Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Cepák

Booleovy algebry a teorie prvního řádu

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
Studijní program: Matematika, Obecná matematika

2006

Chci poděkovat svému vedoucímu Doc. RNDr. Josefu Mlčkovi, CSc. za čas, který mi věnoval při četných konzultacích, a za odhalení mnoha nedostatků v předběžných verzích tohoto textu.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 8. září 2006 Jiří Cepák

Obsah

1 Základní pojmy a věty **5**

2 Konkrétní teorie a jejich algebry **11**

2.1 Teorie CE_α 11

2.2 Aritmetické teorie 14

2.2.1 Presburgerova aritmetika PR 14

2.2.2 Robinsonova aritmetika Q 15

2.2.3 Peanova aritmetika P 15

2.2.4 Standardní aritmetika SA 16

2.2.5 Teorie následníka SC 16

2.2.6 Teorie následníka s nulou SC0 17

2.3 Teorie uspořádání 18

2.3.1 Teorie hustého lineárního uspořádání bez konců DeLO 18

2.3.2 Teorie diskrétního lineárního uspořádání DiLO 19

2.4 Teorie náhodných grafů RG 21

2.5 Teorie algebraicky uzavřených těles ACF 22

2.6 Přehled výsledků 24

A Teorie modelů **26**

B Booleovy algebry **30**

C Stirlingova a Bellova čísla **34**

Literatura **36**

Název práce: Booleovy algebry a teorie prvního řádu
Autor: Jiří Cepák
Katedra (ústav): Katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
e-mail vedoucího: Josef.Mlcek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Budeme studovat Lindenbaumovy algebry a algebry definovatelných množin vybraných teorií prvního řádu: teorie α konstant pro $\alpha \leq \omega$, Presburgerovy, Robinsonovy, Peanovy a standardní aritmetiky, teorie následníka, teorie následníka s nulou, teorie hustého lineárního uspořádání bez konců, teorie diskrétního lineárního uspořádání, teorie náhodných grafů a teorie algebraicky uzavřených těles. Pro konečné algebry určíme počet jejich prvků, pro spočetné algebry určíme, zda jsou atomární čí bezatomární a pro některé z nich provedeme klasifikaci až na isomorfismus pomocí algeber FA, ASA a CA. Za tímto účelem dokážeme několik obecných vět.
Klíčová slova: Lindenbaumovy, algebry, teorie, prvního, řádu

Title: Boolean algebras and first order theories
Author: Jiří Cepák
Department: Department of Theoretical Computer Science
and Mathematical Logic
Supervisor: Doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.
Supervisor's e-mail address: Josef.Mlcek@mff.cuni.cz

Abstract: We will study Lindenbaum algebras and algebras of definable subsets of selected first order theories: α constants theory for $\alpha \leq \omega$, Presburger, Robinson, Peano and standard arithmetic, successor theory, successor theory with zero, theory of dense linear orders without endpoints, theory of discrete linear orders, random graph theory and theory of algebraically closed fields. For finite algebras we will determine their cardinality, for countable algebras we will determine whether they are atomic or atomless and for some of them we will carry out classification up to isomorphism using algebras FA, ASA and CA. For this purpose we will prove several general theorems.
Keywords: Lindenbaum, algebras, first, order, theory

Kapitola 1

Základní pojmy a věty

V celém tomto textu užíváme standardní značení, které je připomenuto v dodatcích, kde jsou také uvedeny potřebné definice a věty, které používáme.

Budeme se zabývat výlučně spočetnými teoriemi prvního řádu, proto slovo teorie bude dále znamenat spočetná teorie prvního řádu. Případné výjimky budou výslovně uvedeny.

Buďte $T \supseteq S$ dvě L-teorie, T bezesporná, $m < \omega$. Definujme ekvivalenci $\sim_{m,T}$ na množině Fm_L^m vztahem

$$\varphi \sim_{m,T} \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Třídu ekvivalence obsahující prvek φ označme $[\varphi]_{m,T}$. Na množině $\mathrm{Fm}_L^m/{\sim_{m,T}}$ definujme operace $\wedge_{m,T}$, $\vee_{m,T}$, $-_{m,T}$, $0_{m,T}$, $1_{m,T}$ takto: $[\varphi]_{m,T} \wedge_{m,T} [\psi]_{m,T} = [\varphi \mathbin{\&} \psi]_{m,T}$, $[\varphi]_{m,T} \vee_{m,T} [\psi]_{m,T} = [\varphi \vee \psi]_{m,T}$, $-_{m,T}[\varphi]_{m,T} = [\neg\varphi]_{m,T}$, $0_{m,T} = [\bot]_{m,T}$, $1_{m,T} = [\top]_{m,T}$. Booleova algebra $\mathrm{B}^m T = \langle \mathrm{Fm}_L^m/{\sim_{m,T}}, \wedge_{m,T}, \vee_{m,T}, -_{m,T}, 0_{m,T}, 1_{m,T} \rangle$ se nazývá *m-tá Lindenbaumova algebra teorie T*.

Definujme ekvivalenci $\sim_T$ na množině Fm_L vztahem

$$\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow T \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Třídu ekvivalence obsahující prvek φ označme $[\varphi]_T$. Na množině $\mathrm{Fm}_L/{\sim_T}$ definujme operace $\wedge_T$, $\vee_T$, $-_T$, 0_T, 1_T takto: $[\varphi]_T \wedge_T [\psi]_T = [\varphi \mathbin{\&} \psi]_T$, $[\varphi]_T \vee_T [\psi]_T = [\varphi \vee \psi]_T$, $-_T[\varphi]_T = [\neg\varphi]_T$, $0_T = [\bot]_T$, $1_T = [\top]_T$. Booleova algebra $\mathrm{B}T = \langle \mathrm{Fm}_L/{\sim_T}, \wedge_T, \vee_T, -_T, 0_T, 1_T \rangle$ se nazývá *Lindenbaumova algebra teorie T*.

Lindenbaumova algebra $\mathrm{B}L$ *jazyka L* resp. *m-tá Lindenbaumova algebra* $\mathrm{B}^m L$ *jazyka L* je algebra $\mathrm{B}\emptyset$ resp. $\mathrm{B}^m\emptyset$.

Označme dále

$$\mathscr{F}_{T,S} = \{[\varphi]_S; T \vdash \varphi\},\ \mathscr{F}_{m,T,S} = \{[\varphi]_{m,S}; T \vdash \varphi\}.$$

Základní vlastnosti právě zavedených pojmů shrnuje následující tvrzení, jehož důkaz je snadný.

Tvrzení 1.1. *Buďte $T \supseteq S$ dvě L-teorie, T bezesporná, $m < \omega$.*

(i) *Je $0_{m,T} = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L^m; T \vdash \neg\varphi\}$, $1_{m,T} = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L^m; T \vdash \varphi\}$. Speciálně $1_{0,T} = \mathrm{Th}(T)$.*

(ii) *Teorie T je úplná, právě když $\mathrm{B}^0 T \cong 2$.*

(iii) *Formule $\varphi \in \mathrm{Fm}_L^m$ je konzistentní s T, právě když $[\varphi]_{m,T} \neq 0_{m,T}$.*

(iv) *Buď $m \leq n$. Pak algebra $\mathrm{B}^m T$ je isomorfně vnořená do algebry $\mathrm{B}^n T$ zobrazením h, které je definováno vztahem $h([\varphi]_{m,T}) = [\varphi]_{n,T}$. Algebra $\mathrm{B}^m T$ je isomorfně vnořená do algebry $\mathrm{B}T$ zobrazením h, které je definované vztahem $h([\varphi]_{m,T}) = [\varphi]_T$.*

(v) *$\mathscr{F}_{m,T,S}$ je filtr na algebře $\mathrm{B}^m S$, $\mathscr{F}_{T,S}$ je filtr na algebře $\mathrm{B}S$. T je kompletní $\Leftrightarrow$ $\mathscr{F}_{0,T,S}$ je ultrafiltr na algebře $\mathrm{B}^0 S$.*

(vi) *$\mathrm{B}^m T \cong \mathrm{B}^m S / \mathscr{F}_{m,T,S}$; zobrazení $h([\varphi]_{m,T}) = [[\varphi]_{m,S}]_{\mathscr{F}_{m,T,S}}$ je příslušný isomorfismus, kde $[t]_{\mathscr{F}_{m,T,S}}$ značí faktor z $\mathrm{B}^m S / \mathscr{F}_{m,T,S}$ obsahující prvek $t \in \mathrm{B}^m S$.*

(vii) *$\mathrm{B}T \cong \mathrm{B}S / \mathscr{F}_{T,S}$; zobrazení $h([\varphi]_T) = [[\varphi]_S]_{\mathscr{F}_{T,S}}$ je příslušný isomorfismus, kde $[t]_{\mathscr{F}_{T,S}}$ značí faktor z $\mathrm{B}S / \mathscr{F}_{T,S}$ obsahující prvek $t \in \mathrm{B}S$.*

Stoneův prostor teorie T resp. *m-tý Stoneův prostor teorie T* je Stoneův prostor algebry $\mathrm{B}T$ resp. $\mathrm{B}^m T$. Značíme jej $\mathrm{S}T$ resp. $\mathrm{S}^m T$.

Buď $\mathcal{A}$ model jazyka L, $X \subseteq A$, $m < \omega$. *Algebra m-definovatelných množin nad X v $\mathcal{A}$* je podalgebra

$$\mathrm{Df}^m(X, \mathcal{A}) = \{\varphi(A_X^m); \varphi \in \mathrm{Fm}_{L_X}^m\}$$

potenční algebry $\mathscr{P}(A^m)$. Je-li $X = \emptyset$, mluvíme krátce o *algebře m-definovatelných množin v $\mathcal{A}$* a značíme jí $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$.

Následující tvrzení dává do souvislosti Lindenbaumovy algebry a algebry definovatelných množin.

Tvrzení 1.2. *Buď T bezesporná teorie v jazyce L, $\mathcal{A} \models T$, $m < \omega$. Pak zobrazení $f : \mathrm{B}^m T \to \mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$, definované vztahem $f([\varphi]_{m,T}) = \varphi(\mathcal{A}^m)$ pro $\forall \varphi \in \mathrm{Fm}_L^m$, je homomorfismus algebry $\mathrm{B}^m T$ na algebru $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$. Je-li T úplná teorie, je zobrazení f dokonce isomorfismus uvedených algeber.*

Důkaz. Je patrné, že f je homomorfismus a na. Buď T úplná teorie. Dokážeme, že f je prosté. Označme $\bar{x} = x_0, \ldots, x_{m-1}$ a buďte $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Fm}_L^m$, $[\varphi]_{m,T} \neq [\psi]_{m,T}$. Tudíž, díky úplnosti T, $T \vdash \neg(\forall \bar{x})(\varphi \leftrightarrow \psi)$ neboli $T \vdash (\exists \bar{x})\neg(\varphi \leftrightarrow \psi)$, tedy $T \vdash \neg(\varphi \leftrightarrow \psi)[\bar{a}]$ pro nějaké $\bar{a} \in A^m$. Potom ovšem $\bar{a} \in \varphi(\mathcal{A}^m) \dot{-} \psi(\mathcal{A}^m)$ a tedy $f([\varphi]_{m,T}) \neq f([\psi]_{m,T})$. $\square$

Protože se zabýváme spočetnými teoriemi prvního řádu, budou všechny algebry definovatelných množin a Lindenbaumovy algebry nejvýše spočetné. Naznačme, jak budeme postupovat při výpočtu mohutnosti algebry $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$, bude-li konečná. Z tvrzení B.1 plyne, že nám stačí určit počet jejích atomů p, neboť potom $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A}) \cong \mathscr{P}(p)$ a tedy $|\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})| = 2^p$. Při výpočtu čísla p budou hrát zásadní roli Stirlingova čísla druhého druhu, o kterých se lze dočíst v Dodatku C a také znalost eliminační množiny. Poznamenejme ještě, že se stačí omezit na výpočet mohutností algeber m-definovatelných množin pro $m > 0$, neboť $\mathrm{Df}^0(\mathcal{A}) \cong 2$.

Zabývejme se nyní otázkou klasifikace Lindenbaumových algeber. Následující tabulka zavádí některé důležité spočetné Booleovy algebry, které budeme v dalším potřebovat a zároveň uvádí i některé jejich vlastnosti. Poznamenejme, že $n < \omega$ a $\mathcal{N}$ značí standardní model aritmetiky.

algebra B	definice	IBA	$\lvert \mathrm{S}B \rvert$
FA	$\langle \omega \rangle_{\mathscr{P}(\omega)}$	ω	ω
CA	$\mathrm{CA}(\omega)$	η	2^ω
ASA	$\mathrm{Df}^1(\mathcal{N})$	$\eta \dot{\times} (\omega^* \dot{+} \omega)$	2^ω
FA^n	—	$n \dot{\times} \omega$	ω
$\mathscr{P}(n) \times \mathrm{CA}$	—	$n \dot{+} \eta_0$	2^ω

Tabulka 1.1: Základní spočetné algebry.

Podstatné vlastnosti právě definovaných algeber shrnuje následující věta.

Věta 1.3.

(i) *Algebra* FA *je spočetná, atomární a lze jí isomorfně vnořit do každé spočetné atomární Booleovy algebry.*

(ii) *Algebra* ASA *je spočetná, atomární a má následující 'roztínací' vlastnost: pod každým prvkem $x \in B$ s nekonečnou množinou $\hat{x}$ leží dva disjunktní prvky $y, z \in B$ s nekonečnými množinami $\hat{y}$, $\hat{z}$. Naopak každá algebra mající všechny tři uvedené vlastnosti je isomorfní s algebrou* ASA. *Dále je algebra* ASA *saturovaná a lze do ní isomorfně vnořit každou spočetnou atomární Booleovu algebru.*

(iii) *Algebra* CA *je až na isomorfismu jediná spočetná bezatomární Booleova algebra.*

Důkaz.
(i) Zřejmé.
(ii) Spočetnost je zřejmá. V příští kapitole v části věnované standardní aritmetice dokážeme atomárnost a naznačíme důkaz 'roztínací' vlastnosti. Zbytek dokazovat nebudeme.
(iii) Plyne z vět B.4(iii) a B.3(ii). □

Nyní vyslovíme a dokážeme několik důležitých vět, které nám usnadní klasifikaci Lindenbaumových algeber v následující kapitole.

Lemma 1.4.

(i) *Nechť $\varphi(\bar{x})$ je atom v $\mathrm{B}^m T$. Pak $T \cup \{(\exists\bar{x})\varphi(\bar{x})\}$ je kompletní.*

(ii) *$T \cup \{\varphi\}$ je kompletní $\Rightarrow$ φ je atom v $\mathrm{B}^0 T$.*

Důkaz.
(i) Předně je teorie $T \cup \{(\exists\bar{x})\varphi(\bar{x})\}$ bezesporná ($\varphi \neq 0$ v $\mathrm{B}^m T$, tedy existuje $\mathcal{A} \models T \cup \{(\exists\bar{x})\varphi(\bar{x})\}$). Dále platí buď $T \vdash \varphi \to \psi$ nebo $T \vdash \varphi \to \neg\psi$ pro každou formuli $\psi(\bar{x}) \in \mathrm{Fm}^m_{L(T)}$. Speciálně to platí i pro každou sentenci ψ, pak ovšem $T \vdash (\exists\bar{x})\varphi(\bar{x}) \to \psi$ nebo $T \vdash (\exists\bar{x})\varphi(\bar{x}) \to \neg\psi$ a vidíme, že T je kompletní.
(ii) Podle tvrzení 1.1(v) je $\mathscr{F}_{0,T\cup\{\varphi\},T} = \{[\psi]_{0,T}; T, \varphi \vdash \psi\}$ ultrafiltr na algebře $\mathrm{B}^0 T$ generovaný prvkem $[\varphi]_{0,T}$. Jistě $\varphi \neq 0$ v $\mathrm{B}^0 T$. Nechť $\psi < \varphi$ v $\mathrm{B}^0 T$. Potom je $[\neg\psi]_{0,T} \in \mathscr{F}_{0,T\cup\{\varphi\},T}$, tj. $T \vdash \psi \to \neg\psi$. To je možné jenom tehdy, je-li $\psi = 0$ v $\mathrm{B}^0 T$. Tedy φ je atom v $\mathrm{B}^0 T$. □

Věta 1.5. *Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) T *nemá jednoduchou kompletizaci.*

(ii) *Každá* $\mathrm{B}^m T$ *je bezatomární.*

(iii) $\mathrm{B}^0 T$ *je bezatomární.*

Důkaz.
(i)⇒(ii) Plyne z lemmatu 1.4(i).
(ii)⇒(iii) Zřejmé.
(iii)⇒(i) Plyne z lemmatu 1.4(ii). □

Poznámka 1.6. *Všimněme si, že lemma 1.4 a tudíž i věta 1.5 platí i pro nespočetné teorie.*

Věta 1.7.

(i) (a) T *nemá jednoduchou kompletizaci* $\Rightarrow \mathrm{B}^m T \cong \mathrm{CA}$ *pro všechna* $m < \omega$. *Naopak* $\mathrm{B}^0 T \cong \mathrm{CA} \Rightarrow T$ *nemá jednoduchou kompletizaci.*

(b) *Nechť* T *nemá jednoduchou kompletizaci,* B *je spočetná Booleova algebra,* $m < \omega$. *Pak existuje* $L(T)$*-teorie* $S \supseteq T$ *tak, že* $B \cong \mathrm{B}^m S$.

(c) *Pro každou nejvýše spočetnou Booleovu algebru* B *existuje teorie* T *taková, že* $\mathrm{B}^0 T \cong B$.

(ii) *Nechť* T *má nekonečný model. Pak* $\mathrm{B}T \cong \mathrm{CA}$.

Důkaz.
(i)(a) Plyne z vět 1.3(iii) a 1.5.
(i)(b) Podle (a) je $\mathrm{B}^m T \cong \mathrm{CA}$. Podle vět B.3(ii) a B.5 existuje filtr $\mathscr{F}$ na $\mathrm{B}^m T$ takový, že $\mathrm{B}^m T/\mathscr{F} \cong B$. Položíme-li $S = \bigcup \mathscr{F}$, pak $S \supseteq T$ a podle tvrzení 1.1(vi) je $\mathrm{B}^m S \cong \mathrm{B}^m T/\mathscr{F}$. Celkem je tedy $\mathrm{B}^m S \cong B$, což jsme chtěli dokázat.
(i)(c) Nechť nejprve $|B| = k < \omega$. Označme $n = |\mathrm{At}(B)|$. Nechť T_n je teorie v prázdném jazyce s jediným axiomem 'existuje nejvýše n prvků'. Algebra $\mathrm{B}^0 T_n$ je konečná a $|\mathrm{At}(\mathrm{B}^0 T_n)| = n$. Podle tvrzení B.1 je $\mathrm{B}^0 T_n \cong B$.
Nechť $|B| = \omega$. Teorie T v jazyce skládajícím se ze spočetně mnoha konstantních symbolů s jediným axiomem 'existují alespoň 2 prvky' nemá jednoduchou kompletizaci a stačí použít (b).
(ii) Nechť $\varphi(\bar{x}) \neq 0$ v $\mathrm{B}T$. Existuje nekonečný model $\mathcal{A} \models T$ takový, že

$\mathcal{A} \models (\exists \bar{x})\varphi(\bar{x})$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ pro nějaké $\bar{a} \in A^{l(\bar{x})}$. Nechť proměnná y není v $\bar{x}$ ani ve φ a označme $\varphi'(\bar{x}, y)$ formuli $\varphi(\bar{x})$ & $y = x_0$. Zřejmě $\varphi' \leq \varphi$ v BT. Jistě $\varphi' \neq 0$ v BT, neboť $\mathcal{A} \models \varphi'(\bar{a}, a_0)$. Protože $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ & $\neg\varphi'(\bar{a}, b)$ pro $b \in A \setminus \{a_0\}$, platí $\mathcal{A} \not\models \varphi \to \varphi'$. Tedy $T \nvdash \varphi \to \varphi'$ a proto $\varphi' \neq \varphi$ v BT. □

Věta 1.8. *Buď $n \geq 1$ přirozené. Potom $\mathrm{B}^0 T \cong \mathrm{FA}^n \Leftrightarrow T$ má spočetně mnoho kompletizací, z nichž právě n není jednoduchých.*

Důkaz. Pravá strana ekvivalence právě znamená, že $\mathrm{B}^0 T$ je spočetná, atomární a má právě n netriviálních ultrafiltrů, tedy $\mathrm{B}^0 T \cong \mathrm{FA}^n$. □

Lemma 1.9. *Neexistuje teorie T, která by měla konečně mnoho nejednoduchých kompletizací a žádnou jednoduchou kompletizaci.*

Důkaz. Nechť $T_0, \ldots, T_{n-1}$ jsou všechny nejednoduché kompletizace T. Pro $i < n-1$ označme φ_i $L(T)$-sentenci, pro kterou platí $T_i \vdash \neg\varphi_i$ a $T_{n-1} \vdash \varphi_i$. Potom $\mathrm{Th}(T_{n-1}) = \mathrm{Th}(T \cup \{\bigwedge_{i<n-1} \varphi_i\})$, což je spor s tím, že kompletizace T_{n-1} není jednoduchá. □

Věta 1.10. *Nechť teorie T má konečně mnoho nejednoduchých kompletizací a všechny její jednoduché kompletizace jsou atomické teorie. Potom je T atomická teorie.*

Důkaz. Nechť $\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{Fm}^m_{L(T)}$ není 0 v $\mathrm{B}^m T$. Existuje jednoduchá kompletizace S teorie T tak, že $\varphi \neq 0$ v $\mathrm{B}^m S$. Kdyby ne, měla by teorie $T \cup \{(\exists \bar{x})\varphi(\bar{x})\}$ konečně mnoho nejednoduchých kompletizací a žádnou jednoduchou kompletizaci. To však není možné podle lemmatu 1.9. Nechť formule φ_1 určuje atom v $\mathrm{B}^m S$ ležící pod φ (taková formule existuje podle tvrzení A.3(ii)) a φ_2 je formule, jejímž přidáním k T dostaneme S. Podle lemmatu 1.4(ii) určuje φ_2 atom v $\mathrm{B}^0 T$. Tedy formule φ_1 & φ_2 určuje atom v $\mathrm{B}^m T$ ležící pod φ. Dokázali jsme, že všechny algebry $\mathrm{B}^m T$ jsou atomární a zbývá použít tvrzení A.3(ii). □

Poznámka 1.11. *Všimněme si, že lemma 1.9 i věta 1.10 platí i pro nespočetné teorie.*

Další informace o Lindenbaumových algebrách lze nalézt v [1] str. 1166-1195.

Kapitola 2

Konkrétní teorie a jejich algebry

2.1 Teorie CE_α

Označme

$$\sigma_1 \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists x_0)(x_0 = x_0),$$

$$\sigma_n \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists x_0)\dots(\exists x_{n-1}) \textstyle\bigwedge_{i<j<n} x_i \neq x_j \text{ pro } n \geq 2 \text{ přirozená.}$$

Formule σ_n říká 'existuje alespoň n prvků'.

Buď $\alpha \leq \omega$. Teorie CE_α je teorie v jazyce $L_\alpha = \{c_i;\ i < \alpha\}$, kde c_i jsou konstantní symboly, bez speciálních axiomů. Teorie CE_0 se někdy značí také PE a říká se jí teorie čisté rovnosti.

Fakt 2.1. *Nechť Λ je množina všech atomických formulí jazyka L_α a formulí tvaru σ_n pro $n < \omega$. Pak Λ je eliminační množina pro teorii CE_α.*

♠ Je-li $E = \{\{a^i_j;\ j < l_i\};\ i < k\}$, kde $1 \leq l_i \leq \alpha$ pro $i < k$, $\sum_{i<k} l_i = \alpha$ a $1 \leq k \leq \alpha$, libovolný rozklad množiny α, pak pro $m \geq |E|$ přirozené označme $\mathsf{CE}^{\mathsf{E},\mathsf{m}}_\alpha$ rozšíření teorie CE_α o axiomy $c_{a^i_{j-1}} = c_{a^i_j}$ pro $1 \leq j < l_i$, $i < k$, $c_{a^{i_1}_0} \neq c_{a^{i_2}_0}$ pro $i_1 < i_2 < k$ a $\sigma_m \mathbin{\&} \neg\sigma_{m+1}$. Teorie $\mathsf{CE}^{\mathsf{E},\mathsf{m}}_\alpha$ jsou právě všechny kompletizace teorie CE_α, tedy teorie CE_α má ω resp. 2^ω kompletizací pro $\alpha < \omega$ resp. $\alpha = \omega$. Každá tato kompletizace je zřejmě silně minimální teorie.

♠ Buď $\alpha \leq \omega$, $m \geq 1$ přirozené a $\mathcal{A} = \langle A, c_i^A \rangle_{i<\alpha}$ model teorie CE_α. Označme $l_{\mathcal{A}} = |\{c_i^A;\ i < \alpha\}|$. Algebra $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$ je konečná $\Leftrightarrow$ $l_{\mathcal{A}} < \omega$. V tom případě je

$$|\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})| = 2^{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} l_{\mathcal{A}}^{m-j} \sum_{i=0}^{\min(j,|A|-l_{\mathcal{A}})} S(j,i)}.$$

Speciálně pro $\mathcal{A} \models \mathsf{PE}$ máme

$$|\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})| = 2^{\sum_{i=0}^{\min(j,|A|)} S(j,i)}.$$

Důkaz. Uvedená ekvivalence je zřejmá. Nechť tedy $l_{\mathcal{A}} < \omega$. Sestrojíme posloupnost $a_0, a_1, \ldots$ přirozených čísel délky $l_{\mathcal{A}}$ takto: Položíme $a_0 = 0$. Je-li $1 \leq k < l_{\mathcal{A}}$ a byla-li již čísla a_j pro $j < k$ sestrojena, položíme $a_k = \min\{i < \alpha; c_i^A \neq c_{a_j}^A \text{ pro } j < k\}$. Určíme počet p atomů algebry $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$. Popišme, jak takový atom P vypadá. Existuje podmnožina $M \subseteq m$ tak, že všechny uspořádané m-tice v P mají na pozici s indexem v $m \setminus M$ tutéž konstantu $c_{a_i}^A$ a na pozicích s indexem v M prvky z A různé od všech konstant $c_{a_i}^A$. Navíc mezi prvky na pozicích s indexy v M musí být definovány vztahy pomocí $=$ a $\neq$. Tyto atomy jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s nejvýše $\min(|M|, |A| - l_{\mathcal{A}})$-prvkovými rozklady množiny M (mezi prvky na pozicích s indexy patřícími do stejné třídy rozkladu platí rovnost, mezi prvky náležejícími různým třídám platí nerovnost). Nyní již není těžké tyto atomy spočítat. Buď $j < m$. Máme $\binom{m}{j}$ možností, jak zvolit j-prvkovou množinu M, umístit konstanty na pozice s indexy v $m \setminus M$ můžeme $l_{\mathcal{A}}^{m-j}$ způsoby a počet nejvýše $\min(j, |A| - l_{\mathcal{A}})$-prvkových rozkladů množiny M je $\sum_{i=0}^{\min(j,|A|-l_{\mathcal{A}})} S(j,i)$. Zbývá tato tři čísla vynásobit a výsledek sečíst přes j od 0 do m. $\square$

♠ Pro $\alpha < \omega$ jsou teorie CE_α atomické a

$$\mathrm{B}^0\mathsf{CE}_\alpha \cong \mathrm{FA}^{B_\alpha}. \tag{2.1}$$

Algebry $\mathrm{B}^m\mathsf{CE}_\omega$ nejsou atomární ani bezatomární a

$$\mathrm{B}^0\mathsf{CE}_\omega \cong \mathscr{P}(1) \times \mathrm{CA}. \tag{2.2}$$

Důkaz. Pro $\alpha < \omega$ mají teorie CE_α právě B_α nejednoduchých kompletizací a všechny jejich kompletizace jsou silně minimální a tedy podle věty A.6(iii) atomické. Podle věty 1.10 jsou tedy teorie CE_α pro $\alpha < \omega$ atomické a podle věty 1.8 platí (2.1). V algebře $\mathrm{B}^m\mathsf{CE}_\omega$ je formule ‘existuje právě 1 prvek’ atom, zatímco např. pod formulí ‘existují právě 2 prvky’ žádný atom neleží, tedy algebry $\mathrm{B}^m\mathsf{CE}_\omega$ nejsou atomární ani bezatomární. Teorie CE_ω rozšířená o axiom σ_2 nemá žádnou jednoduchou kompletizaci, tudíž podle věty 1.7(i)(a) je její 0-tá Lindenbaumova algebra CA. Odtud už plyne vztah (2.2). $\square$

2.2 Aritmetické teorie

Jazyk následníka je $\{S\}$, kde S je unární funkční symbol. *Jazyk následníka s nulou* je expanze jazyka následníka o konstantní symbol 0, tj. $\{S, 0\}$. Pro term t a $n < \omega$ označme

$$S^n t = \begin{cases} \underbrace{S \dots S}_{n-\text{krát}} t & \text{pro } n \geq 1 \\ t & \text{pro } n = 0 \end{cases}$$

a $\underline{n} = S^n 0$. Term $\underline{n}$ se nazývá *n-tý numerál.* Strukturu $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ nazýváme *standardní model aritmetiky.* Ještě označme

$$I_\varphi \overset{\text{def}}{\equiv} (\forall \bar{y})((\varphi(0, \bar{y}) \;\&\; (\forall x)(\varphi(x, \bar{y}) \rightarrow \varphi(Sx, \bar{y}))) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \bar{y})).$$

Formule I_φ je *axiom indukce pro formuli φ.*

2.2.1 Presburgerova aritmetika PR

Teorie PR má jazyk $\{S, +, 0\}$, který je expanzí jazyka následníka s nulou o binární funkční symbol $+$ a její axiomy jsou:

Q1: $(\forall x)(0 \neq Sx)$,

Q2: $(\forall x)(\forall y)(Sx = Sy \rightarrow x = y)$,

Q3: $(\forall x)(x + 0 = x)$,

Q4: $(\forall x)(\forall y)(x + Sy = S(x + y))$,

plus schéma axiomů indukce I_φ pro všechny $\varphi(x, \bar{y}) \in \mathrm{Fm}_{L(\mathsf{PR})}$. Její model je např. struktura $\langle \mathbb{N}, S, +, 0 \rangle$.

Jsou-li s, t termy jazyka $L(\mathsf{PR})$ a $m \geq 1$ přirozené, označme

$t < s \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists z)(z \neq 0 \;\&\; t + z = s)$, $t \equiv_m s \overset{\text{def}}{\equiv} (\exists z)(t = s + mz)$,
$At = \{t = s;\ t, s \text{ jsou termy teorie } \mathsf{PR}\}$,
$At' = \{t < s;\ t, s \text{ jsou termy teorie } \mathsf{PR}\}$,
$K = \{t \equiv_m s;\ t, s \text{ jsou termy teorie } \mathsf{PR},\ 1 \leq m < \omega\}$.

Fakt 2.2. *Množina $\Lambda = At \cup At' \cup K$ je eliminační pro teorii* PR.

♠ Pro všechna $m < \omega$ přirozená je algebra $\mathrm{B}^m\mathsf{PR}$ atomární a pro $\mathcal{A} \models \mathsf{PR}$ a $m \geq 1$ je

$$\mathrm{At}(\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})) = \{\{\langle \underline{a_0}, \ldots, \underline{a_{m-1}} \rangle\}; a_0, \ldots, a_{m-1} \in \omega\}.$$

Důkaz. $\mathrm{B}^0\mathsf{PR} \cong 2$ z úplnosti PR. Nechť $\mathcal{A} \models \mathsf{PR}$ a $m \geq 1$. Protože teorie PR je úplná, platí podle tvrzení 1.2 $\mathrm{B}^m T \cong \mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$. Z toho jak vypadá eliminační množina vidíme, že každá neprázdná množina $X \in \mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$ obsahuje prvek $\langle \underline{a_0}, \ldots, \underline{a_{m-1}} \rangle$ pro nějaká $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \omega$ a protože zřejmě všechny singletony obsahující právě tyto prvky jsou definovatelné, je důkaz hotov. □

2.2.2 Robinsonova aritmetika Q

Teorie Q má jazyk $\{S, +, \cdot, 0, \leq\}$, který je expanzí jazyka $\mathrm{L}(\mathsf{PR})$ o binární funkční symbol $\cdot$ a binární predikátový symbol $\leq$. Její axiomy jsou Q1-Q4 a:

Q5: $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$,

Q6: $(\forall x)(\forall y)(x \cdot Sy = x \cdot y + x)$,

Q7: $(\forall x)(x \neq 0 \to (\exists y)(x = Sy))$,

Q8: $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(z + x = y))$.

Standardní model aritmetiky $\mathcal{N}$ je jejím modelem.

♠ Pro všechna $m < \omega$ platí

$$\mathrm{B}^m\mathsf{Q} \cong \mathrm{CA}.$$

Důkaz. Z věty o neúplnosti A.10 plyne, že teorie Q nemá jednoduchou kompletizaci a stačí použít větu 1.7(i)(a). □

2.2.3 Peanova aritmetika P

Peanova aritmetika je rozšířením Robinsonovy aritmetiky o schéma axiomů indukce I_φ pro všechny $\varphi(x, \bar{y}) \in \mathrm{Fm}_{L(\mathsf{Q})}$. Standardní model aritmetiky $\mathcal{N}$ je její model.

♠ Pro všechna $m < \omega$ platí

$$\mathrm{B}^m\mathsf{P} \cong \mathrm{CA}.$$

Důkaz. Důkaz je naprosto stejný jako u Robinsonovy aritmetiky. $\square$

2.2.4 Standardní aritmetika SA

Standardní aritmetika je teorie $\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ standardního modelu aritmetiky. Je tedy jednou z kompletizací Peanovy aritmetiky.

♠ Teorie SA je atomická.

Důkaz. $\mathrm{B}^0\mathsf{SA} \cong 2$ z úplnosti SA. Buď $m \geq 1$. Pro formuli $\varphi(\bar{x})$, kde $\bar{x} = x_1 \dots x_m$ definujme

$$\varphi'(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \varphi(\bar{x}) \& (\forall \bar{y})(\varphi(\bar{y}) \rightarrow p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_m^{x_m} \leq p_1^{y_1} \cdot \dots \cdot p_m^{y_m}),$$

kde p_i je i-té prvočíslo. Pro φ konzistentní s T je φ' atom v algebře $\mathrm{B}^m\mathsf{SA}$. Předpokládejme, že φ' atom není. Pak existuje formule $\psi(\bar{x})$ taková, že $T \vdash (\exists \bar{x})(\varphi'(\bar{x}) \& \psi(\bar{x}))$ a $T \vdash (\exists \bar{x})(\varphi'(\bar{x}) \& \neg\psi(\bar{x}))$, tj. v modelu $\mathcal{A} \models T$ máme dvě m-tice $\bar{a}$, $\bar{b}$ takové, že

$$\mathcal{A} \models \varphi'[\bar{a}] \& \psi[\bar{a}] \& \varphi'[\bar{b}] \& \neg\psi[\bar{b}].$$

Odtud vzhledem k definici φ' plyne, že $a_i = b_i$ pro $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ a tedy $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \& \neg\psi[\bar{b}]$, což je spor. Zbývá použít tvrzení A.3(ii). $\square$

♠ Pro každé $m \geq 1$ má algebra $\mathrm{B}^m\mathsf{SA}$ 'roztínací' vlastnost.
Náznak důkazu. Buď $m \geq 1$ přirozené. Protože je SA úplná teorie, můžeme podle tvrzení 1.2 důkaz provést pro algebru $\mathrm{Df}^m(\mathcal{N})$. Nechť $\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{Fm}^m_{L(\mathsf{SA})}$ je formule, která definuje v algebře $\mathrm{Df}^m(\mathcal{N})$ množinu, pod kterou leží nekonečně mnoho atomů. Tyto atomy jsou singletony, jejichž prvky jsou (po případném zakódování 1-ticemi) lineárně uspořádány relací $\leq$. Označme L množinu těch prvků, které jsou v uspořádání $\leq$ na lichých místech a S množinu prvků na sudých místech. Lze sestrojit formuli φ_1 resp. φ_2 definující množinu L resp. S. Potom φ & φ_1 a φ & φ_2 jsou hledané formule, které v $\mathrm{Df}^m(\mathcal{N})$ leží pod φ, definují disjunktní množiny a pod každou z nich leží nekonečně mnoho atomů.

2.2.5 Teorie následníka SC

Označme $0(x) \stackrel{\text{def}}{\equiv} (\forall y)(Sy \neq x)$ & $(\forall z)(z \neq x \rightarrow (\exists y)(Sy = z))$.
Teorie SC je teorie v jazyce následníka, která má axiom Q2 a:

Q9: $(\exists x)0(x)$,

Q10: $(\forall x)(x \neq S^n x)$ pro všechna $n \geq 1$ přirozená.

Fakt 2.3. *Nechť Λ je množina všech formulí tvaru $x = x$, $0(x)$ a $S^n x = y$ pro všechna $n < \omega$. Pak Λ je eliminační množina pro teorii* SC.

♠ Teorie SC je atomická.

Důkaz. Teorie SC je silně minimální (to je snadno vidět z faktu 2.3), tedy je atomická podle věty A.6(iii). □

2.2.6 Teorie následníka s nulou $\mathsf{SC0}$

Teorie $\mathsf{SC0}$ je teorie v jazyce následníka s nulou, která má axiomy Q1, Q2, Q7 a schéma Q10.

Fakt 2.4. *Nechť Λ je množina všech formulí tvaru $x = x$, $S^n x = y$ a $S^n x = S^m 0$ pro všechna $m, n < \omega$. Pak Λ je eliminační množina pro teorii* $\mathsf{SC0}$. *Speciálně má* $\mathsf{SC0}$ *eliminaci kvantifikátorů.*

♠ Teorie $\mathsf{SC0}$ je atomická.

Důkaz. Důkaz je naprosto stejný jako u teorie SC. □

2.3 Teorie uspořádání

Teorie (ostrého) lineárního uspořádání LO je teorie v jazyce $\{<\}$, kde $<$ je binární predikátový symbol, s axiomy:

O1: $(\forall x)(\neg x < x)$ (antireflexivita),

O2: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \;\&\; y < z \to x < z)$ (tranzitivita),

O3: $(\forall x)(\forall y)(x = y \vee x < y \vee y < x)$ (trichotomie).

Pomocí axiomů O1 a O2 lze snadno dokázat sentenci $(\forall x)(\forall y)(x < y \to \neg y < x)$ (antisymetrie).

2.3.1 Teorie hustého lineárního uspořádání bez konců DeLO

Teorie DeLO vznikne rozšířením teorie LO o axiom hustoty uspořádání a axiom neexistence nejmenšího a největšího prvku:

O4: $(\forall x)(\forall y)(x < y \to (\exists z)(x < z \;\&\; z < y))$,

O5: $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(y < x \;\&\; x < z)$.

Její modely jsou např. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Fakt 2.5. *Teorie* DeLO *má eliminaci kvantifikátorů.*

♠ Pro všechna $m < \omega$ platí

$$|\mathrm{B}^m \mathsf{DeLO}| = 2^{\sum_{k=0}^{m} k! S(m,k)}.$$

Důkaz. Buď $m \geq 1$ přirozené, $\mathcal{A} \models \mathsf{DeLO}$. Z úplnosti teorie DeLO plyne podle tvrzení 1.2, že $\mathrm{B}^m\mathsf{DeLO} \cong \mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$. Spočítáme atomy algebry $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$. Atomy jsou definovány otevřenými formulemi obsahujícími m různých proměnných (nechť jsou to $x_0, \ldots, x_{m-1}$), přičemž každá dvojice těchto proměnných má mezi sebou definován vztah pomocí $=$ nebo $<$ a tyto vztahy musí být takové, aby výsledná formule nedefinovala $\emptyset$. Tyto formule jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci s uspořádanými rozklady[1] množiny

[1] Uspořádaný rozklad vznikne z 'obyčejného' rozkladu tak, že jeho třídy uvažujeme v nějakém pořadí. Tedy rozkladu mohutnosti k odpovídá $k!$ různých uspořádaných rozkladů.

m. Jsou-li indexy $i \neq j$ v téže třídě rozkladu, platí $x_i = x_j$, jsou-li v různých třídách rozkladu a třída obsahující i předchází třídu obsahující j, pak $x_i < x_j$. Tedy formule definující atom odpovídající uspořádanému rozkladu $E = \langle \{a^i_j;\ j < l_i\};\ i < k\rangle$, kde $1 \leq l_i \leq m$ pro $i < k$, $1 \leq k \leq m$ a $\sum_{i<k} l_i = m$, je

$$\varphi_E \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\bigwedge_{i<k} \bigwedge_{1 \leq j < l_i} x_{a^i_{j-1}} = x_{a^i_j} \right) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i < k} x_{a^{i-1}_0} < x_{a^i_0} \right).$$

Uspořádaných rozkladů množiny m je $\sum_{k=0}^{m} k!S(m,k)$. Nakonec dosazením snadno ověříme, že získaný vzorec platí i pro $m = 0$. □

2.3.2 Teorie diskrétního lineárního uspořádání DiLO

Teorie DiLO vznikne rozšířením teorie LO o axiom existence bezprostředního předchůdce a axiom existence bezprostředního následníka:

O7: $(\forall x)(\exists y)(y < x \;\&\; \neg(\exists z)(y < z \;\&\; z < x))$,

O8: $(\forall x)(\exists y)(x < y \;\&\; \neg(\exists z)(x < z \;\&\; z < y))$.

Její model je např. $\langle \mathbb{Z}, < \rangle$. Označme $\bar{z}_n = z_0, \ldots, z_{n-1}$ a

$x <_0 y \stackrel{\text{def}}{\equiv} x < y \;\&\; \neg(\exists z)(x < z \;\&\; z < y)$,

$x <_n y \stackrel{\text{def}}{\equiv} x < y \;\&\; (\exists \bar{z}_n)(x <_0 z_0 \;\&\; \left(\bigwedge_{1 \leq i < n} z_{i-1} <_0 z_i\right) \;\&\; z_{n-1} <_0 y)$

pro $n \geq 1$ přirozená.

Formule $x <_n y$ říká, že $x < y$ a mezi x a y leží právě n prvků.

Fakt 2.6. *Nechť Λ je množina všech atomických formulí jazyka $L(\mathsf{DiLO})$ a formulí tvaru $x <_n y$ pro všechna $n < \omega$. Pak Λ je eliminační množina pro teorii* DiLO.

♠ Teorie DiLO je atomická.

Důkaz. Buď $m \geq 2$ přirozené. Teorie DiLO je úplná. Na základě znalosti eliminační množiny můžeme podobně jako pro teorii DeLO nalézt formule definující atomy v $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$, kde $\mathcal{A} \models \mathsf{DiLO}$. Nechť $1 \leq k \leq m$ a $E_{m,k}$ je množina všech uspořádaných rozkladů množiny m mohutnosti k. Každému rozkladu $E \in E_{m,k}$ a funkci $f \in {}^{k-1}\omega$ přiřadíme formuli $\varphi_{E,f}$ takto: Je-li

$$E = \langle \{a^i_j;\ j < l_i\};\ i < k\rangle,$$

kde $1 \leq l_i \leq m$ pro $i < k$ a $\sum_{i<k} l_i = m$, potom definujeme

$$\varphi_{E,f} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \left(\bigwedge_{i<k} \bigwedge_{1 \leq j < l_i} x_{a^i_{j-1}} = x_{a^i_j} \right) \& \left(\bigwedge_{1 \leq i < k} x_{a^{i-1}_0} <_{f(i-2)} x_{a^i_0} \right).$$

Formule $\varphi_{E,f}$ definují atomy v $\mathrm{B}^m\mathsf{DiLO}$. Pro $m \in \{0,1\}$ zřejmě $\mathrm{B}^m\mathsf{DiLO} \cong 2$. Odtud už snadno (s použitím tvrzení A.3(ii)) vidíme, že DiLO je atomická.

$\square$

2.4 Teorie náhodných grafů RG

Pro $n \geq 1$ přirozená označme $\bar{x}_n = x_0, \ldots, x_{n-1}$, $\bar{y}_n = y_0, \ldots, y_{n-1}$ a

$$\varrho_n \stackrel{\text{def}}{\equiv} (\forall \bar{x}_n)(\forall \bar{y}_n)\left(\bigwedge_{i<n}\bigwedge_{j<n} x_i \neq y_j \to (\exists z)\bigwedge_{i<n}(R(x_i, z)\ \&\ \neg R(y_i, z))\right).$$

Teorie RG je teorie v jazyce $\{R\}$, kde R je binární predikátový symbol, s axiomy:

G1: $(\forall x)\neg R(x, x)$,

G2: $(\forall x)(\forall y)(R(x, y) \to R(y, x))$,

G3: $(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x \neq y\ \&\ y \neq z\ \&\ z \neq x)$,

G4: ϱ_n pro všechna $n \geq 1$ přirozená.

Model $\mathcal{A} = \langle A, R^A\rangle$ teorie RG je graf s množinou vrcholů A a množinou hran R^A. Tento graf neobsahuje smyčky (G1), je neorientivaný (G2), má alespoň 3 vrcholy (G3) a pro každé dvě konečné disjunktní množiny vrcholů X a Y existuje vrchol, který je spojen hranou s každým vrcholem z X a s žádným vrcholem z Y (G4).

Fakt 2.7. *Teorie* RG *má eliminaci kvantifikátorů.*

♠ Pro všechna $m < \omega$ platí

$$|\mathrm{B}^m\mathsf{RG}| = 2^{\sum_{k=0}^{m} 2^{\binom{k}{2}} S(m,k)}.$$

Důkaz. Nechť $m \geq 1$ přirozené. Díky úplnosti teorie RG můžeme přejít k počítání atomů v $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$ pro libovolný model $\mathcal{A} \models \mathsf{RG}$. Formule definující atomy jsou otevřené a obsahují m různých proměnných (nechť jsou to $x_0, \ldots, x_{m-1}$), přičemž mezi každou dvojicí proměnných je definován vztah $=$, R, nebo $\neg R$. Nechť $1 \leq k \leq m$. Existuje $S(m, k)$ k-prvkových rozkladů množiny m. Náleží-li indexy $i \neq j$ do téže třídy rozkladu, platí $x_i = x_j$, nenáleží-li do téže třídy, platí buď $R(x_i, x_j)$ (odtud už plyne $x_i \neq x_j$) nebo $x_i \neq x_j\ \&\ \neg R(x_i, x_j)$. Pro daný k-prvkový rozklad můžeme mezi jeho třídami rozmístit vztahy R a $\neg R$ $2^{\binom{k}{2}}$ způsoby. Tedy počet atomů je $\sum_{k=0}^{m} 2^{\binom{k}{2}} S(m, k)$. Dosazením ověříme platnost vzorečku i pro $\mathrm{B}^0\mathsf{RG}$. $\square$

2.5 Teorie algebraicky uzavřených těles ACF

Teorie těles FL je teorie v jazyce $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$, kde $+$ a $\cdot$ jsou binární funkční symboly, $-$ je unární funkční symbol, 0 a 1 jsou konstantní symboly, s axiomy:

F1: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x + (y + z) = (x + y) + z)$,

F2: $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$,

F3: $(\forall x)(x + 0 = x)$,

F4: $(\forall x)(x + (-x) = 0)$,

F5: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$,

F6: $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$,

F7: $(\forall x)(x \cdot 1 = x)$,

F8: $(\forall x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1))$,

F9: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$,

F10: $0 \neq 1$.

Pro $n \geq 1$ přirozená označme $n \times x \stackrel{\text{def}}{\equiv} \underbrace{x + \ldots + x}_{n-\text{krát}}$. Term $n \times x$ se nazývá *přirozený násobek prvku* x.

Tvrzení 2.8. *Nechť* $\mathcal{A} \models \mathsf{FL}$. *Pak nastane právě jedna ze dvou možností:*

(i) *Všechny přirozené násobky prvku* 1_A *jsou navzájem různé (a nenulové). V tomto případě se* $\mathcal{A}$ *nazývá těleso charakteristiky* 0.

(ii) *Existuje (jediné) prvočíslo* $p > 1$ *takové, že* $p \times 1_A = 0_A$. *V tomto případě se* $\mathcal{A}$ *nazývá těleso charakteristiky* p.

Důkaz. Předpokládejme, že existují $n > m$ přirozená tak, že $n \times 1_A = m \times 1_A$. Potom $(n - m) \times 1_A = 0_A$. Označme $p = \min\{k \geq 1; k \times 1_A = 0_A\}$. Jistě $p > 1$. Dokážeme, že p je prvočíslo. Předpokládejme, že $p = m \cdot n$, $n, m < p$, je složené číslo. Potom $p \times 1_A = (m \times 1_A) \cdot (n \times 1_A) = 0$, tedy buď $m \times 1_A = 0_A$ nebo $n \times 1_A = 0_A$. To je spor s volbou čísla p. $\square$

Teorie ACF vznikne rozšířením teorie FL o schéma axiomů 'každý normovaný polynom kladného stupně má kořen':

F11: $(\forall x_0)\ldots(\forall x_{n-1})(\exists y)(x_0 + x_1 \cdot y + \ldots + x_{n-1} \cdot y^{n-1} + y^n = 0)$
pro všechna $n \geq 1$ přirozená.

Teorie ACF nemá konečné modely. Bylo-li by totiž $\mathcal{A} \models \mathsf{ACF}$, $A = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, $2 \leq n < \omega$, potom polynom $p(x) = \prod_{i<n}(x - a_i) + 1$ nemá kořen v A. Model teorie ACF je např. $\mathcal{C} = \langle \mathbb{C}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$.

Fakt 2.9. *Teorie* ACF *má eliminaci kvantifikátorů.*

♠ Pro prvočíslo $p > 1$ označme $\mathsf{ACF_p}$ rozšíření teorie ACF o axiom $p \times 1 = 0$. Označme $\mathsf{ACF_0}$ rozšíření teorie ACF o schéma $p \times 1 \neq 0$ pro všechna prvočísla $p > 1$. Teorie $\mathsf{ACF_p}$ ($p = 0$ nebo $p > 1$ prvočíslo) je *teorie algebraicky uzavřených těles charakteristiky* p a je to kompletizace teorie ACF. Podle tvrzení 2.8 teorie ACF jiné kompletizace nemá.

♠ Teorie ACF je atomická a

$$\mathrm{B}^0(\mathsf{ACF}) \cong \mathrm{FA}. \tag{2.3}$$

Důkaz. Všechny teorie $\mathsf{ACF_p}$ jsou silně minimální (to snadno plyne z faktu 2.9) a tedy atomické (dle tvrzení A.6(iii)) a jediná z nich není jednoduchou kompletizací teorie ACF. Tudíž podle věty 1.10 je ACF atomická a podle věty 1.8 platí (2.3). □

2.6 Přehled výsledků

teorie T		úplná	$I(\kappa, T)$			modelově úplná	QE[2]	rozhod-nutelná	silně minimální
			$\kappa < \omega$	$\kappa = \omega$	$\kappa > \omega$				
CE_α	$\alpha < \omega$	ne	B_α	B_α	B_α	ne	ne	ano	—
	$\alpha = \omega$		ω	2^ω	2^ω				
PR		ano	0	2^ω	2^κ	ne	ne	ano	ne
Q		ne	0	2^ω	2^κ	ne	ne	ne	—
P		ne	0	2^ω	2^κ	ne	ne	ne	—
SA		ano	0	2^ω	2^κ	ne	ne	ne	ne
SC		ano	0	ω	1	ne	ne	ano	ano
SC0		ano	0	ω	1	ano	ano	ano	ano
DeLO		ano	0	1	2^κ	ano	ano	ano	ne
DiLO		ano	0	2^ω	2^κ	ne	ne	ano	ne
RG		ano	0	1	?	ano	ano	ano	ne
ACF		ne	0	ω	ω	ano	ano	ano	—

Tabulka 2.1: Teorie a jejich vlastnosti

[2] QE = eliminace kvantifikátorů

teorie T		$\mathrm{B}^m T$	
		$m = 0$	$m > 0$
CE_α	$\alpha < \omega$	FA^{B_α}	spočetné, atomární
	$\alpha = \omega$	$2 \times \mathrm{CA}$	spočetné, nejsou atomární ani bezatomární
PR		2	spočetné, atomární
Q		CA	CA
P		CA	CA
SA		2	ASA
SC		2	spočetné, atomární
SC0		2	spočetné, atomární
DeLO		2	$\mathscr{P}(\sum_{k=0}^{m} k! S(m,k))$
DiLO		2	spočetné, atomární
RG		2	$\mathscr{P}(\sum_{k=0}^{m} 2^{\binom{k}{2}} S(m,k))$
ACF		FA	spočetné, atomární

Tabulka 2.2: Teorie a jejich algebry

Dodatek A

Teorie modelů

V tomto dodatku poněkud zhuštěnou formou shrneme používané značení, definice a věty z oblasti teorie modelů. Slovo teorie znamená teorii prvního řádu, ne nutně spočetnou.

Pro danou teorii T značíme $L(T)$ její jazyk. Mohutnost jazyka L definujeme jako nejmenší nekonečný kardinál κ takový, že $|L| \leq \kappa$ a značíme jí $\|L\|$. *Spočetnou teorií* rozumíme teorii ve spočetném jazyce. Struktury značíme kaligrafickým písmem, např. $\mathcal{A}$, jejich univerzum pak tím samým písmenem, ale obyčejným písmem, tj. A. Mohutností struktury rozumíme mohutnost jejího univerza, značíme jí $\|\mathcal{A}\|$. Symbol $\bar{a}$ značí nějakou m-tici $a_0, \ldots, a_{m-1}$; a_i je její i-tý člen a $l(\bar{a})$ počet jejích prvků, tedy m. Je-li $\bar{a}$ nějaká m-tice prvků z definičního oboru funkce h, symbol $h\bar{a}$ značí m-tici $h(a_0), \ldots, h(a_{m-1})$. Symbol $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ značí, že $\bar{x}, \bar{y}$ jsou dvě disjunktní, prosté a konečné posloupnosti proměnných, mezi nimiž jsou všechny volné proměnné formule φ. Symbolem Fm_L^m, $m < \omega$, značíme množinu všech formulí jazyka L s nejvýše m volnými proměnnými, symbolem Fm_L značíme množinu všech formulí jazyka L.

V celém následujícím odstavci nechť T je teorie v jazyce L. T se nazývá *úplná* (též *kompletní*), jestliže je bezesporná a pro každou sentenci φ v L platí buď $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$. *Kompletizací* teorie T rozumíme kompletní L-teorii $T' \supseteq T$. Kompletizace teorie T, která vznikne přidáním jediné sentence k teorii T, se nazývá *jednoduchá kompletizace*. Označíme $\mathrm{Th}(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L^0; T \vdash \varphi\}$. T je *rozhodnutelná*, je-li množina $\mathrm{Th}(T)$ rekurzivní. Je-li $\mathcal{A}$ L-struktura, $X \subseteq A$, pak *expanze L_X jazyka L o jména prvků z množiny X* je expanze jazyka L o nové navzájem různé konstantní symboly $\{c_x; x \in X\}$. Tuto expanzi zapisujeme též jako $\langle L, c_x\rangle_{x\in X}$. *Expanze $\mathcal{A}_X$ struktury $\mathcal{A}$* je struktura pro $\langle L, c_x \rangle_{x \in X}$, která se získá z $\mathcal{A}$ tak, že c_x se realizuje jako jako x pro každé $x \in X$. Buďte $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dvě L-struktury. Řekneme, že $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou *elementárně ekvivalentní*, platí-li v nich právě tytéž L-sentence; píšeme pak $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Funkce $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je elementární vnoření $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, když pro každou L-formuli $\varphi(\bar{x})$ a každou $l(\bar{x})$-tici $\bar{a}$ prvků z $\mathcal{A}$ platí $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h\bar{a}]$. Pokud je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ a id_A je elementární vnoření, říkáme, že $\mathcal{B}$ je *elementární rozšíření* (též *extenze*) $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}$ je *elementární podstruktura* (též *podmodel*) $\mathcal{B}$; píšeme pak $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$ nebo $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$. T je *modelově úplná*, jestliže pro každé dva její modely $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ z $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ plyne $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$. Množina Λ L-formulí se nazývá *eliminační množina* pro T, jestliže pro každou L-formuli $\varphi(\bar{x})$ existuje booleovská kombinace $\psi(\bar{x})$ formulí z Λ (tj. výrok nad konečnou podmnožinou množiny Λ) tak, že $T \vdash (\forall \bar{x})(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$. Je-li množina všech atomických L-formulí eliminační pro T, říkáme, že T má *eliminaci kvantifikátorů*. Je-li $X \subseteq A$, pak *m-typ nad X v $\mathcal{A}$* je množina $p(\bar{x}) \subseteq \mathrm{Fm}^m_{L_X}$, která je konečně realizovaná v $\mathcal{A}_X$, tj. pro každou $q \subseteq p$ konečnou platí $\mathcal{A}_X \models (\exists \bar{x}) \bigwedge_{\varphi \in q} \varphi$. Maximální m-typ nad X v $\mathcal{A}$ se nazývá *kompletní m-typ nad X v $\mathcal{A}$*. *Kompletní m-typ m-tice $\bar{a} \in A^m$ nad X v $\mathcal{A}$* je množina $\mathrm{tp}^m(\bar{a}, X, \mathcal{A}) = \{\varphi(\bar{x}) \in \mathrm{Fm}^m_{L_X}; \mathcal{A}_X \models \varphi[\bar{a}]\}$. Řekneme, že množina $p(\bar{x}) \subseteq \mathrm{Fm}^m_L$ je *m-hlavní v T*, existuje-li L-formule $\psi(\bar{x})$ konzistentní s T tak, že $T \vdash (\forall \bar{x})(\psi(\bar{x}) \to \varphi(\bar{x}))$ pro všechny $\varphi \in p$. Model $\mathcal{A}$ je *saturovaný*, jestliže každý typ v $\mathcal{A}$ nad nějakou množinou $X \subseteq A$ je realizován v $\mathcal{A}_X$. Model $\mathcal{A}$ je *prvomodel*, lze-li jej elementárně vnořit do každého modelu elementárně ekvivalentního s $\mathcal{A}$. Model $\mathcal{A}$ je *atomický model*, když pro každé $m < \omega$ je kompletní m-typ v $\mathcal{A}$ jakékoli m-tice prvků z A typ m-hlavní v $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$. Bezesporná teorie T je *atomická*, jestliže každá formule $\varphi(\bar{x})$ bezesporná s T náleží nějakému hlavnímu kompletními $l(\bar{x})$-typu teorie T. Pro kardinál $\kappa > 0$ definujeme funkci $I(\kappa, T)$, která udává počet neisomorfních modelů teorie T mohutnosti κ. Je-li $I(\kappa, T) = 1$, říkáme, že T je *κ-kategorická*. Kompletní teorie T je *silně minimální*, jestliže pro každý její model $\mathcal{A}$ platí, že A je nekonečná a X nebo $A \setminus X$ je konečná pro každou množinu $X \in \mathrm{Df}^1(A, \mathcal{A})$.

Nakonec shrneme některé důležité věty. Na některé z nich se odvoláváme v textu, jiné lze použít k důkazu položek v tabulce 2.1. Důkazy většiny z nich lze nalézt v [3].

Věta A.1. (Vaught) *Nechť T je bezesporná teorie v jazyce L, která nemá žádné konečné modely, nechť κ je kardinál takový, že $\|L\| \leq \kappa$ a T je κ-kategorická. Pak T je úplná.*

Věta A.2. (Morley) *Buď T kompletní teorie. Potom $I(\kappa, T) = 1$ pro nějaké*

$\kappa > \|L(T)\| \Rightarrow I(\kappa, T) = 1$ *pro každé* $\kappa > \|L(T)\|$.

Tvrzení A.3.

(i) *Model* $\mathcal{A}$ *je atomický* $\Leftrightarrow$ *pro každé* $m < \omega$ *a* $\bar{a} \in A^m$ *existuje atom* D *algebry* $\mathrm{Df}^m(\mathcal{A})$ *tak, že* $\bar{a} \in D$.

(ii) *Bezesporná teorie* T *je atomická* $\Leftrightarrow$ *pro každé* $m < \omega$ *je algebra* $\mathrm{B}^m T$ *atomární.*

Věta A.4. (o prvomodelech pro spočetné jazyky)

(i) *Model spočetného jazyka je prvomodel, právě když je spočetný a atomický.*

(ii) *Buď* T *úplná teorie ve spočetném jazyce.*

  (a) (existence prvomodelu) T má prvomodel $\Leftrightarrow$ T je atomická teorie

  (b) (jednoznačnost prvomodelu) Každé dva prvomodely teorie T jsou isomorfní.

Věta A.5. *Buď* T *spočetná kompletní teorie, která má nekonečný model.*

(i) *Následující podmínky jsou ekvivalentní.*

  (a) T *je* ω*-kategorická.*

  (b) $\mathrm{B}^m T$ *jsou konečné pro všechna* $m < \omega$.

  (c) $\mathrm{S}^m T$ *jsou konečné pro všechna* $m < \omega$.

  (d) *Každý spočetný model teorie* T *je saturovaný.*

(ii) T *má spočetný saturovaný model* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{S}^m T$ *je nejvýše spočetný pro všechna* $m < \omega$.

Věta A.6. *Buď* T *silně minimální spočetná teorie.*

(i) $I(\omega, T) \leq \omega$ *a* $I(\kappa, T) = 1$ *pro všechny* $\kappa > \omega$.

(ii) *Každý nespočetný model teorie* T *je saturovaný a* T *má spočetný saturovaný model.*

(iii) T *je atomická teorie a má tedy prvomodel.*

Věta A.7. *Buď T spočetná kompletní teorie, která má nekonečný model. Nechť v $L(T)$ je binární relační symbol $\leq$ a existuje $\mathcal{A} \models T$ tak, že nějaká nekonečná podmnožina A je lineárně uspořádaná $\leq^A$. Pak pro každé $\kappa > \omega$ existuje 2^κ neisomorfních modelů teorie T.*

Věta A.8. *Je-li T rekurzivně axiomatizovatelná a úplná, pak je rozhodnutelná.*

Věta A.9. (o nerozhodnutelnosti) *Každé bezesporné rozšíření Robinsonovy aritmetiky je nerozhodnutelné.*

Věta A.10. (o neúplnosti) *Žádné bezesporné rekurzivní rozšíření Robinsonovy aritmetiky není úplné.*

Dodatek B

Booleovy algebry

Teorie Booleových algeber BA je teorie v jazyce $\{\wedge, \vee, -, 0, 1\}$, kde $\wedge$ a $\vee$ jsou binární funkční symboly (tzv. průsek a spojení), $-$ je unární funkční symbol (tzv. komplement), 0 a 1 jsou konstantní symboly, s axiomy:

B1: $(\forall x)(\forall y)(x \wedge y = y \wedge x)$,

B2: $(\forall x)(\forall y)(x \vee y = y \vee x)$,

B3: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$,

B4: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$,

B5: $(\forall x)(x \wedge 1 = x)$,

B6: $(\forall x)(x \vee 0 = x)$,

B7: $(\forall x)(x \wedge (-x) = 0)$,

B8: $(\forall x)(x \vee (-x) = 1)$,

B9: $0 \neq 1$.

Označme $x \leq y \overset{\text{def}}{\equiv} x \wedge y = x$, $x < y \overset{\text{def}}{\equiv} x \leq y \mathbin{\&} x \neq y$, $x - y \overset{\text{def}}{\equiv} x \wedge -y$, $x \dot{-} y \overset{\text{def}}{\equiv} (x - y) \vee (y - x)$, $x \leftrightarrow y \overset{\text{def}}{\equiv} (-x \vee y) \wedge (-y \vee x)$ a $\mathrm{atom}(x) \overset{\text{def}}{\equiv} x \neq 0 \mathbin{\&} (\forall y)(y \leq x \rightarrow (y = 0 \vee y = x))$.

Konkrétní Booleovou algebru $\mathcal{B} = \langle B, \wedge^B, \vee^B, -^B, +^B, 1^B \rangle$ budeme značit pouze B a horní index u jejích operací budeme vynechávat. Množinu atomů algebry B budeme značit $\mathrm{At}(B)$ a pro daný prvek $a \in B$ budeme značit

$\hat{a} = \{b; b \leq a \ \& \ b$ je atom v $B\}$. Dva prvky $a, b \in B$ nazveme *disjunktní*, jestliže $a \wedge b = 0$. Množina $X \subseteq B$ je *disjunktní*, jsou-li její prvky po dvou disjunktní. Pro $X \subseteq B$ je $\langle X \rangle_B$ *podalgebra* B *generovaná množinou* X, tj. nejmenší podalgebra B obsahující X. Kartézský součin $B_1 \times B_2$ Booleových algeber B_1, B_2 s booleovskými operacemi definovanými po složkách je opět Booleova algebra. Nazýváme jí součin algeber B_1, B_2 a značíme $B_1 \times B_2$. Je-li $B = B_1 = B_2$, píšeme B^2 místo $B \times B$. Definice součinu n algeber pro $n > 2$ je nasnadě.

Teorie aBA, která vznikne rozšířením teorie BA o axiom existence atomu pod každým nenulovým prvkem

B10: $(\forall x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(y \leq x \ \& \ \mathrm{atom}(y)))$,

se nazývá teorie *atomárních Booleových algeber*.

Teorie bBA, která vznikne rozšířením teorie BA o axiom neexistence atomu

B11: $\neg(\exists x)\mathrm{atom}(x)$,

se nazývá teorie *bezatomárních Booleových algeber*.

Tvrzení B.1. *Buď* B *atomární Booleova algebra. Zobrazení* $h : B \rightarrow \mathscr{P}(\mathrm{At}_B)$, *kde* $h(a) = \hat{a}$, *je isomorfismus algebry* B *a nějaké podalgebry potenční algebry* $\mathscr{P}(\mathrm{At}_B)$. *Je-li* B *konečná, je* h *isomorfismus* B *a* $\mathscr{P}(\mathrm{At}_B)$. *Speciálně jsou každé dvě konečné Booleovy algebry isomorfní, právě když mají stejný počet atomů.*

Věta B.2.

(i) *Pro* $\kappa < \omega$ *platí* $I(\kappa, \mathsf{aBA}) = 1$, *je-li* $\kappa = 2^n$ *pro nějaké* $n \geq 1$ *přirozené a* $I(\kappa, \mathsf{aBA}) = 0$ *jinak.*

(ii) *Platí* $I(\omega, \mathsf{aBA}) = \omega$.

Věta B.3.

(i) *Je* $I(\kappa, \mathsf{bBA}) = 0$ *pro* $\kappa < \omega$.

(ii) *Je* $I(\omega, \mathsf{bBA}) = 1$.

Buď $\mathscr{I}$ ideál a $\mathscr{F}$ filtr v Booleově algebře B. Definujme na B binární relace $\sim_1$ a $\sim_2$ takto:

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow x \dot{-} y \in \mathscr{I} \text{ a } x \sim_2 y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in \mathscr{F}.$$

Relace $\sim_1$, $\sim_2$ jsou kongruence a $B/\sim_1$, $B/\sim_2$ jsou Booleovy algebry. Je-li filtr $\mathscr{F}$ duální k ideálu $\mathscr{I}$, pak $B/\sim_1 = B/\sim_2$.

Buď $X \neq \emptyset$. *Cantorova algebra* $\mathrm{CA}(X)$ je podalgebra potenční algebry $\mathscr{P}({}^X 2)$ generovaná množinou $\{\tilde{\sigma}; \sigma \in F(X)\}$, kde $\tilde{\sigma} = \{f \in {}^X 2; f \supseteq \sigma\}$ a $F(X) = \{\sigma \subseteq X \times 2; |\sigma| < \omega \;\&\; \sigma \text{ je funkce}\}$.

Věta B.4. *Buď* $X \neq \emptyset$.

(i) $\mathrm{CA}(X) = \{\bigcup_{\sigma \in K} \tilde{\sigma}; K \subseteq X$ je konečná$\}$.

(ii) *Pro X konečnou je* $\mathrm{CA}(X) = \mathscr{P}({}^X 2)$.

(iii) *Pro X nekonečnou je* $\mathrm{CA}(X)$ *bezatomární Booleova algebra kardinality* $|X|$.

(iv) *Algebra* $\mathrm{CA}(X)$ *má právě* $2^{|X|}$ *ultrafiltrů.*

Pro Booleovu algebru B označme $\mathrm{Hom}(B, 2) \subseteq {}^B 2$ množinu všech homomorfismů algebry B na algebru 2. Označme $\mathrm{CI}(B)$ ideál algebry $\mathrm{CA}(B)$ definovaný takto:

$$\mathrm{CI}(B) = \{u \in \mathrm{CA}(B); u \cap \mathrm{Hom}(B, 2) = \emptyset\}.$$

Věta B.5. *Pro každou Booleovu algebru B platí* $B \cong \mathrm{CA}(B)/\mathrm{CI}(B)$.

Booleově algebře B přiřadíme topologický prostor. Vezměme množinu $\mathrm{Ult}(B)$ všech ultrafiltrů v B a zobrazení $T : B \to \mathscr{P}(\mathrm{Ult}(B))$ takové, že $T(a) = \{F \in \mathrm{Ult}(B); a \in F\}$. Lze dokázat, že systém $T[B]$ je uzavřený na konečné průniky. To znamená, že $T[B]$ tvoří bázi nějaké topologie na množině $\mathrm{Ult}(B)$, kterou nazýváme *Stoneova topologie*. Množina $\mathrm{Ult}(B)$ s touto topologií se nazývá *Stoneův prostor algebry B*, značí se $\mathrm{S}B$.

Nechť $\mathcal{L} = \langle L, <^L \rangle$ je nějaké (ostré) lineární uspořádání. *Zleva polouzavřené intervaly v $\mathcal{L}$* jsou pro $x, y \in L$ množiny $\langle x) = \{y \in L; y <^L x\}$, $[x, y) = \{x\} \cup \{z \in L; x <^L z <^L y\}$ a $[x\rangle = \{x\} \cup \{y \in L; x <^L y\}$. *Intervalová algebra příslušná lineárnímu uspořádání $\mathcal{L}$* je Booleova algebra generovaná zleva polouzavřenými intervaly v $\mathcal{L}$ a značí se $\mathrm{IBA}(\mathcal{L})$.

Věta B.6. *Každá spočetná Booleova algebra je isomorfní s nějakou intervalovou algebrou.*

Pro dané lineární uspořádání $\mathcal{L}$ budeme značit $\mathcal{L}^*$ lineární uspořádání k němu inverzní. Dále budeme značit η resp. η_0 uspořádání racionálních resp. nezáporných racionálních čísel. Všimněme si, že $\mathrm{IBA}(n) = \mathscr{P}(n)$ pro všechna $n \geq 1$ přirozená. Na závěr poznamenejme, že intervalové algebry příslušné dvěma neisomorfním lineárním uspořádáním mohou být isomorfní.

Důkazy uvedených vět lze nalézt v [1].

Dodatek C

Stirlingova a Bellova čísla

Definice C.1. *Nechť $n < \omega$.*

(i) *Buď $k < \omega$. Označme $S(n,k)$ počet rozkladů n-prvkové množiny mohutnosti k (s úmluvou, že počet rozkladů $\emptyset$ mohutnosti 0 je 1). Čísla $S(n,k)$ se nazývají Stirlingova čísla druhého druhu. Zřejmě $S(n,k) = 0$, kdykoli $k > n$.*

(ii) *Číslo $B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$ se nazývá n-té Bellovo číslo a udává počet rozkladů n-prvkové množiny.*

Lemma C.2. *Nechť $k, n < \omega$. Pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)x(x-1)\cdots(x-k+1) = x^n.$$

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že $x \in \mathbb{N}$. Buďte X, Y množiny, $|X| = x$, $|Y| = n$. Platí $|{}^{Y}X| = x^n$. Na druhou stranu buď $1 \leq k \leq n$ pevné. Existuje $S(n,k)$ rozkladů množiny Y mohutnosti k a každý takový rozklad lze $x(x-1)\cdots(x-k+1)$ způsoby prostě zobrazit do X. Tedy

$$S(n,k)x(x-1)\cdots(x-k+1) = |\{f \in {}^{Y}X; |\mathrm{rng}(f)| = k\}|.$$

Odtud plyne dokazovaná rovnost v případě, že $x \in \mathbb{N}$. Dokazovaná rovnost ale není nic jiného, než rovnost dvou polynomů v proměnné x a my jsme jí právě dokázali pro nekonečně mnoho x, tedy platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Tvrzení C.3. *Nechť $k, n < \omega$. Platí:*

(i) $S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$,

(ii) $B_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}(i-j)^n$.

Důkaz.
(i) $\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n = \sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{j!(k-j)!}\sum_{r=0}^{n}S(n,r)j(j-1)\cdots(j-r+1) = \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=0}^{j}(-1)^{k-j}S(n,r)\frac{1}{(k-j)!(j-r)!} = \sum_{r=0}^{k}\frac{S(n,r)}{(k-r)!}\sum_{j=r}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k-r}{k-j} = \sum_{r=0}^{k}\frac{S(n,r)}{(k-r)!}(1-1)^{k-r} = S(n,k)$
(ii) Plyne snadno z (i). □

n	$S(n,0)$	$S(n,1)$	$S(n,2)$	$S(n,3)$	$S(n,4)$	$S(n,5)$	$S(n,6)$	$S(n,7)$	$S(n,8)$	$S(n,9)$
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Tabulka C.1: Stirlingova čísla druhého druhu

Další informace o Stirlingových číslech druhého druhu lze nalézt v [2] str. 243-253.

Literatura

[1] Monk J. D., Bonnet R.: *Handbook of Boolean Algebras, Vol. 1-3*, North-Holland, 1989.

[2] Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.: *Concrete Mathmematics*, Addison-Wesley, 1989.

[3] Hodges W.: *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press, 1997.