinates. The main relations and objects, which usually appear in analytic geometry, are defined. In the end, some of the advantages of use of this coordinates are shown.

KEYWORDS

August Ferdinand Mőbius, barycentric coordinates, system of evaluated points

Obsah:

Úvod

Obvyklým souřadnicovým systémem využívaným pro výuku analytické geometrie jsou kartézské souřadnice. S těmito souřadnicemi se žáci seznamují v hodinách matematiky již na základní škole. Výhodou těchto souřadnic, které jsou dány dvěma kolmými osami, je názornost a snadné určení polohy bodů pomocí pravítka s ryskou. Také aparát používaný při práci s kartézskými souřadnicemi je dostatečně propracovaný a dostupný.

Alternativou kartézských souřadnic jsou souřadnice barycentrické. Tyto souřadnice nejsou na školách příliš rozšířené, nespadají do osnov základních ani většiny středních škol. Také literatura, která se podrobně zabývá problematikou barycentrických souřadnic, je většinou zahraniční anebo se omezuje jen na jednotlivé články řešící dílčí úlohy. Přesto sdílím názor, že barycentrické souřadnice mají své místo v analytické geometrii a je dobré se s nimi seznámit. Tyto souřadnice mají například tu výhodu, že ve svých hodnotách nesou informaci o některých geometrických vlastnostech daného bodu.

Na následujících stránkách jsem se snažila shromáždit základní poznatky o barycentrických souřadnicích. První kapitola přináší informace o vzniku těchto souřadnic a o Archimedovi a Augustu Ferdinandu Mőbiovi, kteří mají největší podíl na jejich objevení. Na dalších stránkách se čtenář seznámí se soustavami hmotných bodů, jelikož analogie soustav hmotných bodů a barycentrických souřadnic ozřejmuje, jakou mají tyto souřadnice souvislost s fyzikou. V hlavní části mé práce jsem se snažila uvést a názorně ukázat na příkladech nejdůležitější vlastnosti barycentrických souřadnic tak, jak je tomu zvykem u souřadnic kartézských. V závěru je uvedeno několik příkladů využití barycentrických souřadnic, které ukazují, že tyto souřadnice mají v současné době význam spíše v počítačové grafice a některých technických oborech než význam metodický. Obrázky použité v práci jsou vytvořeny v programu Geogebra.

1 Historie

V úvodní části jsou uvedeny informace týkající se dvou nejvýznamnějších matematiků, jimž vděčíme za zavedení barycentrických souřadnic v geometrii.

1.1 Archimedes ze Syrakus (287 př. n. l. – 212 př. n. l)

1.1.1 Archimedův život

O životě Archimeda bohužel neexistuje mnoho ověřených informací, protože jeho životopis sepsaný jeho přítelem Herakleitem se nedochoval [2, s. 20]. Archimedes se narodil roku 287 př. n. l. v Syrakusach jako syn astronoma Feidia (Phedia). V soudobých spisech se vyskytují informace, že byl spřízněn s tehdejším králem Syrakus Hieronem II. Již jako mladý odešel studovat do Alexandrie, kde se setkal s Eratosthenem z Kyreny, Kononem ze Samu či Dositheem z Pelusie. Měl možnost se zde seznámit s Eukleidovými spisy, protože ten v egyptské Alexandrii dlouhou dobu žil a pracoval. Po studiích se vrátil zpět do Syrakus, kde působil ve službách krále Hierona II. jako vynálezce.

Král si podle všeho jeho schopností velmi cenil, protože Archimedes dokázal zkonstruovat i válečné stroje, které měly velký význam pro bezpečnost města. Král Archimedovy vynálezy využíval ke zkvalitnění každodenního života. Archimedes mimo jiné pomáhal s výstavbou svými rozměry výjimečné lodi, nesoucí jméno Syrakusia. Loď sloužila k luxusnímu cestování a pro přepravu nákladu a patrně šlo o největší loď starověku vůbec. Archimedes loď vybavil na tehdejší dobu neuvěřitelnými vymoženostmi [17].

Velký učenec nejspíš přišel o život během druhé punské války při obléhání Syrakus Římany. Archimedovy válečné stroje byly tak důmyslné a účinné, že byly schopny bránit město před Římany neuvěřitelné dva roky, jak je vylíčeno v díle řeckého historika a spisovatele Plutarcha. Roku 212 př. n. l. se podařilo generálovi Marcu Claudiu Marcellovi dobýt město lstí. Využil toho, že se Syrakusané oddávali oslavě bohyně Artemis a nevěnovali pozornost obraně města.

Archimedova smrt je opředena legendami. Podle nejznámější z nich přistoupil k Archimedovi voják s úmyslem ho odvést za generálem Marcellem. Archimedes však vojáka požádal, ať počká, až vyřeší matematickou úlohu, kterou se právě zabývá. A obrátil se k vojákovi se známými slovy: „Noli tangere circulos meos (Nedotýkej se mých kruhů).“ Vojáka to rozzuřilo a Archimeda na místě zabil. Mnohem pravděpodobnější je však verze, že Archimedes se chtěl vzdát a jít za Marcellem dobrovolně, vojáci se však domnívali, že jde o bohatého muže a zabili ho, aby se mohli zmocnit jeho majetku. Marcellus násilí spáchané na Archimedovi vzápětí odsoudil [2, s. 22 – 23].

1.1.2 Archimedovy objevy a poznatky

Ve své době Archimedes proslul především jako vynálezce, je mu připisováno na 40 objevů zejména z fyziky [2, s. 33]. Zda všechny tyto objevy učinil jako první nebo je spíše převzal ze starších, ne příliš známých zdrojů, se již dnes nedozvíme. Tehdejší společnost mu vděčí například za vynález kladkostroje, dvojzvratné páky, šnekového čerpadla, vodních varhan či konstrukci planetária.

Archimedes zkoumal zákonitosti mechanické rovnováhy a objevil zákony statiky pevných těles. Zavedl pojmy jako těžiště a statický moment. Také zkoumal principy, podle nichž fungují jednoduché stroje, jako nakloněná rovina, klín, ozubené kolo. Svými výzkumy položil základy moderní hydrostatiky. Popsal zákonitosti plování a vztlaku. Poprvé použil a objasnil pojem hustota. Byl si vědom nestlačitelnosti vody a využil ji k odvození a formulování hydrostatického zákona.

Dalším jeho válečným vynálezem byla schopnost zapálit loď na dálku. Mezi vědci ale nepanuje shoda ve způsobu, který Archimedes používal. Jedni se přiklánějí k názoru, že Archimedes byl schopen k zapálení lodí využít několik zrcadel rozmístěných na břehu moře a loď vznítit soustředěním slunečních paprsků do jednoho místa. Jiní si myslí, že pravděpodobnější je možnost, že k zapálení lodí byl používán parní kanon, kterým byla vystřelována hořlavá látka známá jako řecký oheň [17].

Nezanedbatelným vynálezem z oblasti strojírenství byl Archimedův šroub. Jedná se o šikmo umístěný dřevěný dutý válec, který má uvnitř umístěnou hřídel. K hřídeli se těsně přimyká šroubovitá plocha. Čerpání se provádí otáčením hřídelí. Voda se působením gravitace drží v kapsách tvořených závity a tím dochází k posouvání vody vzhůru. Šnekové čerpadlo se používá dodnes, jelikož jeho konstrukce je jednoduchá a zároveň velmi efektivní.

I vynález hudebního nástroje, vodních varhan, je přisuzován Archimedovi. Jde o varhany, v nichž je vzduch postupující k píšťalám stlačován pomocí vodního sloupce. Někteří autoři připisují tento vynález alexandrijskému mechanikovi Ktesibiovi [2, s. 36].

V oblasti matematiky a geometrie Archimedes učinil neméně důležité objevy. Znal vzorec pro součet nekonečných geometrických řad. Určil, že objemy koule, válce a kužele, pro něž platí, že průměr koule je stejný jako průměr a výška kužele a válce, jsou v poměru 2 : 3 : 1. Též byl schopen stanovit hodnotu čísla π na dvě desetinná místa. Odvodil, že pro hodnotu čísla π platí [2, s. 43]:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \qquad \text{tj.} \qquad 3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$$

K dalším významným objevům patří například vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené parabolou a přímkou. Tento obsah Archimedes stanovil jako 4/3 obsahu trojúhelníku vepsaného jistým způsobem této ploše [2, s. 51]. Celý matematický problém pak řešil jako součet geometrické řady s kvocientem 1/4. Podobným způsobem byl též schopen stanovit objem rotačního paraboloidu, hyperboloidu a elipsoidu. Tím vlastně položil základy integrálního počtu, protože jím použitá metoda je založená na stejném principu jako metody používané v integrálním počtu.

Archimedovi se též připisuje objevení 13 archimedovských těles. Jedná se o polopravidelná konvexní tělesa omezená pravidelnými mnohoúhelníky dvou a více druhů. Původní Archimedův spis se nedochoval. Je znám pouze ze zmínek v díle řeckého matematika Pappa z Alexandrie. Později tuto teorii zpracoval Johannes Kepler [17].

1.1.3 Archimedovy spisy

Archimedovo dílo tvoří promyšlený uspořádaný celek. Jeho pojednání nemají charakter kompilátů, ale odborných publikací zveřejňujících původní výsledky [2, s. 29]. Je zajímavé, že Archimedes nepsal svá díla obecnou řečtinou, ale používal „syrakuštinu“, dórský dialekt ovlivněný italickou sikulštinou.

V antice nedošlo k soubornému uspořádání Archimedova díla, a proto byly některé jeho spisy ztraceny. Jsou to například spisy *O vahách*, *O těžišti*, *O principech* nebo *Katoptrika*. O jejich existenci víme pouze z odkazů v dochovaných spisech nebo z citací jiných autorů. Poprvé byly tehdy známé Archimedovy spisy vydány okolo roku 530 n. l. Isidorem Milétským. Během 9. – 10. století došlo zásluhou velkého úsilí konstantinopolských matematiků k vytvoření tří souborů Archimedových děl, *Kodexu A*, *Kodexu B* a *Kodexu C*. První dva jmenované kodexy se dochovaly díky mnoha opisům, které z nich byly pořízeny a později přeloženy do dalších jazyků. Kodex C se záhy ztratil. Znovuobjeven byl až začátkem 20. století a je znám jako tzv. *Archimedův palimsest*[1].

Spisů, které se dochovaly v jednotlivých kodexech, je celkem 13. Následně jsou seřazeny v pořadí, v jakém byly pravděpodobně napsány:

O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha I., *O kvadratuře paraboly*, *O rovnováze, kniha II.*, *Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh*, *O kouli a válci, kniha I. a II.*, *O spirálách*, *O konoidech a sféroidech*, *O plovoucích tělesech, kniha I. a II.*, *Měření kruhu*, *Počítání písku*, *Kratochvíle*, *Poučky*, *Problém dobytka* [2, s. 24].

Při pohledu na množství Archimedových objevů a šíři problémů, jimiž se zabýval, je jasné, že šlo o velkého génia, který svým významem ovlivnil mnohé své následovníky. Poznatky, které Archimedes odvodil, dokázal, či pouze předpokládal, se ve svých dílech inspirovali učenci o mnoho generací mladší. Jeho poznatky a vědecké objevy položily základy mnoha vědním oborům, které v jeho době neexistovaly. Archimedes dal svými objevy vzniknout hydrostatice, mechanice tuhého tělesa, kombinatorice, integrálnímu počtu nebo teorii nekonečných řad. Svými *Axiómy o soustavách hmotných bodů* inspiroval o stovky let později Augusta Ferdinanda Mőbia, který na jejich základě vytvořil své nejvýznamnější dílo, *Barycentrický počet*.

[1] Jedná se o opis původního Archimedova rukopisu na pergamenu. Z důvodu vysoké ceny pergamenu se občas nějaký spis vyškrábal a pergamen se použil znovu. I původní Archimedův spis byl vyškrábán a přepsán liturgickým textem. K jeho znovuobjevení došlo roku 1906, kdy byl vyškrábaný text zrekonstruován pomocí archeologických metod.

1.2 August Ferdinad Mőbius (1790 – 1869)

1.2.1 Životopis

August Ferdinand Mőbius se narodil 17. listopadu 1790 v Schulpfortě v Sasku. Jeho otec Johann Heinrich Mőbius tam byl učitelem tance na knížecí škole. Otec bohužel zemřel, když malému Augustovi byly pouhé tři roky. Jeho matka Johanne Catharine Christiane, rozená Keil aus Kőtschau, syna od malička vzdělávala doma společně s jeho svobodným strýcem z otcovy strany. Johanne byla údajně vzdálená příbuzná Martina Luthera, známého kazatele a církevního reformátora.

V letech 1803 – 1809 navštěvoval August školu v Schulpfortě. Již na střední škole byl zřejmý jeho zájem o matematiku. Po ukončení studia na škole v Schulpfortě se však na radu rodinného přítele rozhodl pro studium práv na univerzitě v Lipsku. Záhy ale zjistil, že jeho zájem o matematiku a astronomii je příliš silný a studium práv mu nepřináší kýžené uspokojení. Mladý August se proto rozhodl změnit obor a začít se studiem matematiky, astronomie a fyziky na téže univerzitě. Mőbius začal navštěvovat přednášky matematika Prasse, fyzika Gilberta a astronoma Mollweideho[2]. Zvlášť setkání s Karlem Mollweidem, s nímž se postupem času blíže spřátelil, mělo na Mőbia zásadní vliv [7, s. V].

V roce 1813 získal Mőbius studijní stipendium a odjel do Gőttingenu, kde studoval astronomii pod vedením Carla Friedricha Gausse, který v Gőttingenu působil jako ředitel hvězdárny. Gauss se stejně jako Mollweide zabýval současně matematikou a astronomií. Právě tímto směrem se celý život ubíral i Mőbius. V dubnu 1814 umírá Prasse, který působil na universitě v Lipsku, a z toho důvodu se Mőbius vrací do Lipska. Doufá totiž, že by mu mohla být nabídnuta pozice astronoma, kterou dosud zastával Mollweide. Nakonec ale získává učitelské místo v Halle na Pedagogickém institutu. V Halle má Mőbius příležitost brát soukromé hodiny z vyšší matematiky u Johanna Friedricha Pfaffa.

Dne 11. prosince 1814 je Mőbius promován bez disertace na univerzitě v Lipsku. Již o pár měsíců později, 19. dubna 1815, je habilitován a vydává práci

[2] Karl Brandam Mollweide byl významný matematik a astronom, který objevil např.: Mollweideho rovnici nebo Mollweideho projekci map (nepravé válcové zobrazení).

De peculiaribus quibusdam aequationum trigonometricarum affectionibus, která pojednává o trigonometrických rovnicích. Ještě téhož roku dokončuje práci *De computandis occultationibus fixarum per planetas* o zastínění nebeských těles [7, s. V].

Dne 1. května 1816 je August Ferdinand Mőbius jmenován mimořádným profesorem Univerzity v Lipsku a astronomem na observatoři v Lipsku. Záhy po uvedení do funkce obdržel Möbius stipendium na studijní cesty. Nejprve odjel do Seebergu u Gothy, kde se spřátelil s Enckem a Nickolaiem. Pak navštívil několik dalších německých a rakouských měst: Coburg, Nűrnberg, Stuttgart, Tűbingen, Műnchen, Wien a Ofen. Během svých cest se setkal a seznámil s dalšími významnými vědci. Po příjezdu domů získal služební byt v Pleissenburgu, v Lipsku, který měl ve svém užívání po celý zbytek života [7, s. IV].

Po návratu z cest roku 1816 dostává mladý profesor nabídky práce astronoma v Greifswaldu a později v roce 1819 je mu též nabídnuto místo matematika v Dorpatu. Mőbius ale obě nabídky odmítá, jelikož cítí silné vazby k rodnému Sasku a má velmi vysoké mínění o úrovni univerzity v Lipsku [7, s. VI]. V letech 1818 – 1821 Mőbius dohlížel na projekt přestavby observatoře. Při přestavbě hvězdárny byly Mőbiovi inspirací jeho zkušenosti z cest, při nichž navštívil mnohé podobné objekty. V roce 1820 zemřela Mőbiova matka, která mu byla do té doby vždy velkou oporou, a její smrt znamenala pro Augusta Ferdinanda významnou ztrátu.

Zanedlouho po matčině smrti se mladý Mőbius oženil se slečnou Dorotheou Christianou Johannou Rothe z Gery. Svazek s Dorotheou byl podle všeho šťastný a harmonický. Společně vychovali dceru Emilii Augustu (1822 – 1897) a syny Augusta Theodora (1821 – 1890) a Paula Heinricha Augusta (1825 – 1885). Mőbiova dcera se v roce 1851 provdala za astronoma Heinricha Louise d´Arresta.

V roce 1825 umírá Mőbiův učitel a přítel Karl Mollweide. Mőbiovi tak svítá další naděje získat post řádného profesora na univerzitě v Lipsku, ale i tentokrát je upřednostněn někdo jiný. Ačkoliv A. F. Mőbius získal místo mimořádného profesora velice záhy ve své kariéře, na post řádného profesora si musel počkat celých 28 let. Zdá se, že tento jinak velmi úspěšný astronom a matematik nebyl dobrým řečníkem. Získat pozornost studentů poutavým projevem bylo asi

Mőbiovou slabinou, dokonce kolují domněnky, že pro získání většího zájmu studentů pořádal některé přednášky zdarma [13].

Naopak svými povahovými rysy byl přímo predurčen pro dráhu vědce. Svět, ve kterém se pohyboval, sestával z jeho studovny, přednáškového sálu a observatoře, vybavené bohatou knihovnou. Setkával se především se studenty a kolegy na půdě univerzity, se svou rodinou a úzkým kruhem blízkých přátel. Mőbius byl tichý, skromný a vyrovnaný, zahloubaný do děl, která právě zpracovával. Byl hnán vnitřním odhodláním prozkoumat nové neprobádané skutečnosti a prohloubit a uspořádat znalosti, které měl. Pracoval s velkým úsilím, pilně a systematicky. Měl ve zvyku myšlenky v každém díle dotáhnout k dokonalosti až do nejmenších detailů. Své spisy nikdy nezveřejňoval předčasně, dokud si nebyl stoprocentně jist tím, že jsou hotové bez nejmenších nedostatků [7, s. VII].

Roku 1829 jmenovala Berlínská akademie věd Mőbia svým pravidelným korespondenčním přispěvatelem. Mnohé statě z jeho spisů věnovaných matematice, obzvláště barycentrickému počtu, byly otištěny v letech 1828 – 1858 v Crelleově časopisu *Journal fűr die reine and angewandte Mathematik*. Tento časopis byl jedním z prvních v Německu, který se zabýval výhradně matematikou a otiskoval nejvýznamnější počiny na poli matematiky té doby [8, s. 229]. Až roku 1844, kdy bylo Mőbiovi nabídnuto místo profesora na univerzitě v Jeně, ho konečně univerzita v Lipsku povýšila do stavu řádného profesora astronomie, který plnou měrou zasluhoval.

V témže roce navštívil Mőbia Grasmann, který si přál, aby Mőbius napsal komentář k jeho dílu *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, neboť obsahovalo mnoho podobných závěrů jako Mőbiův Barycentrický počet. Mőbius sice komentář nenapsal, nicméně přesvědčil Grassmanna, aby svou práci přihlásil do soutěže. Grassmann to udělal a jeho dílo získalo hlavní cenu [13].

V roce 1848 se Mőbius stal ředitelem observatoře v Lipsku, kde působil téměř nepřetržitě již od dob studií. Roku 1859 navždy opustila Mőbia jeho milovaná manželka, s níž prožil šťastnou a naplněnou etapu svého života a vychoval tři děti. Po její smrti celých devět let pečovala o Mőbia rodinná přítelkyně až do 26. září 1868, kdy zemřel.

1.2.2 Mőbiovo dílo

Mőbiovo dílo můžeme rozdělit na 4 časové úseky podle toho, jakému tématu se v jednotlivých obdobích věnoval:

I. 1817 – 1827: Věnoval se práci na svém nejvýznamnějším díle *Der barycentrische Calcul* (*Barycentrický počet*).

II. 1827 – 1837: Tato dekáda skončila vydáním publikace *Lehrbuch der Statik* (*Učebnice statiky*).

III. 1838 – 1843: Soustředil se na dokončení díla z oboru astronomie *Mechanik des Himmels* (*Mechanika nebeských těles*).

IV. 1844 – 1868: Stal se spoluzakladatelem Královské saské vědecké společnosti a spisy, které v té době napsal, jsou v archivu této společnosti [7, s. VII].

Jak již bylo řečeno, v každém z těchto časových úseků se Mőbius naplno věnoval práci na některém ze svých děl. Ačkoliv ani jeho výzkumy a objevy v oboru astronomie nejsou zanedbatelné, nejvýše je patrně ceněno Mőbiovo dílo *Barycentrický počet*.

Möbiův Barycentrický počet se jeví jako dílo zcela převratné především tím, jaké nové možnosti projektivní geometrie odkrývá. Mőbiovi se podařilo přenést do geometrie poznatky z fyziky. Při tvorbě nového typu souřadnic Mőbius uplatnil Archimedův princip dvojzvratné páky a poznatky o soustavě hmotných bodů a jejich těžišti. Barycentrické souřadnice v rovině jsou dané pevným souřadnicovým trojúhelníkem. Vrcholům trojúhelníku jsou přiřazeny odpovídající hmotnosti m_1, m_2, m_3 tak, aby hledaný bod byl jejich těžištěm. Jde o první zavedení homogenních souřadnic vůbec. Homogenní souřadnice nejsou určeny jednoznačně. Po vynásobení všech souřadnic toutéž konstantou dostaneme stejný bod. Jednoznačně je určen pouze poměr $m_1 : m_2 : m_3$ [8, s. 230].

Užitím barycentrických souřadnic byl Mőbius schopen popsat všechny objekty známé v analytické geometrii, včetně bodů a přímek ležících v nekonečnu. Když si uvědomil možnosti, které mu barycentrický počet skýtá, začal se věnovat oblasti, kterou dnes nazýváme geometrické transformace. Mőbius nazývá geometrické transformace „geometrické příbuznosti“ a zabývá se shodnostmi, podobnostmi, afinitami a kolineacemi a vysvětluje jejich vzájemný vztah.

V Barycentrickém počtu je obsažena řada původních výsledků z oblasti afinní a projektivní geometrie. Mimo jiné je zde poprvé uvedeno, že afinity zachovávají poměry délek, ploch a objemů. Dále je zde poprvé definováno kolineární zobrazení, které je určeno čtyřmi body, z nichž žádná trojice neleží na přímce. Barycentrický počet také obsahuje důkaz, že projektivní zobrazení zachovávají dvojpoměr [8, s. 230]. Ke klasifikaci geometrie, kterou se Mőbius původně chtěl také zabývat, se nakonec nedostal. Znemožnil mu to především nedostatek algebraického aparátu, jelikož ještě neexistovala teorie grup a invariantů [8, s. 232].

Dále se Mőbius v Barycentrickém počtu zabýval teorií kuželoseček a křivek třetího stupně. Nejpřekvapivější je jeho zjištění, že pravděpodobnost toho, že libovolná náhodně vybraná pětice bodů leží na hyperbole, je nekonečně mnohokrát vyšší než pravděpodobnost toho, že pětice bodů leží na elipse [8, s. 230]. Na sklonku svého života se Mőbius také zabýval kruhovou inverzí a kruhovými transformacemi obecně. Mőbius byl též prvním z matematiků, který popsal kruhové transformace čistě geometrickými prostředky [8, s. 231].

Barycentrický počet si brzy získal zaslouženou pozornost mnoha významných soudobých matematiků. Cauchy se o barycentrickém počtu zmiňuje již roku 1828 ve vědeckém časopise *Bulletin de Férussac.* Jacobi a Dirichlet přijíždějí roku 1829 do Lipska, aby se s barycentrickým počtem a jeho tvůrcem osobně seznámili [7, s. XII]. Carl Friedrich Gauss je zprvu skeptický, po podrobnějším prostudování Mőbiova díla je ale nadšen tím, jak elegantně tento přístup řeší problematiku kuželoseček, a staví barycentrický počet na roveň své teorii kongruencí nebo Lagrangeovu integrálnímu počtu [8, s. 232]. Kromě těchto reakcí podnítilo Mőbiovo dílo další výzkumy v oblasti homogenních souřadnic. Ačkoliv byl Mőbiův Barycentrický počet již brzy překonán díly Julia Plűkera, který zavedl tzv. trilineární souřadnice, bez samotného objevu a zavedení homogenních souřadnic by tato díla pravděpodobně ani nevznikla.

Kromě již zmíněného převratného objevu homogenních souřadnic stojí za zmínku ještě řada dalších objevů zejména na poli matematiky a geometrie, o které se Mőbius svým celoživotním úsilím a systematickou vědeckou prací zasloužil. K jeho dalším významným objevům patří například: Mőbiův list, Mőbiova funkce či inverzní formule. Mőbiovův list je dvoudimenzionální objekt, který má jen jednu stranu. Studiem tohoto objektu se ve stejné době zabýval i Listing, takže je sporné, komu patří prvenství učinění tohoto objevu [13]. Mőbiova funkce je důležitá multiplikativní funkce v oboru celých čísel, který zobrazuje na množinu {–1, 0, 1}. Dalším počinem v oboru teorie čísel je inverzní formule, která též nese jeho jméno. Mőbius je též pokládám za zakladatele topologie.

2 Soustavy hmotných bodů

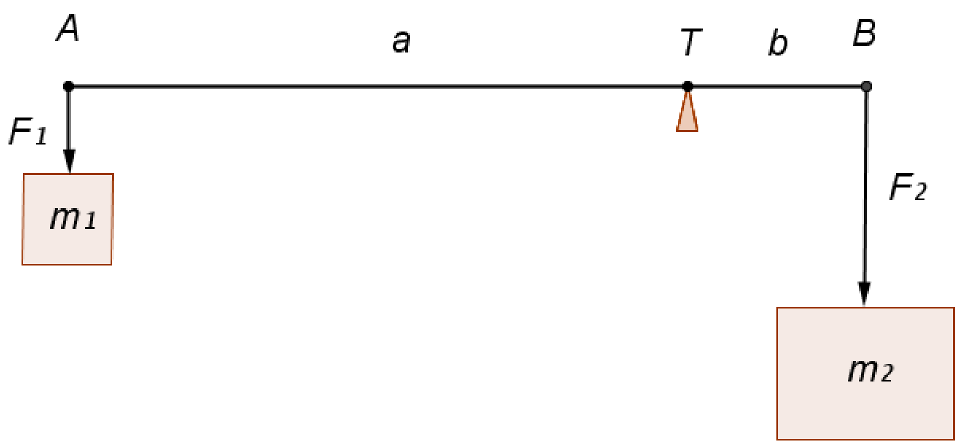
2.1 Archimedova statika

Metoda zavedení barycentrických souřadnic má tu výhodu, že dokáže zachovat fyzikální vlastnosti objektů, převést je na vlastnosti geometrické a pracovat s nimi čistě geometrickými postupy. Mőbius, který jako první vytvořil barycentrický počet, jistě znal teorii statiky soustav hmotných bodů. Tato axiomatická teorie byla vytvořena již ve starověku a jejím autorem je Archimedes. V antice neexistovaly přesné hranice mezi vědními obory, a proto se nemůžeme divit, že Archimedova teorie slučuje poznatky fyzikální a geometrické. Než se budeme zabývat geometrickými poznatky, podívejme se teď blíže na fyzikální pozadí Archimedovy statiky.

Archimedovi je připisováno objevení fyzikálního významu páky. Následující obrázky ilustrují, jak páka funguje (obr. 1 a 2). Bod, ve kterém je páka upevněna společně i se zavěšenými tělesy, je zároveň jejím těžištěm. Proto, aby byla páka v rovnovážné poloze, se musí moment síly v bodě A rovnat momentu síly v bodě B. Velikost momentu síly v daném bodě je určena součinem délky ramene síly a gravitační síly působící v tomto bodě.

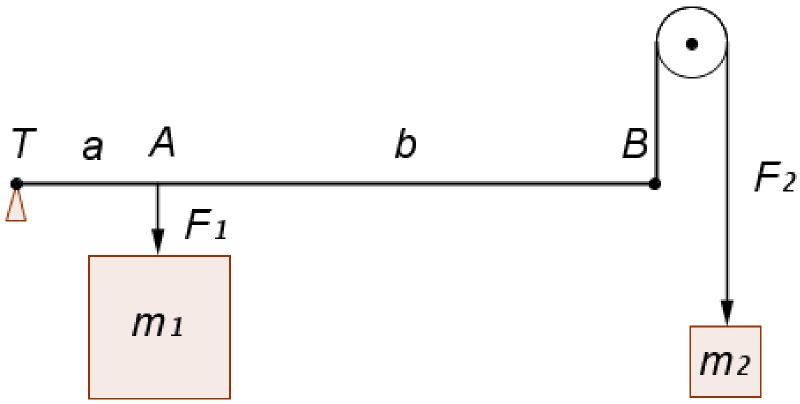
Na dvojzvratné páce tedy platí následující vztah (obr. 1):

$$F_1\, a = F_2\, b$$



Obr. 1

Jednozvratná páka (obr. 2) funguje na obdobném principu. Rozdíl je v tom, že síly na jednozvratné páce nepůsobí stejným směrem. Všimněme si, že těžiště již neleží mezi body, v nichž působí síly, ale vně těchto bodů. Uvádíme zvlášť tento případ, protože je analogický se zápornou hmotností připsanou bodu u soustav hmotných bodů.



Obr. 2

Vzorec pro výpočet momentu sil na jednozvratné páce je také:

$$F_1\, a = F_2\, b$$

V obou případech je a vzdálenost bodu A od těžiště, b je vzdálenost bodu B od těžiště, F_1 a F_2 jsou síly, které jsou určené součinem hmotnosti umístěné v bodě, kde síla působí, a gravitační konstanty g. Protože g je konstantní, můžeme vztah zjednodušit do tvaru:

$$m_1 a = m_2 b$$

Tento vztah se nám bude velmi hodit při seznamování se s Archimedovou statikou.

2.2 Archimedovy axiómy

Archimedovi se podařilo shromáždit poznatky o těžišti a místech působení síly a vytvořit pomocí nich axiomatickou teorii. Tato teorie je tvořena třemi zákony, které Archimedes považoval za univerzální a neměnné [14, s. 3]. Těžiště je chápáno jako místo, v němž je soustředěna hmotnost. Každá přímka procházející těžištěm je pokládána za těžnici. Ještě je dobré poznamenat, že Archimedes jednou pracuje s jednotlivými body, které mají určitou hmotnost, a jindy je zase schopen uvažovat trojúhelník jako hmotnou plochu, či úsečku jako množinu hmotných bodů. Je tedy schopen zároveň operovat s prvky diskrétní i infinitezimální povahy, aniž by se dopustil nepřesnosti. Archimedes je zároveň považován za toho, kdo zavedl pojmy těžiště a těžnice.

Axiom I (Existence a jednoznačnost) Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.

Axiom II (Zákon páky) Těžiště dvojice hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2 je ten bod T úsečky AB, pro který platí:

$$m_1|AT| = m_2|BT|$$

Axiom III (Redukční princip) Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tzv. podsoustavu) jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podsoustavy a majícím celou její hmotnost [14, s. 3].

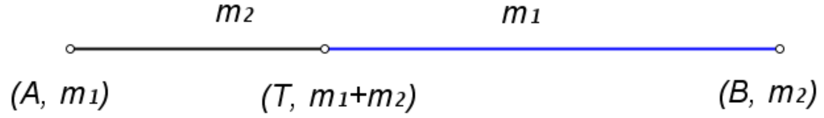
Hmotný bod X o hmotnosti m budeme v dalším textu značit (X, m_X), kde m_X je kladné číslo.

Příklad 1 Na úsečce AB, kde (A, m_1) a (B, m_2), sestrojte její těžiště.

Řešení. Těžišti T bude připsaná hmotnost $m_T = m_1 + m_2$. Dále víme, že platí následující vztah:

$$m_1|AT| = m_2|BT|$$

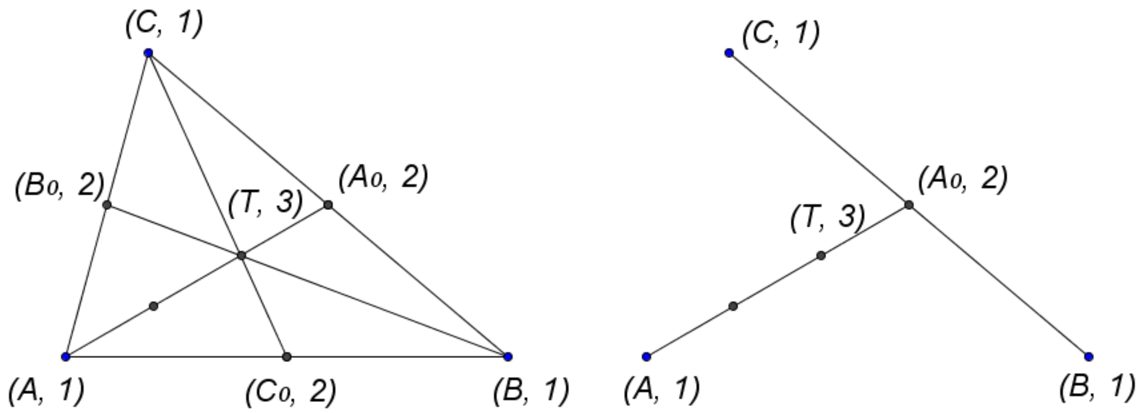
Proto $|AT| = m_2 \cdot$ konstanta a $|BT| = m_1 \cdot$ konstanta. Dohodněme se, že pro zjednodušení platí: $|AT| = m_2$, $|BT| = m_1$. Těžiště T tedy dělí úsečku AB v poměru $m_2 : m_1$ (obr. 3).



Obr. 3

Příklad 2 Pomocí axiomů o hmotných soustavách odvoďte skutečnost, že se těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě a dělí se v poměru 2 : 1.

Řešení. Trojúhelník si lze představit jako soustavu skládající se z hmotných úseček rovnoběžných s úsečkou AB (obr. 4). Všechny tyto úsečky mají těžiště na úsečce CC_0, kde C_0 je střed úsečky AB. Z toho plyne, že těžiště ΔABC leží na úsečce CC_0. Nyní zopakujeme tuto úvahu i pro úsečky BC a AC. Je jasné, že bod T leží na průsečíku úseček AA_0, BB_0, CC_0, které se tím pádem nutně musí protnout v jednom bodě (viz Axióm I).



OBR. 4

Nyní hledáme odpověď na otázku, v jakém poměru se těžnice dělí. Místo ΔABC budeme uvažovat soustavu tří hmotných bodů: $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$. Díky Axiomu III můžeme body $(B, 1)$ a $(C, 1)$ nahradit jejich těžištěm $(A_0, 2)$. Teď hledáme těžiště hmotných bodů $(A, 1)$ a $(A_0, 2)$ a můžeme k tomu využít Axiom II, podle něhož platí $|AT| : |A_0T| = 2 : 1$. Tím jsme dokázali, že těžnice se protínají v jednom bodě a dělí se v poměru 2 : 1 [14, s. 5].

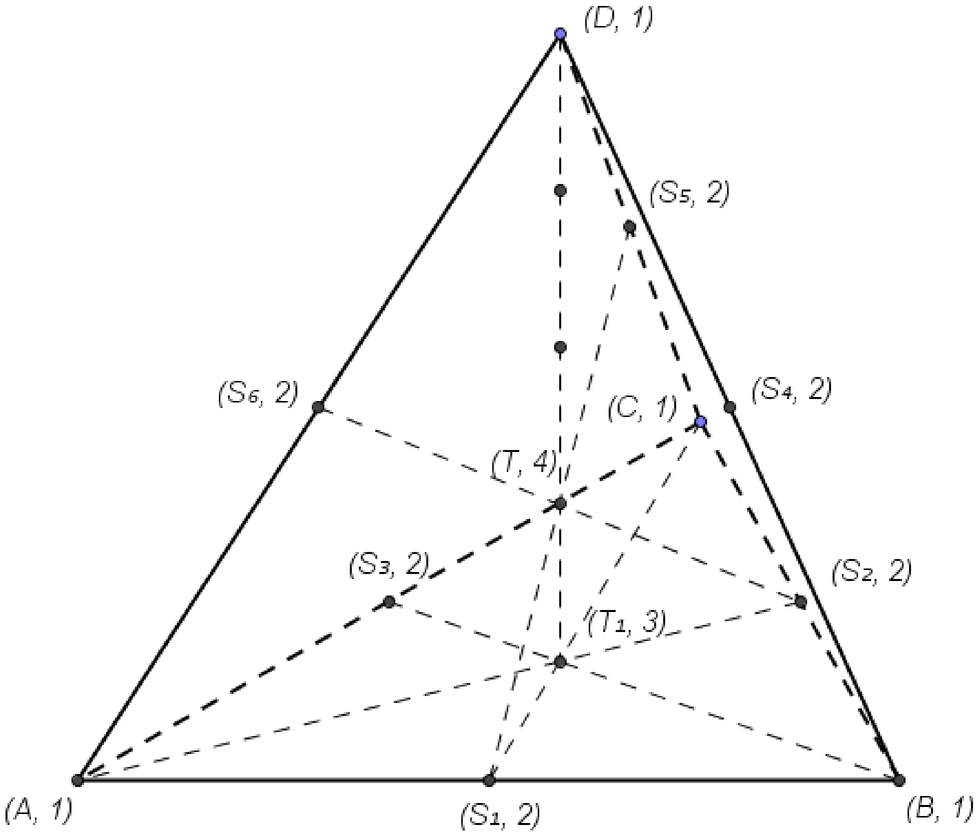
Výše popsaným způsobem jsme odvodili základní vlastnosti těžnic v trojúhelníku a polohu těžiště. Nyní se přeneseme do prostoru.

Příklad 3 Pomocí axiomů o hmotných soustavách odvoďte, v jakém poměru se dělí těžnice čtyřstěnu.

Řešení. Budeme uvažovat soustavu čtyř hmotných bodů $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$. Nejprve budeme hledat těžiště trojúhelníku ABC. Tím je bod $(T_1, 3)$, jak bylo odvozeno v předchozím příkladu (obr. 5). Dále určíme těžiště bodů

(T_1, 3) a (D, 1). Jejich těžištěm je bod T o hmotnosti 4, který dělí úsečku T_1D v poměru 1 : 3. Ke stejnému závěru bychom došli, i kdybychom nejprve určili těžiště bodů (A, 1) a (B, 1) a bodů (C, 1) a (D, 1). Na obr. 5 jsou to středy stran AB a CD, které jsou po řadě označeny (S_1, 2) a (S_5, 2). Výsledným těžištěm bodů S_1 a S_5 je opět bod (T, 4).

Již je jasné, že těžiště tří bodů nalezneme tak, že nejprve určíme těžiště libovolné dvojice bodů, dvojici pak nahradíme jejich těžištěm a následně určíme těžiště tohoto bodu a posledního bodu, čímž získáme těžiště tří bodů. Tímto způsobem můžeme získat těžiště libovolného konečného počtu bodů.

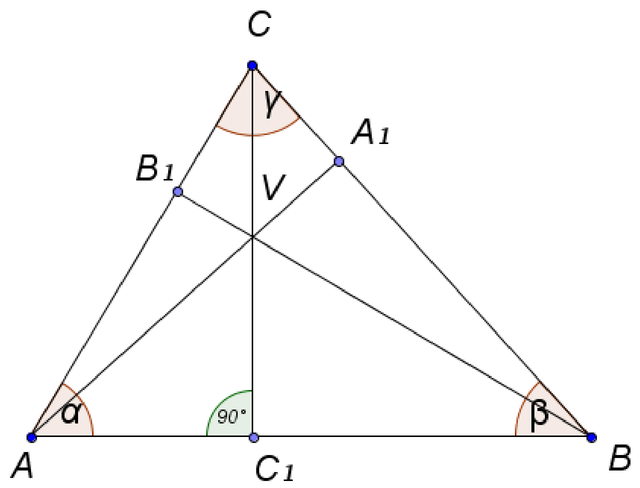


Obr. 5

Nyní se soustředíme na úlohy týkající se trojúhelníku. Naším cílem bude umístit těžiště soustavy tří bodů do některých významných bodů trojúhelníku. V úloze, kde jsme hledali těžiště trojúhelníku, jsme položili hmotnosti v jeho vrcholech rovny jedné. K tomu, abychom umístili těžiště třeba do ortocentra, musíme jistým způsobem změnit hmotnosti v bodech A, B, C. Hmotnosti umístěné v jednotlivých vrcholech ovlivní polohu dílčího těžiště ležícího na úsečce AB a následně i polohu výsledného těžiště, tedy bodu, ke kterému se chceme dobrat.

2.3 Ortocetrum trojúhelníku

<u>Příklad 4</u> Určete hmotnosti m_1, m_2, m_3 připsané po řadě vrcholům trojúhelníku ABC tak, aby jeho těžiště bylo v ortocentru V trojúhelníku ABC.



OBR. 6

Řešení. Nejdříve vyjádříme, v jakém poměru dělí bod C_1 úsečku AB. Podívejme se na vztahy, které platí v trojúhelnících ACC_1 a BCC_1 (obr. 6):

$$|AC_1| = |CC_1| \operatorname{cotg} \alpha$$

$$|C_1B| = |CC_1| \operatorname{cotg} \beta$$

Po zkrácení délkou úsečky CC_1 z toho plyne:

$$|AC_1| : |C_1B| = \operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \beta$$

Můžeme dokázat, že obdobné vlastnosti platí i pro další strany trojúhelníku ABC:

$$|BA_1| : |A_1C| = \operatorname{cotg} \beta : \operatorname{cotg} \gamma$$

$$|AB_1| : |B_1C| = \operatorname{cotg} \alpha : \operatorname{cotg} \gamma$$

Jelikož má platit

$$m_1 |AC_1| = m_2 |C_1B|$$

a je

$$|AC_1| : |C_1B| = \operatorname{cotg}\alpha : \operatorname{cotg}\beta,$$

je

$$m_1 : m_2 = \operatorname{cotg}\beta : \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta.$$

Takže je (podle dohody, že neuvažujeme násobek konstantou)

$$m_1 = \operatorname{tg}\alpha, \qquad m_2 = \operatorname{tg}\beta, \qquad m_3 = \operatorname{tg}\gamma.$$

Hmotnost těžiště trojúhelníku ABC tedy je

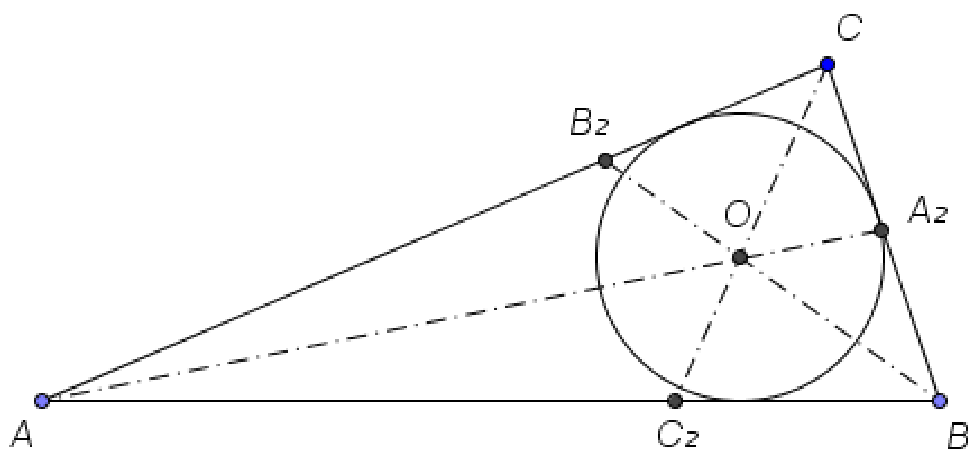
$$m_T = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$$

a toto těžiště leží v ortocentru. Dále můžeme odvodit, že těžiště musí současně ležet na úsečkách AA_1, BB_1, CC_1, protože tyto přímky jsou těžnicemi trojúhelníku ABC. Z toho vyplývá, že výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě V a zároveň bod V dělí úsečku CC_1 v poměru [14, s. 6]:

$$|CV| : |C_1V| = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : \operatorname{tg}\gamma$$

2.4 Střed kružnice trojúhelníku vepsané

Příklad 5 Určete hmotnosti m_1, m_2, m_3 připsané po řadě vrcholům trojúhelníku ABC tak, aby jeho těžiště bylo ve středu O kružnice vepsané trojúhelníku ABC.



Obr. 7

Řěšení. Střed kružnice vepsané leží na průsečíku os úhlů. Zjistíme, v jakém poměru dělí osy úhlů strany trojúhelníku. To můžeme odvodit podle známé věty, která říká, že osa vnitřního úhlu dělí protilehlou stranu trojúhelníku v poměru délek přilehlých stran. Průsečíky os úhlů se stranami označíme po řadě A_2, B_2, C_2. Strany trojúhelníku jsou děleny v následujících poměrech (obr. 7):

$$|AC_2| : |C_2B| = |AC| : |BC|$$

$$|BA_2| : |A_2C| = |AB| : |AC|$$

$$|CB_2| : |B_2A| = |BC| : |AB|$$

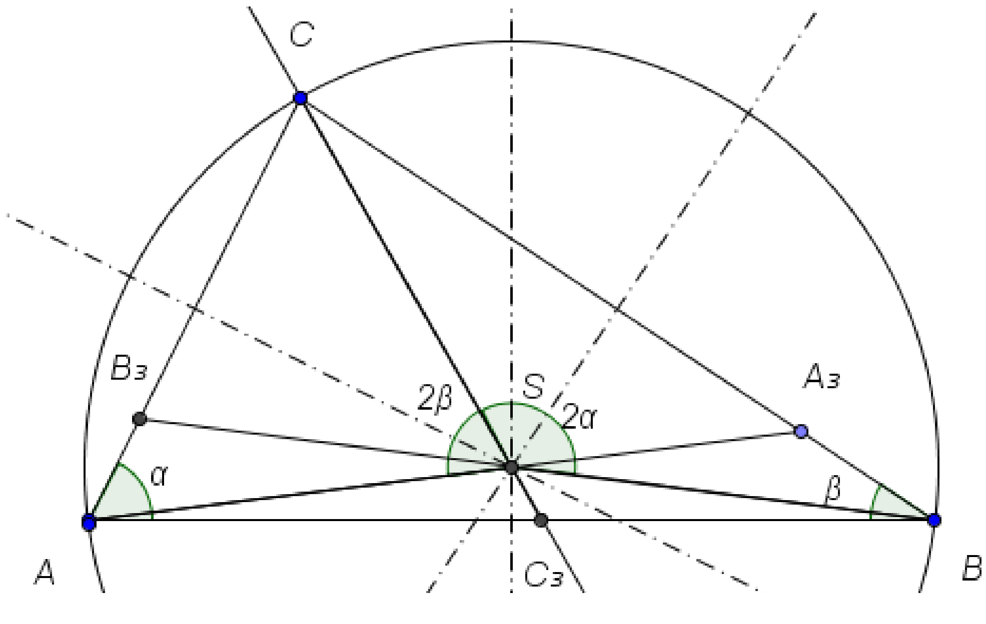
Analogicky jako v předchozím příkladu podle toho určíme hmotnosti ve vrcholech ΔABC hodnotami

$$m_1 = |BC|, \qquad m_2 = |AC|, \qquad m_3 = |AB|,$$

kde $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$ jsou délky stran trojúhelníku ABC [14, s. 8].

2.5 Střed kružnice trojúhelníku opsané

<u>**Příklad 6**</u> Určete hmotnosti m_1, m_2, m_3 připsané po řadě vrcholům trojúhelníku ABC tak, aby jeho těžiště bylo ve středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC.



Obr. 8

Řešení. Zjistíme, v jakém poměru jsou části úseček na stranách trojúhelníku, na které je dělí přímky procházející středem kružnice opsané a protějším vrcholem trojúhelníku ABC (obr. 8). Jelikož S je střed kružnice opsané, využijeme k výpočtům obvodového a středového úhlu. Úhel ASC je středovým úhlem k úhlu β, pro jeho velikost tedy platí $|\sphericalangle ASC| = 2\beta$. Trojúhelník ASC je navíc rovnoramenný, takže pro velikost úhlu platí $|\sphericalangle ACC_3| = \frac{180° - 2\beta}{2} = 90° - \beta$. Se znalostí těchto dvou úhlů můžeme k vyjádření délky strany AC_3 využít větu sinovou pro trojúhelník ACC_3:

$$\frac{|AC_3|}{|CC_3|} = \frac{\sin(90° - \beta)}{\sin\alpha} = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$$

Stejným způsobem si vyjádříme velikost strany BC_3 z trojúhelníku BCC_3:

$$\frac{|BC_3|}{|CC_3|} = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

Dáme obě rovnosti do poměru:

$$\frac{|BC_3|}{|CC_3|} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} = \frac{|AC_3|}{|CC_3|} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$$

$$|BC_3| \sin\beta \cos\beta = |AC_3| \sin\alpha \cos\alpha$$

$$|BC_3| \sin 2\beta = |AC_3| \sin 2\alpha$$

Je jasné, že délky zbývajících stran jsou děleny body A_3 a B_3 v poměrech závislých na dvojnásobku sinu vrcholových úhlů. Proto můžeme odvodit, že střed kružnice opsané bude těžištěm trojúhelníku ABC, jestliže jednotlivým vrcholům připíšeme následující hmotnosti:

$$m_1 = \sin 2\alpha, \qquad m_2 = \sin 2\beta, \qquad m_3 = \sin 2\gamma$$

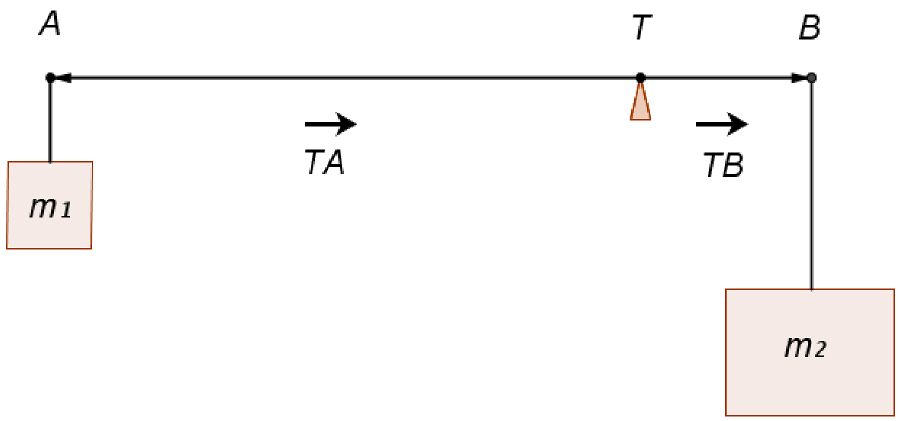
2.6 Soustava ohodnocených bodů v rovině

Nyní se od Archimedovy statiky posuneme k soustavám hmotných bodů, jak jsou definovány v geometrii. Zákony a axiómy, s nimiž se pracuje, jsou v obou systémech analogické. Zavedení pojmu soustava hmotných bodů nám umožní pracovat s úsečkami nejen jako se vzdálenostmi, ale i jako s vektory.

Než se začneme zabývat soustavami hmotných bodů, podívejme se podrobněji, jaký vztah je mezi těmito zákony a zákony, s nimiž pracoval Archimedes. Před chvílí jsme pracovali se vzorcem

$$m_1|AT| = m_2|BT|$$

vyjadřujícím rovnováhu na páce (obr. 9).



OBR. 9

Když chceme nyní pracovat s vektory, musíme připustit, že jsme se dopustili zjednodušení, protože jsme neuvažovali momenty sil opačného směru. Na páce ale ve skutečnosti momenty sil působí proti sobě, takže abychom dostali vektorovou rovnost, musíme předchozí rovnost upravit následujícím způsobem:

$$m_1\overrightarrow{AT} = -m_2\overrightarrow{BT}$$

Teď už lze rovnost převést do následujícího tvaru:

$$m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{o}$$

Nejprve se budeme zabývat soustavami hmotných bodů na přímce. Zavedeme systém ohodnocených bodů $(A,\ m_A)$ a $(B,\ m_B)$. Dvěma různým bodům A, B přiřadíme hodnoty m_A a m_B tak, že $m_A + m_B \neq 0$. Hodnoty m_A a m_B si sice nadále můžeme představovat jako síly či hmotnosti, budeme ale už schopni pracovat i se zápornými hodnotami. Záporná hodnota zde představuje sílu působící opačným směrem. Jestliže jsou tedy čísla m_A a m_B hmotnosti soustředěné v bodech A a B, pro dané ohodnocené body $(A,\ m_A)$ a $(B,\ m_B)$ existuje jednoznačně bod T, který je jejich těžištěm. Pro body $A,\ B,\ T$ platí již uvedená vektorová rovnost:

$$m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} = \vec{o}$$

Jelikož

$$\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AB},$$

je potom

$$(m_A + m_B)\,\overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{AB} = \vec{o},$$

a tedy

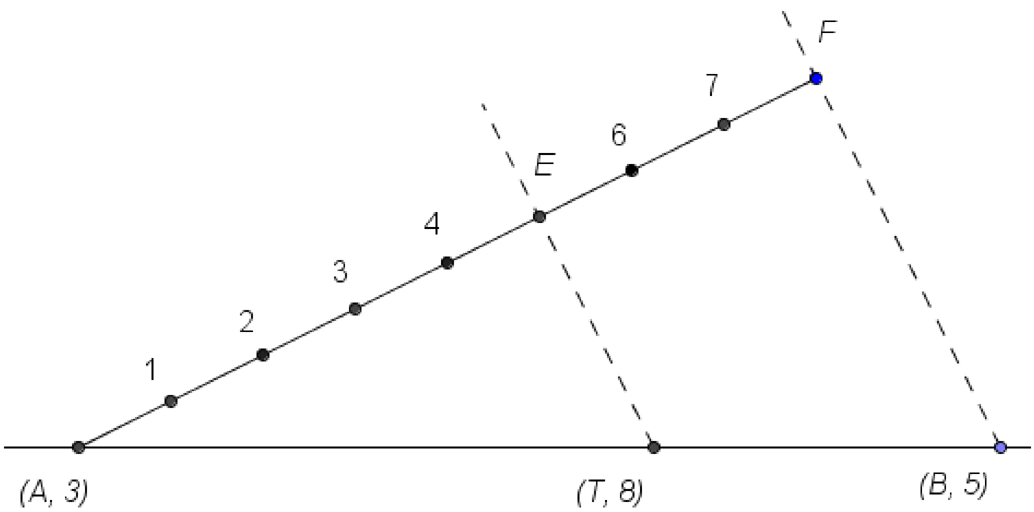
$$\overrightarrow{AT} = \frac{m_B}{m_A + m_B}\,\overrightarrow{AB}.$$

Pro hodnotu připsanou těžišti $(T,\ m_T)$ hmotných bodů $(A,\ m_A)$ a $(B,\ m_B)$ platí:

$$m_T = m_B + m_A$$

V následujícím příkladu si ukážeme, jak najít těžiště dvou hmotných bodů. Princip je stejný jako v Archimedově statice.

<u>**Příklad 7**</u> Sestrojte těžiště ohodnocených bodů $(A, 3)$ a $(B, 5)$.



Obr. 10

Řešení. Víme, že $m_T = 3 + 5 = 8$. Hmotnosti připsané bodům $(A,\ m_A)$ a $(B,\ m_B)$ jsou kladná čísla, těžiště dvou bodů bude ležet uvnitř úsečky AB a bude ji dělit v poměru $5 : 3$. Ke konstrukci těžiště využijeme znalost redukčního úhlu (obr. 10). Na libovolnou přímku procházející bodem A naneseme 8 stejných úseček. Bod F spojíme s bodem B. V bodě E sestrojíme rovnoběžku s přímkou FB. Bod T vznikne jako průnik této rovnoběžky s přímkou AB.

Odvození pro vektor $\overrightarrow{AT}$ tedy je:

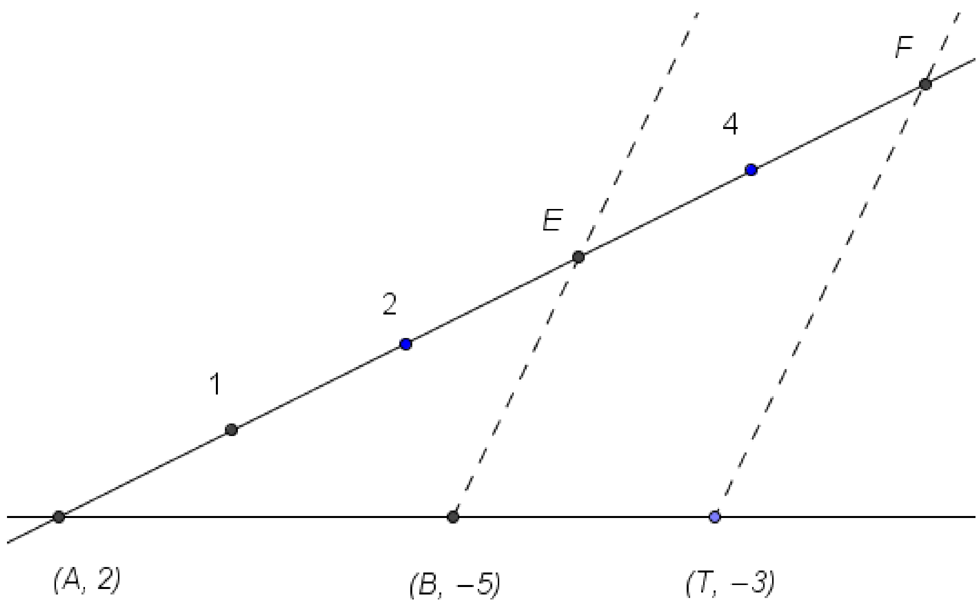
$$\overrightarrow{AT} = \frac{5}{3+5}\,\overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$$

Příklad 8 Sestrojte těžiště bodů $(A,\ 2)$ a $(B,\ -5)$.

Řešení. Při řešení budeme postupovat stejným způsobem, protože je ale hodnota připsaná bodu B záporná, bude výsledný bod T ležet vně úsečky AB, konkrétně na polopřímce $\overrightarrow{AB}$, protože pro absolutní hodnoty hmotností v bodech A, B platí $|m_{\mathrm{B}}| > |m_A|$ (obr. 11). Hmotnost připsaná těžišti je $m_T = -3$. K určenému poměru velikostí úseček $|AT| : |BT|$ využijeme následujícího vzorce:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{-5}{2-5}\,\overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

Těžiště zkonstruujeme pomocí redukčního úhlu jako v předchozím příkladu.



Obr. 11

3 Barycentrické souřadnice na přímce

Již jsme definovali těžiště dvou hmotných bodů, nyní se podíváme, co platí pro vztah libovolného bodu X k bodům A, B a těžišti T soustavy hmotných bodů [6, s. 1]:

$$m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} = \vec{o}$$

$$m_A\left(\overrightarrow{TX} + \overrightarrow{XA}\right) + m_B \left(\overrightarrow{TX} + \overrightarrow{XB}\right) = \vec{o}$$

$$m_A \overrightarrow{XA} + m_B \overrightarrow{XB} = (m_A + m_B) \overrightarrow{XT}$$

Nyní dokážeme, že zobrazení, které přiřadí dvěma ohodnoceným bodům jejich těžiště, je vzájemně jednoznačné. Předpokládejme, že $m_A \neq 0$. Potom podle poslední uvedené rovnosti platí, když dosadíme $X = A$:

$$m_A \overrightarrow{AA} + m_B \overrightarrow{AB} = (m_A + m_B) \overrightarrow{AT}$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{AB} = \frac{\frac{m_B}{m_A}}{\frac{m_A + m_B}{m_A}} \overrightarrow{AB} = \frac{t}{1+t} \overrightarrow{AB}, \text{ kde } t = \frac{m_B}{m_A}$$

Jestliže si výraz $\frac{t}{1+t}$ představíme jako předpis pro funkci, zjistíme, že $f(t) = \frac{t}{1+t}$ je lineární lomená funkce, jejímž grafem je hyperbola [6, s 2]. Toto zobrazení je vzájemně jednoznačné, proto můžeme říct, že pro všechna reálná čísla m_A, m_B různá od nuly existuje ke každému bodu X přímky p určené body A, B ohodnocení $\left(A,\ a_X\right)$ a $\left(B,\ b_X\right)$ takové, že s využitím předchozích rovností platí:

$$\overrightarrow{XT} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \overrightarrow{XA} + \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{XB}$$

Položíme-li $X = T$, dostaneme

$$\vec{o} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \overrightarrow{TA} + \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{TB}$$

Souřadnice bodu $X\left(a_X,\ b_X\right)$ tedy jsou:

$$a_x = \frac{m_A}{m_A + m_B}, \qquad b_X = \frac{m_B}{m_A + m_B} \text{ a je } \qquad a_X + b_X = 1$$

Souřadnice bodu $X(a_X, b_X)$ jsou zvoleny tak, že bod X je těžištěm bodů (A, a_X) a (B, b_X), proto můžeme psát:

$$a_X\overrightarrow{XA} + b_X\overrightarrow{XB} = \vec{o}$$

$$a_X(A - X) + b_X(B - X) = \vec{o}$$

$$a_XA + b_XB = (a_X + b_X)X \qquad a_X + b_X = 1$$

$$X = a_XA + b_XB$$

Dále můžeme odvodit, jak určit bod $X(a_X, b_X)$ pomocí bodu a vektoru:

$$X = a_XA + (1 - a_X)B$$

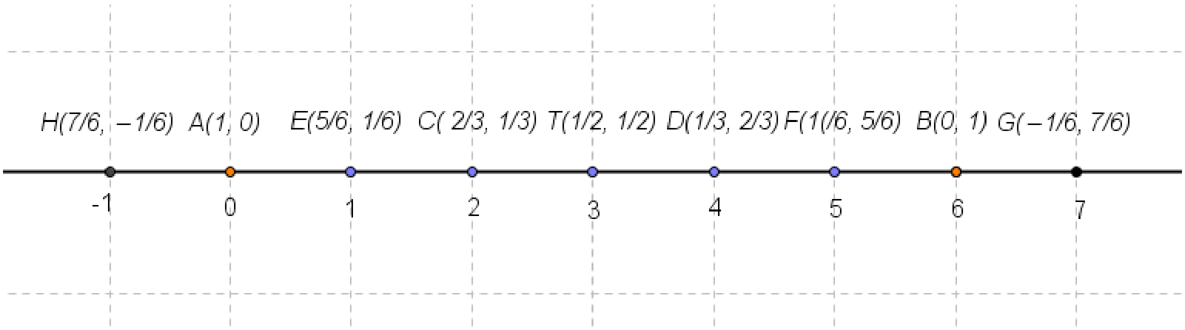
$$X = a_XA + B - a_XB$$

$$X = B + a_X(A - B)$$

$$X = B + a_X\overrightarrow{BA}$$

Obdobně můžeme odvodit:

$$X = A + b_X\overrightarrow{AB}$$



Obr. 12

Barycentrické souřadnice bodu X na přímce jsou určeny jednoznačně, jelikož je splněna podmínka $a_X + b_X = 1$. Díky této podmínce jsme také schopni určit polohu bodu na přímce i při znalosti pouze jedné souřadnicové složky. První souřadnice vyjadřuje poměr velikosti úsečky $|BX|$ k velikosti úsečky $|AB|$, za předpokladu, že velikost úsečky AB je $|AB| = 1$. Druhá souřadnice vyjadřuje poměr velikosti úsečky $|AX|$ k úsečce $|AB|$ za stejného předpokladu. Jestliže bod X leží vně úsečky AB na polopřímce AB, nabývá první souřadnice záporných hodnot. Když leží bod X vně úsečky AB na polopřímce BA, nabývá druhá souřadnice záporných hodnot. Leží-li bod X uvnitř úsečky AB, jsou obě souřadnice kladné. Pro názornost si hodnoty souřadnic můžeme představit jako kombinaci hodnot na dvou číselných osách, z nichž na první ose hodnoty zleva doprava klesají a na druhé z nich zleva doprava stoupají. Jejich součet je vždy konstantní. Pro všechny body X náležící úsečce AB nabývají souřadnice bodu X hodnot $0 \leq a_X \leq 1,\ 0 \leq b_X \leq 1$. Barycentrické souřadnice některých bodů vzhledem k úsečce AB jsou znázorněny na obr. 12.

Dále nás bude zajímat souvislost mezi kartézskými a barycentrickými souřadnicemi. Nechť $(A,\ m_A)$, $(B,\ m_B)$ jsou dva ohodnocené body a $A\left[a_x,\ a_y\right]$, $B\left[b_x,\ b_y\right]$ jsou jim příslušné hodnoty kartézských souřadnic. Pak těžiště ohodnocených bodů A, B má kartézské souřadnice [6, s. 4]:

$$T = \left(\frac{m_A\, a_x + m_B b_x}{m_A + m_B},\ \frac{m_A\, a_y + m_B b_y}{m_A + m_B}\right)$$

Tento vztah vyplyne z dalších úvah v rovině, kde se uvažuje obdobně. Jestliže známe barycentrické souřadnice těžiště $T(t_1,\ t_2)$ a kartézské souřadnice bodů $A\left[a_x,\ a_y\right]$, $B\left[b_x,\ b_y\right]$, pak kartézské souřadnice těžiště $T\left[t_x,\ t_y\right]$ jsou:

$$T = \left[t_1 a_x + t_2 b_x,\ t_1 a_y + t_2 b_y\right]$$

<u>Příklad 9</u> Jsou dány body $(A, -1)$ a $(B,\ 4)$, jejichž kartézské souřadnice jsou $A[-3,\ -2]$ a $B[6,\ 1]$. Najděte těžiště bodů T vzhledem k bodům A, B a určete jeho kartézské i barycentrické souřadnice.

Řešení. Barycentrické souřadnice těžiště jsou:

$$a_T = \frac{m_A}{m_A + m_B} = \frac{-1}{-1+4} = -\frac{1}{3}$$

$$b_T = \frac{m_B}{m_A + m_B} = \frac{4}{-1+4} = \frac{4}{3}$$

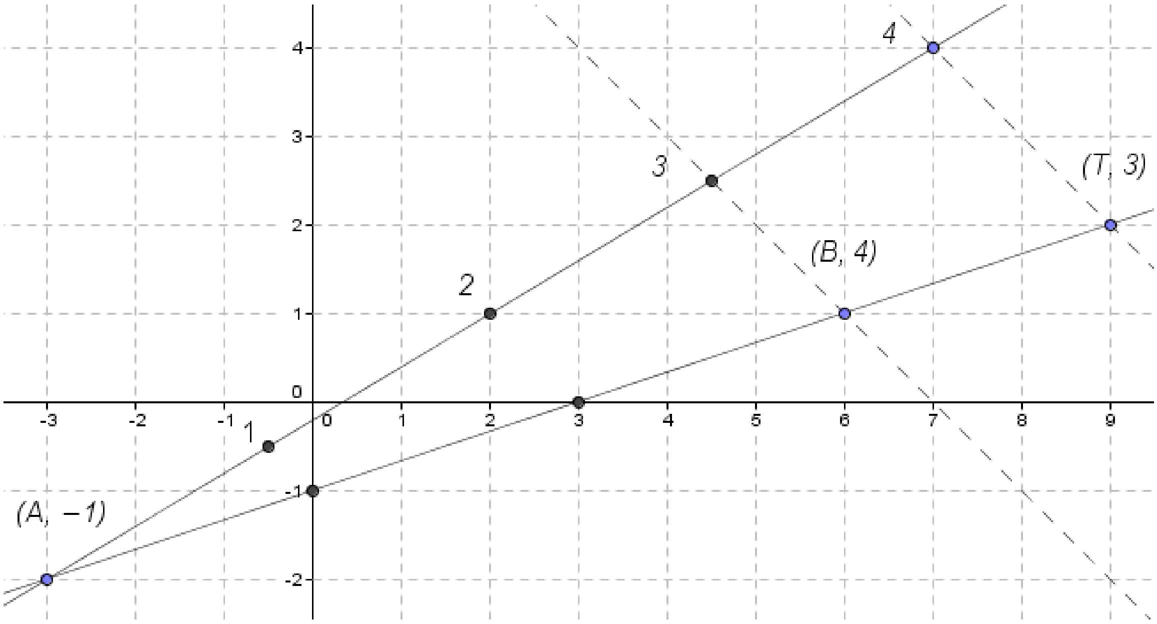
Pro kartézské souřadnice těžiště platí:

$$t_x = \frac{m_A a_x + m_B b_x}{m_A + m_B} = \frac{(-1)(-3) + 4 \cdot 6}{-1+4} = \frac{3+24}{3} = 9$$

$$t_y = \frac{m_A a_y + m_B b_y}{m_A + m_B} = \frac{(-1)(-2) + 4 \cdot 1}{-1+4} = \frac{2+4}{3} = 2$$

Těžiště zkonstruujeme pomocí znalosti redukčního úhlu (obr. 13).

Kartézské souřadnice těžiště jsou $T\,[9,\ 2]$, barycentrické souřadnice těžiště jsou $T\left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$.



Obr. 13

4 Barycentrické souřadnice v rovině

4.1 Definování barycentrických souřadnic v rovině

Uvedeme dvě definice barycentrických souřadnic v rovině. První proto, že vychází ze soustav hmotných bodů, které jsme si definovali, a druhou proto, že rovnosti v ní přímo obsažené nám lépe objasní některé vztahy a usnadní nám práci v barycentrických souřadnicích. Nechť jsou dány tři nekolineární body A, B, C v rovině. Pak analogicky jako na přímce platí [6, s. 9]:

$$m_A\overrightarrow{TA} + m_B\overrightarrow{TB} + m_C\overrightarrow{TC} = \vec{o},$$

tedy

$$(m_A + m_B + m_C)\overrightarrow{TA} + m_B\overrightarrow{AB} + m_C\overrightarrow{AC} = \vec{o}$$

$$\overrightarrow{AT} = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C}\overrightarrow{AB} + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C}\overrightarrow{AC}$$

Zaveďme si ještě pojem normované barycentrické souřadnice v rovině.

Nechť je dán trojúhelník ABC a čísla p_1, p_2, p_3 tak, že $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Pak symbolem $P(p_1, p_2, p_3)$ označíme bod:

$$P(p_1, p_2, p_3) = p_1 A + p_2 B + p_3 C = (p_1 + p_2 + p_3)A + p_2(B - A) + p_3(C - A)$$

$$P(p_1, p_2, p_3) = A + p_2(B - A) + p_3(C - A)$$

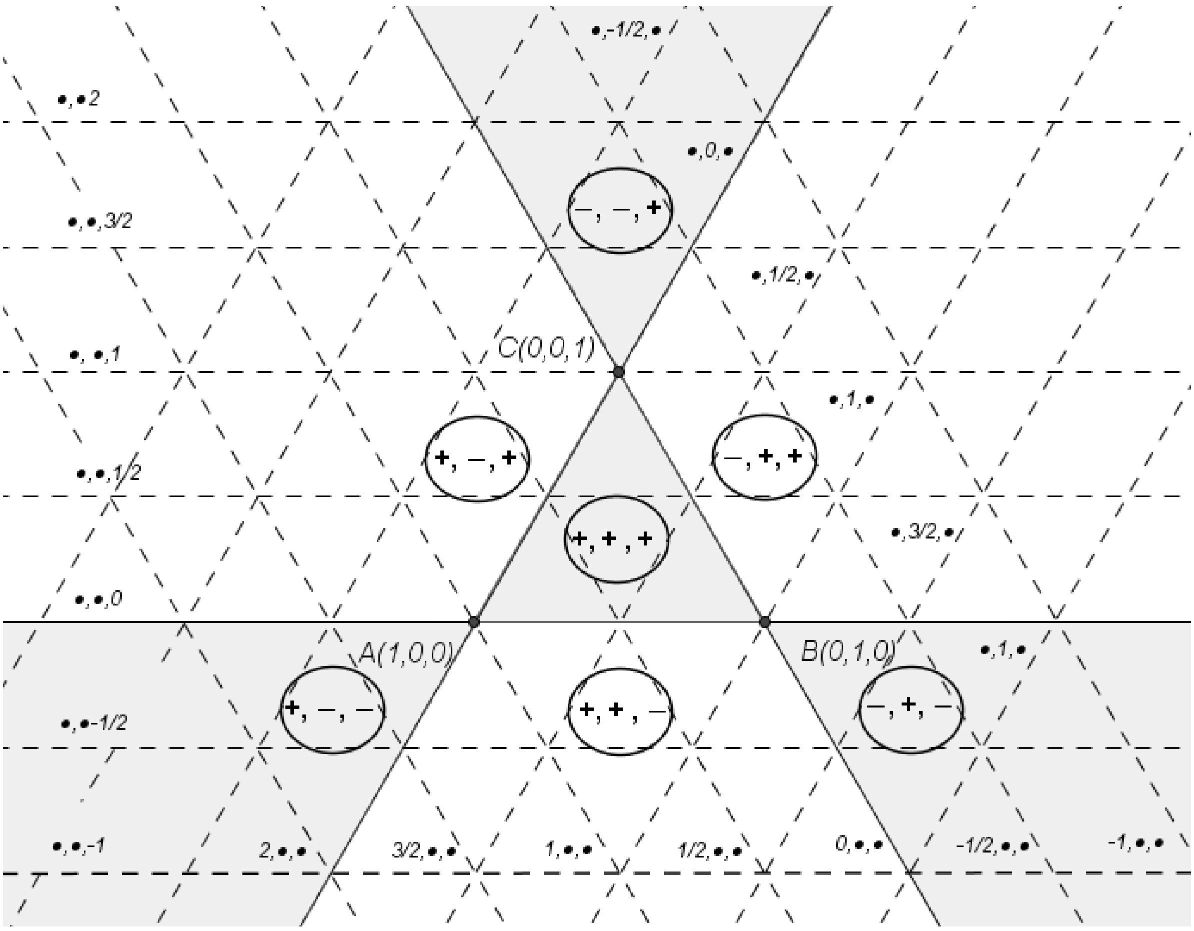
Trojici (p_1, p_2, p_3) nazveme barycentrickými souřadnicemi bodu P vzhledem k trojúhelníku ABC [4, s. 422].

4.2 Určení polohy bodu v barycentrických souřadnicích

Barycentrické souřadnice vrcholů vztažného trojúhelníku ABC zde budeme nadále volit jako

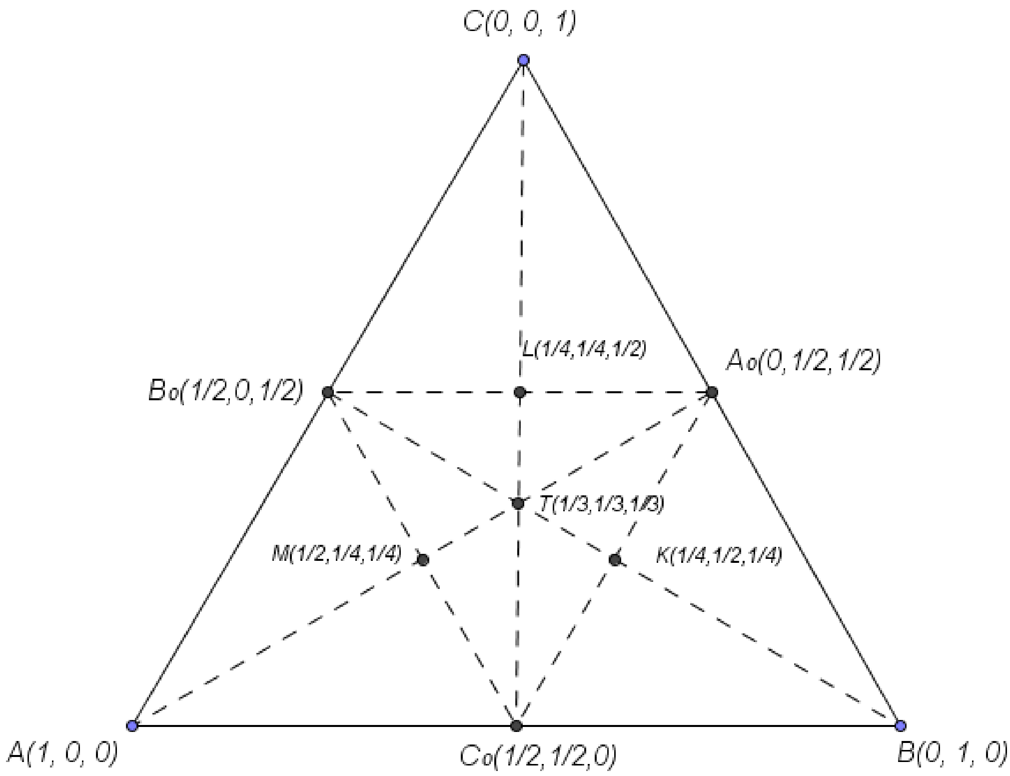
$$A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1).$$

Souřadnice bodů uvnitř trojúhelníku budou kladné. Body ležící na přímkách AB, BC, AC mají vždy jednu souřadnici nulovou. Přímky AB, BC, AC dělí rovinu na sedm oblastí. Pro každou z těchto oblastí platí, že body, které v ní leží, mají



•,-1/2,•
•,•2
•,0,•
–, –, +
•,•,3/2
•,1/2,•
•, •,1
C(0,0,1)
•,1,•
+, –, +
–, +, +
•,•,1/2
+, + , +
•,3/2,•
•,•,0
A(1,0,0)
B(0,1,0)
•,1,•
+, –, –
+, + , –
–, +, –
•,•-1/2
•,•,-1
2,•,•
3/2,•,•
1,•,•
1/2,•,•
0,•,•
-1/2,•,•
-1,•,•

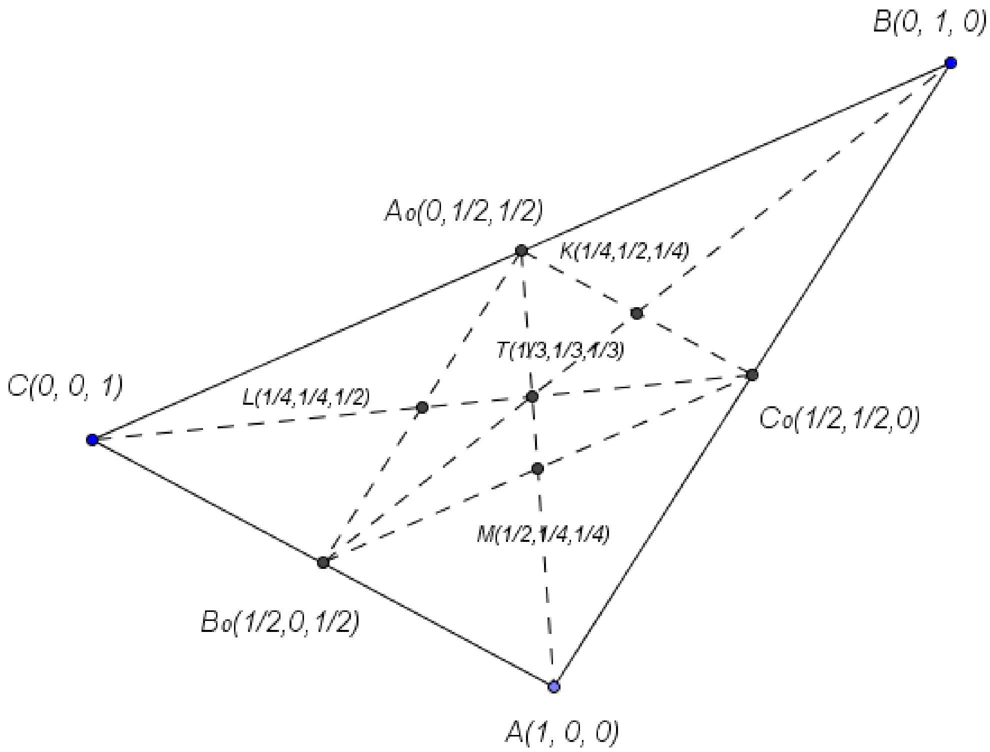
Obr. 14



C(0, 0, 1)
L(1/4,1/4,1/2)
Bo(1/2,0,1/2)
Ao(0,1/2,1/2)
T(1/3,1/3,1/3)
M(1/2,1/4,1/4)
K(1/4,1/2,1/4)
A(1, 0, 0)
Co(1/2,1/2,0)
B(0, 1, 0)

Obr. 15

stejné rozložení kladných a záporných souřadnic. Toho si můžeme všimnout na obr. 14, kde je vždy označena jedna souřadnice, společná všem bodům ležícím na některé z přímek rovnoběžných s přímkami AB, BC, AC. Nezapomeňme, že pro souřadnice libovolného bodu $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$ platí vztah $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Známe-li tedy dvě souřadnice bodu, třetí můžeme dopočítat. Obr. 15 znázorňuje barycentrické souřadnice některých bodů v rovnostranném trojúhelníku. Na obr. 16 vidíme obdobnou situaci v obecném trojúhelníku.



OBR. 16

Příklad 10 Je dán vztažný trojúhelník ABC tak, že $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$. Sestrojte body D, E, F, G, H, I, J, které jsou dány svými barycentrickými souřadnicemi:

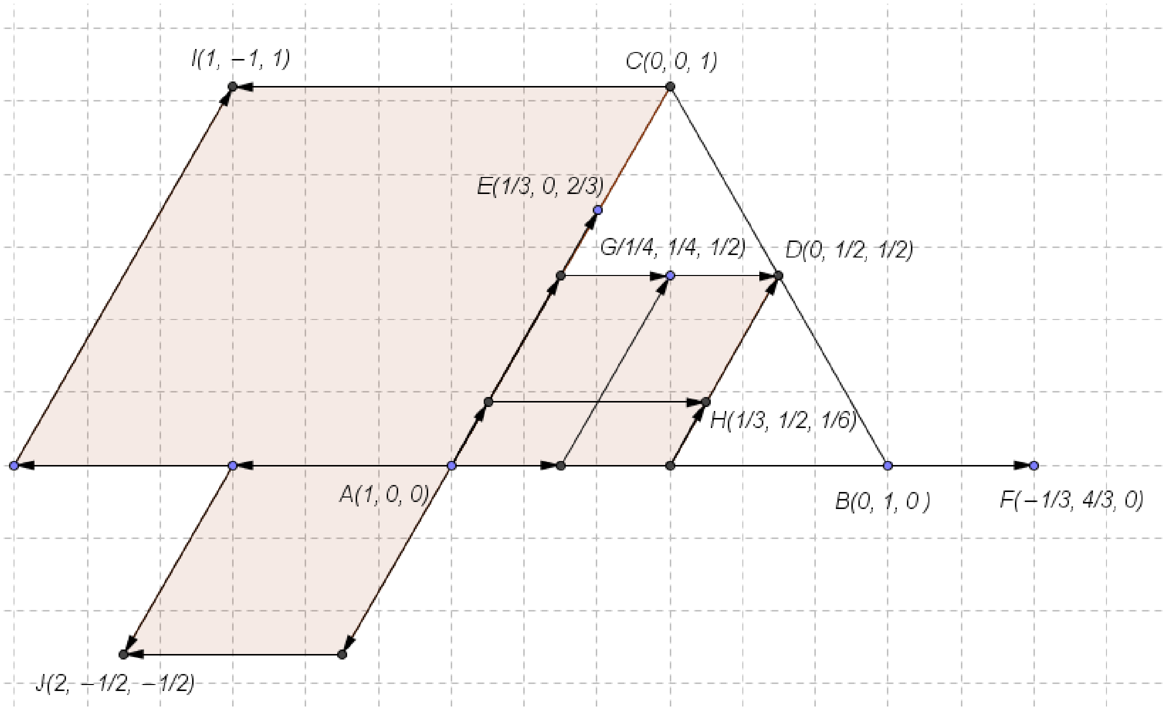
$$D(0,\ 1/2,\ 1/2),\ E(1/3,\ 0,\ 2/3),\ F(-1/3,\ 4/3,\ 0),\ G(1/4,\ 1/4,\ 1/2),$$

$$H(1/3,\ 1/2,\ 1/6),\ I(1,\ -1,\ 1),\ J(2,\ -1/2,\ -1/2).$$

Řešení. Body sestrojíme pomocí sčítání vektorů. Jestliže má bod X barycetrické souřadnice $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, pak pro bod X platí:

$$X = A + x_2\overrightarrow{AB} + x_3\,\overrightarrow{AC}$$

Polohu každého bodu, jehož barycentrické souřadnice známe, můžeme určit skládáním násobků vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ s počátkem v bodě A. K určení polohy bodu ale můžeme použít i např. vektory $\overrightarrow{BA}$ a $\overrightarrow{BC}$ s výchozím bodem B. Takže platí (obr. 17):



Obr. 17

$D = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, bod D je střed strany BC

$E = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, bod E dělí stranu AC v poměru 2 : 1

$F = A + \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$, bod F leží na přímce AB, dělící poměr je $(ABF)= 4$

$G = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, bod G leží na těžnici na stranu AB

$H = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$, bod H leží uvnitř trojúhelníku ABC

$I = A - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, bod I vznikne přičtením vektoru $\overrightarrow{BC}$ k bodu A

$J = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, bod J vznikne přičtením vektoru $\overrightarrow{DA}$ k bodu A

Barycentrické souřadnice bodu $P(p_1, p_2, p_3)$ v trojúhelníku ABC se dají též vyjádřit pomocí obsahů určitých trojúhelníků. Platí [6, s. 15]:

$$p_1 = \frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_2 = \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_3 = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}$$

Tato vlastnost barycentrických souřadnic má řadu způsobů využití. My si v následujících úlohách například ukážeme, jak lze obecně určit barycentrické souřadnice některých významných bodů v trojúhelníku. Důsledkem této vlastnosti je třeba i to, že těžiště každého obecného trojúhelníku dělí tento trojúhelník na tři trojúhelníky o stejném obsahu. V jednorozměrném prostoru vyjadřují barycentrické souřadnice poměr vzdáleností a v trojrozměrném prostoru poměr objemů čtyřstěnů, na který dělí vztažný simplex. Barycentrickým souřadnicím se také proto někdy říká plošné.

Důkaz tohoto tvrzení lze provést různými způsoby. V jednom z důkazů budeme pracovat s kartézskými souřadnicemi bodů A, B, C, P a budeme je značit $A[a_x, a_y]$ atd. [10, s. 84]. Důkaz provedeme jen pro případ, kdy P leží uvnitř trojúhelníku ABC; je to proto, abychom nemuseli hledět na znaménko determinantu. Při znalosti kartézských souřadnic bodů A, B, C můžeme obsah trojúhelníku spočítat podle následujícího vzorce:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Z definice barycentrických souřadnic platí:

$$P = p_1 A + p_2 B + p_3 C$$

Tento vztah můžeme napsat v kartézských souřadnicích po složkách:

$$p_x = p_1\, a_x + p_2 b_x + p_3 c_x$$

$$p_y = p_1\, a_y + p_2 b_y + p_3 c_y$$

Dále víme, že platí:

$$1 = p_1 + p_2 + p_3$$

Nyní můžeme do následujících vzorců dosadit a dostaneme:

$$p_1 = \frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_2 = \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_3 = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} p_x & b_x & c_x \\ p_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad p_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_x & p_x & c_x \\ a_y & p_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}, \qquad p_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_x & b_x & p_x \\ a_y & b_y & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Je tedy:

$$P = \frac{\begin{vmatrix} p_x & b_x & c_x \\ p_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} A + \frac{\begin{vmatrix} a_x & p_x & c_x \\ a_y & p_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} B + \frac{\begin{vmatrix} a_x & b_x & p_x \\ a_y & b_y & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} C$$

Nyní ze znalosti Cramerova pravidla vyplývá, že jednotlivé podíly determinantů ve výše sestavené rovnici jsou řešením následující soustavy rovnic:

$$a_x p_1 + b_x p_2 + c_x p_3 = p_x$$

$$a_y p_1 + b_y p_2 + c_y p_3 = p_y$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

Z toho plyne, že neznámé p_1, p_2, p_3 jsou hledanými barycentrickými souřadnicemi bodu *P*, a zároveň je dokázáno, že tyto souřadnice vyjadřují poměry obsahů trojúhelníků:

$$p_1 = \frac{S_{\Delta BCP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_2 = \frac{S_{\Delta ACP}}{S_{\Delta ABC}}, \qquad p_3 = \frac{S_{\Delta ABP}}{S_{\Delta ABC}}$$

Důkaz můžeme provést ještě jiným způsobem [6, s. 15]. Využijeme k tomu průsečík přímky *CP* a přímky *AB*, který označíme *D*. Následně napíšeme parametrické vyjádření přímky *DP*, které bude odvozeno dále v textu:

$$x_1 = (1-t)d_1 + tp_1$$

$$x_2 = (1-t)d_2 + tp_2$$

$$x_3 = tp_3$$

Bod C leží na přímce DP, dosadíme tedy jeho souřadnice do parametrického vyjádření přímky DP a obdržíme:

$$0 = (1 - t)d_1 + tp_1$$

$$0 = (1 - t)d_2 + tp_2$$

$$1 = tp_3$$

$$t = \frac{1}{p_3}$$

Dosazením za t do prvních dvou rovnic dostaneme:

$$d_1 = \frac{p_1}{1 - p_3}, \qquad d_2 = \frac{p_2}{1 - p_3}$$

Potom platí:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

A dále platí:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{|DB|}{|AD|} = \frac{S_{DBC}}{S_{ADC}} = \frac{S_{DBP}}{S_{ADP}} = \frac{S_{DBC} - S_{DBP}}{S_{ADC} - S_{ADP}} = \frac{S_{PBC}}{S_{APC}}$$

Analogicky odvodíme:

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{S_{ACP}}{S_{ABP}}, \qquad \frac{p_3}{p_1} = \frac{S_{ABP}}{S_{PBC}}$$

Jelikož platí $S_{BCP} + S_{ACP} + S_{ABP} = S_{ABC}$, pak platí i:

$$p_1 = \frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}, \qquad p_2 = \frac{S_{ACP}}{S_{ABC}}, \qquad p_3 = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}$$

Platnost tohoto tvrzení můžeme využít v následujícím příkladu.

Příklad 11 Jsou dány body A, B, C, P a jejich kartézské souřadnice $A[-2,\ 0]$, $B[11,\ 0]$, $C[9,\ 5]$, $P[3,\ 2]$. Zjistěte barycentrické souřadnice bodu P vzhledem ke vztažnému trojúhelníku ABC, jehož barycentrické souřadnice jsou $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$.

Řešení. Souřadnice bodu P budeme zjišťovat pomocí obsahů trojúhelníků, na který dělí bod P trojúhelník ABC:

$$S_{BCP} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 11 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(3\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 9 + 1\cdot 11\cdot 5) - (9\cdot 1 + 5\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 11\cdot 2)}{2} =$$

$$S_{BCP} = \frac{73-37}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$S_{ACP} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-4+15-(18-10)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^5(-2-11) = 13$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 11 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot(-1)^5(-2-11) = \frac{65}{2}$$

Pak barycentrické souřadnice bodu $P(p_1,\ p_2\,,\ p_3)$ jsou:

$$p_1 = \frac{18}{\frac{65}{2}} = \frac{36}{65}, \qquad p_2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{65}{2}} = \frac{3}{65}, \qquad p_3 = \frac{13}{\frac{65}{2}} = \frac{26}{65}$$

Ještě ověříme, že:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\frac{36+3+26}{65} = \frac{65}{65} = 1$$

Bod P má tedy barycentické souřadnice $P\left(\frac{36}{65},\ \frac{3}{65},\ \frac{26}{65}\right)$.

Ze znalosti výše uvedeného tvrzení můžeme odvodit barycentrické souřadnice mnoha významných bodů v trojúhelníku tak, že vyjádříme obsahy trojúhelníků, na něž daný bod dělí vztažný trojúhelník ABC, pomocí délek stran, případně velikostí úhlů v trojúhelníku ABC, jak ukážeme v následujících příkladech.

4.3 Barycentrické souřadnice významných bodů v trojúhelníku

Příklad 12 Napiště barycentrické souřadnice ortocentra V a pat výšek trojúhelníku ABC, kde $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$ jsou barycentrické souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC.

Řešení. Jsou-li A_1, B_1, C_1 paty výšek ΔABC, tak jsme v příkladu 4 dokázali, že $|AC_1| : |C_1B| = \mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,\beta$, $|BA_1| : |CA_1| = \mathrm{tg}\,\beta : \mathrm{tg}\,\gamma$ a $|AB_1| : |CB_1| = \mathrm{tg}\,\alpha : \mathrm{tg}\,\gamma$ (obr. 6). Pro ortocentrum V zároveň platí:

$$|CV| : |C_1 V| = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta\,) : \mathrm{tg}\,\gamma$$

Analogicky je:

$$|AV| : |A_1 V| = (\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma\,) : \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$|BV| : |B_1 V| = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\gamma\,) : \mathrm{tg}\,\beta$$

Z toho plyne:

$$|A_1A| : |A_1 V| = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma\,) : \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$|B_1B| : |B_1 V| = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma) : \mathrm{tg}\,\beta$$

$$|C_1C| : |C_1 V| = (\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma) : \mathrm{tg}\,\gamma$$

Barycentrické souřadnice ortocentra můžeme odvodit s obsahů trojúhelníků ABV, BCV, ACV a ABC, protože víme, že platí:

$$V = \left(\frac{\mathrm{S}_{BCV}}{\mathrm{S}_{ABC}},\ \frac{\mathrm{S}_{ACV}}{\mathrm{S}_{ABC}},\ \frac{\mathrm{S}_{ABV}}{\mathrm{S}_{ABC}}\right)$$

Po dosazení:

$$V = \left(\frac{|\mathrm{BC}| \cdot |A_1V|}{|\mathrm{BC}| \cdot |A_1A|},\ \frac{|\mathrm{AC}| \cdot |B_1V|}{|\mathrm{AC}| \cdot |B_1B|},\ \frac{|\mathrm{AB}| \cdot |C_1V|}{|\mathrm{AB}| \cdot |C_1C|}\right)$$

$$V = \left(\frac{|A_1V|}{|A_1A|},\ \frac{|B_1V|}{|B_1B|},\ \frac{|C_1V|}{|C_1C|}\right)$$

Ze vztahů odvozených výše můžeme psát:

$$V = \left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma},\ \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma},\ \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma}\right)$$

Dále můžeme odvodit barycentrické souřadnice bodů A_1, B_1, C_1 :

$$A_1 = \left(0,\ \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma},\ \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma}\right)$$

$$B_1 = \left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + tg\,\gamma},\ 0,\ \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\gamma}\right)$$

$$C_1 = \left(\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta},\ \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta},\ 0\right)$$

Příklad 13 Napiště barycentrické souřadnice středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC, kde $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$ jsou barycentrické souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC.

Řešení. Souřadnice středu kružnice opsané (obr. 8) můžeme nejsnáze odvodit pomocí známých vzorců pro výpočty obsahů trojúhelníku.

$$S_{BCS} = \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}$$

$$S_{ACS} = \frac{r^2 \sin 2\beta}{2}$$

$$S_{ABS} = \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4r} = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

Pro barycentrické souřadnice středu kružnice opsané S potom platí:

$$s_1 = \frac{\frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}}{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha}{4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{cos\alpha}{2 \sin\beta \sin\gamma}$$

$$s_2 = \frac{\frac{r^2 \sin 2\beta}{2}}{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{2 \sin\beta \cos\beta}{4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{\cos\beta}{2 \sin\alpha \sin\gamma}$$

$$s_3 = \frac{\frac{r^2 \sin\alpha 2\gamma}{2}}{2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{2 \sin\gamma \cos\gamma}{4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma} = \frac{\cos\gamma}{2 \sin\alpha \sin\beta}$$

Střed kružnice opsané S má tedy souřadnice:

$$S\left(\frac{\cos\alpha}{2 \sin\beta \sin\gamma}, \frac{\cos\beta}{2 \sin\alpha \sin\gamma}, \frac{\cos\gamma}{2 \sin\alpha \sin\beta}\right)$$

Příklad 14 Napište barycentrické souřadnice středu O kružnice vepsané trojúhelníku ABC, kde $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$ jsou barycentrické souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC.

Řešení. Stejně jako v předchozím příkladu odvodíme jednotlivé složky souřadnic bodu O pomocí vzorců pro obsah trojúhelníku ABC. Obsah trojúhelníku BCO, vypočítáme díky znalosti výšky, která se rovná poloměru kružnice vepsané.

Budeme značit poloměr kružnice vepsané ρ, $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ (obr. 7). Potom:

$$S_{BCO} = \frac{a\rho}{2}, \qquad S_{ACO} = \frac{b\rho}{2}, \qquad S_{ABO} = \frac{c\rho}{2}$$

$$S_{ABC} = s\,\rho = \frac{(a+b+c)\rho}{2}$$

Nyní už umíme zapsat střed kružnice vepsané v barycentrických souřadnicích:

$$O\left(\frac{a}{a+b+c}, \ \frac{b}{a+b+c}, \ \frac{c}{a+b+c}\right)$$

4.4 Transformace kartézských souřadnic na barycentrické souřadnice

Nyní odvodíme vztah, díky němuž můžeme získat barycentrické souřadnice libovolného bodu $P(p_1, \ p_2, \ p_3)$ vzhledem k trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že známe kartézské souřadnice bodů $A[a_x, \ b_y]$, $B[b_x, \ b_y]$, $C[c_x, \ c_y]$ a $P[p_x, \ p_y]$. Tedy [18]:

$$p_x = p_1 a_x + p_2 b_x + p_3 c_x$$

$$p_y = p_1 a_y + p_2 b_y + p_3 c_y$$

Nyní využijeme vztahu $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ a dostaneme:

$$p_x = p_1 a_x + p_2 b_x + (1 - p_1 - p_2) c_x$$

$$p_y = p_1 a_y + p_2 b_y + (1 - p_1 - p_2) c_y$$

Dále platí:

$$p_1(a_x - c_x) + p_2(b_x - c_x) + c_x - p_x = 0$$

$$p_1(a_y - c_y) + p_2(b_y - c_y) + c_y - p_y = 0$$

Z toho odvodíme:

$$T \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = P - C, \ \text{kde} \qquad T = \begin{pmatrix} a_x - c_x & b_x - c_x \\ a_y - c_y & b_y - c_y \end{pmatrix}$$

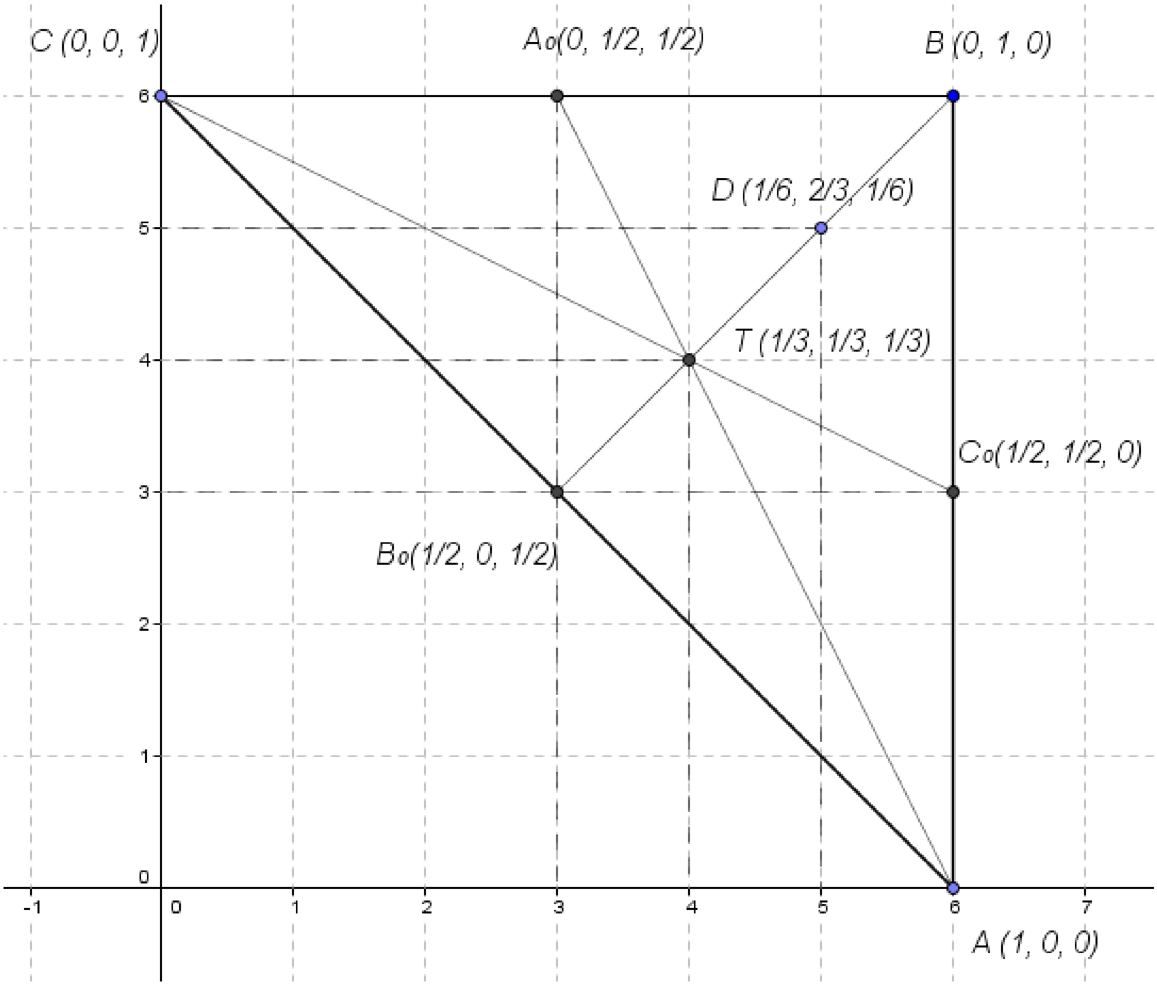
Tedy:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot (P - C), \qquad \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_x - c_x \\ p_y - c_y \end{pmatrix}$$

Je dán trojúhelník ABC, kde $A[6,\ 0]$, $B[6,\ 6]$, $C[0,\ 6]$ jsou kartézské souřadnice bodů A, B, C.

a) Určete barycentrické souřadnice středů stran AB, BC a AC a souřadnice bodu $D[5,\ 5]$ vzhledem k trojúhelníku ABC.

b) Spočítejte kartézské souřadnice těžiště trojúhelníku ABC.



OBR. 18

Řešení.

a) Nejdřív spočítáme barycentrické souřadnice středů stran:

$$C_0\,[6,\ 3],\ A_0\,[3,\ 6],\ B_0\,[3,\ 3] \text{ a bodu } D[5,\ 5] \text{ (obr. 18).}$$

Pro bod libovolný bod $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$ použijeme vzorce:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p_x - c_x \\ p_y - c_y \end{pmatrix}$$

Tedy konkrétně:

$$T = \begin{pmatrix} 6-0 & 6-0 \\ 0-6 & 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{36} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Barycentrické souřadnice bodu $C_0\,[6,\ 3]$ dostaneme z rovnosti:

$$\begin{pmatrix} c_{01} \\ c_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-0 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$c_{03} = 1 - 1/2 - 1/2 = 0$$

Bod C_0 má barycentrické souřadnice $C_0\,(1/2,\ 1/2,\ 0)$.

Analogicky počítejme pro bod A_0:

$$\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$a_{03} = 1 - 1/2 = 1/2$$

Bod A_0 má barycentrické souřadnice $A_0\,(0,\ 1/2,\ 1/2)$.

Stejně pro bod B_0:

$$\begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{03} = 1 - 1/2 = 1/2$$

Bod B_0 má barycentrické souřadnice $B_0\left(1/2,\ 0,\ 1/2\right)$.

A ještě pro bod D:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/6 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{d}_3 = 1 - 1/6 - 4/6 = 1/6$$

Bod D má barycentrické souřadnice $D\left(1/6,\ 2/3,\ 1/6\right)$.

b) Ještě zbývá spočítat kartézské souřadnice bodu $T\left(1/3,\ 1/3,\ 1/3\right)$. Ty vypočítáme ze vztahu (obr. 18):

$$\begin{pmatrix} t_x - c_x \\ t_y - c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_x - 0 \\ t_y - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$t_x = 2 + 2 = 4$$

$$t_y - 6 = -2$$

$$t_y = 4$$

Těžiště má tedy kartézské souřadnice $T[4,\ 4]$.

4.5 Přímka v rovině v barycentrických souřadnicích

Budeme se zabývat trojím způsobem vyjádření přímky v barycentrických souřadnicích, a to vyjádřením v parametrickém tvaru, v obecném tvaru a ve tvaru determinantu.

a) Parametrické vyjádření přímky v barycentrických souřadnicích

Nechť je dána přímka p a body P a Q, které leží na přímce p. Dále známe barycentrické souřadnice bodů $P(p_1,\ p_2,\ p_3)$ a $Q(q_1,\ q_2,\ q_3)$. Nechť $X \in p$, pak $\exists\ t \in \mathbb{R}$ tak, že platí [6, s. 13]:

$$x_1 = (1 - t)p_1 + tq_1$$

$$x_2 = (1 - t)p_2 + tq_2$$

$$x_3 = (1 - t)p_3 + tq_3$$

Od tohoto značení můžeme přejít k více obvyklému tvaru:

$$x = (1 - t)p_1 + tq_1$$

$$y = (1 - t)p_2 + tq_2$$

$$z = (1 - t)p_3 + tq_3$$

Důkaz může probíhat např. takto:

$$\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}$$

$$X - P = t(Q - P)$$

$$X = P + t(Q - P)$$

$$X = (1 - t)P + tQ$$

Proto je:

$$x_1 = (1-t)p_1 + tq_1$$

$$x_2 = (1-t)p_2 + tq_2$$

$$x_3 = (1-t)p_3 + tq_3$$

b) Přímka v obecném tvaru v barycentrických souřadnicích

Normovaný tvar obecné rovnice je následující:

$$ax + by + cz = 0$$

kde $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{t,\ t,\ t\};\ t \in \mathbb{R}$

Protože zároveň platí

$$x + y + z = 1,$$

můžeme obecnou rovnici přímky upravit tak, aby neobsahovala x, y nebo z následující úpravou:

$$\begin{array}{rl} ax + by + cz = 0 & \\ \underline{\quad x + y + z = 1\quad} & /(-c) \\ (a-c)x + (b-c)y \ = \ -c & \end{array}$$

tedy:

$$dx + ey \ = \ f, \qquad \text{kde} \qquad d,\ e,\ f\ \in \mathbb{R}$$

Při důkazu tohoto tvrzení vyjdeme z parametrického vyjádření přímky a odvodíme z něho obecnou rovnici přímky:

$$x = (1-t)p_1 + tq_1$$

$$y = (1-t)p_2 + tq_2$$

$$z = (1-t)p_3 + tq_3$$

Z první rovnice vyjádříme t:

$$t = \frac{x - p_1}{q_1 - p_1}$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$y = \left(1 - \frac{x - p_1}{q_1 - p_1}\right) \cdot p_2 + \frac{x - p_1}{q_1 - p_1} \cdot q_2$$

$$y = \frac{q_1 - p_1 - x + p_1}{q_1 - p_1} \cdot p_2 + \frac{x - p_1}{q_1 - p_1} \cdot q_2$$

$$(q_1 - p_1)y = (q_1 - x)p_2 + (x - p_1)q_2$$

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y = p_2 q_1 - p_1 q_2$$

Můžeme tedy psát:

$$dx + ey = f, \qquad \text{kde} \qquad d, e, f \in \mathbb{R}$$

To je obecná rovnice přímky. Zároveň pomocí parametrického vyjádření přímky dokážeme, že obecná rovnice přímky s nenulovými koeficienty u libovolných dvou proměnných je ekvivalentní s rovnicí přímky vyjádřenou pomocí jiné dvojice proměnných:

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y = p_2 q_1 - p_1 q_2$$

$$(p_3 - q_3)x + (q_1 - p_1)z = p_3 q_1 - p_1 q_3$$

Protože platí rovnosti

$$x + y + z = 1, \qquad p_1 + p_2 + p_3 = 1, \qquad q_1 + q_2 + q_3 = 1,$$

můžeme dále upravovat:

$$(p_3 - q_3)x + (q_1 - p_1)(1 - x - y) = (1 - p_1 - p_2)q_1 - p_1(1 - q_1 - q_2)$$

$$(p_1 + p_3 - q_1 - q_3)x + (p_1 - q_1)y - p_1 + q_1 = q_1 - p_1 q_1 - p_2 q_1 - p_1 + p_1 q_1 + p_1 q_2$$

$$(1 - p_2 - p_3 + p_3 - 1 + q_2 + q_3 - q_3)x + (p_1 - q_1)y = -(p_2 q_1 - p_1 q_2) \ / (-1)$$

$$(p_2 - q_2)x + (q_1 - p_1)y = p_2 q_1 - p_1 q_2$$

Analogicky lze odvodit i obecnou rovnici přímky s nenulovými koeficienty u proměnných y, z. Touto úpravou jsme dokázali, že obecné rovnice přímky vyjádřené pomocí libovolných dvou proměnných jsou navzájem ekvivalentní.

Z parametrického vyjádření přímky můžeme snadno dostat obecnou rovnici přímky tak, že si za libovolnou proměnnou dosadíme parametr. Např. přímka

$$2x + y = 5$$

lze převést na tvar:

$$x = t$$

$$y = 5 - 2t$$

$$z = 1 - x - y = 1 - t - 5 + 2t = -4 + t$$

c) Přímka ve tvaru determinantu v barycentrických souřadnicích

Pro tři body A, B, X ležící na přímce platí:

$$\frac{a_1 - x_1}{b_1 - x_1} = \frac{a_2 - x_2}{b_2 - x_2} = \frac{a_3 - x_3}{b_3 - x_3}$$

Jinými slovy vektory $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BX}$ jsou lineárně závislé. Potom bude matice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ singulární, tedy její determinant bude roven nule, proto přímku ve tvaru determinantu zapíšeme následujícím způsobem [4, s. 436]:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

Jak je vidět, z tohoto tvaru přímky lze snadno odvodit rovnici přímky v obecném tvaru např. pomocí Sarrusova pravidla. Dostaneme rovnici přímky ve tvaru:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0$$

Zároveň pro každý bod platí $x + y + z = 1$, proto se často setkáme s rovnicemi přímek, ve kterých se vyskytují jen dvě ze tří proměnných x, y, z, jak již bylo zmíněno v minulém odstavci.

Příklad 15 Je dán vztažný trojúhelník ABC tak, že $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(0,\ 0,\ 1)$, a dále body

$D(-1,\ 1,\ 1)$, $E(-1,\ 2,\ 0)$, $F(1,\ 1,\ -1)$, $G(1,\ -1,\ 1)$, $H\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$,

$I\left(\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{2}\right)$, bod C_0 je střed úsečky AB a B_0 je střed úsečky AC.

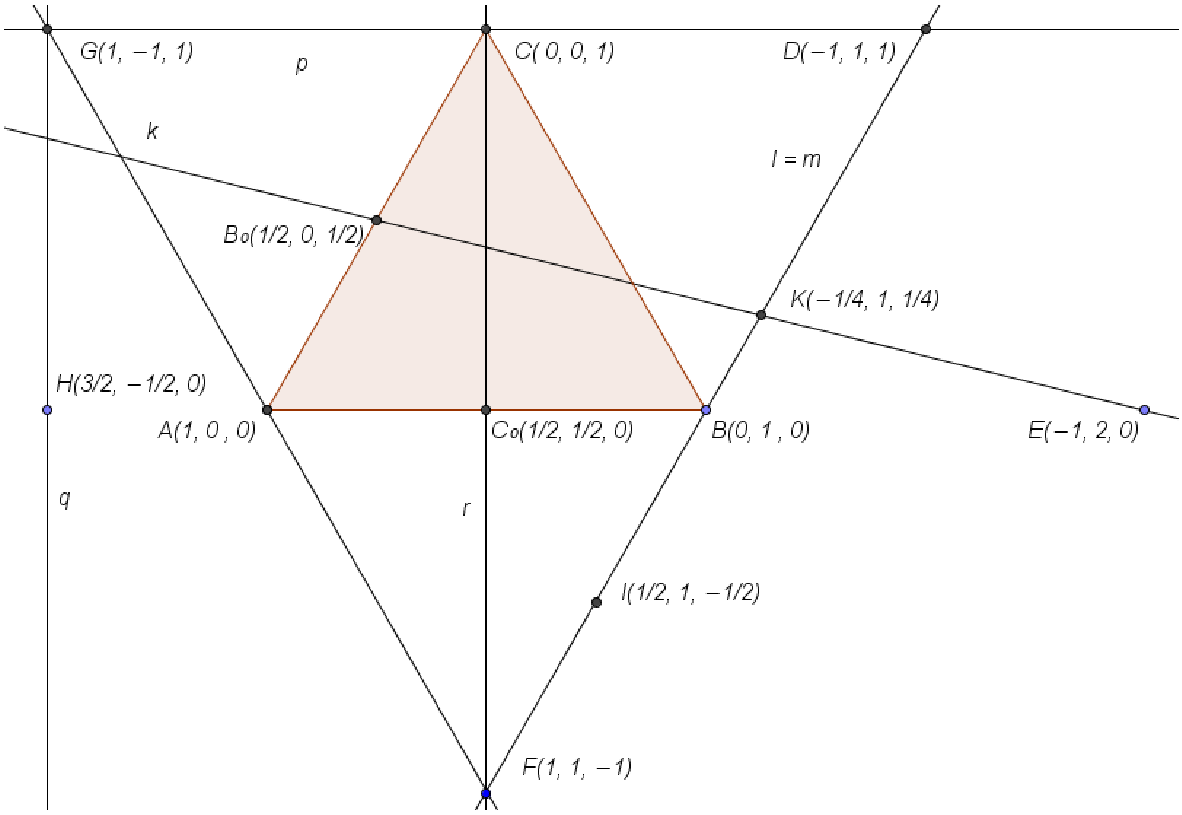
Vyjádřete rovnice následujících přímek v barycentrických souřadnicích:

$$p = CD, \quad q = GH, \quad r = CC_0, \quad l = DF, \quad k = B_0E, \quad m = BI$$

A určete vzájemnou polohu přímek (obr. 19):

a) p a r b) q a r c) k a l d) m a l

Řešení. Přímky si vyjádříme v parametrickém tvaru, pak budeme řešit soustavy tří rovnic o dvou neznámých. Jiný způsob je vyjádřit si jednu z přímek v obecném tvaru a pak použít metodu dosazovací.



OBR. 19

a) Nejprve budeme vyšetřovat vzájemnou polohu přímek p a r:

$$p:\ x = -t \qquad\qquad r:\ x = \frac{1}{2}u$$

$$y = t \qquad\qquad y = \frac{1}{2}u$$

$$z = 1 \qquad\qquad z = 1 - u$$

Řešíme soustavu rovnic:

$$-t = \frac{1}{2}u$$

$$t = \frac{1}{2}u$$

$$1 = 1 - u$$

Dostaneme:

$$t = u = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0\,, \qquad z = 1$$

Přímky p a r mají jeden společný bod $C(0,\ 0,\ 1)$, proto jsou to různoběžky.

b) Teď budeme vyšetřovat vzájemnou polohu přímek q a r:

$$q:\ x = 1 + \frac{1}{2}s \qquad\qquad r:\ x = \frac{1}{2}u$$

$$y = -1 + \frac{1}{2}s \qquad\qquad y = \frac{1}{2}u$$

$$z = 1 - s \qquad\qquad z = 1 - u$$

Obecná rovnice přímky r je $x - y = 0$. Nyní dosadíme z parametrického vyjádření přímky q:

$$1 + \frac{1}{2}s + 1 - \frac{1}{2}s = 0$$

$$2 = 0$$

Soustava rovnic nemá řešení, přímky nemají žádný společný bod, a tudíž $q \parallel r$.

c) Dále budeme zjišťovat polohu přímek k a l:

$$k : x = (1-t)\frac{1}{2} - t = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t$$

$$y = 2t$$

$$z = (1-t)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t$$

$$l : x = (1-v) - v = 1 - 2v$$

$$y = (1-v) + v = 1$$

$$z = (1-v)(-1) + v = -1 + 2v$$

Opět si rovnici přímky l vyjádříme v obecném tvaru:

$$2v = 1 - x$$

$$z = -1 + 1 - x$$

$$x + z = 0$$

Dosadíme za x a z z parametrického vyjádření přímky:

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Přímky k a l jsou různoběžky, jejich společným bodem je bod $K\left(-\frac{1}{4},\ 1,\ \frac{1}{4}\right)$.

d) Zbývá zjistit vzájemnou polohu přímek m a l:

$$m: x = (1-w)\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}w$$

$$y = (1-w) + w = 1$$

$$z = (1-w)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}w$$

$$l: x = (1-v) - v = 1 - 2v$$

$$y = (1-v) + v = 1$$

$$z = (1-v)(-1) + v = -1 + 2v$$

Z minulého příkladu víme, že obecná rovnice přímky l je:

$$x + z = 0$$

Opět dosadíme z parametrického vyjádření přímky m:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}w + \frac{1}{2}w - \frac{1}{2} = 0$$

$$0 = 0$$

Tato rovnost je splněna pro všechny hodnoty parametru w, přímky m a l jsou tedy totožné.

4.6 Věta Cèvova a Menelaova

Věta Cèvova:

V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, a CA jsou po řadě dány body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku ABC. Procházejí-li přímky CK, AL, BM jedním bodem, nebo jsou-li rovnoběžné, pak platí [3, s. 53]:

1. právě jeden z bodů K, L, M je bodem trojúhelníku ABC, nebo každý z nich je bodem trojúhelníku ABC.

2. $(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1$

Pomocí vlastností barycentrických souřadnic můžeme dokázat elegantním způsobem 2. tvrzení Cèvovy věty.

Bod K leží na přímce AB, tedy jeho barycentrické souřadnice můžeme vyjádřit pomocí parametru $k \in \mathbb{R}$ tak, že $K(k,\ 1-k,\ 0)$. Z podmínky Cèvovy věty víme, že parametr k nebude nabývat hodnot 1 a 0, protože bod K neleží v žádném z vrcholů trojúhelníku ABC. Díky znalosti souřadnic bodů $C(0,\ 0,\ 1)$ a $K(k,\ 1-k,\ 0)$ polohu bodu K můžeme určit rovnicí přímky CK v obecném tvaru:

$$CK: \quad (1-k)x - ky = 0$$

$$y = \frac{1-k}{k} \cdot x$$

Souřadnice bodu L, který leží na přímce BC mimo body B, C, vyjádříme pomocí parametru $l \in \mathbb{R}$:

$$L(\ 0,\ l,\ 1-l)$$

Dále ze souřadnic bodů $A(1,\ 0,\ 0)$ a $L(\ 0,\ l,\ 1-l)$ získáme rovnici přímky AL:

$$AL: \quad (1-l)y - l\,z = 0$$

$$z = \frac{1-l}{l} \cdot y$$

Stejným způsobem určíme souřadnice bodu M ležícího na přímce AC. Jestliže $m \in \mathbb{R}$, pak pro souřadnice bodu M platí: $M(1-m,\ 0,\ m)$. Ani bod M neleží v bodě A nebo C. Obecnou rovnici přímky AC odvodíme za znalosti souřadnic bodů $B(0,\ 1,\ 0)$ a $M(1-m,\ 0,\ m)$:

$$BM: \quad mx - (1-m)z = 0$$

$$x = \frac{1-m}{m} \cdot z$$

Získali jsme tři rovnice přímek, o kterých předpokládáme, že se protínají v jednom bodě. Zkusíme tedy postupně dosadit za proměnné $x,\ y,\ z$:

$$x = \frac{1-m}{m} \cdot z$$

$$x = \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-l}{l} \cdot y$$

$$x = \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-l}{l} \cdot \frac{1-k}{k} \cdot x$$

$$1 = \frac{1-m}{m} \cdot \frac{1-l}{l} \cdot \frac{1-k}{k}$$

Ze znalosti vlastností barycentrických souřadnic ale víme, že poměr $k : (1-k)$ je (až na případně opačné znaménko) roven poměru délek úseček $|BK| : |AK|$, poměr $l : (1-l)$ je (až na případně opačné znaménko) roven poměru $|CL| : |BL|$ a poměr $m : (1-m)$ je (až na případně opačné znaménko) tentýž jako poměr délek úseček $|AM| : |CM|$. Tyto rovnosti můžeme dále dosadit do předchozí rovnice.

$$(CAM) \cdot (BCL) \cdot (ABK) = (ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = 1$$

Tím jsme dokázali platnost Cèvovy věty [11, s. 11].

Menelaova věta (Menelaos žil kolem roku 100 n. l.)

V rovině je dán trojúhelník ABC, na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M, které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Leží-li body K, L, M na společné přímce, pak platí:

1. z bodů K, L, M patří trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný
2. $(ABK) \cdot (BCL) \cdot (CAM) = -1$

Obráceně, platí-li tvrzení 1 a 2, leží body K, L, M na jedné přímce [3, s. 52].

Důkaz provedeme obdobným způsobem jako u Cèvovy věty. Opět si vyjádříme body ležící na přímkách, které procházejí vrcholy trojúhelníku pomocí reálného parametru. Bod K bude mít souřadnice $K(k, 1-k, 0)$, kde $(1-k) : k$ je (až na případně opačné znaménko) poměr délek úseček $|AK| : |BK|$. Souřadnice bodu L můžeme vyjádřit ve tvaru $L(0, l, 1-k)$, kde $(1-k) : k$ představuje (až na případně opačné znaménko) poměr délek stran $|BL| : |CL|$. Konečně souřadnice bodu M vyjádříme jako $M(1-m, 0, m)$, protože to (až na případně opačné znaménko) vyjadřuje $|AM| : |CM|$.

Obecnou rovnici přímky získáme ze souřadnic bodů K, L, neboť víme, že platí:

$$\begin{vmatrix} k & 1-k & 0 \\ 0 & l & 1-l \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$$[(1-l)(1-k)-(0\cdot l)]x+[0\cdot 0-(1-l)k]y+[kl-0\cdot(1-k)]z=0$$

$$(1-l)(1-k)x+(1-l)ky+klz=0$$

Nyní dosadíme do rovnice přímky KL souřadnice bodu $M\left(1-m\,,\ 0,\ m\right)$:

$$(1-l)(1-k)(1-m)+(1-l)k\cdot 0+klm=0$$

Dále upravujeme:

$$(1-l)(1-k)(1-m)=\ -klm$$

$$\frac{(1-k)}{k}\cdot\frac{(1-l)}{l}\cdot\frac{(1-m)}{m}=\ -1$$

Opět můžeme do rovnice dosadit poměry délek úseček:

$$(ABK)\ \cdot(BCL)\ \cdot(CAM)=-1$$

Výsledek odpovídá tvrzení Menelaovy věty [11, s. 12 − 13].

4.7 Obsah trojúhelníku v barycentrických souřadnicích

Při výpočtu obsahu trojúhelníku vyjdeme z následujícího tvrzení. To, jakým způsobem se k tvrzení věty dospělo, nebudeme odvozovat.

Nechť ABC je vztažný trojúhelník o obsahu S_{ABC}. Potom obsah libovolného trojúhelníku určeného body $K\left(k_1,\ k_2,\ k_3\right),\ L\left(l_1,\ l_2,\ l_3\right),\ M\left(m_1,\ m_2,\ m_3\right)$ je:

$$S_{KLM}=\left|S_{ABC}\begin{vmatrix}k_1 & k_2 & k_3\\ l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\end{vmatrix}\right|$$

[9, s. 12]

<u>Příklad 16</u> Vypočítejte obsah trojúhelníku *KLM*, jehož barycentrické souřadnice jsou: $K\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},0\right),\ L(-1,\ 1,\ 1),\ M\left(\frac{1}{2},0,\ \frac{1}{2}\right)$. Pro vztažný trojúhelník ABC a délky jeho stran platí $|AB|=c=4,\ |BC|=a=5,\ |AC|=b=3$.

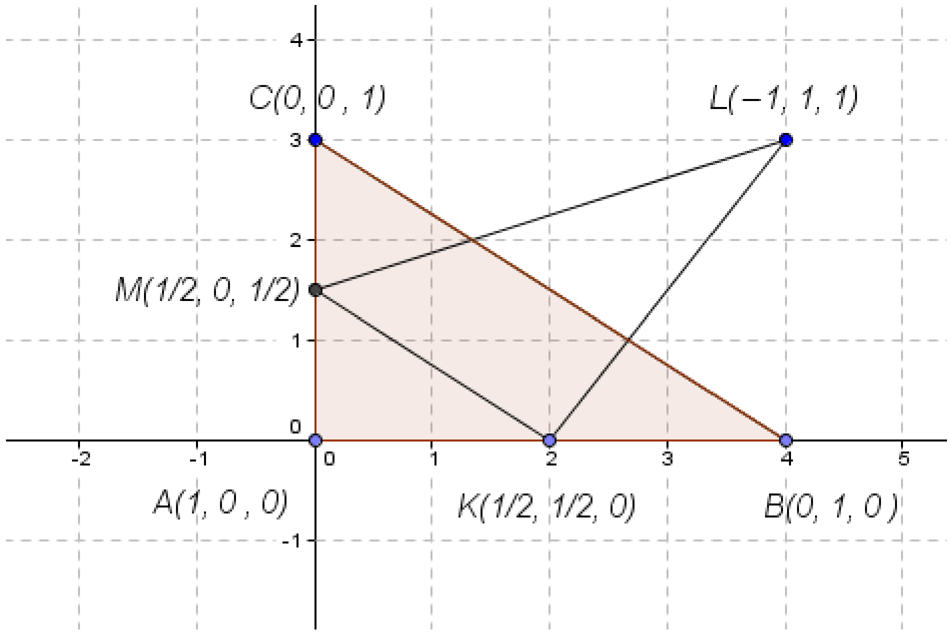
Řešení. Trojúhelník ABC je pravoúhlý (obr. 20), a proto:

$$S_{ABC}=\frac{4\ \cdot 3}{2}=6$$

Obsah trojúhelníku KLM vypočteme dosazením do vzorce pro výpočet obsahu:

$$S_{KLM} = \left| 6 \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \right| = \left| 6 \begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \right| = \left| 6(-1)^2 \tfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \right|$$

$$S_{KLM} = \left| 3\left(1 + \frac{1}{2}\right) \right| = \frac{9}{2} = 4{,}5$$



Obr. 20

Výsledek můžeme zkontrolovat použitím kartézských souřadnic. Bodům A, B, C, K, L a M přiřadíme následující kartézské souřadnice $A[0,\ 0]$, $B[4,\ 0]$, $C[0,\ 3]$, $K[2,\ \ 0]$, $L[4,\ 3]$, $M[0,\ 3/2]$:

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[6 + 0 + 6 - (0 + 3 + 0)] = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

4.8 Metrika v barycentrických souřadnicích

V této kapitole naznačíme, jakým způsobem je možné spočítat vzdálenosti v barycentrických souřadnicích. Odvodíme vzorec pro výpočet vzdálenosti bodů $U(u_1,\ u_2\ ,\ u_3)$ a $V(v_1,\ v_2\ ,\ v_3)$. Označme ještě $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{a}\ = \overrightarrow{BC}$.

$$U = A + u_2\vec{c} + u_3\vec{b}$$

$$V = A + v_2\vec{c} + v_3\vec{b}$$

$$|UV|^2 = (V-U)^2 = \left[(v_2 - u_2)\vec{c} + (v_3 - u_3)\vec{b}\right]^2$$

$$|UV|^2 = (v_2 - u_2)^2 c^2 + 2(v_2 - u_2)(v_3 - u_3)\vec{b}\cdot\vec{c} + (v_3 - u_3)^2 b^2$$

Hodnotu skalárního součinu $\vec{b}\cdot\vec{c}$ můžeme odvodit z následujících vztahů:

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$a^2 = \left(\vec{b} - \vec{c}\right)^2$$

$$a^2 = b^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + c^2$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

Tedy:

$$|UV|^2 = (v_2 - u_2)^2 c^2 + (v_2 - u_2)(v_3 - u_3)(b^2 + c^2 - a^2) + (v_3 - u_3)^2 b^2$$

Nyní je třeba ještě dvou kroků, abychom dostali vzorec pro výpočet vzdálenosti v jednodušší podobě. Kromě souřadnic bodů zavedeme ještě pojem souřadnice vektorů, které získáme z následujícího vztahu:

$$\vec{x} = \overrightarrow{UV} = V - U = (v_1 - u_1,\ v_2 - u_2,\ v_3 - u_3) = (x,\ y,\ z)$$

V původním vzorci pro výpočet vzdálenosti nahradíme souřadnice bodů U a V souřadnicemi vektoru $\overrightarrow{UV}$. Dále je dobré si uvědomit, že zatímco jednotlivé souřadnicové složky bodů dávají součet 1, souřadnice vektoru dávají součet nula. Platí tedy $x = -y - z$. Potom:

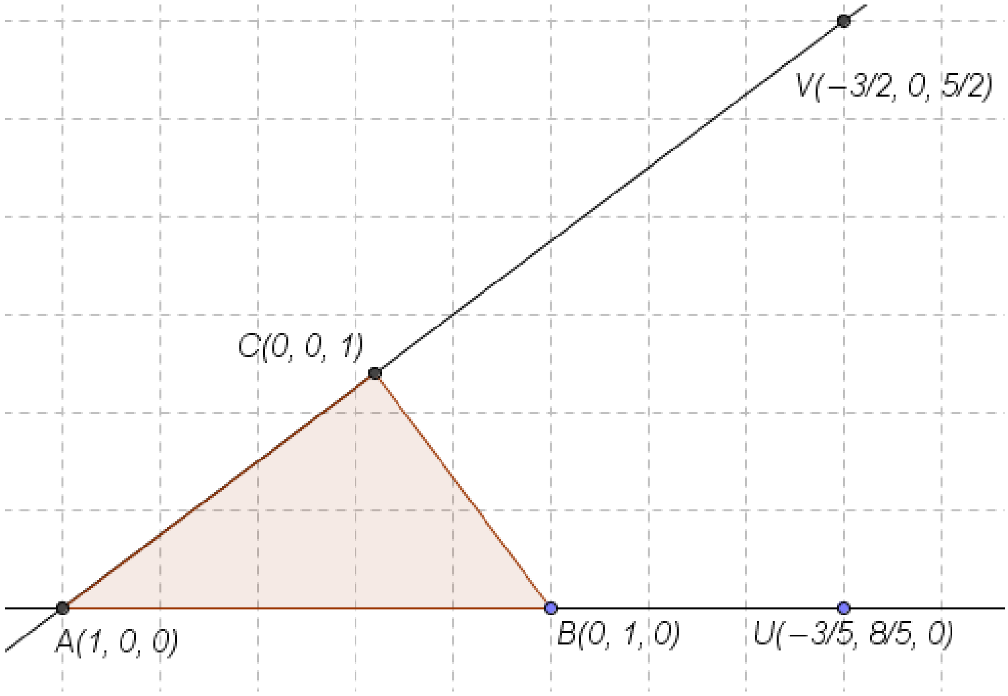
$$|UV|^2 = y^2c^2 + yz(b^2 + c^2 - a^2) + z^2b^2$$

$$|UV|^2 = y^2c^2 + yzb^2 + yzc^2 - yza^2 + z^2b^2$$

$$|UV|^2 = yc^2(y+z) + zb^2(z+y) - yza^2 \qquad \text{a} \qquad -x = y + z$$

$$|UV|^2 = -yza^2 - xzb^2 - xyc^2$$

<u>Příklad 17</u> Je dán vztažný trojúhelník ABC s obvyklými souřadnicemi a velikosti vektorů $\vec{a} = |BC| = 3$, $\vec{b} = |AC| = 4$, $\vec{c} = |AB| = 5$. Spočítejte velikosti vektoru $|UV|$, známe-li barycentrické souřadnice bodů $U\left(-\frac{3}{5},\ \frac{8}{5},\ 0\right)$, $V\left(-\frac{3}{2},\ 0,\ \frac{5}{2}\right)$.



Obr. 21

Řešení. Body U a V si vyjádříme pomocí vektorů vztažného trojúhelníku. Nebude to obtížné, protože bod U leží na přímce AB a bod V leží na přímce AC (obr. 21). Tedy:

$$U = A + \frac{8}{5}\,\vec{c}, \qquad V = A + \frac{5}{2}\vec{b}$$

$$|UV|^2 = |U - V\,|^2 = \left|\frac{8}{5}\,\vec{c} - \frac{5}{2}\vec{b}\right|^2 = \left|\frac{64}{25}\,c^2 - 2\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{5}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{25}{4}b^2\right|$$

$$|UV|^2 = \left|\frac{64}{25}\cdot\ 25 - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + \frac{25}{4}\cdot 16\right|$$

Skalární součin vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ můžeme dopočítat podle výše odvozeného vztahu:

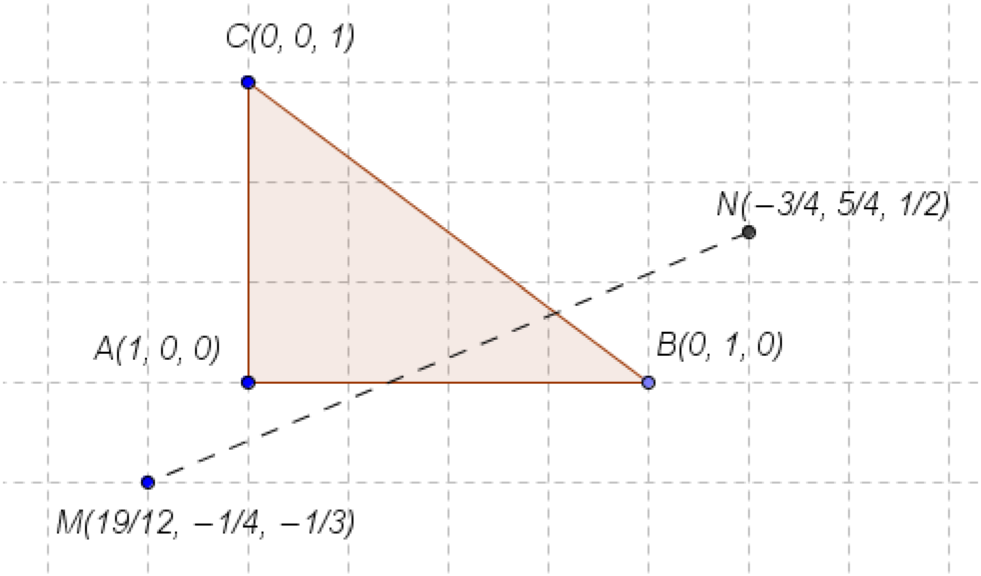
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \frac{5^2 + 4^2 - 3^2}{2} = \frac{25 + 16 - 9}{2} = 16$$

Teď dosadíme do původní rovnosti za $\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$|UV|^2 = |64 - 8\cdot 16 + 100| = 36$$

$$|UV| = 6$$

Příklad19 Je dán trojúhelník ABC, tak že $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$. Dále známe souřadnice bodů $M\left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right)$, $N\left(-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Vypočítejte vzdálenost bodů M a N (obr. 22).



OBR. 22

Řešení. K určení vzdálenosti $|MN|$ použijeme vzorec:

$|MN|^2 = -a^2(n_2 - m_2)(n_3 - m_3) - b^2(n_1 - m_1)(n_3 - m_3) - c^2(n_1 - m_1)(n_2 - m_2)$

Nejprve si spočítáme souřadnice vektoru $\overrightarrow{MN}$:

$$N - M = \left(\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{19}{12}, \frac{5}{4} - \left(-\frac{1}{4}\right), \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{6}\right)$$

$$|MN|^2 = -5^2\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6}\right] - 3^2\left[\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{5}{6}\right] - 4^2\left[\left(-\frac{7}{3}\right) \cdot \frac{3}{2}\right]$$

$$|MN|^2 = -\frac{25 \cdot 5}{4} + \frac{35}{2} + 56 = \frac{294 - 125}{4} = 42{,}25$$

$$|MN| = 6{,}5$$

4.9 Kružnice v barycentrických souřadnicích

Kružnice $k(S, r)$ se středem $S(u_1, u_2, u_3)$, kde $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, má v barycentrických souřadnicích rovnici [4, s. 436]:

$$(x-u_1)^2(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2(a^2+c^2-b^2)+(z-u_3)^2(a^2+b^2-c^2)=2r^2$$

Rovnici kružnice lze odvodit ze vztahu pro vzdálenost dvou bodů, neboť kružnice je definována jako množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu. Odvodíme nyní vztah pro vzdálenost dvou bodů z rovnice kružnice:

$$(x-u_1)^2(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2(a^2+c^2-b^2)+(z-u_3)^2(a^2+b^2-c^2)=2r^2$$

$$[(u_2-y)+(u_3-z)]^2(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2(a^2+c^2-b^2)$$
$$+(z-u_3)^2(a^2+b^2-c^2)=2r^2$$

$$2(u_2-y)(u_3-z)(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2(a^2+c^2-b^2-a^2+b^2+c^2)$$
$$+(z-u_3)^2(a^2+b^2-c^2-a^2+b^2+c^2)=2r^2$$

$$2(u_2-y)(u_3-z)(b^2+c^2-a^2)+2(y-u_2)^2c^2+2(z-u_3)^2b^2=2r^2$$

$$(y-u_2)(z-u_3)(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2c^2+(z-u_3)^2b^2=r^2$$

Nyní už zbývá jen dosadit za proměnné y, z souřadnice bodu $V(v_1, v_2, v_3)$ a dojdeme ke vzorci pro výpočet vzdálenosti dvou bodů:

$$|UV|^2=(v_2-u_2)^2c^2+(v_2-u_2)(v_3-u_3)(b^2+c^2-a^2)+(v_3-u_3)^2b^2$$

<u>**Příklad 18**</u> Vyjádřete rovnici kružnice vepsané trojúhelníku ABC v barycentrických souřadnicích, je-li dáno: $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, kde a, b, c jsou délky stran trojúhelníku ABC (obr. 23).

Řešení. Souřadnice středu S kružnice vepsané ΔABC vypočítáme ze vztahu:

$$S\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}\right)$$

$$S\left(\frac{5}{5+3+4}, \frac{3}{5+3+4}, \frac{4}{5+3+4}\right)=\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$

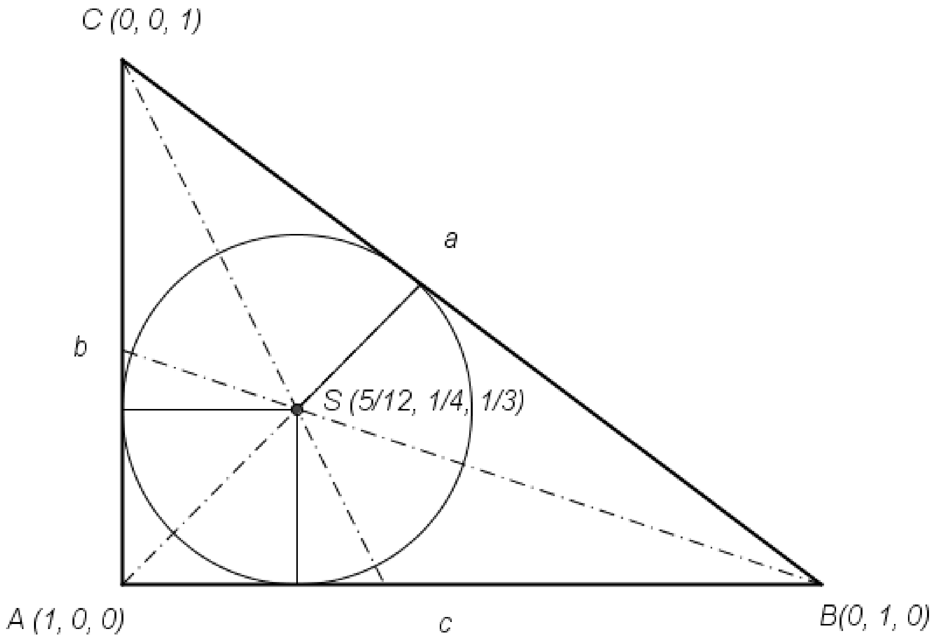
Poloměr ρ kružnice trojúhelníku vepsané zjistíme dosazením do vzorce

$$\rho=\frac{S_{ABC}}{s},$$

kde S_{ABC} je obsah trojúhelníku ABC a s je poloviční obvod trojúhelníku ABC.

Tedy konkrétně:

$$\rho = \frac{\frac{3 \cdot 4}{2}}{\frac{5+3+4}{2}} = \frac{6}{6} = 1$$



OBR. 23

Nyní již stačí dosadit do vztahu pro rovnici kružnice se středem $S(u_1,\ u_2,\ u_3)$ a poloměrem ρ:

$$(x-u_1)^2(b^2+c^2-a^2)+(y-u_2)^2(a^2+c^2-b^2)+(z-u_3)^2(a^2+b^2-c^2)=2\rho^2$$

$$\left(x-\frac{5}{12}\right)^2(9+16-25)+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2(25+16-9)+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2(25+9-16)=$$
$$=2\cdot 1^2$$

$$\left(x-\frac{5}{12}\right)^2\cdot 0+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2\cdot 32+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\cdot 18=2$$

$$32\left(y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}\right)+18\left(z^2-\frac{2}{3}z+\frac{1}{9}\right)=2$$

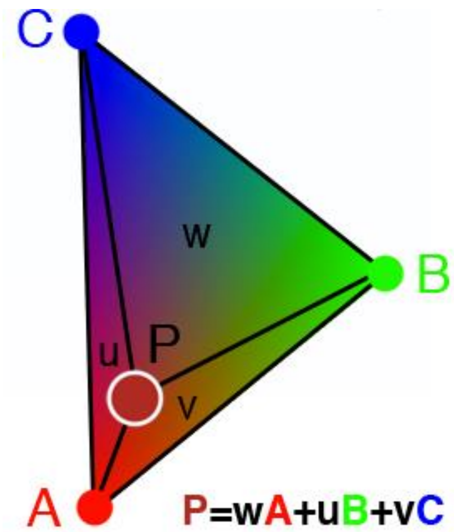
$$32y^2-16y+2+18z^2-12z+2=2$$

$$32y^2+18z^2-16y-12z+2=0$$

5 Využití barycentrických souřadnic

5.1 Gouraudovo stínování

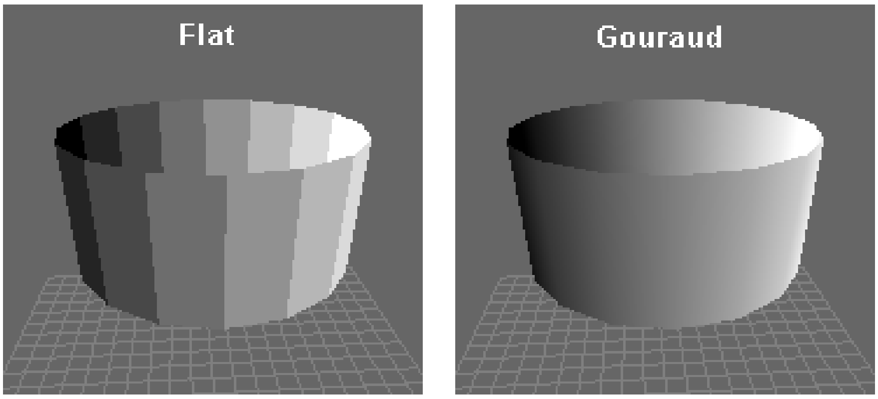
Tuto techniku počítačového stínování představil počítačový grafik Henry Gouraud v roce 1971. Použitím Gouraudova stínování jsou zajištěny plynulé přechody mezi jednotlivými barvami, aniž by bylo nutné počítat barvu jednotlivých pixelů. Názorným příkladem jsou plynulé barevné přechody mezi třemi barvami použitými v jednotlivých vrcholech trojúhelníku (obr. 24). Nejsytější odstín každé ze tří barev je umístěn do jednoho vrcholu trojúhelníku. Užitím barycentrických souřadnic je pak možné získat poměr tří barev v každém bodě. Zároveň je docíleno plynulého přechodu mezi barvami [11, s. 12].



OBR. 24

ZDROJ: HTTP://WWW.SCRATCHAPIXEL.COM/LESSONS/3D-BASIC-LESSONS/LESSON-9-RAY-TRIANGLE-INTERSECTION/BARYCENTRIC-COORDINATES/

Kromě barevných efektů lze použitím tohoto stínování též docílit toho, že plošný obraz působí dojmem prostorovosti. Stínovaný objekt je tvořen množinou rovinných ploch. Vycházíme z toho, že barvy v každém z vrcholů jsou známé. Pak už můžeme barvu v každém z pixelů určit pomocí barycentrických souřadnic a docílíme tím efektu prostorovosti (obr. 25). Toto stínování bylo překonáno Phongovým stínováním, které zohledňuje i odlesky světla způsobené odraženým světlem [19].



Obr. 25

Zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/Gouraud_shading

5.2 Počítačové modelování

Tento obor zaznamenal v posledních letech velmi rychlý vývoj. Je vyučován na technických i matematicko-fyzikálních fakultách vysokých škol. Počítačové modelování našlo uplatnění v oblasti technických věd (např. automobilový, loďařský a letecký průmysl, geografické informační systémy, výroba tištěných spojů) ale i v oblastech netechnických (např. rekonstrukce rentgenových snímků, návrh předmětů denní potřeby, trikový film) [10, s. 10]. Počítačové modelování uplatňuje mnoho metod pro tvorbu počítačových modelů. Jednou z těchto metod jsou trojúhelníkové pláty. Zásadní význam v teorii Bézierových trojúhelníkových plátů mají barycentrické souřadnice [10, s. 84].

5.3 Morfing

Morfing je proces plynulé přeměny jednoho geometrického objektu na jiný. Morfing se používá především v počítačové animaci, ale nachází uplatnění i v oblasti designu nebo herního průmyslu [12, s. 7]. Morfing může být dvojrozměrný nebo trojrozměrný. Jedním z postupů při morfování je využití barycentrických souřadnic. Při dvourozměrném morfingu se vytvoří trojúhelníková síť na vzoru a obrazu. Obě sítě musí mít stejnou topologii. Užitím barycentrických souřadnic se pak transformují souřadnice vzoru na souřadnice obrazu.

Závěr

V textu jsem se snažila seznámit čtenáře s tématem barycentrických souřadnic. Barycentrické souřadnice jsou sice daleko méně rozšířené než souřadnice kartézské, ale v současné době rozmachu počítačové grafiky a animace si v tomto odvětví vydobyly nezastupitelné místo. Myslím si, že i ve výuce analytické geometrie by žáci měli mít možnost se s nimi seznámit, jelikož přinášejí nový pohled na analytickou geometrii a odhalují některé vztahy lépe než souřadnice kartézské. Kromě toho tyto souřadnice též skýtají další možnosti k procvičení vektorové algebry.

Úvod mé práce je věnován dvěma velikánům v oboru matematiky, kteří se nejvíce zasloužili o zavedení barycentrických souřadnic. Je zajímavé sledovat propojení geometrického významu barycentrických souřadnic, které definoval Mőbius, s významem fyzikálním, který jim přisuzoval Archimedes. Snažila jsem se podrobněji zachytit životní osudy a postoje obou matematiků, protože díky nim může čtenář lépe pochopit, jaký význam oni sami svým objevům přikládali.

Druhá část mé práce se věnuje soustavám ohodnocených bodů. Právě pochopení základních principů platných v těchto soustavách je klíčové pro snadné porozumění barycentrickým souřadnicím, jelikož zákonitosti platné v barycentrickém počtu se mohou zpočátku zdát nejasné. Příklady jsou pro názornost doplněny obrázky.

Ve třetí a čtvrté části jsou uvedeny formou tvrzení základní principy počítání v barycentrických souřadnicích. Zaměřila jsem se pouze na příklady na přímce a v rovině, protože i zde je dostatek zajímavých situací, které si zaslouží podrobnější vysvětlení.

V poslední části mé práce jsou uvedeny některé příklady užití barycentrických souřadnic. Tyto souřadnice našly zvláště v posledních letech nezastupitelné místo v aplikovaných vědách, jako je počítačová grafika, a dalších technických i netechnických oborech. Díky tomu se bez jejich znalosti neobejdou vysokoškolští studenti oborů počítačová grafika, geomatika, geoinformatika, výpočetní technika a mechanika.

Vzhledem k tomu, že tato práce obsahuje základní poznatky o barycentrických souřadnicích, myslím si, že by mohla sloužit jako podklad pro výuku tohoto tématu pro střední, případně vysoké školy. Kapitola č. 4 v dostatečné míře seznamuje se základními vlastnostmi barycentrických souřadnic v rovině. Je zde uveden vztah kartézských a barycenrických souřadnic, rovnice přímky, metrika, významné body v trojúhelníku či rovnice kružnice. Text by bylo zřejmě nutné rozšířit o další příklady k procvičení, které jsou nad rámec této práce. Bohužel se mi nepodařilo dohledat příklady použití barycentrických souřadnic v praxi, které by byly srozumitelné pro začátečníky.

Dalším rozšířením tohoto tématu by mohly být například geometrické transformace a kuželosečky v barycentrických souřadnicích nebo barycentrické souřadnice v trojrozměrném případně n-rozměrném prostoru.

Zpracování tohoto tématu mě velmi obohatilo jak o nové znalosti z geometrie, tak o nové dovednosti při práci v programu Geogebra. Díky zpracování mnoha obrázků v tomto softwaru jsem získala větší jistotu, jak Geogebru používat.

Seznam použité literatury

[1] BALK, M.B.; BOLTJANSKIJ, V.G.: *Geometrija Mass*, Moskva, Nauka, 1987

[2] BEČVÁŘ J., ŠTOLL I.: *Archimedes, největší vědec starověku*, Praha, Prometheus, 2005

[3] BOČEK, L.; ZHOUF, J.: *Planimetrie*, Praha, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2009,

[4] HEJNÝ, M.; BENEŠOVÁ, M.; BEREKOVÁ, H.; BERO, P.; HRDINA, Ľ.; REPÁŠ, V., VANTUCH, J.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava, SPN, 1990,

[5] HEJNÝ, M.; JIROTKOVÁ, D.; STEHLÍKOVÁ, N.: *Úvod do studia analytické geometrie*, Praha, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2005

[6] DLAB, V.: *Barycentrické souřadnice*, článek pro Rozhledy matematicko-fyzikální, 2014, v tisku

Internetové zdroje

[7] BALTZER, R. (eds.): *August Ferdinand Mőbius, Gesammelte Werke*, Band I*,* Leipzig, Hirzel, 1885. Dostupné z: https://archive.org/details/gesammeltewerkeh01mbuoft

[8] BEČVÁŘ, J.; BEČVÁŘOVÁ, M.: *30. Mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21.-25. 8. 2009*, Praha, MMFUK, Katedra didaktiky matematiky, vydal Matfyzpress, Dostupné z: http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/sborniky/sbornik-30.pdf

[9] CHEN, E.; SCHINDLER, M.: *Barycentric coordinates in Olympiad geometry*, July 13, 2012. Dostupné z: http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/Bary_full.pdf

[10] JEŽEK, F.: *Geometrické a počítačové modelování*, Pomocný učební text, Plzeň, Fakulta aplikovaných věd, katedra matematiky Plzeň, Únor 2006, v. 8.1. Dostupné z: http://www.fd.cvut.cz/personal/voracsar/GM/PGR021/GM_Jezek.pdf

[11] KOBLBAUER, CH.: *Barycentric coordinates,* Waterloo 2012. Dostupné z: http://koblbauermath.weebly.com/uploads/1/3/1/9/13192946/barycentric_coordinates. pdf

[12] MÁLKOVÁ, M.: *Morfování geometrických objektů v povrchové reprezentaci*, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra informatiky a výpočetní techniky, Plzeň 2006. Dostupné z:

http://graphics.zcu.cz/files/BP_2006_Malkova_Martina.pdf

[13] O`CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E.F.: *August Ferdinand Mőbius Biography*, School of Mathematics and Statictics University of Sant Andrews, Scotland, JOC/EFR@1997. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius.html

[14] ŠIMŠA, J.: *Archimédova statika v geometrii*, Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, Katedra matematiky. Dostupné z: http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=382

[15] VOLENEC, V.: *Metrical relations in barycentric coordinates*, Mathematical Communications, 8(2003), 55- 68. Dostupné z: file:///C:/Users/Guest/Downloads/mc15_vol%20(2).pdf

[16] VOLENEC, V.: *Circles in barycentric coordinates*, Mathematical Communications, 9(2004) 79- 89. Dostupné z: file:///C:/Users/Guest/Downloads/mc17_vol%20(1).pdf

[17] *Wikipedie, otevřená encyklopedie*, *Wikipedia free Encyclopedia*, *Archimédés*, využita česká a anglická verze, citováno 23. 3. 2014. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes, http://cs.wikipedia.org/wiki/Archimédés

[18] *Wikipedia free Encyclopedia*, *Barycentric coordinates system*, citováno 11. 4. 2014. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system

[19] *Wikipedia free Encyclopedia, Gouraud shading,* citováno 14. 6. 2014. Dostupné z:

http://en.wikipedia.org/wiki/Gouraud_shading