Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Stašek

Aplikace splinů k numerickému řešení okrajových úloh

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc
Studijní program: Matematika, obecná matematika

2006

Děkuji touto cestou Doc. RNDr. Karlovi Najzarovi,CSc za odbornou pomoc při zpracování mé bakalářské práce. Rovněž děkuji za zapůjčení studijních materiálů, potřebných pro její zpracování.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 10.8.2006 Petr Stašek

Obsah

Název práce: Aplikace splinů k numerickému řešení okrajových úloh
Autor: Petr Stašek
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc
e-mail vedoucího: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci nejprve definujeme spliny a uvádíme jejich základní vlastnosti a také konstrukci kubického splinu, potom se zabýváme interpolaci spliny, uvádíme její druhy a odvozujeme jakých chyb se dopustíme při použití interpolace kubickým splinem. Ve druhé kapitole se zabýváme aplikaci splinů k řešení obyčejných diferenciálních rovnic, nejprve uvádíme diferenciální rovnice s počáteční podmínkou, které řešíme za pomocí kolokace, potom se zabýváme diferenciálními úlohy s okrajovými podmínkami v daném tvaru, které řešíme Galerkinovou metodou za pomocí B-splinů. Částečně se také věnujeme stabilitě metod. Na závěr uvádím dva příklady jako konkretní aplikaci.

Title: Numerical solution of boundary equations by splines
Author: Petr Stašek
Department: Department of Numerical Mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc
Supervisor's e-mail address: Karel.Najzar@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work first we define splines and report their basic properties and construction of cubic spline, then we study interpolation by splines and report their kinds and we derive what errors we allow, when we use interpolation by cubic spline. In then second chapter we study application of splines on solution of differential equations, first we report differential equations with initial condition, which we solve by collocation, then we study differential equations with boundary conditions in then given form, which we solve by Galerkin's method by means of B-spline. Partly we study stability of methods. At the end I report two examples as concrete application.

Kapitola 1

Spliny

1.1 Základní vlastnosti splinů

Definice 1.1.1: Nechť $I = [a, b]$ je konečný interval na reálné ose a nechť N je přirozené číslo, potom množinu $\pi = \{x_j\}$, $j = 0, \dots, N+1$, kde $a = x_0 < x_1 < x_N < x_{N+1} = b$ nazveme dělením intervalu I.
Symbolem P_{m-1} budeme označovat prostor polynomů stupně $m-1$, kde $m \in N$.

Definice 1.1.2: Nechť z je vektor o složkách $z_j \in N$, $j = 1, \dots, N$, a nechť $1 \leq z_j \leq m$ čísla z_j nazýváme násobnosti uzlu x_j, potom reálnou funkci definovanou na intervalu I nazveme polynomiální splinovou funkcí stupně $m-1$ jestliže platí:

- existují polynomy $s_i \in P_{m-1}$, $j = 1, \dots, N$ splňující $s(x) = s_i(x)$ pro $x \in [x_i, x_{i+1})$
- je-li $z_i < m$ pro $i \in 1, \dots, N$, pak $D^j s_{i-1}(x_i) = D^j s_i(x_i)$ pro $j = 0, \dots, m-1-z_i$

Množinu všech takovýchto funkcí značíme $S(P_{m-1}, \pi, z)$. Tato množina tvoří vektorový prostor dimenze $m + \sum_{i=1}^{N} z_i$.
V následujícím se budeme zabývat spliny lichého stupně.

Definice 1.1.3: Nechť $n \in N$, $Sp_n(\pi, z)$ je prostor splinů stupně $2n-1$ definovaný předpisem:

$$Sp_n(\pi, z) = \left\{ \begin{array}{ll} u \in C_{[a,b]} : & u^{2n}(x) = 0,\ i = 1, \dots, N,\ x \in (x_i, x_{i+1}) \\ & u_-^k(x_i) = u_+^k(x_i),\ 0 \leq k \leq 2n-1-z_i,\ i = 1, \dots, N \end{array} \right\}.$$

Definice 1.1.4: Je-li $z_i = 1$, $i = 1, \dots, N$, potom spliny nazýváme obyčejné, je-li $z_i = n$ pro $i = 1, \dots, N$, pak spliny nazýváme Hermitovské. Prostory těchto splinů značíme:

$$Sp_n(\pi, 1) = S_{2n-1}$$
$$Sp_n(\pi, n) = H_{2n-1}$$

Definice 1.1.5: Nechť je dán interval $I = [a, b]$ potom

- spline $s \in Sp_n(\pi, z)$ se nazývá přirozeným splinem jestliže platí

$$s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0 \text{ pro } k = n, \dots, 2n-2$$

- spline $s \in Sp_n(\pi, z)$ se nazývá periodickým splinem jestliže platí

$$s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \text{ pro } j = 0, \dots, 2n-1$$

Definice 1.1.6: Zvolme dělení $\{\pi_j\}_{j=0}^{l+1}$, $l \in N$ intervalu $I = [a, b]$ tak, aby bylo splněno:

$$-\infty < a = \pi_0 < \pi_1 < \ldots < \pi_l < \pi_{l+1} = b < +\infty.$$

Definujme prostor splinových funkcí $P_{n,\mu}$ stupně $n-1$ s defektem $\mu = \{\mu_i\}_{i=1}^{l}$, kde $1 \leq \mu_j \leq n-1$ a $u_j \in N$, na I takto:

$$P_{n,\mu} = \{s : s/_{(\pi_j, \pi_{j+1})} \in \Pi_n(\pi_j, \pi_{j+1}) \text{ pro } j = 0, \dots, l,\ s \in C^{n-1-\mu_j}(\pi_{j-1}, \pi_{j+1}), \text{ kde } j = 1, \dots, N\},$$

kde $\Pi_n(I)$ je prostor polynomů stupně $n-1$.
Poznámka 1.1.1: Jestliže $n = 2m$, $m \in N$, $z = \mu$ a $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{l+1}$ je dělení intervalu $[a, b]$, potom $P_{n,\mu} \equiv Sp_m(\pi, z)$.

Definice poměrných diferencí 1.1.7: Nechť $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{N+1}$ je množina uzlů a nechť f je dostatečně hladká funkce, potom poměrné diference definujeme rekurentně:

1. Diference 0-tého řádu: $[t_i]f = f(t_i)$, $i = 0, \dots, N$

2. Diference 1-ho řádu:

$$[t_i, t_{i+1}]f = \begin{cases} \dfrac{[t_i]f - [t_{i+1}]f}{t_i - t_{i+1}} = \dfrac{f(t_i) - f(t_{i+1})}{t_i - t_{i+1}} & t_i \neq t_{i+1},\ i = 0, \dots, N-1 \\ f'(t_i) & t_i = t_{i+1},\ i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

3. Diference r-tého řádu pro $1 \leq r \leq N+1$:

$$[t_i, \dots, t_{i+r}]f = \begin{cases} \dfrac{[t_i, \dots, t_{i+r-1}]f - [t_{i+1}, \dots, t_{i+r}]f}{t_i - t_{i+r}} & t_i \neq t_{i+r},\ i = 0, \dots, N+1-r \\ \dfrac{f^{(r)}(t_i)}{r!} & t_i = t_{i+r},\ i = 0, \dots, N+1-r \end{cases}$$

Lze také použít následující ekvivalentní definici.

Definice 1.1.8: Nechť $f^{(n)}$ je spojitá funkce a S^n je standardní n-simplex:

$$S^n = \{\lambda \equiv (\lambda_0, \dots, \lambda_n) : \lambda_i \geq 0,\ i = 0, \dots, n,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\}$$

pro $i = 0, \dots, N$ definujme $[t_i]f = f(t_i)$ a pro $n \in N$

$$[t_i, \dots, t_{i+n}]f = \int_{S^n} f^{(n)}(\lambda_0 t_i + \dots + \lambda_n t_{i+n}) \mathrm{d}\lambda.$$

Některé vlastnosti pom. diferencí:

1. Nechť $f^{(n)}$ je spojitá funkce, potom:

$$[t_i, \dots, t_{i+n}]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \text{ kde } \xi \in [t_i, t_{i+n}].$$

2. Z Taylorova rozvoje funkce f v t_i

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (x - t_i)^j \frac{f^{(j)}(t_i)}{j!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_i}^{+\infty} (x - t)_+^{n-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t$$

dostáváme:

$$[t_i, \dots, t_{i+n}]f = \frac{1}{n!} \int_R M(t|t_i, \dots, t_{i+n}) f^{(n)}(t) \mathrm{d}t,$$

kde

$$M(x|t_i, \dots, t_{i+n}) = n[t_i, \dots, t_{i+n}](t - x)_+^{n-1}.$$

Vlastnosti funkce $\mathbf{M(x|t_i, \dots, t_{i+n})}$:

- Platí, že funkce $M(x|t_i, \dots, t_{i+n})$ je na každém intervalu polynom stupně $n-1$ a pro její nosič platí:

$$supp M(x|t_i, \dots, t_{i+n}) \subseteq [t_i, t_{i+n}]$$

- Je-li t_i μ_i-násobný, tzn. $t_{i-1} < t_i = \dots = t_{i+\mu_i-1} < t_{i+\mu_i}$, pak tato funkce je v okolí bodu t_i. $n - 1 - \mu_i$-krát spojitě diferencovatelná.

- Je-li $f \in C[t_i, t_{i+n}]$ tak:

$$\int_R M(t|t_i, \dots, t_{i+n}) f(t) \mathrm{d}t = n! \int_{S^n} f(\lambda_0 t_i + \dots + \lambda_n t_{i+n}) \mathrm{d}\lambda$$

- Nechť $t_i = i$, $i = 0, \dots, n$, pak

$$M(\cdot|0, \dots, n) = \chi[0,1] * \dots * \chi[0,1],$$

kde $*$ na pravé straně značí n-násobnou konvolucí charakteristické funkce χ intervalu [0,1]. Definice konvoluce je dána předpisem:

$$f * g(x) = \int_R f(t) g(x - t) \mathrm{d}t = \int_R g(t) f(x - t) \mathrm{d}t$$

Definice 1.1.9: Nechť $t_i \leq \ldots \leq t_{i+n}$, $i \in Z$, $n \in N$ je zadaná množina uzlů splňující $t_i \neq t_{i+n}$, potom funkce $M(x|t_i, \ldots, t_{i+n})$ definovaná přepisem:

$$M(x|t_i, \ldots, t_{i+n}) := n[t_i, \ldots, t_{i+n}](t-x)_+^{n-1}$$

se nazývá B-spline stupně $n-1$ příslušný uzlům $\{t_j\}_{j=i}^{i+n}$.
Normovaná B-spline funkce $N_{i,n}$ stupně $n-1$ příslušná uzlům $\{t_j\}_{j=i}^{i+n}$ se definuje takto:

$$N_{i,n}(x) := \frac{t_{i+n}-t_i}{n} M(x|t_i \ldots, t_{i+n}) = (t_{i+n}-t_i)[t_i, \ldots, t_{i+n}](t-x)_+^{n-1}.$$

Je-li $t_i = 0$, $t_1 = 1, \ldots, t_{i+n} = n$, pak funkce N_n,

$$N_n(x) = N_{i,n}(x)$$

se nazývá kardinální (základní) B-spline stupně $n-1$.
V dalším výkladu budeme uvažovat pouze kardinální B-spliny.
Lineární kombinace B-splinů: Nechť $T = \{t_j\}_{j=1}^{N+n}$ je množina uzlů (obecně vícenásobných) taková, že platí $t_j < t_{j+n}$ pro $j = 1, \ldots, N$. Sestrojme lineární kombinaci S B-splinů:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j N_{j,n}(x).$$

Protože B-spliny jsou lineárně nezávislé tvoří bázi prostoru $S_n(T)$, kde

$$S_n(T) = L\{N_{j,n}\}_{j=1}^{N}.$$

1.2 Interpolace spliny

V následujícím odstavci se budeme zabývat interpolaci spliny lichého stupně, která se využívá zejména chceme-li interpolovat nebo zhlazovat data zadaná v uzlových bodech. V následujícím výkladu budeme považovat vektor z v definici splinu za konstantní.

Definice 1.2.1: Nechť z je konstantní a $1 \leq z \leq n$, kde $n \in N$, nechť $f \in W^{n,2}[a,b]$. Pak funkci $s \in C^{n-1}[a,b]$ nazveme $Sp_n(\pi, z)$-interpolací funkce f, jestliže

1. $s \in Sp_n(\pi, z)$,
2. pro každé $j = 0, \ldots, z-1$ a všechna $i = 1, .., N$ je $s^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$.

Tato interpolace není určena jednoznačně, neboť dim $Sp_n(\pi, z) = 2n + Nz$ a k dispozici máme pouze Nz lineárně nezávislých rovnic. Tudíž musíme ještě dalších 2n podmínek dodat, nejčastěji se volí podmínky v okrajových bodech. Volba podmínek závisí na konkrétních požadavcích souvisejících s konkrétními aplikacemi.

Dále se budeme pro zjednodušení zabývat pouze interpolací kubickými spliny s rovnoměrným dělením.
Nechť tedy $s \in Sp_2(\pi, z)$, kde π je rovnoměrné dělení konečného intervalu $[a, b]$, krok h u rovnoměrného dělení se spočítá jako

$$h = \frac{b-a}{N+1}$$

a uzly dělení jsou $x_i = a + jh$, kde $j = 0, \dots, N+1$.
Označení:

$$s_i = s(x_i),\ s'_i = s'(x_i), s''_i = s''(x_i), \text{ kde } i = 1, \dots, N+1$$

Lemma 1.2.1: Nechť $i = 1, \dots, N$ potom platí

1. $s_{i-1} - 2s_i + s_{i+1} = \frac{h^2}{6}[s''_{i-1} + 4s''_i + s''_{i+1}]$
2. $s_{i+1} - s_{i-1} = \frac{h}{3}[s'_{i-1} + 4s'_i + s'_{i+1}]$

Důkaz: V důkazu využijeme Taylorův rozvoj, při zavedeném značení máme:

$$s_{i+1} = s_i + hs'_i + \frac{h^2}{2}s''_i + \frac{h^3}{6}s'''_{i+}$$

$$s_{i-1} = s_i - hs'_i + \frac{h^2}{2}s''_i - \frac{h^3}{6}s'''_{i-}$$

odečtením dostaneme:

$$s_{i+1} - s_{i-1} = 2hs_i + \frac{h^3}{6}(s'''_{i+} + s'''_{i-})$$

a sečtením máme:

$$s_{i+1} + s_{i-1} = 2s_i + h^2 s''_i + \frac{h^3}{6}(s'''_{i+} - s'''_{i-}).$$

Využijeme Taylorův rozvoj ještě jednou a to pro druhé derivace, následuje:

$$s''_{i+1} = s''_i + hs'''_{i+} \text{ a } s''_{i-1} = s''_i - hs'''_{i-}$$

sečtením obdržíme:

$$s''_{i+1} + s''_{i-1} = 2s''_i + h(s'''_{i+} - s'''_{i-}) \text{ a tudíž } h(s'''_{i+} - s'''_{i-}) = s''_{i+1} - 2s''_i + s''_{i-1}.$$

K důkazu 1. teď stačí dosadit do druhé odvozené rovnosti. K důkazu 2. využijeme ještě jednou Taylorův rozvoj, a to pro první derivace:

$$s'_{i+1} = s'_i + hs''_i + \frac{h^2}{2}s'''_{i+} \text{ a } s'_{i-1} = s'_i - hs''_i + \frac{h^2}{2}s'''_{i-}$$

součet se rovná:

$$s'_{i+1} - 2s'_i + s'_{i-1} = \frac{h^2}{2}(s'''_{i+} - s'''_{i-})$$

a po dosazení do první odvozené rovnosti obdržíme dokazované tvrzení .

Nechť $I = [a, b]$ a nechť π je rovnoměrné dělení intervalu $[a, b]$ s krokem h, dále nechť jsou zadány hodnoty $\{f_i\}_{i=1}^N$ funkce f, kde $f_i = f(x_i)$ a $x_i = a + ih$. Našim cílem je najít $s \in Sp_n(\pi, z)$, tak aby

$$s(x_i) = f_i,\ i = 1, \ldots, N.$$

Definice 1.2.2: Z definice interpolace plyne, že k její jednoznačnosti kubickým splinem je zapotřebí dodat další čtyři podmínky-nejčastěji se používají následující:

1. Máme zadané hodnoty f_0, f'_0, f_{N+1}, f'_{N+1} a chceme, aby $s \in Sp_2(\pi, 1)$ splňovala:
   $s(a) = f_0$, $s'(a) = f'_0$, $s(b) = f_{N+1}$, $s'(b) = f'_{N+1}$.
   Taková interpolace se nazývá interpolace I.typu.
2. Máme zadané hodnoty f_0, f''_0, f_{N+1}, f''_{N+1} a chceme, aby $s \in Sp_2(\pi, 1)$ splňovala:
   $s(a) = f_0$, $s''(a) = f''_0$, $s(b) = f_{N+1}$, $s''(b) = f''_{N+1}$.
   Taková interpolace se nazývá interpolace II.typu.
3. Máme zadané hodnoty f_0, f_{N+1} a chceme, aby $s \in Sp_2(\pi, 1)$ splňovala:
   $s(a) = f_0$, $s(b) = f_{N+1}$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$.
   Taková interpolace se nazývá interpolace III.typu.
4. Chceme , aby $s \in Sp_2(\pi, 1)$ splňovala:
   $s(a) = s(b)$, $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$, $s'''(a) = s'''(b)$.
   Taková interpolace se nazývá kubická periodická interpolace.
5. Chceme, aby přirozený kubický spline s splňoval:
   $s''(a) = s''(x_1) = 0$, $s''(x_N) = s''(b) = 0$.
   Taková interpolace se nazývá interpolace přirozeným kubickým splinem.
6. Chceme, aby přirozený kubický spline s splňoval:
   $s(a) = f(a)$, $s(b) = f(b)$, $s''(a) = s''(b) = 0$.
   Taková interpolace se nazývá rozšířená interpolace přirozeným kubickým splinem.

7. Předpokládáme, že $f \in C[a,b]$, další možné doplňující podmínky mohou být:
$s(a) = f(a)$, $\int_a^{x_1} s(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)\mathrm{d}x$
$s(b) = f(b)$, $\int_{x_N}^{b} s(x)dx = \int_{x_N}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

Algoritmus konstrukce kubického splinu II. typu: Nechť máme zadány hodnoty f_i, $i = 0, \ldots, N+1$, $N \in N$ a hodnoty f_0'' a f_{N+1}''. Uvažujme pouze rovnoměrné dělení tzn. $h = (b-a)/N+1$, uzly interpolace jsou $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, N+1$. Chceme nalézt $s \in Sp_2(\pi, 1)$, aby $s(x_i) = f_i$, $i = 0, \ldots, N+1$ a $s''(a) = f_0''$, $s''(b) = f_{N+1}''$.
Nejprve předpokládejme, že už známe hodnoty $M_i = s''(x_i)$, které se někdy nazývají momenty splinu. Víme, že funkce s'' je spojitá a po částech lineární a tím pro $x \in [x_i, x_{i+1}]$ z linearity plyne:

$$s_i''(x) = M_i + (M_{i+1} - M_i)\frac{x - x_i}{h} = M_i\frac{x_{i+1} - x}{h} + M_{i+1}\frac{x - x_i}{h}.$$

Integrováním vypočítáme:

$$s_i'(x) = -M_i\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^2}{2h} + C_i,$$
$$s_i(x) = M_i\frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h} + C_i(x - x_i) + D_i.$$

Pomocí známých hodnot $f(x_i) = s_i(x_i)$ a $f(x_{i+1}) = s_i(x_{i+1})$ určíme konstanty C_i a D_i :

$$f(x_i) = \frac{1}{6}M_i h^2 + D_i \text{ a } f(x_{i+1}) = \frac{1}{6}M_{i+1}h^2 + C_i h + D_i.$$

Odtud plyne:

$$D_i = f(x_i) - \frac{1}{6}M_i h^2,$$
$$C_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Ze spojitosti prvních derivací určíme hodnoty $M_1, \ldots, M_N$, přičemž hodnoty M_0 a M_{N+1} jsou zadané:

$$s_{i-1}'(x_i-) = \frac{1}{2}M_i h + C_{i-1}.$$

Po dosazení za C_{i-1} obdržíme:

$$s_{i-1}'(x_i-) = \frac{1}{2}M_i h + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - \frac{h}{6}(M_i - M_{i-1})\ s_i'(x_i+) = \frac{1}{2}M_i h + C_i$$

a po dosazení za C_i obdržíme:

$$s_i'(x_i+) = \frac{1}{2}M_i h + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{6}(M_{i+1} - M_i).$$

Srovnáme oba výrazy:

$$M_{i-1}\frac{h}{6} + M_i\Big(\frac{2h}{3}\Big) + M_{i+1}\frac{h}{6} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}.$$

Identitu lze přepsat do tvaru:

$$\frac{1}{2}M_{i-1} + 2M_i + \frac{1}{2}M_{i+1} = g_i,$$

kde g_i je pravá strana původní rovnice vynásobena $\dfrac{3}{h}$.
Vznikne soustava rovnic:

$$\begin{aligned}
2M_1 + \frac{1}{2}M_2 &= g_1 - \frac{1}{2}f_0'' \\
\frac{1}{2}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 &= g_2 \\
\frac{1}{2}M_2 + 2M_3 + \frac{1}{2}M_4 &= g_3 \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}M_{n-1} + 2M_n &= g_n - \frac{1}{2}f_{n+1}''.
\end{aligned}$$

K dokončení zbývá dokázat existenci a jednoznačnost řešení. Stačí si všimnout, že matice je ostře diagonálně dominantní a tudíž také regulární. Z lemmata plyne existence a jednoznačnost interpolace II.typu.

Odhad chyby kubického splinu II.typu.
Pro jednoduchost předpokládejme opět pouze rovnoměrné dělení π intervalu $I = [a, b]$ s krokem $h = \dfrac{b-a}{N+1}$.

Věta 1.2.1: Nechť $f \in C^4(I)$, kde $I = [a, b]$, nechť h je krok rovnoměrného dělení π, nechť $s \in Sp_2(\pi, 1)$ je interpolační spline splňující podmínky:

$$s(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, N+1,\ s''(a) = f''(a), s''(b) = f''(b).$$

Nechť $M = \max_{x \in I} \mid f^4(x) \mid$ a $I = (x_0, x_1) \cup \ldots \cup (x_N, x_{N+1})$.
Potom platí:

$$\max_{x \in I} \mid f(x) - s(x) \mid \leq \frac{7}{32}Mh^4,$$

$$\max_{x\in I} \mid f'(x) - s'(x) \mid \leq \frac{7}{16} M h^3,$$

$$\max_{x\in I} \mid f''(x) - s''(x) \mid \leq \frac{7}{8} M h^2,$$

$$\max_{x\in I} \mid f'''(x) - s'''(x) \mid \leq 2Mh.$$

Důkaz: Označme $z(x) = f(x) - s(x)$, důkaz provedeme v šesti krocích:

1. Z vlastností interpolace víme, že $z \in C^2(I_i)$, $z(x_i) = z(x_{i+1}) = 0$ pro $i = 0, \ldots, N$, kde $I_i = [x_i, x_{i+1}]$. Pomocí Taylorova rozvoje a integrace přes interval I_i odvodíme, že platí:

$$hz'(x) = \int_{x_i}^{x} (t - x_i) z''(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - t) z''(t) \mathrm{d}t.$$

   Odhad se rovná:

$$\max_{x\in I_i} \mid z'(x) \mid \leq \frac{1}{h} \max_{x\in I_i} \Big(\frac{(x - x_i)^2}{2} + \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2} \Big) \max_{x\in I_i} \mid z''(x) \mid \leq \frac{1}{2} h \max_{x\in I_i} \mid z''(x) \mid .$$

   Ze zřejmé rovnosti

$$z(x) = \frac{1}{2} \Big(\int_{x_i}^{x} z'(t) \mathrm{d}t - \int_{x}^{x_{i+1}} z'(t) \mathrm{d}t \Big),$$

   plyne nerovnost:

$$\mid z(x) \mid \leq \frac{1}{2} h \max_{x\in I_i} \mid z'(x) \mid \leq \frac{1}{4} h^2 \max_{x\in I_i} \mid z''(x) \mid .$$

2. Nechť $L_i = \max(\mid z''(x_i) \mid, \mid z''(x_{i+1}) \mid)$, $i = 1, \ldots, N$. Spočítáme odhad:

$$\max_{x\in I_i} \mid f''(x) - s''(x) \mid \leq L_i + \frac{1}{8} h^2 M.$$

   Protože funkce s'' je lineární platí:

$$s''(t) = \frac{1}{h} ((t - x_i) s''_{i+1} + (x_{i+1} - t) s''_i), \text{ kde } t \in I_i.$$

   Z Taylorova rozvoje pro $t \in I_i$ získáme:

$$f''(x) = f''(t) + (x - t) f'''(t) + \frac{1}{2} (x - t)^2 f^{(4)}(\xi_x).$$

Nejprve dosadíme $x = x_{i+1}$ a rovnici vynásobíme $(t - x_i)$, obdržíme:

$$f''(x_{i+1})(t-x_i) = f''(t)(t-x_i)+(x_{i+1}-t)(t-x_i)f'''(t)+\frac{1}{2}(x_{i+1}-t)^2(t-x_i)f^{(4)}(\xi_{x_{i+1}}).$$

Položme $x = x_i$ a původní rovnici vynásobíme $(x_{i+1} - t)$, dostáváme:

$$f''(x_i)(x_{i+1}-t) = f''(t)(x_{i+1}-t)+(x_i-t)(x_{i+1}-t)f'''(t)+\frac{1}{2}(t-x_i)^2(x_{i+1}-t)f^{(4)}(\xi_{x_i}).$$

Sečtením máme:

$$f''(t) = \frac{1}{h}((t - x_i)f''_{i+1} + (x_{i+1} - t)f''_i) + R,$$
$$\text{kde } f''_i = f''(x_i) \text{ a } f''_{i+1} = f''(x_{i+1})$$
$$\text{a } R = -\frac{1}{2h}\Big[(x_{i+1} - t)^2(t - x_i)f^{(4)}(\xi_{x_{i+1}}) + (x_{i+1} - t)(t - x_i)^2 f^{(4)}(\xi_{x_i})\Big].$$

Výraz R lze snadno odhadnout:

$$\mid R \mid \leq \frac{1}{2}M(x_{i+1} - t)(t - x_i).$$

Pomocí 1.derivace najdeme extrém výrazu $(x_{i+1} - t)(t - x_i)$ a dostáváme:

$$\mid R \mid \leq \frac{1}{8}h^2M.$$

Ze vzorců pro $s''(t)$ a $f''(t)$ lze odhadnout:

$$\max_{t\in I_i} \mid f''(t)-s''(t) \mid \leq \frac{1}{h} \mid (t-x_i)(f''_{i+1}-s''_{i+1})+(x_{i+1}-t)(f''_i-s''_i) \mid + \mid R \mid \leq L_i+\frac{1}{8}h^2M.$$

3. Pomocí lemmatu 1.2.1 odvodíme odhad L_i:

$$\max_{i=1,\dots,N} L_i = \max_{i=1,\dots,N} \mid s''_i - f''_i \mid \leq \frac{1}{2h^2} \max_{i=1,\dots,N} \mid \varepsilon \mid,$$

kde

$$e = A(w - y), \text{ kde } w - y = \{h^2(f''_i - s''_i)\}_{i=1}^N,$$
$$A = \{a_{ij}\},\ a_{ii} = 4,\ a_{ij} = 1 \text{ pro } \mid i - j \mid = 1, \text{ jinak } a_{ij} = 0,\ i, j = 1, \dots, N.$$

Potom dostáváme:

$$\max_{i=1,\dots,N} L_i = \frac{1}{h^2}\|w - y\| = \frac{1}{h^2}\|A^{-1}\varepsilon\| \leq \frac{1}{h^2}\|A^{-1}\|\,\|\varepsilon\| \leq \frac{1}{2h^2}\|\varepsilon\|.$$

4. Z lemmatu a vlastností interpolace II. typu plyne pro $i = 2, \dots, N - 1$

$$\varepsilon = h^2(f''_{i-1} + 4f''_i + f''_{i+1}) - 6(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}).$$

A z Taylorova rozvoje získáme:

$$f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1} = h^2 f''_i + \frac{1}{24}h^4\Big[f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)\Big],$$
$$h^2(f''_{i-1} + 4f_i + f''_{i+1}) = 6h^2 f''_i + \frac{1}{2}h^4\Big[f^{(4)}(\xi_3) + f^{(4)}(\xi_4)\Big],$$

kde $\xi_1, \xi_3 \in (x_{i-1}, x_i)$ a $\xi_2, \xi_4 \in (x_i, x_{i+1})$. Z těchto vztahu dostáváme:

$$\max_{i=2,\dots,N-1} | \varepsilon_i | \leq \frac{3}{4}h^4 M.$$

5. Ze třetího kroku a z odhadu $\|\varepsilon\|$ plyne:

$$\max_{i=1,\dots,N} L_i \leq \frac{1}{2h^2} \max_{i=1,\dots,N} | \varepsilon_i | \leq \frac{3}{4}h^2 M.$$

   Z druhého kroku dostáváme odhad:

$$\max_{t\in I_i} | f''(t) - s''(t) | \leq \frac{7}{8}h^2 M.$$

   Výše uvedenou první nerovnost použijeme a z prvního kroku dostáváme odhad:

$$\max_{t\in I_i} | f(t) - s(t) | \leq \frac{7}{32}h^4 M.$$

   Z tohoto odhadu a z prvního kroku dostáváme také odhad pro chybu první derivace.

6. Zbývá už pouze dokázat poslední vztah pro chybu třetí derivace. Z Taylorova rozvoje dostáváme:

$$s''_{i+1} = s''(x) + (x_{i+1} - x)s'''(x) \text{ a } s''_i = s''(x) - (x - x_i)s'''(x)$$

   a odtud odečtením plyne:

$$s'''(x) = \frac{1}{h}(s''_{i+1} - s''_i).$$

   Obdobně máme:

$$f'''(x) = \frac{1}{h}(f''_{i+1} - f''_i) + \frac{h}{2}f^{(4)}(\xi),$$

   kde $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. Nyní použijeme odhad $| L_i |$ a dostáváme odhad chyby třetí derivace:

$$| f'''(x) - s'''(x) | \leq \frac{2}{h}L_i + \frac{h}{2}M \leq 2hM.$$

Podobným způsobem můžeme postupovat u chyby interpolace II.typu, kdy $f \in C^j(I)$.

Kapitola 2

Aplikace splinů

2.1 Kolokační metoda pro evoluční úlohu

Numerické metody využívající spliny jsou důležité pro získání numerické aproximace řešení diferenciální úlohy s počáteční podmínkou. Hlavní problém při použití kolokační metody je její stabilita, protože i při vyšším stupni aproximace metody ještě nemusí být stabilní. Tento problém byl vyřešen použitím splinů s defekty.
Uvažujme diferenciální rovnici s počáteční podmínkou:

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ t \in [0, T] \tag{2.1}$$

$$y(0) = y_0,$$

kde $f \in C^p([0,T] \times R)$, kde $p \geq 0$ je dostatečně velké. Pro jednoduchost uvažujme pouze jednu diferenciální rovnici, všechna tvrzení však platí i pro systém obyčejných diferenciálních rovnic.
Nechť platí některá z následujících podmínek:

- Lipschitzova podmínka:

  $$\mid f(t,u) - f(t,v) \mid \leq L \mid u - v \mid \tag{2.2}$$

  platí pro všechna $t \in [0, T]$ a $u, v \in R$.

- Lipschitzova podmínka (2.2) platí pouze lokálně na $[0, T]$ a navíc řešení úlohy (2.1) je ohraničené.

Potom úloha (2.1) má jednoznačné řešení v intervalu $[0, T]$.
Předpokládejme, že máme dělení π_n intervalu $[0, T]$ splňující:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T,$$

kde $N \geq 1$ s konstantním krokem $h = t_{n+1} - t_n$, kde $n = 0, \ldots, N-1$.
Kolokace spliny z $\mathbf{S^1_m}(\pi_\mathbf{n})$: Na intervalu $I_k = [t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq N-1$ je aproximace

definována takto:

$$\begin{aligned} s_k &:= s|I_k,\ k=0,\dots,N-1 \\ s_k &:= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{s_{k-1}^{(j)}(t_k)}{j!}(t-t_k)^j + \frac{a_k}{m!}(t-t_k)^m, \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde pokládáme:

$$s_{-1}^{(j)}(0) := y^j(0).$$

Reálné parametry $\{a_k\}_{k=0,\dots,N-1}$ získáme z kolokačních podmínek:

$$s_k'(t_{k+1}) = f(t_{k+1}, s_k(t_{k+1})),\ k=0,\dots,N-1.$$

Implicitní Rungeho-Kuttova metoda: Nechť $b_j, a_{ij},\ i,j=1,\dots,m$ jsou reálná čísla a nechť c_i je reálné číslo splňující $c_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}$. Potom numerická implicitní metoda

$$\begin{aligned} K_i &= f(t_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^m a_{ij}K_j),\ i=1,\dots,m \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^m b_i K_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

se nazývá m stupňová implicitní Rungeho-Kuttova metoda.
Kolokace spliny z $\mathbf{S_m^m}(\pi_\mathbf{n})$: Nechť m je pozitivní celé číslo a nechť $c_1,\dots,c_m$ jsou různá reálná čísla (obvykle v $[0,1]$) definujme $s \in S_m^m(\pi_n)$ následovně:

$$\begin{aligned} s_k(t_k) &= s_{k-1}(t_k), \quad k=0,\dots,N-1 \\ s_k'(t_k + c_i h) &= f(t_k + c_i h, s_k(t_k + c_i h)),\ i=1,\dots,m. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Věta 2.1.1: Kolokační metoda definovaná formulí (2.5) je ekvivalentní s m stupňovou Rungeho-Kuttovou metodou (2.4) s koeficienty:

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(\theta)\mathrm{d}\theta,\ b_j = \int_0^1 l_j(\theta)\mathrm{d}\theta,\ i,j=1,\dots,m,$$

kde l_j jsou Lagrangovy polynomy:

$$l_j(\theta) = \prod_{k\neq j} \frac{\theta - c_k}{c_j - c_k}$$

Důkaz: Označme:

$$K_i := s_k'(t_k + c_i h),\ i=1,\dots,m.$$

Díky Lagrangeově interpolační větě dostáváme:

$$s_k'(t_k + \theta h) = \sum_{j=1}^m K_j l_j(\theta)$$

dále pomocí integrace víme, že platí:

$$s_k(t_k + c_i h) = s_{k-1}(t_k) + h \int_0^{c_i} s'_k(t_k + \theta h) \mathrm{d}\theta$$

a dosazením do výrazu pod integrálem obdržíme:

$$s_k(t_k + c_i h) = s_{k-1}(t_k) + h \int_0^{c_i} \sum_{j=1}^{m} K_j l_j(\theta) \mathrm{d}\theta.$$

Dosazením $a_{ij} = \displaystyle\int_0^{c_i} l_j(\theta)\mathrm{d}\theta$ dostáváme:

$$s_k(t_k + c_i h) = s_{k-1}(t_k) + h \sum_{j=1}^{m} a_{ij} K_j$$

a odtud plyne tvrzení věty.
Kolokace spliny z $\mathbf{S_m^d}(\pi_\mathbf{n})$: Nechť $1 \le d \le m$. Metoda

$$\begin{aligned}
\sigma_{n+1}^{(i-1)}(t_n) &= \sigma_n^{(i-1)}(t_n), \qquad i = 1, \dots, r \\
\sigma'_{n+1}(t_n + c_i h) &= f(t_n + c_i h, \sigma_{n+1}(t_n + c_i h)),\ i = 1, \dots, s \\
\sigma_0^{(i-1)}(0) &= y^{(i-1)}(0), \qquad i = 1, \dots, r,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

kde σ je polynom stupně $(r + s - 1)$ na $[t_n, t_{n+1}]$, se nazývá deficitní splinová kolokace typu (r, s).

Věta 2.1.2: Metoda (2.6) je ekvivalentní s (r, s) Nordsieckovou vícekrokovou metodou definovanou předpisem:

$$K_i = f\Big(t_n + c_i h, \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(1)} y_j^{(n)} + h \sum_{j=1}^{S} b_{ij}^{(1)} K_j\Big), \quad i = 1, \dots, s \tag{2.7}$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(2)} y_j^{(n)} + h \sum_{j=1}^{S} b_{ij}^{(2)} K_j, \quad i = 1, \dots, r,$$

kde $y_j^{(n+1)}$ jsou aproximace derivace $\dfrac{h^{j-1}}{(j-1)!} y^{(j-1)}(t_{n+1})$.
Důkaz: Z Taylorova rozvoje plyne:

$$\sigma'_{n+1}(t_n + xh) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!} (xh)^{j-1} + (xh)^{r-1} P_s(x),\ x \in [0, 1], \tag{2.8}$$

kde P_s je polynom stupně $s - 1$. Označme:

$$K_i := \sigma'_{n+1}(t_n + c_i h) = \sum_{j=1}^{r-1} \frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!} (c_i h)^{j-1} + (c_i h)^{r-1} P_s(c_i),\ i = 1, \dots, s.$$

Tudíž:

$$P_s(c_i) = \frac{1}{(c_ih)^{r-1}}\Big[K_i - \sum_{j=1}^{r-1}\frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!}(c_ih)^{j-1}\Big],\ i = 1,\ldots,s.$$

Polynom P_s stupně $s-1$ může být zapsán pomocí Lagrangeových polynomů v následující formě:

$$P_s(x) = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{(c_ih)^{r-1}}\Big[K_i - \sum_{j=1}^{r-1}\frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!}(c_ih)^{j-1}\Big]l_i(x),\ x\in[0,1],$$

kde

$$l_i(c_i) = \delta_{ij},\ i,j = 1,\ldots,s.$$

Do vztahu (2.8) dosadíme za P_s a máme:

$$\sigma'_{n+1}(t_n+xh) = \sum_{j=1}^{r-1}\frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!}(xh)^{j-1} + \sum_{i=1}^{s}\frac{l_i(x)x^{r-1}}{c_i^{r-1}}K_i - \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r-1}\frac{l_i(x)x^{r-j}\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{c_i^{r-j}(j-1)!}(xh)^{j-1}.$$

Úpravou prvního a třetího výrazu dostáváme:

$$\sigma'_{n+1}(t_n+xh) = \sum_{j=1}^{r-1}\Big(1 - \sum_{i=1}^{s}\frac{l_i(x)x^{r-j}}{c_i^{r-j}}\Big)\frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!}(xh)^{j-1} + \sum_{i=1}^{s}\frac{l_i(x)x^{r-1}}{c_i^{r-1}}K_i.$$

Integraci výrazu $\sigma'_{n+1}(t_n+xh)$ od nuly do jedné obdržíme:

$$\sigma_{n+1}(t_n+h) = \sigma_{n+1}(t_n) + h\int_0^1 \sigma'_{n+1}(t_n+xh)\mathrm{d}x.$$

Dosadíme do vztahu za výraz pod integrálem a dostáváme:

$$\sigma_{n+1}(t_n+h) = \sigma_{n+1}(t_n)+\sum_{j=1}^{r-1}\Big(\frac{1}{j}-\sum_{i=1}^{s}\int_0^1\frac{l_i(x)x^{r-1}}{c_i^{r-j}}\mathrm{d}x\Big)\frac{\sigma_{n+1}^{(j)}(t_n)}{(j-1)!}h^j+h\sum_{j=1}^{s}\int_0^1\frac{l_j(x)x^{r-1}}{c_j^{r-1}}\mathrm{d}xK_j,$$

položením $t_{n+1} = t_n + h$ a označením

$$y_j^{(k)} := \frac{h^{j-1}}{(j-1)!}\sigma_k^{(j-1)}(t_k)$$

dostáváme:

$$y_1^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{r}a_{1j}^{(2)}y_j^{(n)} + h\sum_{j=1}^{s}b_{1j}^{(2)}K_j,\ i = 1,\ldots,r,$$

kde

$$\begin{aligned}
a_{1j}^{(2)} &= 1, \qquad j = 1\\
a_{1j}^{(2)} &= \frac{1}{j-1} - \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{c_i^{r-j-1}}\int_0^1 l_i(x)x^{r-j-1}\mathrm{d}x,\ j = 2,\ldots,r\\
b_{1j}^{(2)} &= \frac{1}{c_j^{r-1}}\int_0^1 l_j(x)x^{r-1}\mathrm{d}x,\ j = 1,\ldots,r.
\end{aligned}$$

Podobně získáme:

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(2)} y_j^{(n)} + h \sum_{j=1}^{s} b_{ij}^{(2)} K_j, \quad i = 2, \dots, r.$$

K dokončení zderivujeme $\sigma_{n+1}(t_n + xh)$ a zintegrujeme od nuly do c_i. Obdržíme:

$$\sigma_{n+1}(t_n + c_i h) = \sigma_{n+1}(t_n) + h \int_0^{c_i} \sigma'_{n+1}(t_n + xh).$$

Do výrazu pod integrálem opět dosadíme jako předtím, potom dosadíme do (2.6) a odtud již plyne tvrzení věty.
Metody Hermitova typu: Tyto metody jsou založeny na Hermitově interpolaci a Nordsikově vícekrokové metodě. Metoda je definována předpisem:

$$\begin{aligned} K_i &= f\Big(t_n + c_i h, \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(1)} y_j^{(n)} + h \sum_{j=1}^{s} b_{ij}^{(1)} K_j\Big),\ i = 1, \dots, s \\ y_i^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(2)} y_j^{(n)} + h \sum_{j=1}^{s} b_{ij}^{(2)} K_j, \quad i = 1, \dots, r \\ \sigma_{n+1}(t) &= \sum_{j=1}^{r} \tilde{s}_{nj}(t) y_j^{(n)} + \sum_{j=1}^{r} \tilde{s}_{n+1j}(t) y_j^{(n+1)},\ t \in [t_n, t_{n+1}], \end{aligned}$$

kde

$$\tilde{s}_{ij}(t) = \frac{(j-1)!}{h^{j-1}} \tilde{h}_{ij-1}(t),\ i = n, n+1,\ j = 1, \dots, r,\ t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Funkce $\tilde{h}_{nj}$ a $\tilde{h}_{n+1j}$ jsou fundamentální polynomy Hermitovy interpolace stupně $r + j - 1$ na intervalu $[t_n, t_{n+1}]$, pro které platí:

$$\tilde{h}_{ij}^{(l)}(t_m) = \delta_{im}\delta_{jl}, \quad i, m = n, n+1, \quad j, l = 0, \dots, r-1.$$

Odtud pro σ_{n+1} plynou následující vztahy pro $j = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} y_j^{(n)} &= \frac{h^{j-1}}{(j-1)!} \sigma_{n+1}^{(j-1)}(t_n) \\ y_j^{(n+1)} &= \frac{h^{j-1}}{(j-1)!} \sigma_{n+1}^{(j-1)}(t_{n+1}). \end{aligned}$$

Definujme $\sigma \in S_{2r-1}^{r}(\pi_n)$ následovně:

$$\sigma|_{[t_n, t_{n+1}]} := \sigma_{n+1}.$$

Z předchozích vztahů dostáváme:

$$\sigma^{(j-1)}(t_n) = \frac{(j-1)!}{h^{j-1}} y_j^{(n)} \approx y^{(j-1)}(t_n)$$

pro $n = 0, \ldots, N$ a $j = 1, \ldots, r$.
Stabilita splinové kolokace: Předpokládejme testovací problém:

$$\begin{aligned} y' &= \lambda y, \quad \lambda \in C \\ y(0) &= y_0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Použitím diskrétní jednokrokové numerické metody dostáváme vztah:

$$y_{n+1} = R(\lambda h) y_n.$$

Funkce $R : C \to C$ se nazývá funkce stability numerické metody. Oblast stability jednokrokové numerické metody je definována takto:

$$R = \{z \in C :\mid R(z) \mid \leq 1\}.$$

Definice(Dalquist;1963) 2.1.1: Numerická metoda se nazývá A-stabilní jestliže

$$R \supseteq \{z \in C : Re(z) < 0\}.$$

Definice(Cryer;1972) 2.1.2: Numerická metoda se nazývá A_0-stabilní jestliže

$$R \supseteq \{z \in C : Re(z) < 0, Im(z) = 0\}.$$

Definice(Widlund;1967) 2.1.3: Numerická metoda se nazývá $A(\alpha)$-stabilní jestliže existuje $\alpha \in (0, \pi)$ tak, že

$$R \supseteq \{z \in C :\mid arg(-z) \mid \leq \alpha\}.$$

Definice(Gear;1969) 2.1.4: Numerická metoda se nazývá stiff-stabilní jestliže existují kladné konstanty a a c takové, že:

$$R \supseteq R_1 \cup R_2,$$

kde

$$\begin{aligned} R_1 &= \{z \in C : Re(z) < -a\} \\ R_2 &= \{z \in C : -a < Re(z) < 0, \ -c < Im(z) < c\}. \end{aligned}$$

Věta 2.1.3: Oblast stability Rungeho-Kuttovy metody s parametry $c_1, \ldots, c_m$ je dána nerovnici $\mid R(z) \mid \leq 1$, kde $R(z)$ je dáno formulí:

$$R(z) = \frac{W^{(m)}(1) + W^{(m-1)}(1)z + \ldots + W(1)z^m}{W^{(m)}(0) + W^{(m-1)}(0)z + \ldots + W(0)z^m} = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

kde

$$W(t) = \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m} (t - c_i)$$

Důkaz: Nejprve poznamenejme, že faktor $\dfrac{1}{m!}$ vystupuje ve výrazu funkce W, z důvodu, aby u $W^{(m)}(t)$ byla konstanta rovna jedné. Předpokládejme v následujícím, že $h = 1$, $\lambda = z$, $y_0 = 1$ a nechť s je defektový spline aproximující řešení. Protože $s'(t) - zs(t)$ je polynom stupně m, který je nulový v bodech kolokace, tak existuje konstanta K, taková že:

$$s'(t) - zs(t) = KW(t).$$

M-násobným derivováním posledního vztahu dostáváme:

$$0 = s^{(m+1)}(t) = z^{m+1}s(t) + K\Big(\sum_{j=0}^{m} W^{(j)}(t)z^{m-j}\Big),$$

konstantu K lze vyjadřit jako funkci $s(0)$ a odtud dostaneme tvrzení věty, protože

$$s(1) = \frac{W^{(m)}(1) + W^{(m-1)}(1)z + \ldots + W(1)z^m}{W^{(m)}(0) + W^{(m-1)}(0)z + \ldots + W(0)z^m}s(0).$$

Věta 2.1.4: Jestliže $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ (se stupni polynomu $P \leq m$ a polynomu $Q \leq m$ a Q(0)=1) je aproximace e^z stupně vyššího nebo rovno m, potom pro $z \to 0$ existuje jednoznačný polynom splňující $W^{(s)} = 1$, takový že:

$$R(z) = \frac{W^{(m)}(1) + W^{(m-1)}(1)z + \ldots + W(1)z^m}{W^{(m)}(0) + W^{(m-1)}(0)z + \ldots + W(0)z^m}.$$

Důkaz: Polynom Q můžeme napsat ve tvaru

$$Q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_m z^m$$

a polynom P můžeme psát ve tvaru (předpoklad věty o aproximaci funkce e^z)

$$P(z) = e^z Q(z) + O(z^{m+1}).$$

Použijeme rozvoj e^z do Taylorovy řady a po úpravě obdržíme:

$$P(z) = 1 + z\Big(\frac{q_0}{1!} + \frac{q_1}{0!}\Big) + z^2\Big(\frac{q_0}{2!} + \frac{q_1}{1!} + \frac{q_2}{0!}\Big) + \ldots + z^m\Big(\frac{q_0}{m!} + \frac{q_1}{(m-1)!} + \ldots + \frac{q_m}{0!}\Big),$$

kde $q_0 = 1$
Položme:

$$W(t) = q_m + q_{m-1}\frac{t}{1!} + q_{m-2}\frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{q_m}{m!},$$

pak P a Q splňují požadovanou podmínku: $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$.
Nyní uvedeme stabilitu kolokační metody se spliny z $S_m^d(\pi_n)$, $1 \leq d \leq m$.
Použijeme metodu (2.7) k testovacímu problému (2.9). Označme:

$$y^{(n)} = [y_1^{(n)}, \ldots, y_r^{(n)}]^T.$$

Po prvním kroku dostáváme:

$$y^{(1)} = M(z)y^0,$$

kde $z = \lambda h \in C$ a $M(z)$ je čtvercová matice $r \times r$ splňující

$$M(z) = A_2 + zB_2(I - zB_1)^{-1}A_1.$$

Nechť $\rho(M(z))$ je spektrální poloměr matice $M(z)$. V roce 1981 Butcher definoval různé úrovně stability Nordsieckovy vícekrokové metody:

1. stabilita v nule: $\rho(A_2) \leq 1$
2. stabilita v nekonečnu: $\rho(A_2 - B_2B_1^{-1}A_1) \leq 1$
3. A_0-stabilita: $\rho(M(z)) \leq 1$ pro libovolné $x \in (-\infty, 0]$
4. A-stabilita: $\rho(M(z)) \leq 1$ pro $z \in C$ takové že $Re(z) \leq 0$.

Věta 2.1.5: Matice $M(z)$ stability (r,s) deficitní splinové kolokační metody s parametry $c_1, \ldots, c_s$ má tvar:

$$M(z) = diag(R_1(z), \ldots, R_r(z)),$$

kde

$$R_{i+1}(z) = \frac{W^{r+s+i-1}(1) + W^{r+s+i-2}(1)z + \ldots + W^i(1)z^{r+s-1}}{W^{r+s+i-1}(0) + W^{r+s+i-2}(0)z + \ldots + W^i(0)z^{r+s-1}} = \frac{P_i(z)}{Q_i(z)}$$

pro $i = 0, \ldots, r-1$ a

$$W(t) := \frac{1}{(r+s-1)!}t^{r-1}\prod_{i=1}^{S}(t - c_i).$$

Důkaz: viz [2].
Důsledek: Deficitní splinová kolokační metoda (2.6) je A-stabilní právě když

$$\max_{i=1,\ldots,r} \mid R_i(z) \mid \leq 1$$

pro libovolné $z \in C$ takové, že $Re(z) \leq 0$.

Věta 2.1.6: (r,s) deficitní splinová kolokační metoda může být A-stabilní pouze v případě $r \leq 2$, přičemž v případě $r = 2$ musí být $c_s = 1$.
Důkaz: viz [2].

2.2 Numerické řešení diferenciálních rovnic s okrajovou podmínkou:

V této kapitole odvodíme metodu aproximace kubickým splinem pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s okrajovými podmínkami. Nechť je dána rovnice:

$$Lu := u'' + b(x)u' + c(x)u = f, \quad x \in [0.1] \tag{2.10}$$

a nechť máme zadané okrajové podmínky ve tvaru:

$$\lambda_0 u'(0) + \mu_0 u(0) = \alpha, \quad \lambda_1 u'(1) + \mu_1 u(1) = \beta.$$

Použijeme Galerkinovu metodu, ve které za aproximační prostor bereme množinu všech kubických splinů splňujících okrajové podmínky a za testovací prostor bereme prostor po částech lineárních funkcí a k aproximaci využíváme Simpsonovo pravidlo. Nechť tedy $\pi = \{x_j\}$, $j = 0, \ldots, n$, kde $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ je libovolné dělení s vlastností, že pro $N \to \infty$ $h \to 0$, kde

$$h = \max h_k,\ h_k = x_{k+1} - x_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Nechť $S_h \subset C^2[0,1]$ je množina kubických splinů na dělení π, splňující okrajové podmínky, nechť $T_n \subset C[0,1]$ je množina po částech lineárních funkcí definovaných na dělení π. Hledejme $u_h \in S_h$ tak, aby $\forall \chi_h \in T_h$ platilo:

$$(Lu_h, \chi_h) = (f, \chi_h),$$

kde (a,b) je skalární součin v prostoru $L^2_{[0,1]} : (u,v) := \int_0^1 uv\mathrm{d}x.$

Podobně diskrétní Galerkinovou metodu lze zformulovat takto najít u_h tak, aby $\forall \chi_h \in T_h$ platilo:

$$(Lu_h, \chi_h) = (f, \chi_h)_h,$$

kde

$$(a,b)_h = Q_h(ab)$$

a Q_h je kvadratura čtvrtého stupně získaná buďto ze Simpsonova pravidla, například pro dělení π_n

$$Q_h g = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_k}{6}[g(x_k) + 4g(x_{k+\frac{1}{2}}) + g(x_{k+1})]$$

s $x_{k+\frac{1}{2}} = (x_k + x_{k+1})/2$ nebo můžeme použít Gaussovo pravidlo

$$Q_h g = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} h_k[g(x_{k,1}) + g(x_{k,2})], \tag{2.11}$$

kde $x_{k,i} = x_k + \xi_i h_k$, kde $i = 1,2$ a $\xi_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3})$, $\xi_2 = 1 - 1/\sqrt{3}$.
K aplikaci jak spojité tak také diskrétní verze popsané metody je výhodné využít B-spliny k reprezentaci u_h. Rozšiřme dělení π proto, aby platilo:

$$x_{-3} \leq x_{-2} \leq x_{-1} \leq 0,\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq x_{n+3}$$

a označme B_k kubický B-spline s nosičem v $[x_{k-2}, x_{k+2}]$ pro $-1 \leq k \leq n+1$. Potom $u_h \in S_h$ může být reprezentováno ve tvaru:

$$u_h = \sum_{k=-1}^{n+1} \vartheta_k B_k,$$

přičemž musí tato funkce splňovat okrajové podmínky:

$$\sum_{k=-1}^{1} \gamma_k [\lambda_0 B_k'(0) + \mu_0 B_k(0)] = \alpha$$

$$\sum_{k=n-1}^{n+1} \gamma_k [\lambda_1 B_k'(1) + \mu_1 B_k(1)] = \beta$$

Pro $j = 0, 1 \ldots, n$ nechť $v_j \in T_h$ je po částech lineární funkce s nosičem $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Pak soustava rovnic

$$(Lu_h, \chi_h) = (f, \chi_h)$$

je ekvivalentní soustavě

$$\sum_{k=-1}^{n+1} \gamma_k (LB_k, v_j) = (f, v_j),\ j = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Tato rovnice spolu s přepsanými rovnicemi pro okrajové podmínky tvoří systém n+3 lineárních rovnic s n+3 neznámými $\gamma_{-1}, \ldots, \gamma_{n+1}$, protože $(LB_k)v_j = 0$ jestli $\mid k - j \mid \geq 3$. Matice soustavy je pásová se šířkou pásu rovnou pěti. V diskrétním případě (2.12) opět vše platí jen musíme brát $(.,.)_h$ místo $(.,.)$.
V praxi je nejobtížnější spočítat hodnoty integrálů v (2.12). Například při použití Gaussova pravidla (2.11) postupně pro každých 2n kvadraturních bodů $x_{p,i}$ pro $p = 0, \ldots, n-1$, $i = 1,2$ spočítáme B-spliny $(B_{p-1}, B_p, B_{p+1}, B_{p+2})$, které nezávisí na $[x_p, x_{p+1}]$ spolu s prvními a druhými derivacemi. Potom spočítáme $LB_k(x_{p,i})$ pro $k = p-1, \ldots, p+2$. Pak příspěvek k prvku $(LB_k, v_j)_h$ matice soustavy je

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2} h_p (1 - \xi_i) LB_k(x_{p,i}) & \text{jestli } j = p \\ \frac{1}{2} h_p \xi_i LB_k(x_{p,i}) & \text{jestli } j = p+1 \\ 0, & \text{jestli } j \neq p \text{ a } j \neq p+1 \end{array}$$

Tato metoda je efektivní a lehce naprogramovatelná.
Podobně lze postupovat i v případě použití Simpsonovy metody, ale je výhodnější počítat příspěvky (LB_k, v_j) zvlášť z uzlových bodů x_p, $p = 0, \ldots, n$ podle předpisu:

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{6}h_{p-1}(h_{p-1}+h_p)LB_k(x_p) & \text{jestli } j = p \\ 0 & \text{jestli } j \neq p \end{array}$$

pro $k = p-1, p, p+1$, kde $h_{-1} = h_n = 0$.
Pak příspěvky příslušné bodům $x_{p+\frac{1}{2}}$, $p = 0, \dots, n-1$ jsou

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{3}h_pLB_k(x_{p+\frac{1}{2}}) & \text{je-li } j = p \text{ nebo } j = p+1 \\ 0 & \text{jinak} \end{array}$$

pro $k = p-1, p+1, p+2$.
K důkazu konvergence budeme předpokládat, že okrajové podmínky úlohy (2.10) jsou homogenními:

$$\lambda_0 u'(0) + \mu_0 u(0) = 0,\ \lambda_1 u'(1) + \mu_1 u(1) = 0. \tag{2.13}$$

Předpokládáme, že koeficienty splňují:

$$b, c \in C^4(\bar{I}), \tag{2.14}$$

kde $\bar{I}$ je uzávěr $I = [0,1]$. Navíc předpokládejme existenci a jednoznačnost řešení u. Lze použít silnější podmínku: pro $p \in [1, \infty]$ existuje konstanta C taková, že

$$\|Lv\|_{L_p(I)} \geq C\|k\|_{W_p^2(I)}, \tag{2.15}$$

pro každé v splňující okrajové podmínky (2.13). Poznamenejme, že pro nezáporné m a otevřený interval E je

$$\|v\|_{W_p^m(E)} := \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^m \|v^{(i)}\|_{L_p(E)}\right)^{1/p} & \text{pro} \quad 1 \leq p < \infty \\ \max_{0\leq i\leq m} \|v^{(i)}\|_{L_\infty(E)} & \text{pro} \quad p = \infty \end{cases}$$

norma na Sobolově prostoru $W_p^m(E)$. Předpokládáme také, že pro kvadraturní pravidlo v diskrétní metodě $(u,v)_h = Q_h(uv)$ platí odhad:

$$e_h(g) :=| Q_h(g) - \int_0^1 g\mathrm{d}x |\leq C\sum_{k=0}^{n-1} h_k^4 \|g(4)\|_{L_1(I_k)}, \tag{2.16}$$

kde $I_k := [x_k, x_{k+1}]$.

Věta 2.2.1 (viz [2]): Předpokládejme, že u splňuje rovnici (2.10) s homogenními okrajovými podmínkami (2.13). Nechť jsou splněny předpoklady (2.14), (2.15) a (2.16), nechť $u \in W_p^6$ kde $p \in [1, \infty]$. Pak pro dostatečně malé h rovnice

$$(Lu_h, \chi_h) = (f, \chi)_h,\ \forall \chi \in T_h$$

má jediné řešení $u_h \in S_h$. Pro chybu platí odhad:

$$\|u - u_h\|_{W_p^i} \leq Ch^{4-i}\|u\|_{W_p^6}, \text{ pro } i = 0, 1, 2.$$

Dělení je obecně nerovnoměrné. Je-li dělení rovnoměrné, pak tato věta platí i pro $i = 3$. Podobná věta platí také pro Galerkinovu metodu

$$(Lu_h, \chi_h) = (f, \chi_h), \ \forall \chi_h \in T_h.$$

Věta 2.2.2 (viz [2]): Nechť u splňuje rovnici (2.10) s homogenními okrajovými podmínkami (2.13) a nechť $b, c \in C^1(\bar{I})$ dále nechť $u \in W_p^4$ kde $p \in [1, \infty]$. Pak pro dostatečně malé h Galerkinova metoda má jediné řešení $u_h \in S_h$ a platí odhad:

$$\|u - u_h\|_{W_p^i} \leq Ch^{4-i}\|u\|_{W_p^4}, \ i = 0, 1, 2.$$

Kapitola 3

Příklad

3.1 Řešení rovnice s počáteční podmínkou

Víme, že každou diferenciální rovnici m-tého řádu

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m)})$$

lze převést zavedením nových nezávislých proměnných rovnicemi

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ &\vdots \\ y_m &= y^{(m-1)} \end{aligned}$$

na soustavu rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_m' &= f(x, y_1, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

Obecně:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_m) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_m) \\ &\vdots \\ y_m' &= f_m(x, y_1, \ldots, y_m). \end{aligned}$$

Při popisu jednotlivých metod se stačí omezit na rovnici

$$y' = f(x, y)$$

s počáteční podmínkou

$$y(a) = \eta.$$

Toto omezení není nijak podstatné, přejdeme-li totiž k vektorovému značení

$$\vec{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T,\ \vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T \text{ a } \vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)^T,$$

můžeme soustavu m rovnic 1. řádu psát ve tvaru

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$$

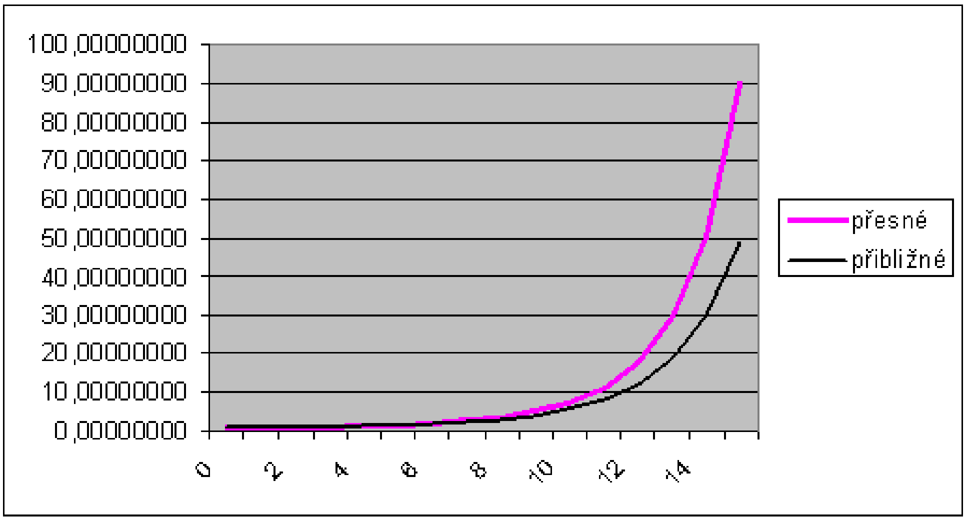
s počáteční podmínkou

$$\vec{y}(a) = \vec{\eta}.$$

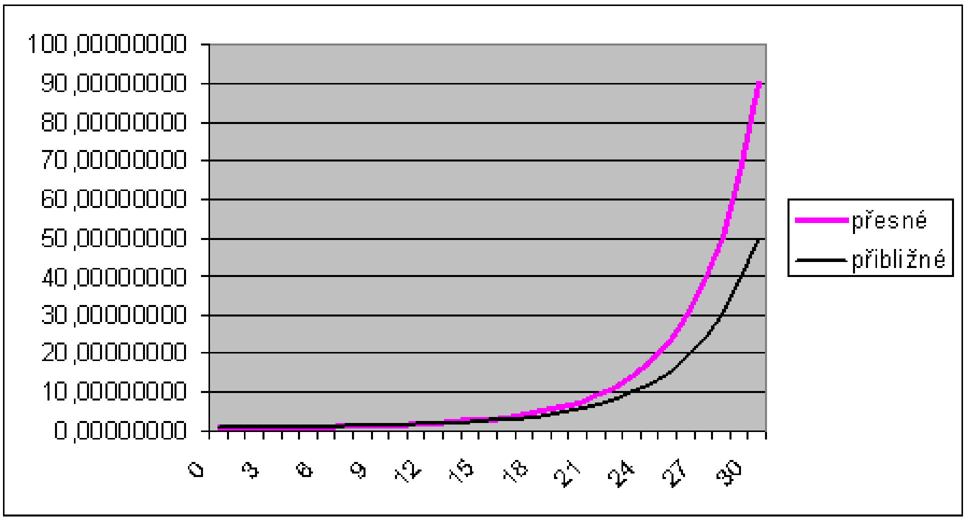
Uvažujme konkrétní diferenciální rovnici $y' = xy$ s na intervalu $I = [0, T]$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$, analyticky můžeme tuto úlohu řešit pomocí metody separace proměnných a dostáváme řešení $y = e^{\frac{x^2}{2}} + c$. Použitím počáteční podmínky obdržíme přesné řešení $y = e^{\frac{x^2}{2}}$. Nyní zkusme řešit úlohu numericky pomocí Runge-Kuttovy kolokace spliny z S_m^m. Dělení intervalu budeme uvažovat rovnoměrné, tj. $\pi = \{x_j\}$, kde $j = 0, \ldots, n$ a $0 = x_0$, $x_n = T$ a $x_i = x_0 + ih$. Z předchozího výkladu dostaneme aproximaci $y_n \sim y(x_n)$:

$$\begin{aligned} K_i &= f\Big(t_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{m} a_{ij}K_j\Big),\ i = 1, \ldots, m \\ y_{n+1} &= y_n + h\sum_{i=1}^{m} b_i K_i. \end{aligned}$$

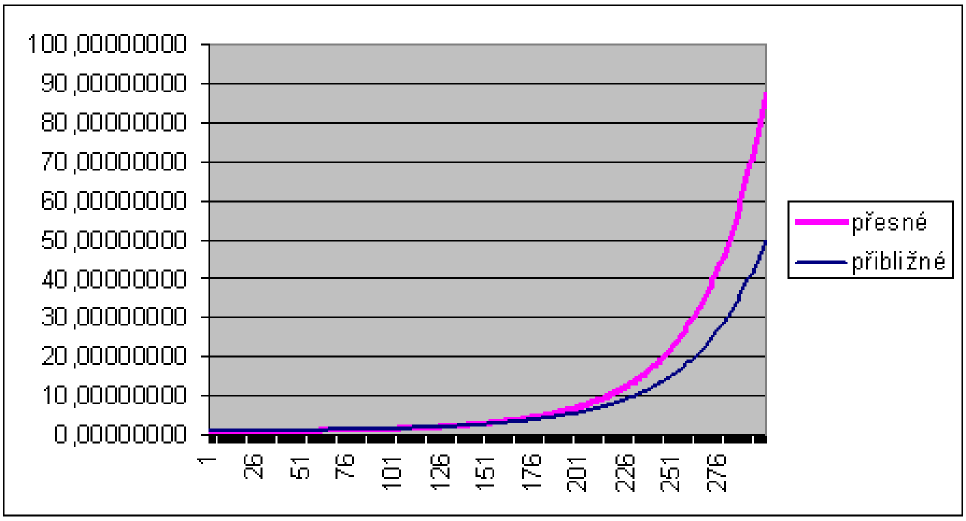
Pro konkrétní aplikaci uvažujme pro jednoduchost data:
$T = 3$, $b_1 = \frac{1}{8}$, $b_2 = \frac{3}{8}$, $b_3 = \frac{3}{8}$, $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{3}$, $c_3 = \frac{2}{3}$, $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$, $a_{21} = \frac{1}{3}$, $a_{22} = a_{23} = 0$, $a_{31} = \frac{-1}{3}$, $a_{32} = 1$ a $a_{33} = 0$.
Za h vezmeme postupně 0.2, 0.1, 0.01. Na následujících grafech můžeme vidět porovnání přesného řešení s numerickým. Programy a data jsou uvedeny v příloze.



graf1(h=0.2)



graf2(h=0.1)



100,00000000
90,00000000
80,00000000
70,00000000
60,00000000
50,00000000
40,00000000
30,00000000
20,00000000
10,00000000
0,00000000
1
26
51
76
101
126
151
176
201
226
251
276
přesné
přibližné

graf3(h=0.01)

Literatura

[1] Kobza J.: *Spliny*, Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci, Olomouc, 1993.

[2] Micula G.,Micula S.: *Handbook of splines*, Mathematics and its Applications, vol. 462, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1999.

[3] Vitásek E.: *Numerické metody*, SNTL-Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987.

Příloha

V následujících tabulkách jsou uvedeny data k příkladu.

h=0.2	přesné	přibližné
0	1,00000000	1,00000000
1	1,02020134	1,01513333
2	1,08328707	1,06719388
3	1,19721736	1,16185351
4	1,37712776	1,30990462
5	1,64872127	1,52933170
6	2,05443321	1,84897562
7	2,66445624	2,31484351
8	3,59663973	3,00099811
9	5,05309032	4,02860655
10	7,38905610	5,59988128
11	11,24585932	8,05982201
12	17,81427318	12,01103334
13	29,37077111	18,53219167
14	50,40044478	29,60365244
15	90,01713130	48,95688891

h=0,1	přesné	přibližné
0	1,00000000	1,00000000
1	1,00501252	1,00375833
2	1,02020134	1,01638506
3	1,04602786	1,03821351
4	1,08328707	1,06982754
5	1,13314845	1,11208763
6	1,19721736	1,16617000
7	1,27762131	1,23362127
8	1,37712776	1,31643224
9	1,49930250	1,41713565
10	1,64872127	1,53893468
11	1,83125221	1,68587131
12	2,05443321	1,86304678
13	2,32797781	2,07691089
14	2,66445624	2,33564264
15	3,08021685	2,64965319
16	3,59663973	3,03225317
17	4,24185214	3,50054256
18	5,05309032	4,07660312
19	6,07997145	4,78910502
20	7,38905610	5,67548309
21	9,07025157	6,78490130
22	11,24585932	8,18231392
23	14,08344508	9,95406126
24	17,81427318	12,21562537
25	22,75989509	15,12244336
26	29,37077111	18,88507530
27	38,28277285	23,79061000
28	50,40044478	30,23306159
29	67,02059766	38,75680301
30	90,01713130	50,11902084

h=0,01	přibližné	přesné
1	1,00000000	1,00000000
2	1,00003750	1,00005000
3	1,00016251	1,00020002
4	1,00037507	1,00045010
5	1,00067523	1,00080032
6	1,00106306	1,00125078
7	1,00153868	1,00180162
8	1,00210220	1,00245300
9	1,00275378	1,00320513
10	1,00349358	1,00405821
11	1,00432179	1,00501252
12	1,00523865	1,00606834
13	1,00624438	1,00722598
14	1,00733926	1,00848580
15	1,00852356	1,00984818
16	1,00979761	1,01131352
17	1,01116174	1,01288227
18	1,01261632	1,01455491
19	1,01416171	1,01633193
20	1,01579834	1,01821389
21	1,01752664	1,02020134
22	1,01934707	1,02229490
23	1,02126010	1,02449520
24	1,02326625	1,02680291
25	1,02536606	1,02921873
26	1,02756008	1,03174341
27	1,02984890	1,03437771
28	1,03223313	1,03712245
29	1,03471340	1,03997846
30	1,03729040	1,04294662
31	1,03996480	1,04602786
32	1,04273732	1,04922312
33	1,04560872	1,05253338
34	1,04857976	1,05595968
35	1,05165126	1,05950307
36	1,05482405	1,06316467
37	1,05809898	1,06694561
38	1,06147694	1,07084708
39	1,06495887	1,07487030
40	1,06854570	1,07901652

41	1,07223843	1,08328707
42	1,07603806	1,08768328
43	1,07994564	1,09220654
44	1,08396224	1,09685830
45	1,08808898	1,10164002
46	1,09232700	1,10655325
47	1,09667747	1,11159953
48	1,10114161	1,11678051
49	1,10572066	1,12209783
50	1,11041589	1,12755323
51	1,11522864	1,13314845
52	1,12016025	1,13888533
53	1,12521210	1,14476571
54	1,13038564	1,15079154
55	1,13568232	1,15696477
56	1,14110365	1,16328744
57	1,14665119	1,16976164
58	1,15232650	1,17638950
59	1,15813123	1,18317322
60	1,16406704	1,19011507
61	1,17013564	1,19721736
62	1,17633880	1,20448248
63	1,18267831	1,21191288
64	1,18915602	1,21951105
65	1,19577382	1,22727958
66	1,20253366	1,23522112
67	1,20943752	1,24333838
68	1,21648744	1,25163413
69	1,22368552	1,26011124
70	1,23103388	1,26877263
71	1,23853472	1,27762131
72	1,24619030	1,28666037
73	1,25400290	1,29589296
74	1,26197488	1,30532232
75	1,27010866	1,31495179
76	1,27840670	1,32478476
77	1,28687154	1,33482474
78	1,29550577	1,34507530
79	1,30431203	1,35554014
80	1,31329305	1,36622300
81	1,32245160	1,37712776
82	1,33179053	1,38825838

83	1,34131276	1,39961892
84	1,35102126	1,41121354
85	1,36091909	1,42304651
86	1,37100937	1,43512220
87	1,38129531	1,44744510
88	1,39178017	1,46001980
89	1,40246731	1,47285103
90	1,41336017	1,48594361
91	1,42446224	1,49930250
92	1,43577712	1,51293277
93	1,44730850	1,52683963
94	1,45906013	1,54102842
95	1,47103587	1,55550461
96	1,48323967	1,57027380
97	1,49567555	1,58534175
98	1,50834765	1,60071435
99	1,52126019	1,61639765
100	1,53441751	1,63239784
101	1,54782404	1,64872127
102	1,56148430	1,66537446
103	1,57540293	1,68236409
104	1,58958470	1,69969700
105	1,60403444	1,71738022
106	1,61875715	1,73542094
107	1,63375792	1,75382655
108	1,64904195	1,77260462
109	1,66461459	1,79176291
110	1,68048129	1,81130938
111	1,69664766	1,83125221
112	1,71311941	1,85159976
113	1,72990241	1,87236062
114	1,74700265	1,89354361
115	1,76442629	1,91515776
116	1,78217959	1,93721234
117	1,80026902	1,95971685
118	1,81870115	1,98268106
119	1,83748275	2,00611497
120	1,85662071	2,03002884
121	1,87612212	2,05443321
122	1,89599423	2,07933889
123	1,91624446	2,10475696
124	1,93688040	2,13069880

125	1,95790985	2,15717609
126	1,97934076	2,18420081
127	2,00118132	2,21178526
128	2,02343987	2,23994206
129	2,04612499	2,26868416
130	2,06924545	2,29802487
131	2,09281024	2,32797781
132	2,11682855	2,35855702
133	2,14130983	2,38977687
134	2,16626374	2,42165212
135	2,19170017	2,45419793
136	2,21762926	2,48742988
137	2,24406142	2,52136394
138	2,27100728	2,55601652
139	2,29847776	2,59140448
140	2,32648404	2,62754513
141	2,35503757	2,66445624
142	2,38415011	2,70215607
143	2,41383367	2,74066338
144	2,44410061	2,77999742
145	2,47496356	2,82017799
146	2,50643549	2,86122542
147	2,53852967	2,90316058
148	2,57125973	2,94600496
149	2,60463963	2,98978058
150	2,63868369	3,03451012
151	2,67340657	3,08021685
152	2,70882332	3,12692471
153	2,74494939	3,17465829
154	2,78180058	3,22344286
155	2,81939312	3,27330442
156	2,89686926	3,37636606
158	2,93678741	3,42962183
159	2,97751609	3,48406599
160	3,01907369	3,53972840
161	3,06147912	3,59663973
162	3,10475175	3,65483153
163	3,14891146	3,71433627
164	3,19397865	3,77518731
165	3,23997425	3,83741898
166	3,28691973	3,90106659

167	3,33483714	3,96616646
168	3,38374908	4,03275595
169	3,43367875	4,10087350
170	3,48464999	4,17055867
171	3,53668722	4,24185214
172	3,58981555	4,31479580
173	3,64406073	4,38943273
174	3,69944919	4,46580728
175	3,75600808	4,54396510
176	3,81376526	4,62395315
177	3,87274934	4,70581981
178	3,93298970	4,78961485
179	3,99451649	4,87538951
180	4,05736069	4,96319656
181	4,12155411	5,05309032
182	4,18712941	5,14512673
183	4,25412015	5,23936339
184	4,32256077	5,33585962
185	4,39248669	5,43467652
186	4,46393425	5,53587700
187	4,53694081	5,63952589
188	4,61154474	5,74568995
189	4,68778547	5,85443796
190	4,76570351	5,96584079
191	4,84534048	6,07997145
192	4,92673915	6,19690516
193	5,00994348	6,31671946
194	5,09499865	6,43949422
195	5,18195107	6,56531179
196	5,27084848	6,69425704
197	5,36173992	6,82641742
198	5,45467582	6,96188311
199	5,54970801	7,10074707
200	5,64688978	7,24310513
201	5,74627593	7,38905610
202	5,84792280	7,53870186
203	5,95188831	7,69214748
204	6,05823203	7,84950129
205	6,16701524	8,01087505
206	6,27830092	8,17638401
207	6,39215389	8,34614704
208	6,50864080	8,52028678

209	6,62783021	8,69892974
210	6,74979265	8,88220645
211	6,87460069	9,07025157
212	7,00232898	9,26320406
213	7,13305432	9,46120733
214	7,26685576	9,66440936
215	7,40381461	9,87296289
216	7,54401458	10,08702556
217	7,687541797	10,30676010
218	7,83448489	10,53233449
219	7,98493514	10,76392215
220	8,13898644	11,00170213
221	8,29673549	11,24585932
222	8,45828182	11,49658460
223	8,62372790	11,75407513
224	8,79317923	12,01853450
225	8,96674446	12,29017300
226	9,14453544	12,56920783
227	9,32666738	12,85586336
228	9,51325891	13,15037138
229	9,70443223	13,45297135
230	9,90031317	13,76391070
231	10,10103138	14,08344508
232	10,30672040	14,41183869
233	10,51751780	14,74936454
234	10,73356530	15,09630482
235	10,95500894	15,45295118
236	11,18199919	15,81960510
237	11,41469108	16,19657824
238	11,65324440	16,58419279
239	11,89782380	16,98278188
240	12,14859901	17,39268995
241	12,40574494	17,81427318
242	12,66944190	18,24789991
243	12,93987576	18,69395108
244	13,21723814	19,15282070
245	13,50172657	19,62491632
246	13,79354476	20,11065954
247	14,09290271	20,61048651
248	14,40001699	21,12484846
249	14,71511095	21,65421232
250	15,03841492	22,19906120

251	15,37016644	22,75989509
252	15,71061056	23,33723141
253	16,06000002	23,93160571
254	16,41859555	24,54357232
255	16,78666616	25,17370506
256	17,16448934	25,82259800
257	17,55235145	26,49086615
258	17,95054795	27,17914632
259	18,35938373	27,88809792
260	18,77917344	28,61840379
261	19,21024182	29,37077111
262	19,65292403	30,14593234
263	20,10756604	30,94464614
264	20,57452497	31,76769840
265	21,05416949	32,61590327
266	21,54688020	33,49010426
267	22,05305009	34,39117531
268	22,57308492	35,32002204
269	23,10740367	36,27758291
270	23,65643903	37,26483050
271	24,22063785	38,28277284
272	24,80046164	39,33245479
273	25,39638710	40,41495945
274	26,00890662	41,53140964
275	26,63852885	42,68296949
276	27,28577931	43,87084602
277	27,95120089	45,09629083
278	28,63535456	46,36060182
279	29,33881997	47,66512506
280	30,06219609	49,01125667
281	30,80610193	50,40044477
282	31,57117727	51,83419153
283	32,35808332	53,31405539
284	33,16750360	54,84165318
285	34,00014462	56,41866253
286	34,85673682	58,04682426
287	35,73803532	59,72794490
288	36,64482091	61,46389933
289	37,57790090	63,25663351
290	38,53811010	65,10816734
291	39,52631186	67,02059765
292	40,54339903	68,99610127

293	41,59029509	71,03693831
294	42,66795524	73,14545549
295	43,77736757	75,32408968
296	44,91955425	77,57537153
297	46,09557278	79,90192936
298	47,30651732	82,30649307
299	48,55351998	84,79189833
300	49,83775224	87,36109093

```
program presnereseni;
const pi=3.141592654;
var xn,yn,h:real;apres:text;
function F(x,y:real):real;
begin
F:=exp(sqr(x)/2);
end;
begin
assign(apres,'c:apres.txt');
rewrite(apres);
xn:=0;
h:=0.01;
while xn<3.00 do
begin
yn:=f(xn,yn);
xn:=xn+h;
writeln(apres,yn:8:10);
writeln(yn:8:10);
end;
close(apres);
end.
```

```
program priblizne;
uses crt;
const
b1=1/8;
b2=3/8;
b3=3/8;
c1=0;
c2=1/3;
c3=2/3;
a11=0;
```

```
a12=0;
a13=0;
a21=1/3;
a22=0;
a23=0;
a31=-1/3;
a32=1;
a33=0;
var yn1,yn,tn,h,k1,k2,k3,k4,fi:real;
e11,e12,e13,e21,e22,e23,e31,e32,e33,f1,f2,f3:real;
a:text;
procedure gauss(e11,e12,e13,e21,e22,e23,e31,e32,e33,f1,f2,f3:real);
var a:real;
begin
if e11=0 then
begin
a:=e11;e11:=e21;e21:=a;a:=e12;e12:=e22;e22:=a;a:=e13;e13:=e23;e23:=a;
a:=f1;f1:=f2;f2:=a;
end;
if e11=0 then
begin
a:=e11;e11:=e31;e31:=a;a:=e12;e12:=e32;e32:=a;a:=e13;e13:=e33;e33:=a;
a:=f1;f1:=f3;f3:=a;
end;
if e21<>0 then
begin
e22:=e12-e22*e11/e21;
e23:=e13-e23*e11/e21;
f2:=f1-f2*e11/e21;
end;
if a31<>0 then
begin
e32:=e12-e32*e11/e31;
e33:=e13-e33*e11/e31;
f3:=f1-f3*e11/e31;
end;
if e22=0 then
begin
a:=e22;e22:=e32;e32:=a;a:=e23;e23:=e33;e33:=a;a:=f1;f1:=f2;f2:=a;
end;
if e32<>0 then
begin
e33:=e23-e33*e22/e32;
```

```
f3:=f2-f3*e22/e32;
end;
k3:=f3/e33;
k2:=(f2-e23*k3)/e22;
k1:=(f1-e13*k3-e12*k2)/e11;
end;
begin
assign(a,'c:a.txt'); rewrite(a);
tn:=0;
yn:=1;
writeln(a,yn:8:10);
writeln(yn:8:10);
h:=0.01;
while tn<3.00 do
begin
e11:=h*a11*tn+c1*h*h*a11-1;
e12:=h*a12*tn+c1*h*h*a12;
e13:=h*a13*tn+c1*h*h*a13;
f1:=-tn*yn-c1*h*yn;
e21:=h*a21*tn+c2*h*h*a21;
e22:=h*a22*tn+c2*h*h*a22-1;
e23:=h*a23*tn+c2*h*h*a23;
f2:=-tn*yn-c2*h*yn;
e31:=h*a31*tn+c3*h*h*a31;
e32:=h*a32*tn+c3*h*h*a32;
e33:=h*a33*tn+c3*h*h*a33-1;
f3:=-tn*yn-c3*h*yn;
gauss(e11,e12,e13,e21,e22,e23,e31,e32,e33,f1,f2,f3);
fi:=b1*k1+b2*k2+b3*k3;
yn:=yn+h*fi;
writeln(a,yn:8:10);
writeln(yn:8:10);
tn:=tn+h;
end;
close(a);
end.
```