Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Marek Sterzik

Lebesgueova věta o hustotě pro Haarovu míru

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Petr Simon DrSc.
Studijní program: Matematika

2006

Děkuji všem, kteří mi pomáhali při sepisování této práce. Obzvláště děkuji vedoucímu práce prof. Petru Simonovi za obětavé konzultace a podnětné rady, které mi byly velkým zdrojem inspirace.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 8.8.2006 Marek Sterzik

Obsah

1 Zavedení Haarovy míry **1**

2 Lebesgueova věta pro Haarovu míru **5**

3 μ-k-linkovanost algebry měřitelných množin **11**

Literatura **17**

Název práce: Lebesgueova věta o hustotě pro Haarovu míru
Autor: Marek Sterzik
Katedra (ústav): katedra teoretické informatiky a matematické logiky
Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Petr Simon DrSc.
e-mail vedoucího: psimon@ms.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá analogií Lebesgueovy věty v prostoru 2^κ s Haarovou mírou a souvisejícím tématem μ-k-linkovanosti algebry měřitelných množin tohoto prostoru. Celý text je rozdělen do tří kapitol. První kapitola je věnována vysvětlení nezbytných pojmů a seznamuje čtenáře se základními vlastnostmi tohoto prostoru. Druhá kapitola se potom zabývá vlastní Lebesgueovou větou. Po nezbytném zavedení pojmu bodu hustoty je prakticky celý zbytek kapitoly věnován důkazu této věty. Ta říká, že symetrická diference libovolné měřitelné množiny a množiny jejích bodů hustoty má míru nula. Třetí kapitola je potom věnována větě o μ-k-linkovanosti, která říká, že algebra měřitelných množin prostoru 2^κ je μ-k-linkovaná, pokud je $2^\mu \geq \kappa$.
Klíčová slova: Lebesgueova věta o hustotě, Haarova míra, σ-k-linkovanost

Title: Lebesgue density theorem for the Haar measure
Author: Marek Sterzik
Department: department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic
Supervisor: Prof. RNDr. Petr Simon DrSc.
Supervisor's e-mail address: psimon@ms.mff.cuni.cz

Abstract: In this work, we study Lebesgue theorem analogy in the space 2^κ with Haar measure and a related theorem about μ-k-linkedness of the measure algebra of this space. The whole text is divided in three chapters. In the first chapter we explain some important definitions and basic properties of the measure space. The Lebesgue theorem is studied in the second chapter. After the essential definition of the point of density, the major part of the chapter is dedicated to the proof of the theorem. The theorem states, that the symmetric difference between any measurable set and the set of its points of density has measure zero. In the third chapter we study the μ-k-linkedness theorem; a theorem which states that the measure algebra of the space 2^κ is μ-k-linked, if $2^\mu \geq \kappa$.
Keywords: Lebesgue density theorem, Haar measure, σ-k-linkedness

1 Zavedení Haarovy míry

V této práci budeme pracovat s κ-mocninami diskrétního dvoubodového prostoru s mírou $\{1/2, 1/2\}$. Tento prostor budeme vždy označovat 2^κ, popřípadě 2^X (potom předpokládáme, že X má mohutnost κ).

Topologie i míra vznikne přirozeným rozšířením z jednotlivých souřadnic. Nebudeme přímo popisovat jak vypadá proces rozšíření, uvedeme pouze jak vypadá výsledná topologie a míra. K tomu je užitečné zavést pojem konečné částečné funkce:

Definice 1.1. *Konečnou částečnou funkcí na prostoru 2^κ budeme rozumět funkci f takovou, že $\mathrm{dom}(f) \subseteq \kappa$ je konečná množina a $\mathrm{rng}(f) \subseteq 2$. Pro danou konečnou částečnou funkci f definujme množinou $[f]$ jako*

$$[f] = \{x \in 2^\kappa : f \subseteq x\}$$

Tuto množinu budeme někdy nazývat obalem konečné částečné funkce f.

Poznámka. Většinou však mezi konečnou částečnou funkcí a jejím obalem nebudeme rozlišovat. Z kontextu bude vždy jasné o co se jedná a nemůže dojít k nedorozumění.

Bázové otevřené množiny v uvažované topologii budou právě všechny obaly $[f]$, kde f je nějaká konečná částečná funkce . Je vhodné poznamenat, že jednoduchou úvahou lze zjistit, že bázové otevřené množiny jsou zároveň uzavřené.

Míru bázové množiny danou konečnou částečnou funkcí f lze vyjádřit jako

$$\lambda([f]) = 2^{-|f|} \tag{1}$$

Standardním procesem rozšíření této míry na všechny množiny vznikne popisovaná Haarova (vnější) míra λ^*.

Poznámka. Pojem konečná částečná funkce je poměrně dlouhý a bylo by neúčelné jej všude vypisovat, obzvláště v definicích. Proto jsme si pro ně vyhradili malá písmena f, g, h. Kdykoliv (nebude-li řečeno jinak) budeme mít tedy písmeny f, g, h na mysli konečné částečné funkce. Naopak pro body prostoru 2^κ jsme si vyhradili malá písmena x, y, z.

Je vhodné poznamenat, že prostor 2^κ je kompaktní v uvažované topologii, neboť vznikne jako součin diskrétních dvoubodových prostorů.

Definice 1.2. *Množinu $A \subseteq 2^X$ nazveme měřitelnou (v Lebesgueově smyslu), pokud pro každé ϵ existuje otevřená G a uzavřená (a tedy i kompaktní) F tak, že*

$$F \subseteq A \subseteq G$$

a platí:

$$\lambda(G \setminus F) < \epsilon$$

Restrikci míry λ^* na systém měřitelných množin budeme označovat symbolem λ.

Další dvě tvrzení o Haarově míře jsou uvedena bez důkazu, neboť jsou v obecnosti platná pro jakoukoliv míru:

Lemma 1.3. *Systém všech měřitelných množin je σ-algebra, tj. je uzavřen na spočetné průniky, spočetná sjednocení a doplňky. Navíc obsahuje všechny borelovské množiny.*

Lemma 1.4. *Na algebře všech měřitelných množin je míra λ σ-aditivní, tj. kdykoliv je $\{U_i : i \in \omega\}$ spočetný systém disjunktních měřitelných množin, platí:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in\omega} U_i\right) = \sum_{i\in\omega} \lambda(U_i)$$

Nyní uvedeme užitečné lemma, nazývané někdy jako "trik zdisjunktnění":

Lemma 1.5. *Buď $\{f_i : i \in \omega\}$ spočetný systém konečných částečných funkcí. Potom existuje (nejvýše) spočetný, disjunktní systém funkcí M, pro který platí*

$$\bigcup_{i\in\omega}[f_i] = \bigcup_{g\in M}[g]$$

a navíc pro každé $g \in M$ je $\mathrm{dom}(g) \subseteq \bigcup_{i\in\omega} \mathrm{dom}(f_i)$

Důkaz. Položme $D_i = \bigcup_{j\leq i} \mathrm{dom}(f_j)$. Potom D_i je konečná množina. Mějme nyní libovolnou konečnou částečnou funkcí g takovou, že $\mathrm{dom}(g) = D_i$. Potom pro nějaké f_j $(j \leq i)$ mohou nastat pouze tyto dvě možnosti:

1. $[g] \subseteq [f_j]$

2. $[g] \cap [f_j] = \emptyset$

Definujme

$$M_i = \{g : \mathrm{dom}(g) = D_i \ \&\ [g] \subseteq [f_i] \ \&\ [g] \cap \bigcup_{j<i} [f_j] = \emptyset\}.$$

Potom pro každé i je

$$\bigcup_{g \in M_i} [g] = [f_i] \setminus \bigcup_{j<i} [f_j]. \tag{2}$$

Položíme-li proto $M = \bigcup_{i \in \omega} M_i$, dostaneme

$$\bigcup_{g \in M} [g] = \bigcup_{i \in \omega} [f_j].$$

Zbývá ověřit, že M je disjunktní systém. Mějme tedy $g_0, g_1 \in M$. Buď i, j indexy takové, že $g_0 \in M_i$ a $g_1 \in M_j$. Bez újmy na obecnosti buď $i \leq j$. Je-li $i = j$, je $\mathrm{dom}(g_0) = \mathrm{dom}(g_1)$ a tudíž buď $g_0 = g_1$ nebo $[g_0] \cap [g_1] = \emptyset$. Pro $i < j$ je podle vztahu (2) $[g_0] \subseteq [f_i]$, ale $[g_1] \subseteq [f_j] \setminus [f_i]$. Tedy $[g_0]$ a $[g_1]$ jsou disjunktní. □

Haarova míra vznikne rozšířením součinu měr na jednotlivých souřadnicích. To, že je Haarova míra součinová lze charakterizovat tak, že kdykoliv máme dvě měřitelné množiny M_0, M_1 které jsou generovány souborem konečných částečných funkcí $\mathcal{F}_0$, resp. $\mathcal{F}_1$, s disjunktními definičními obory (tj. je-li $f \in \mathcal{F}_0$ a $g \in \mathcal{F}_1$, je $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \emptyset$), platí $\lambda(M_0 \cap M_1) = \lambda(M_0)\lambda(M_1)$. Toto tvrzení nebudeme v úplné obecnosti dokazovat. Postačí nám slabší lemma, které za chvíli ještě mírně zobecníme:

Lemma 1.6. *Buďte f a $g_i; i \in \omega$ konečné částečné funkce takové, že*

$$\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g_i) = \emptyset.$$

Potom platí:

$$\lambda([f] \cap (\bigcup_{i \in \omega} [g_i])) = \lambda([f])\lambda(\bigcup_{i \in \omega} [g_i]).$$

Důkaz. Podle lemmatu 1.5 existuje systém $\{h_k : k \in n\}$ $(n \leq \omega)$, který je disjunktní a platí $\bigcup_{k \in n} \mathrm{dom}(h_k) \subseteq \bigcup_{i \in \omega} \mathrm{dom}(f_i)$. Proto pro každé $k \in n$ platí

$$\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(h_k) = \emptyset.$$

Proto můžeme psát:

$$\lambda([f] \cap (\bigcup_{i\in\omega}[g_i])) = \lambda([f] \cap (\bigcup_{k\in n}[h_k])) = \lambda(\bigcup_{k\in n}([f] \cap [h_k])) =$$
$$\sum_{k\in n}\lambda([f] \cap [h_k]) = \sum_{k\in n}(\lambda([f])\lambda([h_k])) =$$
$$\lambda([f])\sum_{k\in n}\lambda([h_k]) = \lambda([f])\lambda(\bigcup_{k\in n}[h_k]) = \lambda([f])\lambda(\bigcup_{i\in\omega}[g_i])$$

Třetí rovnost platí právě díky disjunktnosti systému $\{[h_k]\}$ a čtvrtá je důsledkem toho, že pro libovolné dvě konečné částečné funkce f, g s disjunktními definičními obory platí

$$[f] \cap [g] = [f \cup g].$$

Tím je tvrzení dokázáno. □

Zobecnění tohoto lemmatu budeme potřebovat pro důkaz Lebesgueovy věty:

Lemma 1.7. *Buď f konečná částečná funkce a $\{G_i : i \in \omega\}$ posloupnost spočetně generovaných otevřených množin (tj. $G_i = \bigcup_{j\in\omega}[g^i_j]$ pro nějaké bázové množiny $[g^i_j]$). Nechť navíc pro každé $i \in \omega$ je $G_{i+1} \subseteq G_i$. Potom jestliže pro každé $i, j \in \omega$ platí $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g^i_j) = \emptyset$, je*

$$\lambda([f] \cap (\bigcap_{i\in\omega} G_i)) = \lambda([f])\lambda(\bigcap_{i\in\omega} G_i)$$

Důkaz. Protože G_i je klesající posloupnost množin, platí

$$\lambda(\bigcap_{i\in\omega} G_i) = \lim_{i\to\infty} \lambda(G_i)$$

a stejně tak pro posloupnost:

$$\lambda(\bigcap_{i\in\omega}([f] \cap G_i)) = \lim_{i\to\infty} \lambda([f] \cap G_i)$$

Proto s přihlédnutím k předchozímu lemmatu 1.6 platí:

$$\lambda((\bigcap_{i\in\omega} G_i) \cap [f]) = \lambda(\bigcap_{i\in\omega}(G_i \cap [f])) =$$
$$\lim_{i\to\infty} \lambda(G_i \cap [f]) = \lim_{i\to\infty}(\lambda(G_i)\lambda([f])) =$$
$$\lambda([f]) \lim_{i\to\infty} \lambda(G_i) = \lambda([f])\lambda(\bigcap_{i\in\omega} G_i)$$

□

2 Lebesgueova věta pro Haarovu míru

V této kapitole se pokusíme dokázat pro Haarovu míru analogii Lebesgueovy věty z reálného prostoru. Reálnou verzi věty může čtenář najít např. v [Oxt71].

Definice 2.1. *Buď $A \subseteq 2^X$ množina kladné míry. Řekneme, že $x \in 2^X$ je bodem hustoty A, pokud pro každé $\rho < 1$ a každou konečnou částečnou funkci f, takovou, že $x \in [f]$ existuje konečná částečná funkce g taková, že $x \in [g] \subseteq [f]$ a $\lambda(A \cap [g]) \geq \rho\lambda([g])$. Množinu všech bodů hustoty množiny A označme symbolem $\phi(A)$.*

Věta 2.2. *Buď $A \subseteq 2^X$ měřitelná množina. Potom platí:*

$$\lambda^*(A \,\Delta\, \phi(A)) = 0$$

Než větu dokážeme, připravíme si pomocné lemma:

Lemma 2.3. *Buď $\{f_i : i \in I\}$ nějaký systém konečných částečných funkcí. Potom existuje spočetná množina $J \subseteq I$ taková, že*

$$\lambda(\bigcup_{i\in I}[f_i]) = \lambda(\bigcup_{i\in J}[f_i])$$

Důkaz. Označme $G = \bigcup_{i\in I}[f_i]$. Potom G je otevřená (a tedy také měřitelná) množina. Tedy existuje spočetná posloupnost kompaktních množin $\{F_k : k \in \omega\}$ takových, že $F_k \subseteq G$ pro všechna $k \in \omega$ a platí:

$$\lambda(G \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

Pro fixované k pokrývají množiny $[f_i]; i \in I$ kompaktní množinu F_k, neboť $F_k \subseteq G$. Proto existuje konečná množina $J_k \subseteq I$ taková, že $F_k \subseteq \bigcup_{i\in J_k}[f_i]$.

Položme nyní $J = \bigcup_{k\in\omega} J_k$. Pak J je jistě (nejvýše) spočetná množina, neboť je spočetným sjednocením konečných množin. Označme $H = \bigcup_{i\in J}[f_i]$. Potřebujeme tedy dokázat, že $\lambda(G) = \lambda(H)$. To ovšem platí, protože pro každé k je $H \supseteq F_k$ a tedy $\lambda(H) \geq \lambda(F_k) \geq \lambda(G) - \frac{1}{k}$. Proto je i $\lambda(H) \geq \lambda(G)$. Opačná nerovnost je triviální, neboť je $H \subseteq G$. □

Důkaz. (věty 2.2) Nejprve nahradíme (v obecnosti velmi složitou) množinu A množinou jednodušší. Speciálně budeme takovou hledat mezi množinami typu

G_δ. Najdeme-li G_δ množinu A' takovou, že $\lambda(A \,\Delta\, A') = 0$, bude nutně platit, že $\phi(A) = \phi(A')$. Bude-li tedy $\lambda(A' \,\Delta\, \phi(A')) = 0$, bude i $\lambda(A \,\Delta\, \phi(A)) = 0$. Najděme tedy takovou A'. Podle definice míry existuje pro každé přirozené n otevřená množina G_n taková, že $A \subseteq G_n$ a platí

$$\lambda(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$$

Položíme-li $A' = \bigcap_{n\in\omega} G_n$, dostaneme požadovanou G_δ množinu, neboť z měřitelnosti množin A a A' plyne $\lambda(A' \setminus A) < \frac{1}{n}$ pro každé n. Protože máme navíc, že $A \subseteq A'$, je nutně $\lambda(A \,\Delta\, A') = 0$. Navíc můžeme bez újmy na obecnosti pro budoucí použití lemmatu 1.7 předpokládat, že množiny G_n jsou spočetně generované a tvoří klesající posloupnost množin.

Stačí dokázat, že $\lambda^*(A \setminus \phi(A)) = 0$, neboť $\phi(A) \setminus A \subseteq A^C \setminus \phi(A^C)$ a A^C je měřitelná množina.

Definujme množinu B_ρ takto:

$$B_\rho = \{x \in A : (\exists h \subseteq x)(\forall g \supseteq h; g \subseteq x)(\lambda(A \cap [g]) < \rho\lambda([g]))\}$$

Ukážeme, že B_ρ je nulová množina pro všechna $\rho < 1$. Množinu $A \setminus \phi(A)$ lze totiž potom napsat jako spočetné sjednocení: $A \setminus \phi(A) = \bigcup_{n\in\omega} B_{1-1/n}$. Sporem předpokládejme, že existuje $\rho < 1$ takové, že $\lambda^*(B_\rho) > 0$.

Vezměme otevřenou množinu G takovou, že $B_\rho \subseteq G$ a zároveň $\rho\lambda(G) < \lambda^*(B_\rho)$. Taková existuje podle definice vnější míry. Bez újmy na obecnosti je i G spočetně generovaná.

Pro každé $x \in B_\rho$ existuje konečná částečná funkce h_x taková, že kdykoliv je g konečná částečná funkce taková, že $x \in [g] \subseteq [h_x]$, platí $\lambda^*([g] \cap A) < \rho\lambda([g])$. Vyberme navíc h_x tak aby splňovala podmínku $[h_x] \subseteq G$ a aby h_x byla co do míry největší možná.

Označme nyní $D = \bigcup_{i\in\omega} \bigcup_{j\in\omega} \mathrm{dom}(f_j^i) \cup \bigcup_{i\in\omega} \mathrm{dom}(g_i)$, kde f_j^i je spočetný systém konečných částečných funkcí generujících G_δ množinu A a g_i je spočetný systém konečných částečných funkcí generujících množinu G.

Klíčové pozorování je, že pro každé $x \in B_\rho$ platí

$$\mathrm{dom}(h_x) \subseteq D.$$

Důkaz pozorování proveďme sprem. Nechť existuje $i \in X \setminus D; i \in \mathrm{dom}(h_x)$. Rozdělme funkci h_x na dvě části h_x^0 a h_x^1, tak aby bylo $h_x = h_x^0 \cup h_x^1$ a aby platilo:

$$\mathrm{dom}(h_x^0) \subseteq D$$

$$\mathrm{dom}(h_x^1) \cap D = \emptyset.$$

Potom $[h_x^0]$ má ostře větší míru než $[h_x]$, neboť h_x^1 je netriviální. Ukážeme,že i h_x^0 má vlastnosti požadované po h_x.

Nejdříve ověřme, že $[h_x^0] \subseteq G$. Buď tedy $y \in [h_x^0]$. Na souřadnicích kde je definovaná h_x^1 předefinujme hodnoty bodu y tak, aby $y \in [h_x]$. Formálně

$$y' = y|_{X \setminus \mathrm{dom}(h_x^1)} \cup h_x^1.$$

potom $y' \in [h_x]$ a tedy i $y' \in G$. Existuje tedy konečná částečná funkce g z množiny generátorů G, taková, že $y' \in [g]$. Protože je ovšem $\mathrm{dom}(h_x^1) \cap \mathrm{dom}(g) = \emptyset$, je i $y \in [g]$ a tedy $y \in G$.

Buď nyní g konečná částečná funkce taková, že $x \in [g] \subseteq [h_x^0]$. Položme $g' = g \cup h_x^1$. Potom g' je korektně definovaná, neboť g i h_x^1 obsahují bod x. Protože je $[g'] \subseteq [h_x]$, platí

$$\frac{\lambda([g'] \cap A)}{\lambda([g'])} < \rho.$$

Označme $h = g' \setminus g$. Potom můžeme psát:

$$\rho > \frac{\lambda([g'] \cap A)}{\lambda([g'])} = \frac{\lambda([g \cup h] \cap A)}{\lambda([g \cup h])} = \frac{\lambda([g] \cap [h] \cap A)}{\lambda([g] \cap [h])}$$

Po jednoduché úvaze zjistíme, že $A \cap [g]$ je též spočetně generovaná G_δ funkce s "celkovým definičním oborem" $D \cup \mathrm{dom}([g])$. Proto podle lemmatu 1.7 máme

$$\frac{\lambda([g] \cap [h] \cap A)}{\lambda([g] \cap [h])} = \frac{\lambda([h])\lambda([g] \cap A)}{\lambda([g]) \cap \lambda([h])} = \frac{\lambda([g] \cap A)}{\lambda([g])}.$$

Jako výsledek dostáváme, že

$$\frac{\lambda([g] \cap A)}{\lambda([g])} < \rho$$

a tedy h_x^0 je "lepší" funkce než h_x, což je spor.

Dále pro nás bude podstatný pouze tento důsledek pozorování: $\bigcup_{x \in B_\rho} \mathrm{dom}(h_x)$ je spočetná množina. To je patrné z toho, že i D je spočetná množina.

Bez újmy na obecnosti a pro snadnější vyjadřování předpokládejme, že $D = \omega$. Pro každé $x \in B_\rho$ zkonstruhujme nyní konečnou částečnou funkci f_x takto:

$$f_x = x|_{[0;m_{h_x}]}$$

kde $[a;b]$ značí uzavřený interval přirozených čísel a m_{h_x} je největší prvek množiny $\mathrm{dom}(h_x)$. Funkce f_x potom splňují několik pravidel:

1. $[f_x]$ je korektně definovaná konečná částečná funkce, $x \in [f_x]$.
2. $[f_x] \subseteq [h_x]$ pro každé $x \in B_\rho$.
3. Systém $\{f_x : x \in B_\rho\}$ pokrývá množinu B_ρ.
4. Pro $x, y \in B_\rho$ mohou nastat pouze tyto možnosti:
   (a) $[f_x] \subseteq [f_y]$
   (b) $[f_x] \supseteq [f_y]$
   (c) $[f_x] \cap [f_y] = \emptyset$

Všechna z těchto tvrzení jsou poměrně triviální, nicméně podstatná. Za zmínku snad stojí pouze bod 4. Protože definičními obory funkcí f_x (resp. f_y) jsou intervaly přirozených čísel od nuly do nějakého čísla, musí být tyto definiční obory nutně v inkluzi. Bez újmy na obecnosti buď $\mathrm{dom}(f_x) \subseteq \mathrm{dom}(f_y)$. Potom jestliže $f_x \subseteq f_y$, je $[f_x] \supseteq [f_y]$ a jestliže $f_x \not\subseteq f_y$, je $[f_x] \cap [f_y] = \emptyset$.

Využijme nyní lemma 2.3, podle kterého lze ze systému všech množin $[f_x]$ (pro $x \in B_\rho$) můžeme vybrat spočetný podsystém, jehož sjednocení má stejnou míru jako sjednocení celého systému. Tento podsystém označme $\{f_{x_i} : i \in \omega\}$. Z toho důvodu je $B_\rho \setminus \bigcup_{i\in\omega}[f_{x_i}]$ nulová množina a při konečném počítání míry množiny B_ρ můžeme tyto prvky zanedbat.

Nyní ukážeme, že ze systému $\{f_{x_i} : i \in \omega\}$ lze poměrně snadno udělat systém disjunktní tak aby sjednocení obou systémů bylo stejné. Nový systém budeme konstruhovat induktivně. Položme nejprve $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. Nyní v každém kroku budeme požadovat, aby systém $\{[f_{x_j}] : j \in \mathcal{F}_k\}$ zůstal disjunktní. Existuje-li nyní $j \in \mathcal{F}_k$ takové, že $[f_{x_k}] \subseteq [f_{x_j}]$, položíme $\mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k$. V opačném případě označme $\mathcal{S} = \{j \in \mathcal{F}_k : [f_{x_j}] \subseteq [f_{x_k}]\}$ a položme $\mathcal{F}_{k+1} = (\mathcal{F}_k \setminus \mathcal{S}) \cup \{k\}$.

Položme nyní

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i\in\omega} \bigcup_{k\in\omega; k\geq i} \mathcal{F}_k$$

Systém $\mathcal{F}$ tedy bude obsahovat ty indexy, které se vyskytují v nekonečně mnoha množinách $\mathcal{F}_k$ (ve skutečnosti ve všech množinách až na konečně mnoho). Dokážeme, že

$$\bigcup_{i\in\mathcal{F}}[f_{x_i}] = \bigcup_{i\in\omega}[f_{x_i}]$$

a že systém $\{[f_{x_i}] : i \in \mathcal{F}\}$ je disjunktní.

Kdyby systém nebyl disjunktní, existovaly by indexy $i, j \in \mathcal{F}$, $j < i$, takové, že $[f_{x_i}] \cap [f_{x_j}] \neq \emptyset$. To ovšem znamená, že již systém $\mathcal{F}_{i+1}$ musel oba indexy obsahovat, což ovšem není možné, neboť $\mathcal{F}_{i+1}$ byl stále disjunktní.

Ukažme ještě, že $\{[f_{x_i}] : i \in \mathcal{F}\}$ pokrývá všechny množiny $[f_{x_i}]$ pro $i \in \omega$. Buď tedy $i \in \omega$. Potom jsme v i-tém kroku měli jedinou možnost přidat i do $\mathcal{F}$. Pokud jsme tak neudělali, existovalo $j \in \mathcal{F}_i$ takové, že $[f_{x_i}] \subseteq [f_{x_j}]$. j jsme ovšem do systému přidali, stačí tedy ověřit, že $\mathcal{F}$ pokrývá všechny množiny $[f_{x_i}]$ pro které existuje j takové, že $i \in \mathcal{F}_j$. Buď tedy i takové. Pokud jsme již v žádném dalším kroku index i neodstranili, leží i v nekonečně mnoha $\mathcal{F}_k$ a tedy i v $\mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ pokrývá množinu $[f_{x_i}]$. Pokud jsme index i odstranili v kroku j, bylo to proto, že $[f_{x_i}] \subseteq [f_{x_j}]$ a v j-tém kroku jsme index j přidali do množiny $\mathcal{F}_{j+1}$. Pokud by nyní index j již zůstal ve všech dalších množinách $\mathcal{F}_k$, opět by $\mathcal{F}$ pokrýval množinu $[f_{x_i}]$. Pokud ne, můžeme stejným způsobem pokračovat dále. Tento proces se ovšem musí po konečném počtu kroků zastavit. Kdyby ne, existovala by nekonečná (co do inkluze) ostře rostoucí posloupnost konečných částečných funkcí a kdybychom se podívali na velikosti definičních oborů, dostali bychom nekonečnou ostře klesající posloupnost přirozených čísel, což je spor. Systém $\{[f_{x_i}] : i \in \mathcal{F}\}$ tedy pokrývá všechny množiny $[f_{x_i}]$ pro $i \in \omega$.

Nyní máme již vše připraveno a můžeme počítat:

$$\lambda^*(B_\rho) = \lambda^*(B_\rho \cap \bigcup_{i \in \mathcal{F}} [f_{x_i}]) \leq \lambda(A \cap \bigcup_{i \in \mathcal{F}} [f_{x_i}]) = \lambda(\bigcup_{i \in \mathcal{F}} ([f_{x_i}] \cap A)) =$$

$$\sum_{i \in \mathcal{F}} \lambda([f_{x_i}] \cap A) < \sum_{i \in \mathcal{F}} \rho\lambda([f_{x_i}]) = \rho \sum_{i \in \mathcal{F}} \lambda([f_{x_i}]) \leq \rho\lambda(G) < \lambda^*(B_\rho)$$

Což je požadovaný spor. □

Následující důsledek Lebesgueovy věty budeme potřebovat v další kapitole. Jeho důkaz je opravdu jednoduchý, proto jej neuvádíme.

Důsledek 2.4. *Je-li $A \subseteq 2^X$ množina kladné míry a $\rho < 1$, pak existuje konečná částečná funkce f taková, že $\lambda(A \cap [f]) > \rho\lambda([f])$.*

3 μ-k-linkovanost algebry měřitelných množin

Definice 3.1. *Algebru $\mathcal{M}$ nazveme μ-k-linkovanou, pokud ji lze napsat jako sjednocení:*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mu} S_i$$

kde každé S_i má tu vlastnost, že libovolná k-prvková podmnožina S_i má neprázdný průsek (průnik u množinové algebry).

Poznámka. Pojem μ-k-linkovanosti je zobecněn z pojmu σ-k-linkovanosti. Zatímco u σ-k-linkovanosti požadujeme rozdělení prvků algebry na spočetně mnoho systémů, u zobecněného pojmu uvažujeme rozdělení na daných μ systémů.

Pojmem σ-k-linkovanosti se zabývá např. článek [DS94]. Hlavní směr důkazu věty o μ-k-linkovanosti je převzat právě z tohoto článku. Tématu linkovanosti jsou věnovány i některé partie knihy [BJ95].

V celé této kapitole budeme uvažovat, že dvě množiny lišící se o míru nula jsou ekvivalentní. Algebrou měřitelných množin potom budeme rozumět algebru na takovýchto třídách ekvivalence. Formálně řečeno, budeme uvažovat algebru měřitelných množin modulo ideál nulových množin. Pro μ-k-linkovanost to potom speciálně znamená, že do μ systémů rozdělujeme pouze množiny kladné míry a požadujeme nenulovou míru průniku.

Zaveďme nejprve několik pojmů:

Definice 3.2. *Buď X množina, $K \subseteq X$ nějaká její podmnožina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ systém podmnožin X. Řekneme, že systém $\mathcal{S}$ je na K rozpoznatelný, pokud zobrazení $\xi \in \mathcal{P}(K)^{\mathcal{S}}$ definované jako*

$$\xi(S) = S \cap K$$

je prosté.

Lemma 3.3. *Buď X množina a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ nějaký konečný systém jejích podmnožin. Potom existuje konečná množina K taková, že $\mathcal{S}$ je na K rozpoznatelný.*

Důkaz. Pro každou dvojici množin $S \neq T; S, T \in \mathcal{S}$ vezměme nějaký prvek $x_{ST} \in S \Delta T$. Množina $K = \{x_{ST} : \{S, T\} \subseteq \mathcal{S} \;\&\; S \neq T\}$ je jistě konečná a $\mathcal{S}$ je na K rozpoznatelná, neboť pro dvě různé množiny $S, T \in \mathcal{S}$ prvek x_{ST} leží právě v jedné z množin $S \cap K$ a $T \cap K$ a tudíž $S \cap K \neq T \cap K$. $\square$

Definice 3.4. *V dalším textu budeme rozkladem Z množiny X rozumět uspořádanou trojici $Z = (Z_0, Z_1, Z_2)$, takovou, že $Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2 = X$, a $\{Z_i : i \in 3\}$ je systém disjunktní. Kdykoliv budeme mít rozklad Z, budeme množinou Z_i rozumět jeho i-tou složku.*

Lemma 3.5. *Nechť κ a μ jsou nekonečné kardinály takové, že $\kappa \leq 2^\mu$. Pak existuje posloupnost rozkladů $\{Z^n : n \in \mu\}$ množiny κ délky μ taková, že kdykoliv jsou $F_i \subseteq \kappa; i \in 3$ tři disjunktní konečné množiny, existuje $n \in \mu$ takové, že pro každé $i \in 3$ je $F_i \subseteq Z_i^n$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti buď $\kappa = 2^\mu$. Potom můžeme množinu κ ztotožnit s potenční množinou $\mathcal{P}(\mu)$ množiny μ. Libovolný rozklad Z potom můžeme chápat jako funkci $f \in 3^{\mathcal{P}(\mu)}$, neboť stačí položit $Z_i = f^{-1}[\{i\}]$ a (Z_0, Z_1, Z_2) jistě tvoří rozklad. Musíme tedy najít systém funkcí $\mathcal{F} = \{f_i : i \in \mu\}$ kde $f_i \in 3^{\mathcal{P}(\mu)}$ tak, že kdykoliv je g konečná funkce z $\mathcal{P}(\mu)$ do 3, existuje $i \in \mu$ tak, že $g \subset f_i$.

Pro danou konečnou množinu $K \subset \mu$ a danou funkci $\varphi \in 3^{\mathcal{P}(K)}$ definujme funkci $f \in 3^{\mathcal{P}(\mu)}$ jako

$$f(M) = \varphi(M \cap K) \tag{3}$$

Systém všech takto vzniklých funkcí f označme symbolem $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ má zřejmě mohutnost μ, neboť konečných podmnožin množiny μ je nejvýše $\omega \times \mu$ a ke každé existuje nejvýše konečně mnoho funkcí φ. Mohutnost $\mathcal{F}$ je potom nejvýše rovna $\omega \times \omega \times \mu = \mu$.

Ukážeme, že systém $\mathcal{F}$ je již hledaný systém funkcí. Mějme tedy dánu konečnou funkci g z $\mathcal{P}(\mu)$ do 3. Potom je $\mathrm{dom}(g) \subset \mathcal{P}(\mu)$ konečný systém podmnožin μ. Podle lemmatu 3.3 existuje konečná množina K tak, že $\mathrm{dom}(g)$ je na K rozpoznatelný. Definujme funkci $\varphi \in 3^{\mathcal{P}(K)}$ tak, aby platilo:

$$\varphi(M \cap K) = g(M)$$

pro všechna $M \in \mathrm{dom}(g)$. Funkce φ je korektně definována právě díky rozpoznatelnosti $\mathrm{dom}(g)$ na K. Definujeme-li nyní funkci $f \in 3^{\mathcal{P}(\mu)}$ stejně jako v (3), je již okamžitě vidět, že $f \in \mathcal{F}$ a že $g \subset f$. $\square$

Definice 3.6. *Mějme dán rozklad Z množiny X a přirozená čísla m, k. Definujme množinu $L(Z, m, k)$ jako podmnožinu všech měřitelných množin $A \subseteq 2^X$ takových, že existují konečné částečné funkce f a t_i pro $i \in M$, kde M je konečná, takové, že:*

1. $\lambda([f]) = 2^{-m}$

2. $\lambda(A \cap [f]) > \left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) 2^{-m}$

3. $f \subseteq t_i$ *pro každé* $i \in M$

4. $f^{-1}[\{j\}] \subseteq Z_j$ *pro* $j \in 2$

5. $\mathrm{dom}(t_i \setminus f) \subseteq Z_2$ *pro* $i \in M$

6. $\lambda(((\cup_{i \in M}[t_i]) \; \Delta \; A) \cap [f]) < \frac{2^{-km}}{2(k+2)}$

Lemma 3.7. *Buď* Z *rozklad množiny* X. *Je-li* $\mathcal{A} \subseteq L(Z, m, k)$ k*-prvková podmnožina, potom je* $\lambda(\bigcap \mathcal{A}) > 0$.

Důkaz. Nechť $A_j \in L(Z, m, k)$ pro $j \in k$. Máme ukázat, že $\lambda(\bigcap_{j \in k} A_j) > 0$. Vezměme pro každé $j \in k$ konečné částečné funkce f^j a t_i^j $(i \in M_j)$ odpovídající definici množiny $L(Z, m, k)$. Definujme g jako sjednocení všech $f^j; j \in k$, tj.: $g = \cup_{j \in k} f^j$. g je korektně definovaná konečná částečná funkce , protože protínají-li se definiční obory dvou funkcí f^{j1} a f^{j2}, jsou na průniku definovány stejně. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\lambda([g]) = 2^{-km}$. Pokud tomu tak není, prostě funkci g dodefinujeme libovolně na několika dalších bodech.

Ukážeme, že $\lambda(A_j \cap [g]) > \frac{k}{k+1}\lambda([g])$. Snadno se potom nahlédne, že $\lambda(\bigcap_{j \in k} A_j \cap [g]) > \frac{1}{k+1}\lambda([g]) > 0$ a důkaz bude hotov.

Nejprve odhadněme míru množiny $\cup_{i \in M_j}[t_i^j]$. Platí:

$$\lambda\left(\bigcup_{i \in M_j}[t_i^j]\right) \geq \lambda\left(A_j \cap [f^j] \cap \bigcup_{i \in M_j}[t_i^j]\right) =$$

$$\lambda\left((A_j \cap [f^j]) \setminus \left((\bigcup_{i \in M_j}[t_i^j] \Delta A_j) \cap [f^j]\right)\right) \geq$$

$$\lambda\left(A_j \cap [f^j]\right) - \lambda\left((\bigcup_{i \in M_j}[t_i^j] \Delta A_j) \cap [f^j]\right) \geq$$

$$\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) 2^{-m} - \frac{1}{2(k+2)} 2^{-km} \geq$$

$$2^{-m}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right)$$

Protože je $[t_i^j] \subseteq [f^j]$, platí:

$$[g \setminus f^j] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] = [g \setminus f^j] \cap [f^j] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] =$$

$$[(g \setminus f^j) \cup f^j] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] = [g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j].$$

A neboť pro libovolné $j \in k$ a libovolné $i \in M_j$ je $\mathrm{dom}(g \setminus f^j) \cap \mathrm{dom}(t_i^j) = \emptyset$, plyne z předchozího a z lemmatu 1.6 tento odhad:

$$\lambda\left([g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_j^j]\right) = \lambda\left([g \setminus f^j] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j]\right) = \lambda\left([g \setminus f^j]\right) \lambda\left(\bigcup_{i \in M_j} [t_i^j]\right) \geq$$

$$2^{-(k-1)m} 2^{-m}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right) = 2^{-km}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right)$$

Proto platí:

$$\lambda([g] \cap A_j) \geq \lambda\left([g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] \cap A_j\right) =$$

$$\lambda\left(\left([g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j]\right) \setminus \left((\bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] \ \Delta \ A_j) \cap [g]\right)\right) \geq$$

$$\lambda\left([g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j]\right) - \lambda\left((\bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] \ \Delta \ A_j) \cap [g]\right) =$$

$$\lambda\left([g] \cap \bigcup_{i \in M_j} [t_i^j]\right) - \lambda\left((\bigcup_{i \in M_j} [t_i^j] \ \Delta \ A_j) \cap [f_j]\right) =$$

$$2^{-km}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right) - \frac{2^{-km}}{2(k+2)} = \frac{k}{k+1}\lambda([g])$$

Což jsme chtěli dokázat. $\square$

Věta 3.8. *Buď κ a μ nekonečné kardinály takové, že $\kappa \leq 2^\mu$. Potom je algebra měřitelných množin na 2^κ μ-k-linkovaná pro každé $k \in \omega$.*

Důkaz. Buď $\{Z^n : n \in \mu\}$ posloupnost rozkladů množiny κ taková, že pro libovolné tři konečné množiny $F_0, F_1, F_2 \in \kappa$ existuje $n \in \mu$ takové, že $F_i \subseteq Z_i^n$ pro $i \in 3$. Taková posloupnost existuje podle lemmatu 3.5.

Stačí ukázat, že kdykoliv je $A \subseteq 2^\kappa$ množina kladné míry, pak existuje $n \in \mu$ a $m \in \omega$ tak, že $A \in L(Z^n, m, k)$, neboť potom lze dle lemmatu 3.7 systém množin kladné míry rozdělit na $\mu \times \omega = \mu$ podsystémů, z nichž každý má tu vlastnost, že libovolných k jeho prvků má neprázdný průnik.

Mějme tedy dánu množinu A. Podle důsledku 2.4 existuje konečná částečná funkce f taková, že $|f| = m$ a $\lambda(A \cap [f]) > \left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) 2^{-m}$ (neboť $\left(\frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) < 1$). Potom aproximujme množinu $A \cap [f]$ otevřenou množinou G, tak aby $A \cap [f] \subseteq G \subseteq [f]$ a $\lambda(G \setminus A) < \frac{2^{-km}}{4(k+2)}$. Zvolme dále konečnou množinu M a konečné částečné funkce $\{t_i : i \in M\}$ tak aby $[t_i] \subseteq G$ pro všechna $i \in M$ a zároveň $\lambda(G \setminus \cup_{i \in M}[t_i]) < \frac{2^{-km}}{4(k+2)}$. To lze, protože G je měřitelná a tudíž ji lze libovolně přesně aproximovat zevnitř uzavřenou (a tudíž kompaktní) množinou. Z toho vyplývá, že $\lambda((\bigcup_{i \in M}[t_i] \mathbin{\Delta} A) \cap [f]) < \frac{2^{-km}}{4(k+2)} + \frac{2^{-km}}{4(k+2)} = \frac{2^{-km}}{2(k+2)}$. Z inkluze $[t_i] \subseteq G \subseteq [f]$ navíc plyne $f \subseteq t_i$.

Položme nyní $F_i = \{\alpha \in \kappa : f(\alpha) = i\}$ pro $i \in 2$ a $F_2 = \cup_{i \in M}(\mathrm{dom}(t_i) \setminus f)$. Existuje $n \in \mu$ tak, že $F_i \subseteq Z_i^n$ pro $i \in 3$. A z toho již přímo plyne, že $A \in L(Z^n, m, k)$. $\square$

Literatura

[BJ95] Tomek Bartoszyński and Haim Judah. *Set theory.* A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1995. On the structure of the real line.

[DS94] Alan Dow and Juris Steprāns. The σ-linkedness of the measure algebra. *Canad. Math. Bull.*, 37(1):42–45, 1994.

[Oxt71] John C. Oxtoby. *Measure and category. A survey of the analogies between topological and measure spaces.* Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 2.