Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Nárožný

Diferenciální geometrie a dynamika

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2014

Na tomto místě bych rád vyjádřil svoje díky vedoucímu bakalářské práce RNDr. Svatopluku Krýslovi, Ph.D., a to za vydatnou a stabilní pomoc, bez níž by práce pozbyla svých hodnot. Dále mé díky patří Prof.RNDr. Oldřichu Kowalskimu, DrSc., za jeho ochotu a čas strávený podnětnými konzultacemi, a v neposlední řadě také rodině, která mě ve studiu podporuje.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Diferenciální geometrie a dynamika

Autor: Jiří Nárožný

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D. Matematický ústav UK

Abstrakt: Cílem této práce je představení matematických pojmů a technik z oblasti diferenciální geometrie a Lieových grup, a jejich následné použití ve fyzice. Výběr této dvojice partií matematiky není náhodný, jedná se o základní a úzce provázané stavební kameny teoretické fyziky. Práce je rozdělena do dvou kapitol. Každá z nich naplňuje jeden z cílů práce. V první kapitole uvádíme na scénu pojem grupa, který dále obohacujeme o pojmy jako akce grupy a nebo součin grup. Tento podrobný a plynulý postup nás dovádí až k zavedení homogenního prostoru, jednoho z ústředních pojmů Kleinovy geometrie. Závěr této kapitoly patří velmi jemnému představení tohoto přístupu ke geometrii. Druhá kapitola se sestává z formulace fyzkálních úloh v řeči diferenciální geometrie a jejich řešení. Jako poslední pak zavádíme Jacobiho konexi, jakožto přirozenější variantu konexe implementovanou fyzikálnímu systému.

Klíčová slova: grupa, homogenní prostor, konexe, lagrangián, symetrie

Title: Differential geometry and dynamics

Author: Jiří Nárožný

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: RNDr. Svatopluk Krýsl, Ph.D. Matematický ústav UK

Abstract: The aim of this thesis is to show some mathematical concepts and methods of differential geometry and Lie groups. Subsequently, we try to use this tools in physics. Selection of these two mathematical topics is not random, because these topics are close related essentials of theoretical physics. The thesis is split into two chapters. Each chapter fulfils one of this aim. In the first chapter we introduce the notion of group, which is further enriched with other notions, like group action or group product. This detailed and smooth process leads us to introduction of homogeneous space which is one of the most important notion of Klein geometry. The end of this chapter is devoted to brief introduction to this attitude to geometry. The second chapter consists formulation of physical tasks in the language of differential geometry and afterwards its solution. As the final topic in this thesis we introduce Jacobi connection, as more natural option of connection which is implemented to physical system.

Keywords: group, homogeneous space, connection, lagrangean, symmetry

Obsah

Úvod

Přestože kořeny diferenciální geometrie sahají až do 18. století, kde se poprvé objevuje koncept neeuklidovských geometrií, jedná se o velmi moderní a populární téma, a to jak v oblastech čisté matematiky, tak v oboru matematiky aplikované, a nutno dodat, téma stále rozvíjené a aktuální. Nejinak je tomu v případě Lieových grup, které nesou jméno po svém zakladateli, kterým byl norský matematik Sophus Lie (17. prosinec 1842 - 18. únor 1899). Jak možná tento název evokuje, koncept „grupy" byl o něco starší. Vůbec poprvé uvedl na scénu pojem grupa mladý matematik francouzského původu Évariste Galois (25. říjen 1811 - 31. květen), který přes svoji nadějnou karieru matematika tragicky úmírá při souboji.

S menší rezervou lze říci, že dnešní geometrie vděčí za svoji podobu dvěma koncepčním proudům, kterými jsou Riemannova geometrie, a geometrie Kleinova. Zrod obou geometrií však vyvstal ze společného prapředka všech geometrií, geometrie Euklidovy. Tato stařičká teorie geometrie, založená na pěti postulátech, zdála se býti všeobecnou, dokud se nepotvrdilo podezření, že existují geometrie, které popírají její pátý postulát, vyjadřující se o existenci rovnoběžné přímky procházející libovolně zvoleným bodem. Neotřesitelnost tohoto postulátu definitvně zmizela s příchodem křivých geometrií, mezi něž patří například geometrie hyperbolická, jejíž autorem byl ruský matematik Nikolai Lobachevsky (1. prosinec 1792 - 24. únor 1856). Na základech geometrie Euklidovy ale vznikla i podstatně jiná variace, než předchozí zmíněná, a tou byla geometrie Kleinova. Jádrem myšlenky Felixe Kleina (25. duben 1849 - 22. červen 1925), bylo charakterizovat geometrie prostřednictvím jejich symetrií. Těžiště tohoto přístupu bylo zejména v teorii grup. Moderní geometrie, kterou používají matematici a fyzici dnes, však není ani jednou ze jmenovaných, nýbrž jejich zobecněním, které již náleži do geomerie Cartanovy.

Paralelně s tímto vývojem na poli matematiky rostlo zázemí poznatků teoretických i experimentálních fyziků. Nepřehlédnutelným myšlenkovým proudem 18. století byla teoretická mechanika, která dnes představuje vstupní bránu do jakékoli partie moderní fyziky. O její vznik se zasloužila řada autorů, mezi něž se řadí například tvůrce Lagrangeovy formulace mechaniky, francouzský matematik a fyzik Joseph-Louis Lagrange (25. leden 1736 - 10. duben 1813), pruský matematik Carl G. J. Jacobi, nebo také irský matematik, fyzik a astronom sir William R. Hamilton.

V rámci naší práce budeme pěstovat a syntetizovat poznatky, které jsou v tematickém odstínu zmíněných teorií. V první kapitole se budeme věnovat matematické průpravě diferenciální geometrie a teorii Lieových grup, což následně upotřebíme v kapitole druhé, pojednávající o možnostech přístupu řešení yzikálních problémů.

1. Jemný úvod do Kleinovy geometrie

Úvodní kapitola pojednává o základních a posléze i mírně pokročilých nástrojích matematické a teoretické fyziky, diferenciální geometrii a teorii Lieových grup.

V první podkapitole se seznámíme s důležitými pojmy z teorie grup, které budou většinou formulovány ve vší šíři a nebudou se týkat jen grup Lieových.

Na tyto informace navážeme ve druhé podkapitole v pojednání o homogenních prostorech, kterému však bude předcházet jakési minimum z čistě diferenciálně geometrického soudku.

Přes tohle členění jsou obě matematické disciplíny pro dnešního teoretického fyzika neodmyslitelně propojeny, jak čtenář bude moci sám poznat.

Cílem této kapitoly je připravit půdu pro aplikace jmenovaného matematického aparátu k řešení fyzikálních otázek.

1.1 Základní pojmy z teorie grup

K získání představy vybudování, v této práci stěžejního, konceptu homogenních prostorů, musíme nejdříve zavést několik důležitých pojmů, které se v teorii homogenních prostorů vyskytují.

Definice 1 *Grupa* je dvojice $\{M, \circ\}$, kde M je množina, na níž je definována binární operace $\circ : M \times M \to M$. Navíc musí platit následující:

1. M je na operaci $\circ$ uzavřená, tedy $\forall a, b \in M : a \circ b \in M$
2. Operace $\circ$ je na množině M asociativní, neboli $\forall a, b, c \in M : (a \circ b) \circ c = = a \circ (b \circ c)$
3. Existuje neutrální prvek, tedy $\exists e \in M : \forall a \in M : a \circ e = e \circ a = a$
4. Existuje inverzní prvek, tedy $\forall a \in M : \exists a^{-1} \in M : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, kde e je neutrální prvek

Definice 2 *Podgrupa* je taková podmnožina grupy, která je zároveň sama grupou, a to vzhledem k operaci získané restrikcí původní grupové operace na tuto podmnožinu.

Definice 3 *Normální podgrupa* H grupy G je taková podgrupa grupy G, která je zároveň *třídou sdružených prvků*, to jest množinou, pro níž $g \circ h \circ g^{-1} \in H \ \forall g \in G$, $\forall h \in H$. Značíme $H \lhd G$.

Definice 4 *Topologický prostor* je dvojice $\{X, \mathcal{T}\}$, kde X je množina a $\mathcal{T}$ je topologie na množině X.

Definice 5 *Topologie* $\mathcal{T}$ na množině X nazýváme takovou podmnožinu potenční množiny $\mathcal{P}(X)$, pro níž platí následující:

1. Pokud A, $B \in \mathcal{T}$, pak nutně $A \cap B \in \mathcal{T}$

2. Pokud je N nejvýše spočetná množina a $A_n \in \mathcal{T}\ \forall n \in N$, pak $\left\{ \bigcup_{n\in N} A_n \right\} \in \mathcal{T}$

3. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

Poznámka: Prvkům množiny $\mathcal{T}$ říkáme otevřené množiny.

Definice 6 *Lieova grupa* je tzv. *topologická grupa*, tedy grupa, která je zároveň topologický prostor. Topologii Lieovy grupy předpokládáme kanonicky tvořenou ze struktury grupové operace. Navíc požadujeme, aby na Lieově grupě bylo možné zavést strukturu diferencovatelné variety (viz. Definice 21).

Definice 7 *Akce* grupy $\{G, \circ\}$ na množině M je zobrazení $r : G \times M \to M$, které má tyto vlastnosti:

1. $\forall g, h \in G$, $\forall a \in M : r(g, r(h, a)) = r(g \circ h, a)$

2. Pokud e je neutrální prvek G, pak $\forall a \in M : r(e, a) = a$.

Poznámka: Výše uvedené definici akce grupy na množině se říká levá akce grupy, pak existuje ještě pravá akce grupy, která se liší permutací vzájemného grupového působení prvků grupy G, což díky možné neasociativitě vede k rozdílnosti definic. V této práci si však vystačíme s levou akcí grupy.

Poznámka: Existuje mnoho více či méně intuitivních příkladů působení grupy na množině, jako jsou - geometrické transformace prostoru, které zachovávají vzdálenosti bodů, permutace pozic n hostů v jídelně, které ponechávají páry sedět vedle sebe, a mnoho dalších. Význačná skupina takových akcí grupy na množině je, jak bylo mírně naznačeno, motivována zachováním nějaké vlastnosti množiny, respektive prvků v ní obsažených. Grupám, které při působení na množinu udržují jistou vlastnost v platnosti, se říká grupy symetrie množiny a patří k význačným vlastnostem množin samotných. Tématu grup symetrie se budeme v práci věnovat ještě dosti, obzvlášť v části práce věnované homogenním prostorům.

Věta 1 *Nechť máme definovanou akci r grupy G na množině M. Pak definujeme zobrazení ϱ, pro něž platí $\varrho : G \to Bij(M)$, kde $Bij(M)$ označujeme množinu všech bijekcí z M do M, takových, že $\varrho(g)[m] = r(g, m)\ \forall g \in G$ a $\forall m \in M$. Tvrdíme, že takto definované zobrazení je homomorfizmus grup.*

Důkaz 1 Důkaz poskládáme ze dvou kroků. Nejprve dokážeme, že dvojice $(Bij(M), \circ)$ je grupa. Operací $\circ$ na množině míníme standardní skládání dvojice zobrazení na množině.

1. $Bij(M)$ je uzavřená vůči $\circ$. To znamená, že pokud $A_1, A_2 \in Bij(M)$, pak $A_1 \circ A_2 \in Bij(M)$, neboli zobrazení $(A_1 \circ A_2)[m] \equiv A_1[A_2[m]]$ je prosté, surjektivní a zobrazuje do M.

   Nyní důkaz prostoty. Pokud $A_1[A_2[m_1]] = A_1[A_2[m_2]]$, pak díky prostotě A_1 máme $A_2[m_1] = A_2[m_2]$, z čehož díky prostotě A_1 dostáváme $m_1 = m_2$.

   Nyní surjektivita. Chceme dokázat, že $\forall m_c \in M\ \exists m_s \in M : A_1[A_2[m_s]] = = m_c$. Díky surjektivitě A_1 máme, že $\exists m'_c : A_1[m'_c] = m_c$. Díky surjektivitě A_2 máme, že $\exists m_s : A_2[m_s] = m'_c$.

   Tvrzení, že složené zobrazení též zobrazuje do M, je také triviální.

2. Následně dokážeme, že operace $\circ$ je na množině $Bij(M)$ asociativní. Tedy tvrdíme, že $A_1[A_2[m]] = A_2[A_1[m]]$. Rovnost však plyne okamžitě z působení na prvky M.

3. Nyní dokážeme existenci neutrálního prvku. Tvrzení je, že existuje neutrální prvek množiny $Bij(M)$, označme jej A_0. Není těžké si rozmyslet, že tuto vlastnost má zřejmě zobrazení, které zobrazí každý prvek m sám na sebe. Lehce se ověří, že toto zobrazení má vlastnosti identity, tj. $\forall A \in Bij(M)$: $A[A_0[m]] = A_0[A[m]] = A[m]\ \forall m \in M$. Protože je A_0 prosté, surjektivní a zobrazuje do M, též máme $A_0 \in Bij(M)$.

4. A na konec dokážeme existenci inverzního prvku. Zaveďme jej takto: $\forall A \in Bij(M) \mapsto A^{-1}$, takové, že když $A : m_1 \mapsto m_2$, pak $A^{-1} : m_2 \mapsto m_1$ $\forall m_1, m_2 \in M$. Takto zkonstruované zobrazení zřejmě náleží do $Bij(M)$ a platí pro něj dle definice skládání zobrazení $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = A_0$.

Nyní se nám podařilo dokázat, že dvojice $(Bij(M), \circ)$ je grupa. V dalším postupu již budeme ukazovat, že ϱ je skutečně grupový homomorfizmus.

To opět dokážeme v několika krocích. Pro ujasnění, v rámci této části důkazu budeme operaci na grupě G označovat $\diamond$ a operaci skládání dvojice zobrazení z $Bij(M)$ symbolem $\circ$.

1. $\varrho(g_1 \diamond g_2) = \varrho(g_1) \circ \varrho(g_2)$. Při dokazování předpokládáme, že rovnost dvojice zobrazení znamená rovnost obrazů zobrazení pro všechny vzory z definičního oboru (množiny M). To znamená, že chceme ukázat

$$(\varrho(g_1 \diamond g_2))[m] = \varrho(g_1)[\varrho(g_2)[m]]\ \forall m \in M\,.$$

Pišme:

$$\begin{aligned}(\varrho(g_1 \diamond g_2))[m] &= r(g_1 \diamond g_2, m) = r(g_1, r(g_2, m)) = \varrho(g_1)[r(g_2, m)2] \\ &= \varrho(g_1)\,[\varrho(g_2[m])]\ \forall m \in M\,.\end{aligned}$$

2. $\varrho(e) = A_0$. S úmluvou, že e je neutrální prvek grupy. Důkaz podává následující série rovností: $\varrho(e)[m] = r(e, m) = m\ \forall m \in M$. Tím jsme ověřili, že $\varrho(e)[m] = m\ \forall m \in M$. To je ale přesně vlastnost námi zavedeného A_0.

3. $\varrho(g^{-1}) = (\varrho(g))^{-1}$. Z předešlého bodu víme, že $\varrho(e) = A_0$, z požadavku na vlastnosti inverze v grupě zase $g \diamond g^{-1} = g^{-1} \diamond g = e$. Proto z 1. bodu získáváme: $\varrho(g \diamond g^{-1}) = \varrho(g) \circ \varrho(g^{-1}) = A_0$, a též $\varrho(g^{-1} \diamond g) = \varrho(g^{-1}) \circ \varrho(g) = A_0$. Díky unikátnosti inverzního prvku máme, že $(\varrho(g))^{-1} = \varrho(g^{-1})$.

Q.E.D.

Poznámka: V případě, že M je vektorový prostor, pak zobrazení ϱ nazýváme (lineární) reprezentace grupy. Další důležité pojmy z oblasti teorie reprezentací grup v [7]

Věta 2 *Nechť H je podgrupa G. Pak $r(h, g) = h \diamond g$ definuje akci a grupový homomorfizmus ϱ je identita.*

Důkaz 2 Aby výše uvedený předpis definoval akci, musí platit:

1. $r(e_H, g) = g \; \forall g \in G$. Tvrzení je však velice jednoduché, uvědomíme-li si, že tvrzení H je podgrupa G nutě implikuje, že $e_H = e_G$ (kde e_H je neutrální prvek H a e_G neut.p. grupy G). Pak přímočaře $r(e_H, g) = r(e_G, g) = e_G \diamond g = = g$.

2. $r(h_2, r(h_1, g) = r(h_2 \diamond h_1, g) \; \forall h_1, h_2 \in H, \; \forall g \in G$. Podle zavedení zobrazení r rozepíšeme obě strany dokazované rovnosti. Pro levou stranu máme $r(h_2, r(h_1, g)) = r(h_2, h_1 \diamond g) = h_2 \diamond (h_1 \diamond g)$. Pro pravou stranu rovnice máme $r(h_2 \diamond h_1, g) = (h_2 \diamond h_1) \diamond g$. A protože $h_1, h_2 \in H \subset G$, tak se výrazy díky asociativnímu zákonu na grupě G rovnají.

   Pro „spočtení“ $\varrho(h)$ užijeme zavedení r. Pišme: $\varrho(h)[g] = r(h, g) = h \diamond g$. Získali jsme, že $\varrho(h) : g \mapsto h \diamond g$, neboli, že $\varrho(h) = h$, a operace skládání zobrazení splyne s grupovou operací.

Q.E.D.

V praxi se často stane, že množina, na níž grupa operuje, má svoji dodatečnou strukturu. Přirozeným požadavkem na akci grupy na této množině je pak zachování této dodatečné struktury. Uvedeme několik příkladů:

- *Topologická akce*: Jde o akci grupy na množině, na níž je zadána topologie. Požadavkem je, aby homomorfizmus grup ϱ, definovaný výše, zobrazoval prvky grupy do množiny homeomorfizmů na množině M, to jest do $Homeo(M)$. Přičemž homeomorfizmus z prostoru N do prostoru M je taková bijekce $N \to M$, která zachovává topologii. Precizněji bude pojem definován v další podkapitole.

- *„Hladká“ akce*: Tato akce grupy je typická pro působení na tzv. varietách, přesněji řečeno nekonečně diferencovatelných varietách. Jejich definice bude precizována v následující podkapitole. Požadavkem tentokrát je, aby homomorfizmus grup ϱ představoval zobrazení prvků grupy na diffeomorfizmy na varietě $Diff(M)$. Obecně řečeno, diffeomorfizmus na varietě je hladké zobrazení na varietě, které má hladkou inverzi. Jak již bývá zvykem, pod pojmem hladký myslíme nekonečně diferencovatelný.

- *Izometrická akce*: Mějme na množině zavedenou metriku a prostor tak chápejme jako metrický. Příslušnou vzdálenostní funkci označme d, tedy $d : (x, y) \to d(x, y) \in \mathbb{R}$. Pak $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(r(g, x), r(g, y)) \; \forall g \in G$.

Další důležitá nomenklatura akcí grup na množině vychází z toho, jaké vlastnosti má grupové působení bez zřetele na možnou množinovou strukturu. Existují jisté speciální typy akcí, jejichž vlastnosti nám v dalším pokračování našeho putování za homogenními prostory zpřístupní jinak nemožné konstrukce. Jsou to následující typy grupového působení:

- *Tranzitivní grupová akce.* Akce grupy na množině se nazve tranzitivní, pokud platí že $\forall x, y \in M \; \exists g \in G : r(g, x) = y$.

- *Efektivní grupová akce.* Je to druh akce grupy na množině, pro níž platí, že pokud pro g,$h \in G$ platí $g \neq h$, pak $\exists x \in M : r(g, x) \neq r(h, x)$.

- *Volná grupová akce.* To jest taková akce grupy na množině, jejíž vlastností je, že pokud $\exists x \in M$ takové, že $r(g,x) = r(h,x)$, kde $g, h \in G$, pak již nutně $g = h$.

Pro účely hladkého postupu v seznamování se s problematikou je též nutné detailněji zkoumat a popisovat vztahy prvků v grupě a na množině. Konkrétně se jedná o následující pojmy:

Definice 8 *Orbita* prvku $m \in M$ je množina $\mathcal{O}_m = \{n \in M | \; \exists g \in G : r(g,m) = = n\}$.

Definice 9 *Stabilizátor* prvku $m \in M$ je množina $G_m = \{h \in G | r(h,m) = m\}$.

Věta 3 *Zvolme libovolně, ale fixně, $m \in M$. Tvrdíme, že stabilizátor G_m grupy G je podgrupa.*

Důkaz 3 Důkaz si opět zpřehledníme členěním do několika částí.

1. G_m je podmnožina G. To znamená, že $g \in G_m \Rightarrow g \in G$. Pravdivost implikace vyplývá přímo z definice G_m.

2. G_m je uzavřená vůči grupové operaci přejaté z grupy G. Je tedy potřeba dokázat, že pokud $h_1, h_2 \in G_m$, pak $h_2 \diamond h_1 \in G_m$. Pišme: $m = r(h_2, m) = = r(h_2, r(h_1, m)) = (h_2 \diamond h_1, m)$.

3. Prvky G_m jsou vůči přejaté grupové operaci asociativní. Tedy $\forall h_1, h_2, h_3 \in G_m$ platí $h_1 \diamond (h_2 \diamond h_3) = (h_1 \diamond h_2) \diamond h_3$. Tvrzení je opět jednoduché, protože když vyjdeme z faktu, že $h_1, h_2, h_3 \in G$ a G je grupa, získáme požadovaný závěr. Navíc dává rovnost smysl i v oboru G_m, a to díky výše dokázané uzavřenosti.

4. Existence neutrálního prvku. Tvrdíme, že $\exists e_H \in G_m : e_H \diamond h = h \diamond e_H = = h \; \forall h \in G_m$.

   Lemma 1 *Pokud G_m obsahuje e_H s těmito vlastnostmi, pak nutně $e_H = = e_G$, kde e_G je neutrální prvek G.*

   Důkaz lemma 1 Protože e_G je neutrální prvek vzhledem ke G, a zároveň $G_m \subset G$, je e_G neutrální prvek i vůči G_m. Z věty o jednoznačnosti neutrálního prvku získáváme $e_H = e_G$.

   Lemma 2 $e_G \in G_m$.

   Důkaz lemma 2 Z vlastnosti (libovolné) akce grupy na množině máme: $r(e_G, m) = m$. Proto nutně $e_G \in G_m$.

   Q.E.D.

   Závěr věty plyne ihned z lemmat 1 a 2.

5. Existence inverzního prvku. Tvrdíme, že $h \in G_m \Rightarrow \exists h^{-1} \in G_m : h \diamond h^{-1} = = h^{-1} \diamond h = e_H$. Pro obecnost předpokládáme $h^{-1} \in G$. Platí následující: $r(e_H, m) = m \Leftrightarrow r(h^{-1} \diamond h, m) = m \Rightarrow m = r(h^{-1}, r(h, m)) = = r(h^{-1}, m) \Rightarrow h^{-1} \diamond h = e_H$, a též $h^{-1} \in G_m$. Nyní je potřeba už jen ukázat, že tento prvek je vskutku inverzní prvek vůči h, že tedy také platí $h \diamond h^{-1} = e_H$. Protože ale víme, že $h^{-1} \diamond h = e_H$, tak můžeme psát: $h \diamond (h^{-1} \diamond h) \diamond h^{-1} = h \diamond e_H \diamond h^{-1} \Rightarrow h \diamond h^{-1} = e_H$.

   Nalezený prvek h^{-1} je tak vskutku inverzní prvek k prvku h, navíc náleží do G_m.

   Q.E.D.

Následně zavedeme významný pojem, který bude figurovat hlavně v další části práce. Za jistých okolností je vhodné uvažovat jistou ekvivalenci na prvcích množiny a podle této relace vytvořit tzv. podílové třídy, které budou prvky naší nové množiny. Nejprve však definice.

Definice 10 *Faktorová množina.* Pro zvolenou akci r, definujeme *faktorovou množinu* M/G množiny M, jako množinu tříd ekvivalence danou relací $\simeq$, pro níž platí, že $\forall m, m' \in M : m \simeq m' \Leftrightarrow \exists g \in G : r(g, m) = m'$.

Pro ověření korektnosti definice dokážeme následující tvrzení.

Věta 4 *Relace $\simeq$, definovaná výše, je relace ekvivalence na M.*

Propedeutikum do důkazu: Mějme množinu M a relaci $\simeq$, na základě níž vytvoříme „relační" množinu $\widetilde{M} \subseteq M \times M$, do níž bude náležet dvojice (m, m') právě když $\exists g \in G : r(g, m) = m'$ s předem definovanou akcí. Aby byla relace $\simeq$ relací ekvivalence, musí platit, že „relační" množina $\widetilde{M}$ je:

1. *Reflexivní*, čili $\forall m \in M : (m, m) \in \widetilde{M}$.
2. *Symetrická*, čili $\forall m, m' \in M : (m, m') \in \widetilde{M} \Rightarrow (m', m) \in \widetilde{M}$.
3. *Tranzitivní*, čili $\forall m, m', m'' \in M : (m, m') \in \widetilde{M} \wedge (m', m'') \in \widetilde{M} \Rightarrow (m, m'') \in \widetilde{M}$.

Důkaz 4

1. Z vlastnosti akce máme: $\forall m \in M : r(e_G, m) = m \Rightarrow \forall m : m \simeq m$. Tím pádem $(m, m) \in \widetilde{M}\ \forall m \in M$.
2. Protože G je grupa, $\exists g^{-1} \in G : g^{-1} \diamond g = e_G$. Tudíž
$$r(g, m) = m' \Rightarrow r(g^{-1}, r(g, m)) = r(g^{-1}, m') = r(g^{-1} \diamond g, m) = m\,.$$
   Celkově tedy $r(g^{-1}, m') = m$, a proto také $(m, m') \in \tilde{M}$.
3. Tvrzení o tranzitivitě lze přepsat do formulace
$$r(g_1, m) = m' \wedge r(g_2, m') = m'' \Rightarrow \exists g_3 \in G : r(g_3, m) = m''\,.$$
   Dobrý kandidát je $g_3 = g_2 \diamond g_1$, což vyplývá z následujícího. Při splnění předpokladů nutně platí, že $r(g_2, r(g_1, m)) = m''$, což vede na rovnost $(g_2 \diamond g_1, m) = m''$. A protože $g_1, g_2 \in G$, tak také $g_3 \in G$.

Q.E.D.

Výše popsaná konstrukce tak vskutku dovolí chápat faktorovou množinu jako množinu tříd ekvivalence podle jisté vlastnosti prvků množiny, s respektem k níž zavádíme akci jisté grupy na této množině. Pokud jsou vlastnosti prvků množiny komplikovanější, a připouští různé akce (různých) grup, můžeme zavést novou akci pro rozšířenou grupu, z níž získáme jak specificky sloučit obě původní grupy. To je jedna z motivací pro zavedení následujícího pojmu.

Definice 11 *Přímý součin grup* je zobrazení $\times : (G, H) \to G \times H$, kde G, H jsou grupy. Jde o zobrazení na kartézský součin množin příslušejících grupám G a H, na němž je definována jistá binární oprace $\odot$ následujícím způsobem: $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall h_1, h_2 \in H : (g_1, h_1) \odot (g_2, h_2) = (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2)$.

Věta 5 *Dvojice* $\{G \times H, \odot\}$ *má strukturu grupy.*

Důkaz 5 K ověření stačí zkontrolovat, že pro dvojici $\{G \times H, \odot\}$ platí následující:

1. Množina $\{G \times H\}$ je na operaci $\odot$ uzavřená. Díky uzavřenosti G a H máme, že dvojice $(g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2)$ zcela jistě patří do kartézského součinu množin příslušejících grupám G a H, a tedy i náleží do množiny prvků z $G \times H$.

2. Operace $\odot$ je na množině $\{(g, h)|\ g \in G, h \in H\}$ asociativní. Z asociativity grup G a H okamžitě plyne i asociativita $\odot$ na množině $G \times H$.

3. Existuje neutrální prvek. Vězměme si prvek (e_G, e_H) a ukažme o něm, že jde o neutrální prvek. Musí platit, že $\forall g \in G, h \in H : (e_G, e_H) \odot (g, h) = = (g, h) \odot (e_G, e_H) = (g, h)$. Po rozepsání dle definice působení operace $\odot$ získáváme tvrzení.

4. Existuje inverzní prvek. Pro libovolný prvek náležící do množiny příslušné $\{G \times H\}$, tedy například (g, h) tvrdíme, že jeho inverzní prvek je prvek (g^{-1}, h^{-1}), kde g^{-1} je inverzní prvek k prvku $g \in G$,a h^{-1} zase inverzní prvek k prvku $h \in H$. Rozepsáním opět dosáhneme kýženého tvrzení.

Q.E.D.

Přímý součin grup je nejjednodušší případ „slučování“ grup. Důvodem pro jeho jednoduchost je absence předpokladu, že navíc jedna z grup netriviálně působí na grupu druhou, to jest, existuje netriviální akce jedné grupy na druhou. Pro názornější vysvětlení problému uvedeme konkrétní příklad.

Příklad 1 Mějme vektorový prostor V, který budeme pro naše účely chápat jako množinu, na níž máme definovanou grupovou akci $\tilde{r}$. Na tomto vektorovém prostoru nechť operují grupy G a G'. Obecný prvek, působící na množinu, tak berme jako uspořádanou dvojici $\tilde{g} \in G \times G' = \{(g, g')|\ g \in G, g' \in G'\}$. Přičemž předpokládejme, že grupa $\{G, +\}$ má též strukturu vektorového prostoru, který je pro jednoduchost navíc izomorfní s vektorovým prostorem V. Akce r grupy G na V je pak kanonická, přesněji psáno, pokud $g \in G$ a $v \in V$, pak $r(g, v) = = g + v$, kde operace $+$ je sčítání na původních vektorových prostorech. Grupa $\{G', \diamond\}$ je grupou $GL(V)$, tedy obecných lineárních transformací na V s grupovou operací danou jako klasické skládání zobrazení. Ze zavedení G' je zjevná i akce r' této grupy na vektorovém prostoru V. Na tomto místě stojí za povšimnutí, že zavedením akce na V tak rovnou získáváme i akci na grupě G! Pakliže definujeme akci $\tilde{r}$ způsobem $\tilde{r}((g,g'),v) = r(g,r'(g',v))$, dostáváme nutnou podmínku na operaci $\odot$ na množině G', která vychází přímo z definice akce grupy na množině, tedy, že musí platit: $\tilde{r}(\tilde{g_2} \odot \tilde{g_1}, v) = \tilde{r}(\tilde{g_2}, \tilde{r}(\tilde{g_1}, v))$. Nuté je uvědomit si, že se jedná o podmínku konzistence akce, nic nám ještě v obecném případě nezaručuje, že takto zadefinovaná operace $\odot$ zajistí, aby dvojice $\{\widetilde{G}, \odot\}$ byla grupou. Tuto obecnou podmínku opět rozepíšeme pro náš konkrétní příklad. Pro akci (g_1, g_1') na prvku $v \in V$ můžeme psát (ve zjednodušené notaci, zaměňující zápis $r(g,v)$ za kratší $g \cdot v$, který můžeme použít, je-li akce známá z kontextu) $(g_1, g_1') \cdot v = (g_1' \cdot v) + g_1$. Když na výsledek této akce zapůsobíme prvkem (g_2, g_2'), dostaneme $(g_2, g_2') \cdot ((g_1' \cdot v) + g_1) = ((g_2' \diamond g_1') \cdot v) + (g_2' \cdot g_1) + g_2$. Z tohoto výsledku lze již při zohlednění zavedených akcí r a r' dovodit schéma, podle kterého se musí prvky grupy $\widetilde{G}$ skládat. Je již snadné ověřit, že prvek grupy $\widetilde{G}$, $(g_2, g_2') \odot (g_1, g_1') = ((g_2' \cdot g_1) + g_2, g_2' \diamond g_1')$ působí na vektor $v \in V$ stejně jako postupné působení prvků $\tilde{g}_1$ a $\tilde{g}_2$, jak bylo spočteno výše. Díky této nutné podmínce jsme tak úplně určili, jak se v „nové“ množině $\widetilde{G}$ skládají prvky. Je očividné, že skládání prvků na větší množině je v tomto případě komplikovanější než v případě přímého součinu grup, jehož pravidlo skládání prvků bychom obdrželi, pokud bychom požadovali, aby prvky G' působily na G vždy jako identita, konkrétně v našem případě, aby $g_2' \cdot g_1 = g_1$. Za použití této podmínky nám výraz pro skládání prvků zkolabuje do tvaru známého z odstavce o přímém součinu grup.

Věta 6 *Dvojice $\{\widetilde{G}, \odot\}$, s operací $\odot$ na množině $\widetilde{G}$ zavedenou stejně jako ve výše uvedeném příkladu, má, za stálého předpokladu linearity akce grupy G' na grupě G, struktutu grupy.*

Důkaz 6 Ve skutečnosti chceme dokázat těchto několik vlastností:

1. Množina $\widetilde{G}$ je uzavřená vůči operaci $\odot$. Jednak platí, že pokud $g_1', g_2' \in G'$, tak díky faktu, že G' je grupa, platí $g_2' \diamond g_1' \in G'$. Díky tomu, že akce vždy zobrazuje z množiny do stejné množiny, tak z podobného důvodu také máme, že $((g_2' \cdot g_1) + g_2) \in G$.

2. Asociativita. S využitím linearity tvrdíme, že platí

$$[(g_1, g_1') \odot (g_2, g_2')] \odot (g_3, g_3') = (g_1, g_1') \odot [(g_2, g_2') \odot (g_3, g_3')] \,.$$

Rozpisem levé strany získáváme

$$((g_1' \cdot g_2 + g_1), g_1' \diamond g_2') \odot (g_3, g_3') = \\ ((g_1' \diamond g_2') \cdot g_3 + g_1' \cdot g_2 + g_1, (g_1' \diamond g_2') \diamond g_3') \,.$$

Rozpisem pravé strany dostáváme

$$(g_1, g_1') \odot (g_2' \cdot g_3 + g_2, g_2' \diamond g_3') = ((g_1' \diamond g_2') \cdot g_3 + g_1' \cdot g_2 + g_1, g_1' \diamond (g_2' \diamond g_3')) \,.$$

Použijeme-li asociativní zákon pro prvky z G', dostaneme požadovaný závěr.

3. Tvrdíme, že existuje takové $g'_0 \in G'$ a takové $g_0 \in G$, pro něž platí, že $\forall g' \in G', \forall g \in G : (g_0, g'_0) \odot (g, g') = (g, g') \odot (g_0, g'_0) = (g, g')$. Rozpisem dostáváme: $(g_0, g'_0) \odot (g, g') = ((g'_0 \cdot g) + g_0, g'_0 \diamond g')$. A také $(g, g') \odot (g_0, g'_0) = ((g' \cdot g_0) + g, g' \diamond g'_0)$. Celkem tedy dostáváme jednak rovnosti $g'_0 \diamond g' = g' \diamond g'_0 = g'$ z nichž přímočaře plyne, že g'_0 je identita na G', a proto díky definici akce platí, že $g'_0 : g \mapsto g \ \forall g \in G$. Dále z rozpisu získáváme, že $(g' \cdot g_0) + g = g$ a také $(g'_0 \cdot g) + g_0 = g \ \forall g \in G$. Z první rovnosti okamžitě plyne, že g_0 je neutrální prvek v g. Druhou rovnici lze přepsat do tvaru $g' \cdot g_0 = g_0$, z něhož lze s využitím linearity (každý lineární operátor zobrazuje identitu na identitu) uzavřít, že platí i druhá rovnost.

4. Existence inverze. Tvrdíme, že $\forall g' \in G', \forall g \in G \ \exists g'^{-1} \in G', \exists g^{-1} \in G$, takové, že $(g, g') \odot (g^{-1}, g'^{-1}) = (g_0, g'_0) = (g^{-1}, g'^{-1}) \odot (g, g')$. Rozepsáním dostaneme jednak známou podmínku, tedy $g' \diamond g'^{-1} = g'^{-1} \diamond g' = g'_0$, z čehož triviálně plyne, že symbol g'^{-1} označuje přímo inverzní prvek ke g' na grupě G'. Komplikovanější je to ale ve druhé složce, kde po rozpisu máme $((g' \cdot g^{-1}) + g) = g_0 = (g'^{-1} \cdot g) + g^{-1}$. Tady je na pohled znát, že prvek označený g^{-1} nebude přímo inverzí ke g. Abychom našli inverzní prvek k (g, g'), musíme najít takové g^{-1}, kterým splníme zároveň obě rovnice. Z první rovnice si vyjádříme g^{-1} jako $g^{-1} = -(g'^{-1} \cdot g)$ (kde $-a$ je inverze vůči a na G) a dosadíme do rovnice druhé, máme $g' \cdot (-(g'^{-1} \cdot g)) = -((g' \diamond g'^{-1}) \cdot g) = -g$. Kde byla použita linearita a vlastnost akce. Jak vidno, prvek $g^{-1} = -(g'^{-1} \cdot g)$ je řešením obou rovnic, navíc je zřejmé, že náleží do G.

Q.E.D.

Tímto jsme tedy na příkladu ukázali, že tvoření nové grupy „sloučením“ dvou původních si jednak může vynucovat zavádění specifických binárních operací na nové množině, které ale navíc můžou zachovat „grupovost“ této nové množiny. Výše uvedený příklad je velmi důležitý, protože reprezentuje širokou paletu realizací grupy a její akce, jak právě ukážeme. Pro jednoduchost si vezměme n-dimenzonální Euklidovský prostor, což je obecně vzato topologický prostor, na kterém lze zavést strukturu n-dimenzionálního vektorového prostoru (pozor, to je jeho vlastnost, nikoli definice). N-dimenzionální Euklidův prostor a prostor $\mathbb{R}^n$ jsou diffeomorfní, proto je budeme občas beztrestně zaměňovat. Tomuto prostoru připišme obvyklý Euklidovský metrický tenzor. Nyní si rozmysleme, jaké transformace s prvky tohoto prostoru lze provádět, abychom zachovali veškerou informaci o metrických vztazích na množině. Precizněji řečeno, hledáme izometrické a diffeomorfní zobrazení. Je přímočaré rozmyslet si, že taková zobrazení se mohou sdružovat do grup. To jinými slovy znamená, že množina takových zobrazení představuje akci jisté typické grupy na této množině. V další části práce se tomuto problému budeme věnovat podrobněji, zatím vyjdeme ze zkušenosti, že taková „hezká“ zobrazení Euklidovského prostoru na sebe sama, která zachovávají délky a úhly, jsou rotace a translace. Grupu rotací na n-dimenzionálním Euklidově prostoru značíme $SO(n)$, grupu translací na n-dimenzionálním Euklidově prostoru označme T^n. Uvažujme pro tuto chvíli pouze akce, které jsou věrnými ireducibilními reprezentacemi těchto grup. Nyní se zabývejme akcí grupy T^n. Její působení lze kanonicky ztotožnit s akcí vektorového prostoru na sebe sama, jelikož posunem bodu v daném směru o danou vzdálenost získáme právě takový bod, jež je reprezentován novým vektorem, stejným, jako kdybychom k původnímu vektoru přičetli jiný vektor, odpovídající příslušné translaci. A skutečně, operace sčítání na vektorovém prostoru přesně odpovídá požadavkům translace. To jest, když operátoru $\mathcal{T}_v$ přiřadím operátor $+v$ na vektorovém prostoru, pak není obtížné ověřit, že pro operátory přiřazené původním operátorům translace na vektorovém prostoru také platí ${\mathcal{T}^{-1}}_v = \mathcal{T}_{-v}$, a $\mathcal{T}_u\mathcal{T}_v = \mathcal{T}_{u+v}$. Jelikož ale bereme v úvahu i další akci na vektorovém prostoru, akci grupy $SO(n)$, tak nám přirozeně vznikne požadavek, jak má grupa $SO(n)$ působit na T^n. Nyní si rozmyslíme, že toto působení zapříčiní, že „sloučení“ těchto grup si za přirozené definice akce na „rozšířené“ množině – grupě vynucuje podmínku skládání stejnou, jako ve výše uvedeném příkladu. Protože prvky grupy $SO(n)$ působí na Euklidův prostor jako lineární zobrazení, působí jako lineární zobrazení i na prvky grupy T^n (která má strukturu lineárního prostoru). Obecný prvek kartézského součinu množin $SO(n)$ a T^n zapišme jako (g, g') a jemu příslušnou akci na $v \in V$, jako $(g, g')\cdot v = \mathbf{R}(v)+a$, kde $\mathbf{R}$ je operátor rotace (v souřadnicovém formalizmu matice rotace) a a vektor reprezentující translaci. Slovy řečeno, vyrobili jsme množinu prvků, jejichž akce na vektorovém prostoru je dána rotací a následnou translací. Opětovným působením jistého prvku (h, h') z této množiny na prvek $\mathbf{R}_1(v) + a_1$ dává prvek $\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1(v) + \mathbf{R}_2(a_1) + a_2$. Tohle skládání je už pro nás známé, viděli jsme jej na výše uvedeném příkladu. Díky linearitě působení $SO(n)$ na T^n navíc víme, že tato množina spolu s operací skládání má strukturu grupy. Tuto grupu budeme označovat $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$.

Věta 7 *Výše zavedená akce grupy $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$ je tranzitivní.*

Důkaz 7 Formálně psáno, chceme ukázat, že $\forall a, b \in \mathbb{R}^n : \exists e \in SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n :$ $: n(e, x) = y$. Kde n je akce grupy. Vezměme libovolnou uspořádanou dvojici (x_0, y_0). Nyní zkonstruujeme prvek z $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$, který bude splňovat požadovanou vlastnost, čímž dokážeme pravdivost výroku o existenci. Protože $SO(n)$ je grupa, existuje v ní neutrální prvek, který z definice akce musí zachovávat každý prvek množiny, takový prvek grupy $SO(n)$ označme $\mathbf{Id}$. Dále, protože množina R^n spolu s operací $+$ je abelovskou grupou, lze bezpochyby zkonstruovat prvek $y_0 - x_0$, který bude opět náležet do $\mathbb{R}^n$. Tvrdíme, že prvek $(y_0 - x_0, \mathbf{Id}) \in SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ má požadovanou vlastnost, neboli, že $n((y_0 - x_0, \mathbf{Id}), x_0) = y_0$. Rozpisem dostáváme $\mathbf{Id}(x_0) + (y_0 - x_0) = y_0$, což již přímočaře dává tvrzení.

Q.E.D.

Věta 8 *Mějme libovolný prvek $m \in M$, kde M je Euklidův a vektor $v \in V$, který tento bod prostoru reprezentuje. Tvrdíme, že množina*

$$G_v = \{(v, \mathbf{R}) \odot (-v, \mathbf{Id})|\ \mathbf{R} \in SO(n)\}$$

spolu s operací $\odot$ je stabilizátor bodu v, který je navíc izomorfní $SO(n)$.

Důkaz 8 Po celou dobu důkazu mějme libovolně, ale fixně, zvolené jedno $v \in V$.

1. Nejprve ukážeme, že každý prvek z G_v ponechává v. Pišme

$$(v, R) \odot (-v, Id) = (v - R(v), R)$$

a s použitím dříve zavedené akce $\tilde{r}$ máme

$$(v - \mathbf{R}(v), \mathbf{R}) \cdot v = \mathbf{R}(v) + v - \mathbf{R}(v) = v \; \forall \mathbf{R} \in SO(n) \, .$$

Na tomto místě je již jednoduchým cvičením ukázat, že jakýkoli jiný prvek z $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ nestabilizuje v.

2. Dále ukážeme, že množina G_v lze bijektivně zobrazit na $SO(n)$. Tvrzení je však triviální, vězměme si zobrazení $\varphi : (v, \mathbf{R}_a) \odot (-v, \mathbf{Id}) \mapsto \mathbf{R}_a$. Toto zobrazení je očividně bijekce.

3. Zavedené zobrazení φ je homomorfizmus. Aby tomu bylo tak, musí paltit

$$\begin{aligned} &\varphi[((v, \mathbf{R}_1) \odot (-v, \mathbf{Id})) \odot ((v, \mathbf{R}_2) \odot (-v, \mathbf{Id}))] = \\ &= \varphi[(v, \mathbf{R}_1) \odot (-v, \mathbf{Id})] \diamond \varphi[(v, \mathbf{R}_2) \odot (-v, \mathbf{Id})] \, . \end{aligned}$$

„Roznásobením“ pravé strany vychází

$$\begin{aligned} &\varphi[(v - \mathbf{R}_1(v) + \mathbf{R}_1(v) - \mathbf{R}_1 \diamond \mathbf{R}_2(v), v_1 \diamond R_2)] = \\ &\varphi[(v, \mathbf{R}_1 \diamond \mathbf{R}_2) \odot (-v, \mathbf{Id})] = \mathbf{R}_1 \diamond \mathbf{R}_2 \, . \end{aligned}$$

Dostáváme stejný výsledek jako na pravé straně.

Q.E.D.

Poznámka: V krátkosti jenom shrňme obdržené výsledky. Právě jsme dokázali, že stabilizátor libovolného bodu n-dimenzionálního Euklidova prostoru je grupa izomorfní grupě $SO(n)$. Tento stabilizátor je podgrupa $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$. Pro konstrukci stabilizátoru v tomto případě (později ukážeme, že v každém případě) nezáleží na konkrétní volbě stabilizovaného prvku, protože všechny stabilizátory jsou izomorfní.

Abychom však neustrnuli na přílišné konkrétnosti a náš příklad tak nepůsobil jako ad hoc, zobecníme tohle snažení obecnou definicí.

Definice 12 *Polopřímý součin grup* je zobrazení $\rtimes_r : (G, H) \to G \rtimes_r H$, kde G, H jsou grupy a r je akce grupy G na H taková, že pro ni existuje homomorfizmus φ zavedený ve Větě 1, pro nějž lze psát $\varphi : G \to Aut(H)$, kde $Aut(H)$ je množina automorfizmů na H. Jde o zobrazení na kartézský součin množin $H \times G$ příslušejících grupám $\{G, \circ\}$ a $\{H, \diamond\}$, na němž je definována binární oprace $\odot$, a to následujícím způsobem: $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall h_1, h_2 \in H : (h_1, g_1) \odot (h_2, g_2) = = (h_1 \diamond r(g_1, h_2), g_1 \circ g_2)$.

Lemma 3 *Uvažujme libovolný automorfizmus $\varphi(g)$. Pak platí $\varphi(g)[e_H] = e_H$, kde e_H je neutrální prvek z H.*

Důkaz lemma 3 K důkazu použijeme menší trik a napíšeme

$$\varphi(g)[e_H] = \varphi(g)[e_H \diamond e_H] = \varphi(g)[e_H] \diamond \varphi(g)[e_H] \, .$$

Pak vezmeme prvek invezní k $\varphi(g)[e_H]$, který označíme $(\varphi(g)[e_H])^{-1}$, a tím zapůsobíme zprava na oba konce série rovností. Dostaneme tak: $e_H = e_H \diamond \varphi(g)[e_H]$, což již jasně implikuje $\varphi(g)[e_H] = e_H$.

Q.E.D.

Věta 9 *Polopřímý součin $\rtimes_r$ grup G,H je zobrazení, jehož obrazem je opět grupa.*

Důkaz 9 Tvrzení je jen malým zobecněním Věty 6, proto z jejího důkazu budeme nyní částečně vycházet.

1. Tvrdíme, že je množina $H \times G$ uzavřená na operaci $\odot$. Neboli
$$(h_1, g_1) \odot (h_2, g_2) = (h_1 \diamond (g_1 \cdot h_2), g_1 \circ g_2) \,.$$
Zde je již vidno, že $h_1 \diamond (g_1 \cdot h_2) \in H$, a $g_1 \circ g_2 \in G$.

2. Asociativita. Chceme ukázat, že platí
$$((h_1, g_1) \odot (h_2, g_2)) \odot (h_3, g_3) = (h_1, g_1) \odot ((h_2, g_2) \odot (h_3, g_3)) \,.$$
Rozepíšeme si nejprve levou stranu rovnice. Pišme:
$$(h_1 \diamond (g_1 \cdot h_2), g_1 \circ g_2) \odot (h_3, g_3) = ((h_1 \diamond (g_1 \cdot h_2)) \diamond ((g_1 \circ g_2) \cdot h_3), ((g_1 \circ g_2) \circ g_3) \,.$$
Rozpisem pravé strany dostáváme:
$$(h_1, g_1) \odot (h_2 \diamond (g_2 \cdot h_3), g_2 \circ g_3) = (h_1 \diamond (g_1 \cdot (h_2 \diamond (g_2 \cdot h_3))), g_1 \circ (g_2 \circ g_3)) \,.$$
Z rozpisu tedy plyne, že operace je na množině asociativní, pokud
$$(g_1 \cdot h_2) \diamond ((g_1 \circ g_2) \cdot h_3) = (g_1 \cdot (h_2 \diamond (g_2 \cdot h_3))) \,.$$
To však díky vlastnosti akce, zejména pak speciálního požadavku, aby byla reprezentovatelná zobrazením na automorfizmy (což jsou automaticky grupové bijektivní homomorfizmy), platí.

3. Existence neutrálního prvku. Díky provedenému důkazu Věty 6 lze učinit ansatz, že neutrálním prvkem bude prvek (e_H, e_G), kde e_H,e_G jsou neutrální prvky příslušných grup. To nyní jednoduše dokážeme. Pišme: $\forall h \in H, g \in G$ platí
$$(h, g) \odot (e_H, e_G) = (h \diamond (g \cdot e_H), g \circ e_G) = (h \diamond e_H, g \circ e_G) = (h, g) \,.$$
Kde jsme v předposlední rovnosti využili jmenované speciální vlastnosti akce. Anologicky lze psát:
$$(e_H, e_G) \odot (h, g) = (e_H \diamond (e_G \cdot h), e_G \circ g) = (e_H \diamond h, e_G \circ g) = (h, g) \,.$$

4. Existence inverzního prvku. Opět tu použijeme ansatz a otestujeme, že k prvku $(h, g) \in G \rtimes_r H$ je inverzní prvek $((g^{-1} \cdot h^{-1}), g^{-1})$, kde g^{-1}, respektive h^{-1} jsou inverzní prvky ke g, respektive h. Nejprve testování pravé inverze:
$$(h, g) \odot ((g^{-1} \cdot h^{-1}), g^{-1}) = (h \diamond g \cdot (g^{-1} \cdot h^{-1}), g \circ g^{-1}) =$$
$$(h \diamond ((g \circ g^{-1}) \cdot h^{-1}), g \circ g^{-1}) = (e_H, e_G) \,.$$
Nyní levá:
$$((g^{-1} \cdot h^{-1}), g^{-1}) \odot (h, g) = ((g^{-1} \cdot h^{-1}) \diamond (g^{-1} \cdot h), g^{-1} \circ g) =$$
$$(g^{-1} \cdot (h^{-1} \diamond h), e_G) = (g^{-1} \cdot e_H, e_G) = (e_H, e_G) \,.$$

Q.E.D.

Tímto jsme dokázali poslední elementární ale důležitý fakt, potřebný k rozvinutí teorie homogenních prostorů. Nyní můžeme přistoupit k hlavní stati této kapitoly.

1.2 Homogenní prostory

Ještě dříve než začneme s novými informacemi, se ohlédneme, jaké důležité body jsme již v práci potkali. Úplnému úvodu předešlé podkapitoly patřilo představení pojmu grupa. Věnovali jsme se obecnému nazírání na to, co je grupa a jaké má množina s grupovou strukturou vlastnosti. V dalším kroku jsme si rozmysleli spojitost mezi grupami a operacemi na libovolné množině, a tím přirozeně přišel na scénu pojem akce grupy na množině. Zavedení sady takových operací jsme motivovali zkoumáním transformací množiny, které zachovávají jistou sledovanou vlastnost na množině. Podle takové vlastnosti jsme pak členili prvky množiny do tříd ekvivalence, a tak vystavěli novou množinu, kterou jsme nazvali faktorová množina. Konec této podkapitoly patřil zavádění zobrazení dvojice grup na množinu s operací, čímž jsme dospívali k pojmům jako přímý, respektice polopřímý součin grup. Tyto nové struktury přirozeně vzešli z požadavku působení více akcí různých grup na tutéž množinu. Následně jsme ukázali, že obrazem tohoto zobrazní je vždy grupa, a toto obecné pojednání doprovodili konkrétním příkladem akce grupy $SO(n) \rtimes_r T^n$ na Euklidově prostoru.

Nyní již můžeme přistoupit k dalším pojmům. V první vlně to však musí být trivium z diferenciální geometrie a topologie. Definice jsou z části čerpány od [3]. Pro podrobnější a širší studium pojmů doporučujeme nahlédnout do těchto skript.

Definice 13 *Hausdorffův prostor.* Jedná se o topologický prostor X, pro nějž platí, že $\forall x, y \in X$, kde $x \neq y$, existuje okolí U bodu x a okolí V bodu y takové, že $U \cap V = \emptyset$.

Definice 14 Nechť X, Y jsou topologické prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazve *spojité*, jestliže pro každou otevřenou množinu G prostoru Y je vzor $f^{-1}(G)$ otevřenou množinou prostoru X.

Definice 15 *Homeomorfizmus* prostoru X na prostor Y je zobrazení $f : X \to Y$, které je vzájemně jednoznačné, spojité, které má též spojitou inverzi.

Definice 16 Topologický prostor X se nazve *souvislý*, když jediné podmnožiny v X, které jsou zároveň otevřené i uzavřené jsou X a $\emptyset$. Topologický prostor, který není *souvislý* nazveme *nesouvislý* .

Definice 17 Nechť J je množina, $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor. *Otevřeným pokrytím* podmnožiny $A \subset X$ nazýváme systém $\{G_\alpha \mid \alpha \in J\}$ prvků z $\mathcal{T}$ takový, že $A \subset \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$. Pak říkáme, že podmnožina $A \subset X$ je *kompaktní*, když z každého otevřeného pokrytí množiny A lze vybrat konečné otevřené pokrytí.

Definice 18 *Topologická varieta dimenze n,* je Hausdorffův topologický prostor, v němž ke každému bodu x existuje okolí homeomorfní s nějakou otevřenou množinou $\mathbb{R}^n$.

Definice 19 Je-li X topologická varieta, pak *lokální mapou* na X nazýváme zobrazení $\mu : U \to \mathbb{R}^n$, kde $U \subset X$ je otevřená množina a μ je homeomorfismus na otevřenou podmnožinu v $\mathbb{R}^n$.

Díky výše zavedenému pojmu *mapa* můžeme následně obecně definovat dobře známý pojem souřadnice.

Definice 20 *Souřadnicové funcke mapy* μ jsou reálné funkce na U, určené mapou μ a standardními souřadnými funkcemi na $\mathbb{R}^n$ tedy $u^1, ..., u^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, to jest $x^i = u^i \circ \mu : U \to \mathbb{R}$. Pak množině $\{x^i\}_i$ říkáme *lokální souřadná soustava* a jednotlivé funkce x^i jsou tzv. *souřadnicové funkce* nebo kratčeji *souřadnice*.

Definice 21 *Diferencovatelná varieta* M třídy C^∞ je dvojice $(X, \mathfrak{B})$, kde X je topologická varieta a $\mathfrak{B}$ je *úplný* C^∞ *atlas*. Pro přesnou definici diferencovatelných struktur třídy C^ν, viz. [3].

Definice 22 Spojité zobrazení $F : M \to N$ mezi C^∞ diferencovatelnými varietami $(M, \mathfrak{A})$ dimenze d a $(N, \mathfrak{B})$ dimenze e nazveme *hladké*, pokud zobrazení $\tau \circ F \circ \mu^{-1} : W \to V$, kde $W \subset \mathbb{R}^d$ a $V \subset \mathbb{R}^e$ je hladké v kontextu reálné analýzy pro všechny přípustné mapy $\tau \in \mathfrak{B}$ a $\mu \in \mathfrak{A}$.

Definice 23 Nechť M a N jsou C^∞ diferencovatelné variety stejné dimenze n. *Diffeomorfizmus* variety M na varietu N je hladké zobrazení, které je vzájemně jednoznačné, navíc má hladkou inverzi.

Definice 24 Uvažujme hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \to M$ mezi C^∞ diferencovatelnými varietami $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a M, kde $a < 0 < b$. Pak zobrazení γ nazveme *hladkou křivkou na varietě* M, procházející bodem $m = \gamma(0)$.

Definice 25 *Tečným vektorem* $\mathbf{X}_m$ ke hladké křivce γ (parametrizovanou pomocí parametru t) v bodě $m = \gamma(0)$ na varietě M nazveme zobrazení $\mathbf{X}_m : f \to \mathbb{R}$ (kde f je hladká funkce na varietě, což je hladké zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$), které definujeme předpisem $\mathbf{X}_m(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(f \circ \gamma)|_0$.

Poznámka: Není těžké rozmyslet si, že takto definované zobrazení dává prostor k přímočarému zavedení ekvivalence na křivkách na varietě.

Poznámka: V rámci stručnosti budeme od nynějška ***vždy*** *(pokud nebude řečeno jinak) uvažovat variety pouze* C^∞ *diferencovatelné a zobrazení pouze hladká.*

Věta 10 *Množina všech tečných vektorů* $\mathbf{X}_m$ *v bodě* m *variety* M *dimenze* n *tvoří vektorový prostor dimenze* n.

Důkaz 10 Důkaz viz. [3].

Q.E.D.

Definice 26 Množinu všech tečných vektorů k varietě M v bodě m nazveme *tečný prostor*, který značíme $\mathbf{T}_m M$.

Definice 27 Disjunktnímu sjednocení $\mathbf{T}_m M$ $\forall m \in M$, tedy množině $\{\mathbf{X}_m \in \mathbf{T}_m M |\ m \in M\}$, říkáme *tečný bundle* variety M a značíme jej $\mathbf{TM}$.

Právě definovaná struktura je speciálním případem tzv. *fíbrovného prostoru.* Konkrétně jde o fíbrovaný prostor s bázovou varietou M, standardním fíbrem $\mathbf{T}_m M$ pro libovolné m a projekcí $\pi : \mathbf{TM} \to M$, definovanou jako $\pi(\mathbf{X}_m) = m$. Obecná definice fíbrovaného prostoru je následující.

Definice 28 *Fíbrovaný prostor* je varieta E, která má navíc následující dodatečnou strukturu:

1. Varietu M, kterou nazýváme *bázová varieta* se surjektivním zobrazením $\pi : E \to M$ zvaným *projekce* a otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.
2. Varietu F, zvanou typické vlákno s diffeomorfizmy $\chi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha$, zvanými lokální trivializace, splňujícími formuli $\omega \circ \chi_\alpha \equiv \pi|_{\pi^{(-1)}(U_\alpha)}$, kde symbolem ω značíme projektor $\omega : A \times B \to A$, (kde A, B jsou množiny) s vlastností $\omega(a, b) = a$, kde $a \in A$, $b \in B$.

Poznámka: Jen krátká interpretace druhého bodu předchozí definice. Existence diffeomorfizmů χ_α nám implikuje, že kongruence vláken variety E je lokálně diffeomorfní kartézskému součinu otevřené množiny pokrývající bázovou varietu a standardního fíbru. Dodatečná podmínka na χ_α zaručuje, že tento diffeomorfizmus zobrazuje vlákna „sedící“ na otevřené podmnožině bázové variety na kartézský součin právě této podmnožiny bázové variety se standardním fíbrem.

Některé další, již pokročilejší pojmy související s fíbrovanými prostory, uvedeme později.

Nyní rozšíříme naši zahrádku pojmů o sekci týkající se tenzorů, tenzorových polí a zobrazení na nich působících.

Definice 29 *Kotečný vektor* α_m v bodě m variety M nazveme každé lineární zobrazení $\alpha_m : \mathbf{X}_m \to \mathbb{R}$.

Věta 11 *Množina všech lineárních zobrazení na vektorovém prostoru dimenze n má strukturu vektorového prostoru s dimenzí n.*

Důkaz 11 Důkaz viz. [3].

Q.E.D.

Definice 30 Množinu všech kotečných vektorů k varietě M v bodě m nazveme *kotečný prostor*, který značíme $\mathbf{T}^*_m M$.

Definice 31 Disjunktnímu sjednocení $\mathbf{T}^*_m M$ $\forall m \in M$, tedy množině $\{\alpha_m \in \mathbf{T}^*_m M |\ m \in M\}$, říkáme *kotečný bundle* variety M a značíme jej $\mathbf{T^*M}$.

Jak je triviální nahlédnout, opět se jedná o speciální případ fíbrovaného prostoru.

Definice 32 *Diferenciál funkce g* v bodě m na varietě M, značíme $(\mathrm{dg})_\mathrm{m}$ a jde o zobrazení $(\mathrm{dg})_\mathrm{m} : \mathbf{X}_m \to \mathbb{R}$ definované předpisem: $(\mathrm{dg})_\mathrm{m}[\mathbf{X}_\mathrm{m}] = \mathbf{X}_\mathrm{m}(\mathrm{g})$.

Věta 12 *Diferenciál funkce z Definice 30 je kotečný vektor.*

Důkaz 12 Důkaz viz. [3].

Q.E.D.

Nyní je vše připraveno na zavedení důležitého pojmu z lineární algebry, který se hojně uplatnil i v diferenciální geometrii.

Definice 33 *Tenzor* $T^{ij...}_{lm...}$ typu (a,b) je multilineární zobrazení, pro které lze psát $T^{ij...}_{lm...} : \underbrace{V^* \times V^* \times ...}_{\text{a}} \underbrace{V \times V \times ...}_{\text{b}} \to \mathbb{R}$, kde V je vektorový prostor a V^* jeho duál.

Poznámka: Tenzor definovaný výše lze „umístit“ na varietu M do bodu m, pakliže $V \equiv \mathbf{T}_m M$ a $V^* \equiv \mathbf{T}^*_m M$.

Jelikož množina tenzorů stejného typu vždy tvoří vektorový prostor, což je přímočarý důsledek Definice 33 a Vět 10 a 11, můžeme analogicky předchozímu vytvořit fíbrovaný prostor se standardním fíbrem, kterým bude vektorový prostor tenzorů typu (a,b). Takový fíbrovaný prostor označme $\mathfrak{T}^a_b$.

Definice 34 *Hladký řez fíbrovaného prostoru* E s projekcí π definujeme jako (hladké) zobrazení $\sigma : U \to E$, které vyhovuje podmínce $\pi \circ \sigma = id$. Množinu všech takových řezů E označíme $\Gamma(E)$.

Definice 35 Libovolný prvek $\Gamma(\mathfrak{T}^a_b)$ označme jako *tenzorové pole* $\mathbf{T}^a_b$ *typu* (a,b) na varietě M, tedy symblicky psáno $\mathbf{T}^a_b \in \Gamma(\mathfrak{T}^a_b)$.

Věta 13 *Prostor* $\Gamma(E)$ *má strukturu vektorového prostoru.*

Důkaz 13 Triviální důsledek předešlých vět.

Q.E.D.

Poznámka: Každé tenzorové pole $\mathbf{A}$ *lze tak intuitivně chápat jako soubor tenzorů „nalepených“ na body variety, více formálně řečeno, každé tenzorové pole* $\mathbf{A}$ *lze reprezentovat jako zobrazení* $\mathbf{A} : M \to \mathcal{A}$*, kde* $\mathcal{A}$ *je fíbrovaný prostor se standardním fibrem jako vektorovým prostorem všech tenzorů daného typu. Speciálně, musí platit* $\mathbf{A}[m] = A_m$*, kde* A_m *je tenzor náležící do tečného prostoru v bodě* m*.*

Definice 36 *Lineární konexe na tečném budleu* E *s bázovou varietou* M, též označovaná jako *kovariantní derivace* $\nabla_{\mathbf{a}}$ *ve směru* $\mathbf{a}$ je zobrazení $\nabla_{\mathbf{a}} : \mathbf{T}^b_c \to \mathbf{T}^b_c$, kde $b,\ c \in \mathbb{N}$, pro něž platí tato pravidla:

1. $\nabla_{(f\mathbf{a})}\mathbf{A} = f\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{A}$
2. $\nabla_{(\mathbf{a}+r\mathbf{b})}\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{A} + \nabla_{(r\mathbf{b})}\mathbf{A}$
3. $\nabla_{\mathbf{a}}(\mathbf{A} + r\mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{A} + r\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{B}$
4. $\nabla_{\mathbf{a}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes (\nabla_{\mathbf{a}}\mathbf{B})$
5. $\nabla_{\mathbf{a}} f = \mathbf{a}[f]$

$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{T}^b_c,\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Gamma(\mathbf{TM}), \forall f \in F(M)$ a $\forall r \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Symbolem $F(M)$ *jsme označili prostor funkcí na varietě* M*. Symbolem* $\otimes$ *jsme označili tenzorový součin, který v této práci není definován. Definici lze najít v [6]*

Poznámka: Jmenovaný výčet pravidel, která kovariantní derivace ve směru musí splňovat, neurčuje působení kovariantní derivace úplně. Přesnou specifikaci působení učiníme, až rozvedeme pojem Riemannova konexe.

Definice 37 Uvažujme libovolnou křivku γ s parametrizací t a definičním oborem $(a, b) \in \mathbb{R}$ na varietě M. Pak *tečné pole ke křivce* γ nazveme tenzorové pole typu (1,0) definované na $U \subseteq M$, kde $U = \{\gamma(t) | \; t \in (a, b)\}$, které lze reprezentovat zobrazením $\dot{\gamma} : M \to \mathbf{X}$, kde $\mathbf{X}$ označuje fíbrovaný prostor s bázovou varietou M a standardním fíbrem jako vektorovým prostorem všech tečných vektorů k varietě v daném bodě variety, které splňuje $\dot{\gamma}[m] = \mathbf{X}_m$, kde $\mathbf{X}_m$ je tečný vektor ke křivce γ v bodě m. Tečné pole ke křivce γ pak značíme $\dot{\gamma}$.

Po zavedení pojmu tečné pole ke křivce již můžeme sepsat definici pojmu, který bude důležitý zejména pak ve druhé kapitole práce.

Definice 38 *Geodetika* na varietě M je taková křivka γ na varietě, pro níž platí $\nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}) = 0$.

Poznámka: Intuitivně lze tuto podmínku interpretovat tak, že hledáme takovou křivku, podle níž se přenáší tečné vektory. Trochu s rezervou řečeno, jedná se tedy o přímku v řeči konkrétní geometrie. Není totiž obtížné rozmyslet si, že z hlediska „ploché“ geometrie, takové, jakou známe například ze středoškolské planimetrie, je právě přímka křivkou, jejíž tečny mají stejný směr jako sama křivka.

Jak již bylo naznačeno, geometrii významně determinuje volba lineární konexe. Ta, protože není ultralokální v jednom argumentu, nemůže být reprezentována tenzorovým polem. Existují však z konexe odvozená zobrazení, které již tenzorový charakter mají.

Definice 39 Zobrazení $T : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ na varietě M s konexí ∇ definované jako $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ se nazývá *tenzor torze.*

Definice 40 Zobrazení $R : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ na varietě M s konexí ∇ definované jako $R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ se nazývá *tenzor křivosti.*

Poznámka: Působení tenzorového pole na tenzorové pole je analogií k působení tenzoru na tenzor. Kupříkladu, pokud $\mathbf{A}$ je tenzorové pole $\mathbf{T}^0_1$ na varietě M, které má zobrazovat $\mathbf{A} : \mathcal{X} \to F$, tedy z vektorového pole na pole skalárů, toto zobrazení specifikujeme požadavkem $(\mathbf{A}(\mathbf{X}))_m = \mathbf{A}_m(\mathbf{X}_m)$ $\forall m \in M$. Kde tu opět chápeme pole jako zobrazení z variety na fíbrovaný prostor.

Poznámka: Zobrazení $[,] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ se nazývá Lieova závorka vektorových polí. Pro její definici viz. [3].

Věta 14 *Zobrazení nazvaná tenzor torze a tenzor křivosti jsou tenzorová.*

Důkaz 14 viz. [3].

Q.E.D.

V dalším postupu k poznání symetrií prostoru musíme ukotvit následující pojmy.

Definice 41 Uvažujme diffeomorfizmus variet $\varphi : M \to N$. Pak diferenciál φ v bodě m je tenzor $\mathrm{d}\varphi|_{\mathrm{m}} \in \mathbf{T}^*_{\mathrm{m}}\mathrm{M} \otimes \mathbf{T}_{\varphi(\mathrm{m})}\mathrm{N}$, který vymezujeme následující formulí: $\mathrm{d}\varphi|_{\mathrm{m}}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}})[f] = \mathbf{X}_{\mathrm{m}}[f \circ \varphi]\ \forall \mathbf{X}_m \in \mathbf{T}_m M,\ \forall f \in F(N)$. Takovému zobrazení $\mathrm{d}\varphi|_{\mathrm{m}} : \mathbf{T}_{\mathrm{m}}\mathrm{M} \to \mathbf{T}_{\varphi(\mathrm{m})}\mathrm{N}$ říkáme *tečné zobrazení* nebo také *push-forward.*

Poznámka: Jelikož jsme obecně nedefinovali diferenciál zobrazení mezi varietami, bereme vlastnost tečného zobrazení jako definitorickou.

Poznámka: Zobrazení push-forward též můžeme značit φ_*, s tímto značením pak přepíšeme onu definitorickou vlastnost na $\varphi_*(\mathbf{X}_m)[f] = \mathbf{X}_m[f \circ \varphi]\ \forall f \in F(N)$.

Obdobně definujeme dále také *kotečné zobrazení variet.*

Definice 42 Uvažujme diffeomorfizmus variet $\varphi : M \to N$. K tomuto zobrazení přidružíme *kotečné zobrazení* v bodě $\varphi(m)$, tedy zobrazení $\varphi^* : \mathbf{T}^*_{\varphi(m)}N \to \mathbf{T}^*_m M$, pro něž platí formule

$$(\varphi^*\alpha)_m(\mathbf{X}_m) = \alpha_{\varphi(m)}(\varphi_{*m}(\mathbf{X}_m))\ \forall \alpha_{\varphi(m)} \in \mathbf{T}^*_{\varphi(m)}N,\ \forall \mathbf{X}_m \in \mathbf{T}_m M\,.$$

Poznámka: Z předešlých definic lze opět přímočaře definovat zobrazení obecných tenzorů (a díky výše uvedené poznámce o půsoení tenzorových polí) i tenzorových polí.

Definice 43 *Metrický tenzor,* $\mathbf{g}_{ab}$ nebo kratčeji *metrika*, je tenzorové pole typu $(0, 2)$, které splňuje následující podmínky:

1. $\mathbf{g}_{ab}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{g}_{ab}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\ \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{T}^1_0$. Říkáme, že metrika je symetrická.
2. $\mathbf{X} \not\equiv 0 \Rightarrow \mathbf{g}_{ab}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \not\equiv 0\ \forall \mathbf{Y} \not\equiv 0$, kde $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{T}^1_0$. Říkáme, že metrika je nedegenerovaná.

Definice 44 *Riemannova metrika* $\mathbf{g}$ na varietě M je metrika, která navíc splňuje $\mathbf{g} : M \to \mathcal{G}$, kde $\mathcal{G}$ je prostor pozitivně definitních bilineárních forem.

Definice 45 Dvojice $(M, \mathbf{g})$, kde M je varieta a $\mathbf{g}$ je Riemannova metrika, se nazývá *Riemannova varieta.*

Nyní velice důležitá věta diferenciální geometrie, dávající do souvislosti konexi a metriku.

Věta 15 Pro každou metriku $\mathbf{g}$ na varietě M existuje vždy právě jedna konexe na této varietě, která splňuje tyto podmínky:

1. $\nabla \mathbf{g} = 0$
2. $T^{\nabla} = 0$

Kde T^{∇} je tenzor torze příslušející konexi ∇. Konexe splňující tyto vlastnosti se nazývá *Riemannova konexe.*

Důkaz 15 Důkaz je celkem komplikovaný, v případě zájmu lze opět nahlédnout do [3].

Q.E.D.

Tímto jsme uzavřeli úvodní řeč druhé podkapitoly, v níž jsme se obeznámili s nejdůležitějšími pojmy diferenciální geometrie a topologie, které se buďto zužitkují v dalším pokračování práce, nebo byly k zavedení takových pojmů nezbytně nutné. Nyní se pustíme do tématu, které je modernější a v současné fyzice a matematice velmi populární, a tím jsou v nejširším slova smyslu **symetrie**. Naším zájmem budou symetrie geometrické, budeme tedy hledat a vyšetřovat prostory s geometrií z hlediska jejich geometrických symetrií. Jak jsme již poznali dříve, s geometrií úzce souvisí zavedení metrického tenzoru, takže už teď můžeme tušit, že geometrické symetrie budou zakódovány v symetriích metriky.

Definice 46 Zobrazení $\varphi : M \to M$ na varietě M s metrikou g se nazve izometrie, pokud platí $\varphi^* g = g$.

Poznámka: V práci budeme vždy uvažovat jenom izometrie, které jsou zároveň diffeomorfizmy.

Definice 47 Nechť μ je mapa na varietě M, které odopovídají souřadné funkce $\{x_i\}_{i \in J}$. Křivku na varietě, která je definována jako

$$\mu^{-1}(u_1 = C_1, ..., u_{j-1} = C_{j-1}, t, u_{j+1} = C_j, ..., u_n = C_{n-1}),$$

nazveme *souřadnou linií souřadnice x^j při hodnotách zbylých souřadnic* $(C_1, ..., C_{n-1})$ *příslušející mapě μ*. Nechť α je tenzorové pole typu $(0, 1)$. Bázi indukovanou mapou μ tečného prostoru v bodě m berme jako množinu tečných vektorů ke všem souřadným liniím, procházejícím bodem m. Pak *souřadnice tenzoru α_m* jsou hodnoty $\alpha_m^a = \alpha_m(\mathbf{e}_a)$, kde $\mathbf{e}_a$ je tečný vektor k souřadné linii x^a příslušející mapě μ procházející bodem m.

Poznámka: Na tomto místě je dobré zamyslet se nad tím, jak uvedená definice izometrie na varietě souvisí se zavedenou izometrií v první podkapitole, a rozmyslet si, že pokud je zobrazení izometrií z hlediska diferenciálně-geometrického, musí jít o izometrii z obecného hlediska metrických prostorů. Od izometrie, jakožto zobrazení φ na množině P (která má společně se vzdálenostní funkcí d strukturu metrického prostoru) obecně očekáváme splnění této rovnosti $d(x, y) = d(\varphi(x), \varphi(y))$ $\forall x, y \in P$. Není bez povšimnutí, že v této klasické definici vystupuje zobrazení bodů na množině, kdežto v Definici 46 se zobrazují kotečné struktury. Pro pochopení této souvislosti se tedy chvíli zabývejme zobrazením metrického tenzoru a důsledky invariance tohoto pole při působení izometrických diffeomorfizmů. Pro snažší popis budeme hovořit v souřadnicovém rámci. Mějme tedy varietu M, metrický tenzor g a mapu μ, která nám dovolí zavést souřadné funkce $\{x_i\}_{i \in J}$. Na této varietě zvolme bod m, jehož souřadnice budou vzhledem k mapě μ řekněme $m[a_1, a_2, ..., a_j]$. Přechodem k jiné přípustné mapě μ' získáme nové souřadnicové funce $\{x'_i\}_{i \in J}$. Tento přechod nám zároveň indukuje diffeomorfizmus $\eta : M \to M$, který zavádíme jako $\eta(m) = m'$, kde souřadnice bodu m v soustavě $\{x_i\}_{i \in J}$ jsou $m[a_1, a_2, ..., a_j]$

a bodu m' v soustavě $\{x'_i\}_{i\in J}$ jsou tytéž, čili $m'[a_1, a_2, ..., a_j]$. BÚNO předpokládejme, že právě η je izometrie z hlediska naší diferenciálně-geometrické definice. Pro další postup je pohodlnější opřít se o následující tvrzení.

Věta 16 *Nechť μ a μ' jsou libovolné dvě slučitelné mapy na varietě M, η je diffeomorfizmus zkonstruovaný jako ve výše uvedené části poznámky. Zapůsobíme-li na body variety zobrazením η a zároveň na tenzorové pole α typu $(0,1)$ kotečným zobrazením $(\eta^{-1})^*$, nastane rovnost mezi souřadnicemi tenzoru α_m vzhledem k mapě μ, se souřadnicemi tenzoru $((\eta^{-1})^*\alpha)_{\eta(m)}$ vzhledem k mapě μ'.*

Poznámka: Věta vlastně říká, že když dojde k „přesunu“ bodů na varietě společně s příslušným „přesunem“ kovektorů, zachová se souřadnicové vyjádření kovektorů.

K důkazu si pomůžeme následujícím lemma.

Lemma 4 *Označme pole tečných vektorů k souřadným liniím x^a vzhledem k mapě μ jako $\mathbf{e}^a$, dále označme pole tečných vektorů k souřadným liniím $(x')^a$ vzhledem k mapě μ' jako $(\mathbf{e}')^a$. Uvažujme diffeomorfizmus η zkonstruovaný jako výše. Pak platí $(\eta_*\mathbf{e}^a)_m = (\mathbf{e}')^a_{\eta(m)}$ $\forall m \in M$.*

Důkaz lemma 4 Důležitým pozorováním jest, že vždy pro stejnou sadu hodnot zbylých souřadnicových funkcí platí $\eta(x^a) = (x')^a$. Pak již díky definici tečného zobrazení docházíme k požadovanému závěru.

Q.E.D.

Důkaz 16 Díky dokázanému lemma můžeme přímočaře psát následující:

$$(\alpha')^{a'}_{\eta(m)} = \left(\left(\left(\eta^{-1}\right)^* \alpha\right) (\mathbf{e}')^a\right)_{\eta(m)} = \alpha_m \left(\eta_*^{-1} (\mathbf{e}')^a_{\eta(m)}\right) = (\alpha (\mathbf{e}^a))_m = \alpha^a_m$$

Q.E.D.

Věta 17 *Mějme libovolnou křivku γ s parametrizací t na varietě M, zobrazující z intervalu (a,b), dále na varietě definovanou metriku g a zobrazení $l : \gamma \to \mathbb{R}$, kterému říkáme délka křivky, jež splňuje*

$$l_\gamma(\gamma(a), \gamma(b)) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}_{\gamma(t)})}\, \mathrm{d}t\,,$$

kde $\dot{\gamma}$ je pole tečných vektorů ke křivce γ. Dále uvažujme diffeomorfizmus η na varietě M. Pokud zabůsobíme kotečným zobrazením $(\eta^{-1})^*$ na metriku a současně na body variety M zobrazením η, délka původní křivky γ v původní metrice g bude rovna délce nové křivky γ' v nové metrice g'.

Lemma 5 *Mějme varietu M a na ní definovanou křivku γ s parametrizací t. Dále uvažujme diffeomorfizmus η na této varietě. Pak tvrdíme, že tečný vektor $\left(\dot{\gamma'}\right)_{\eta(m)}$ k obrazu křivky γ, tedy křivce $\gamma' = \eta \circ \gamma$ v bodě $\eta(m)$ je tentýž, jako obraz tečného vektoru křivky γ v bodě m, tedy $\eta_*(\dot{\gamma})_m$.*

Důkaz lemma 5 K provedení důkazu si pomůžeme definicí tečného vektoru a tečného zobrazení. Také budeme předpokládat, že dva tečné vektory se rovnají, pokud mají stejnou akci na libovolné funkci z uvažované třídy (v našem případě z třídy hladkých funkcí). Nejprve řekněme, že $\eta(m) = m'$. Potom, při výše uvedeném zavedení γ' můžeme psát, že pokud $\gamma(t_0) = m$ pro nějaké t_0, pak také $\gamma'(t_0) = m'$. To proto, že $\gamma'(t_0) = (\eta \circ \gamma)(t_0) = \eta(m) = m'$.

Při tomto vědomí zapišme obecnou akci $(\dot{\gamma}')_{\eta(m)}$ na funkci f. Z definice působení tečného vektoru máme $(\dot{\gamma}')_{\eta(m)}[f] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ (\eta \circ \gamma))|_{t_0}$.

Na druhé straně rozepišme podle definice zobrazení push-forward akci vektoru $\eta_*(\dot{\gamma})_m$ na tutéž funkci f. Pišme:

$$\eta_* \left(\dot{\gamma}\right)_m [f] = \left(\dot{\gamma}\right)_m [f \circ \eta] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big((f \circ \eta) \circ \gamma\Big)\Big|_{t_0} .$$

Operace skládání zobrazení je asociativní, proto jsou oba výrazy rovny $\forall f \in F(M)$.

Zjišťujeme, že akce obou vektorů ze stejného vektorového prostoru na funkce jsou stejné $\forall f \in F(M)$, čímž uzavřeme, že jsou si samy vektory rovny.

Q.E.D.

Důkaz 17 V matematické notaci věta říká následující:

$$\begin{aligned} l_\gamma(\gamma(a), \gamma(b)) &= \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}_{(\gamma(t))}, \dot{\gamma}_{(\gamma(t))})}\, dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{(g')_{\gamma'(t)}(\dot{\gamma}'_{(\gamma'(t))}, \dot{\gamma}'_{(\gamma'(t))})}\, dt = l'_{\gamma'}(\gamma'(a), \gamma'(b)) \,. \end{aligned}$$

Pro předejití možné nejasnosti ještě podotkněme, že $g' \equiv (\eta^{-1})^* g$ a také

$$\left(\left(\eta^{-1}\right)^* g\right)_{\eta(m)} \equiv \left(\eta^{-1}\right)^* (g_m) \;.$$

Rozpisem předposledního výrazu z defince obrazu křivky:

$$\int_a^b \sqrt{(g')_{\gamma'(t)} \left(\dot{\gamma}'_{(\gamma'(t))}, \dot{\gamma}'_{(\gamma'(t))}\right)}\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_a^b \sqrt{(g')_{(\eta\circ\gamma)(t)} \left((\eta \dot{\circ} \gamma)_{(\eta\circ\gamma)(t)}, (\eta \dot{\circ} \gamma)_{(\eta\circ\gamma)(t)}\right)}\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_a^b \sqrt{\left(\left(\eta^{-1}\right)^* (g)_{\gamma(t)}\right) \left(\eta_* \left(\dot{\gamma}\right)_{\gamma(t)}, \eta_* \left(\dot{\gamma}\right)_{\gamma(t)}\right)}\, \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)} \left(\dot{\gamma}_{(\gamma(t))}, \dot{\gamma}_{(\gamma(t))}\right)}\, \mathrm{d}t \,,$$

kde bylo použito výsledků posledního lemma a vlastnoti kotečného zobrazení tenzorů typu $(0, 2)$.

Q.E.D.

Pokračování poznámky: Zopakujme tedy, že uvažujeme diffeomorfizmus η jako izometrii z hlediska diferenciálně-geometrické definice. Dále předpokládejme, že pro každou dvojici bodů (A, B) existuje geodetická křivka $\xi_{(AB)}$ (1. Euklidův postulát geometrie). Pak je přirozené vzdálenostní funkci $\mathfrak{d}$ na varietě M definovat jako $\mathfrak{d}(A, B) = l(\xi_{(AB)})$, kde l je dříve zavedené zobrazení zvané délka křivky a výraz $l(\xi_{(AB)})$ označuje délku křivky $\xi_{(AB)}$. Je přímočaré nahlédnout dvojici důsledků, *jež vychází z premisy $\eta^* g = g$. Pokud na obě strany rovnosti zapůsobíme kotečným zobrazením $(\eta^{-1})^*$, okamžitě získáváme $(\eta^{-1})^* g = g$. Druhá implikace je, že $l(\xi_{(AB)}) = l'(\xi_{(AB)})$, kde l' je délka křivky s metrikou $(\eta^{-1})^* g$ a $\xi_{(AB)}$ je geodetika křivka spojující body A a B v původní metrice g. Předmětem tvrzení Věty 17 je rovnost $l(\xi_{(AB)}) = l'(\xi'_{(AB)})$, kde $\xi'_{(AB)}$ je $\eta(\xi_{(AB)})$, tedy obraz geodetiké křivky vzhledem k metrice g.*

Toto povídání zakončíme sumarizací našich výsledků, která vyústí v závěr, že η je izometrie z hlediska klasické definice metrických prostorů. Vězměme si tedy dva body na varietě, třeba A a B. Změříme jejich vzdálenost, kterou označme $l(\xi_{(AB)})$. Poté si vezměme zobrazení η, které je izometrií z hlediska diferenciálně-geometrického a zapůsobme zobrazením η^* na metriku g. Z hlediska této metriky opět změřme vzdálenost bodů A a B, a tu označme $l'(\xi_{(AB)})$. Díky předpokladu lze psát $l(\xi_{(AB)}) = l'(\xi_{(AB)})$. Nyní na tenzorové pole zapůsobme zobrazením $(\eta^{-1})^*$ a na body na varietě zobrazením η. Díky Větě 17 lze psát $l'(\xi_{(AB)}) = l(\xi'_{(AB)})$. Celkem tedy máme $l(\xi_{(AB)}) = l(\xi'_{(AB)})$, což lze jednoduše přepsat do řeči vzdálenostní funkce $\mathfrak{d}$, definované výše. Pokud je tedy η izomorfizmus z hlediska diferenciálně-geometrického, musí platit $\mathfrak{d}(A, B) = \mathfrak{d}(\eta(A), \eta(B))$, což je ale přesně požadavek na izometrii v obecném kontextu metrických prostorů!

Od této chvíle se tedy bez obav budeme bavit jen o podmínce na izometričnost zobrazení danou v Definici 46. Je tu však ještě jeden problém. Pro rozhodování, zda-li je rovnost psaná v Definici 46 naplněna, je bezsouřadnicový rámec velmi nešikovný. Proto nyní zkoumejme, jak přeformulovat tuto podmínku do souřadnicového formalizmu. S bádáním nad touto otázkou začneme následující větou.

Věta 18 *Dva tenzory náležející do stejného tečného prostoru variety jsou si rovny, právě když mají ve stejné bázi všechny souřadnice stejné.*

Důkaz 18 Z multilinearity tenzorového zobrazení získáváme, že se jedná o nutnou i dostačující podmínku, aby šlo o identická zobrazení.

Q.E.D.

Úmluva: Pro jednoduchost zápisu budeme metriku $\varphi^* g$ označovat jako g'

Z předchozí Věty tedy vyplývá, že

$$g = g' \Leftrightarrow g(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = g'(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b),\ \forall a, b \in \{1, 2, ..., n\},$$

kde n je dimenze tečného prostoru variety.

Z Věty 16 však lehce dovodíme, že pokud na tenzorové pole g' zapůsobíme kotečným zobrazením $(\varphi^{-1})^*$ a současně zapůsobíme zobrazením φ na body variety, čímž transformujeme souřadnicové linie x^a na $\varphi(x^a) = (x')^a$ a tím i pole tečných vektorů $\mathbf{e}^a$ na $\varphi_* \mathbf{e}^a = (\mathbf{e}')^a$, jak jsme ukázali v Lemma 4, souřadnice nového tenzoru v nových souřadnicích budou odpovídat starým souřadnicím starého tenzoru. Pro náš případ to vystihuje symbolický zápis: $g((\mathbf{e}')^a, (\mathbf{e}')^b) = g'(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b)$ $\forall a, b \in \{1, 2, ..., n\}$.

Když výsledky posledních dvou odstavců zužitkujeme, dostaneme následující ekvivalenci $g = g' \Leftrightarrow g(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = g((\mathbf{e}')^a, (\mathbf{e}')^b)$. Slovy řečeno, přechod mezi mapami μ a μ' indukuje izometrii φ, právě když souřadnice tenzorů metrického tenzorového pole g jsou v souřadnicích daných mapou μ stejné, jako v souřadnicích daných mapou μ'.

Na závěr nutno říci, že náš postup by měl být však ještě obecnější, a pracovat s přechody mezi atlasy a nikoli mapami. Důvod je ten, že na varietě nemusí existovat globální souřadnice. Rozšíření o tento prvek by však principiálně přineslo stejnou úvahovou mašinérii.

Po delších teoretických toulkách, které nám přinesly efektivní rozhodovací princip, zda-li je diffeomorfizmus izometrií, zkusme nahlédnout pod pokličku hledání symetrií pro konkrétní metriky.

Obecné řešení Nastiňme nejprve všeobecný, avšak komplikovaný způsob, jak hledat izometrická zobrazení. Použijeme k tomu nástroje, které jsme doposud nalezli. Pro hladší postup si vězměme konkrétní metrický tenzor, na němž budeme postup demonstrovat. Pro začátek je nejlepší uvažovat Euklidovskou metriku na dvojdimenzionální Eulidově prostoru. Tato metrika v dobře zvolených souřadnicích nabývá velmi jednoduchého tvaru: $\mathrm{g} = \mathrm{d}x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\mathrm{d}y$. Uvažujme nyní novou soustavu souřadnic (x', y'), která je svázána s původní soustavou vztahy $x' = \alpha(x, y)$, $y' = \beta(x, y)$. Aby tento souřadný přechod indukoval izometrii, musí platit, že metrický tenzor lze v souřadnicích zapsat také takto: $\mathrm{g} = \mathrm{d}x'\mathrm{d}x' + \mathrm{d}y'\mathrm{d}y'$. Souřadnicový přechod však jasně určuje tvar g v nových souřadnicích. Napočítáním inverzní Jacobiho matice (diferenciál je kovektor) získáváme pro diferenciály vztahy:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x' &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\mathrm{d}y\,,\\
\mathrm{d}y' &= \frac{\partial \beta}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \beta}{\partial y}\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Obdobně získáme i přepočet mezi diferenciály druhého řádu. Po rutinním výpočtu dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x'\mathrm{d}x' &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}x + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \; + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \; + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}y\,,\\
\mathrm{d}y'\mathrm{d}y' &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}x + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \; + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial \beta}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x \; + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

Tento rozpis nám už jasně ukazuje, jaké jsou kladeny na souřadnicový přechod podmínky, aby příslušné indukované zobrazení byla izometrie. Jmenovitě to jsou tyto rovnice:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 &= 1\,,\\
\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 &= 1\,,\\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Vidíme, že i v takto jednoduchém modelovém příkladu jsme dospěli k soustavě nelineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu, jejichž řešení je často velmi komplikované, a v práci se jím dále zabývat nebudeme. V našem případě je otázkou dosazení ověřit, že možnou podmnožinou řešení našeho případu je $\alpha(x,y) = \cos(\vartheta)x - \sin(\vartheta)y$, $\beta(x,y) = \sin(\vartheta)x + \cos(\vartheta)y$, pro libovolně zvolené $\vartheta \in (0, 2\pi)$. Důležité na tomto příkladu je, uvědomit si, že díky faktu, že se izometrie sdružují do grup (důkaz na dva řádky), musí se do grupových struktur sdružovat i řešení takových soustav parciálních diferenciálních rovnic. Jmenovaná podmnožina grupy izometrií Euklidovy metriky je shodou okolností též grupa (s operací sčítání argumentů), konkrétně izomorfní s grupou rotací $SO(2)$.

Řešení úvahou Pro některé konkrétní případy je lepší ryze výpočetní stránku hledání symetrií zjednodušit redukcí možných kandidátů na řešení. Pro příkladnost nám poslouží Lorentzovská metrika $\mathrm{g} = \mathrm{d}x\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\mathrm{d}y$ (*pozn. její signatura je* $(1,-1)$*, proto ji neřadíme mezi Riemannovské metriky*). Ve stejném duchu jako výše se budeme snažit najít souřadnicový přechod, který by nezměnil souřadnice metriky. Jak ale (ne)může vypadat nový souřadný systém, aby se souřadnice nezměnily? Kruciálním pozorováním je, že pokud nebude souřadnicový přechod dán jako afinní transformace, téměř nutně (existuje šance, že by se nekonstatní výrazy poodečetli?) již začnou souřadnice metriky v nové souřadné soustavě záviset na hodnotách souřadných funkcí, což je pro nás očividně nežádoucí. My se navíc zúžíme na čistě lineární transformace (v obecnosti bychom takto úzkoprse nepostupovali, ale pro účely příkladu si s tímto vystačíme). Proto budeme naši transformaci hledat ve tvaru $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ pro nějaké $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Analogickým napočítáním rozkladu nové báze diferenciálů druhého řádu do staré báze a následným porovnáním s požadavkem na tvar metriky v nových souřadnicích, dospějeme k této soustavě:

$$\begin{aligned}
a^2 - c^2 &= 1\,,\\
b^2 - d^2 &= -1\,,\\
ab - cd &= 0\,.
\end{aligned}$$

Na první pohled mnohem příjemnější soustava rovnic než v předchozím příkladě. Po „chytré“ substituci $c = \sinh(\vartheta)$, která je BÚNO, jelikož má funkce $\sinh(\vartheta)$ stejný obor hodnot jako ϑ, soustavu hravě dořešíme a dostáváme balíčky řešení: $\{a = \cosh(\vartheta),\ b = \sinh(\vartheta),\ d = \cosh(\vartheta)\}$, $\{a = -\cosh(\vartheta),\ b = \sinh(\vartheta),\ d = -\cosh(\vartheta)\}$, $\{a = \cosh(\vartheta),\ b = -\sinh(\vartheta),\ d = -\cosh(\vartheta)\}$,

$\{a = -\cosh(\vartheta),\ b = -\sinh(\vartheta),\ d = \cosh(\vartheta)\}\ \forall\vartheta \in (0, 2\pi)$. Množinou lineárních transformací souřadnicových funkcí, které ponechávají souřadnice Lorentzovy metriky, je grupa výše uvedených transformací, která je izomorfní s grupou $SO(1,1) \times V_4$, kde $SO(1,1)$ je speciální Lorentzova grupa vlastních a ortochronních transformací na dvoudimenzionálním prostoru (*pozn. která je Lieovou grupou*) a V_4 je Kleinova grupa (*pozn. konečná grupa o čtyřech prvcích*). Tato grupa, zejména její komponenta jedničky, tedy grupa izomorfní grupě $SO(1,1)$, významným způsobem vymezuje kinematiku i dynamiku ve speciální teorii relativity. Pro úplnost, jako čestní obyvatelé čtyřdimenzionálního světa, bychom měli dodat, že tuto úlohu spíše plní její „nadgrupa“ $SO(3,1)$.

Už jsme poznali, jak k zadané geometrii můžeme připsat příslušnou grupu geometrických symetrií. Cílem této práce však není rozvíjet tento přístup. Naší snahou bude porozumět velmi vznešené myšlence, pocházející od německého matematika Felixe Kleina (25. Duben 1849 – 22. Červen 1925), který v rámci svého *Erlangenského programu* hlásal, že geometrie by se měly přisuzovat symetriím, nikoli opačně. Klasifikace geometrie by pak vycházela z klasifikace příslušné symetrie. Jak jsme již ukázali, když máme zadanou geometrii, může být matematicky komplikované, avšak vždy přímočaré a robustní, nacházet její symetrie. Ale jak z grupy symetrie zkonstruovat prostor s geometrií? Na to se pokusíme najít odpověď v další části práce.

Definice 48 *Homogenní prostor* je dvojice (M, g), kde M je varieta a g je metrika, k níž existuje souvislá Lieova grupa G, která má na M tranzitivní izometrickou akci.

Poznámka: Pokud je metrika navíc Riemannova, homogenní prostor nazýváme Riemannův.

Definice 49 Mějme topologický prostor $(X, \mathcal{T}_X)$, kde $\mathcal{T}_X$ je topologie na množině X. Dále uvažujme relaci ekvivalence $\simeq$ na množině X a faktorovou množinu Y, jakožto množinu tříd ekvivalence na množině X. Dále uvažujme zobrazení $\mathcal{Q} : X \to Y$, které definujeme formulí $\mathcal{Q}(x) = [x]$, kde $[x] = \{a \in X \mid a \simeq x\}$. Pak *topologií na faktorovém prostoru* $\mathcal{T}_Y$ nazvu takovou topologii na Y, indukovanou relací ekvivalence $\simeq$ na X, kterou definuji jako $\mathcal{T}_Y = \{U \subseteq Y \mid \mathcal{Q}^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$.

Věta 19 *Mějme homogenní prostor (M, g) a souvislou Lieovu grupu, která prostřednictvím své akce r na tomto prostoru operuje tranzitivně a izometricky. Označme ji G. Vyberme si libovolný bod $m \in M$. Nechť $H \in G$ je stabilizátor bodu m. Uvažujme faktorovou množinu G/H kde H má na G akci grupového „násobení“ $\circ$ přirozeně definovaného na grupě G. Relaci ekvivalence pak definujeme podmínkou $a \simeq b \Leftrightarrow \exists h \in H : h \circ a = b$, kde $a, b \in G$. Tvrdíme, že množina G/H má strukturu diferencovatelné variety.*

Důkaz 19 Důkaz je komplikovaný, informace důležité k jeho sepsání lze čerpat z [2]

Q.E.D.

Věta 20 *Nechť M a G/H označují stejné pojmy, jak byly zavedeny ve Větě 19. Tvrdíme, že M a G/H jsou diffeomorfní.*

Důkaz 20 Důkaz je složitý, proto jej v jeho celé nádheře v práci uvádět nebudeme. Viz. [2]

Q.E.D.

Abychom však nezůstali příliš dlužni, pokusíme se o důkaz „lite“ verze výše uvedeného tvrzení.

Věta 21 *Nechť M a G/H označují stejné pojmy, jak byly zavedeny ve Větě 19. Tvrdíme, že mezi těmito prostory existuje bijektivní zobrazení.*

Důkaz 21 Důkaz bude komponovaný ze dvou částí. První na řadě je důležité lemma.

Lemma 6 *Nechť r je akce G na M, pak platí, že $\forall m \in M\ \exists \varphi : \mathcal{O}_m \to G/G_m$, kde zobrazení φ je bijekce mezi orbitou prvku m a faktorovou množinou G/G_m, kde G_m je stabilizátor bodu m.*

Důkaz lemma 6 Vezměme si libovolné $m \in M$, které bude po zbytek důkazu fixní. Nyní sestrojme zobrazení $\widetilde{\varphi} : \mathcal{O}_m \to G/G_m$, takové, pro něž platí $\widetilde{\varphi}(n) = [g]$, právě když $g^{-1} \cdot m = n$. Jen pro připomenutí, $[g] \equiv \{\alpha \in G \mid \exists h \in G_m : h \circ g = \alpha\}$. Další potup bude obsahovat několik nezávislých částí.

1. Musíme ukázat, že konstrukce zobrazení je korektní, tedy že definované zobrazení je jednoznačné. Pro další práci bude pohodlnější provést symbolickou záměnu $g \leftrightarrow g^{-1}$, která způsobí změnu, konkrétně budeme psát $\varphi(n) = [g^{-1}]$, kde $g \circ m = n$. Nyní si vybereme dva možné prvky g_1, g_2 z G, pro něž platí $g_1 \cdot m = n$, $g_2 \cdot m = n$. Naším úkolem je ukázat, že generují stejnou třídu ekvivalence, tedy, že $[g_1^{-1}] = [g_2^{-1}]$ ve smyslu rovnosti množin. Z rovností $g_1 \cdot m = n = g_2 \cdot m$ jednoduše získáme $(g_2^{-1} \circ g_1) \cdot m = m$, což jasně implikuje, že $(g_2^{-1} \circ g_1) \in G_m$. Aby si byly množiny rovny, tedy aby platilo $[g_1^{-1}] = [g_2^{-1}]$, musí být splněny tyto dva požadavky:

   - $\forall h \in G_m\ \exists k \in G_m : h \circ g_1^{-1} = k \circ g_2^{-1}$
   - $\forall k \in G_m\ \exists h \in G_m : h \circ g_1^{-1} = k \circ g_2^{-1}$

   Ze symetričnosti stačí ověřit splnění prvního požadavku. Existenci $k \in G_m$ dokážeme konstrukcí. $h \circ g_1^{-1} = k \circ g_2^{-1} \Leftrightarrow k^{-1} \circ h \in G_m$. Celkem tedy $k = h \circ g_1^{-1} \circ g_2 \in G_m$.

2. Zobrazení $\widetilde{\varphi}$ je injektivní (prosté). BÚNO předpokládejme, že $\varphi(n_1) = [g_1^{-1}]$, $\varphi(n_2) = [g_2^{-1}]$. Musíme ukázat, že $n_1 \neq n_2 \Rightarrow [g_1^{-1}] \neq [g_2^{-1}]$. Implikaci „znegujeme“ čímž dostaneme $[g_1^{-1}] = [g_2^{-1}] \Rightarrow n_1 = n_2$. Nyní je tedy naším předpokladem, že $[g_1^{-1}] = [g_2^{-1}]$, což znamená, že $g_1^{-1} \simeq g_2^{-1}$, neboli $\exists h \in G_m : h \circ g_1^{-1} = g_2^{-1}$. Chceme ukázat, že tento důsledek již nutně vede k rovnosti $n_1 = n_2$, kde $g_1 \cdot m = n_1$, $g_2 \cdot m = n_2$. Chceme tedy ukázat, že $g_1 \cdot m = g_2 \cdot m$. Jelikož $h \circ g_1^{-1} = g_2^{-1} \Leftrightarrow g_2 = g_1 \circ h^{-1}$, tak $g_1 \cdot m = g_2 \cdot m \Leftrightarrow g_1 \cdot m = (g_1 \circ h^{-1}) \cdot m = g_1 \cdot (h^{-1} \cdot m) = g_1 \cdot m$, což je splněno vždy.

3. Zobrazení $\widetilde{\varphi}$ je surjektivní („na“). Vraťme naši symbolickou záměnu $g \leftrightarrow g^{-1}$ nazpět, už se nám hodit nebude. Chceme dokázat, že $\forall g \in G\ \exists n : \widetilde{\varphi}(n) = [g]$. Existence bude dokázána konstrukcí. Vezměme $\tilde{n} := g^{-1} \cdot m$. Tvrdíme, že $\tilde{n}$ je hledané n, tedy že $\widetilde{\varphi}(\tilde{n}) = [g]$. Dle definice $\widetilde{\varphi}$, k $\tilde{n}$ najdeme prvek $\tilde{g} \in G$, takový, aby $\tilde{n} = \tilde{g}^{-1} \cdot m$. Díky definici $\tilde{n}$ však okamžitě vidíme, že $\tilde{g} = g$, čili $\widetilde{\varphi}(\tilde{n}) = [\tilde{g}] = [g]$.

Z těchto tří bodů jsme tedy získali, že $\widetilde{\varphi}$ je zobrazení, které je injektivní a surjektivní. Čímž to pádem je bijektivní, a proto odpovídá hledanému zobrazení φ.

Q.E.D.

K důkazu Věty 21 zbývá poslední krok, a to dokázat v pořadí druhé lemma.

Lemma 7 *Pokud grupa G působí tranzitivně na množinu M, pak $\forall m \in M$ je $\mathcal{O}_m = M$.*

Důkaz lemma 7 Díky tranzitivitě máme, že $\forall m, n \in M\ \exists g \in G : \ g \cdot m = n$ a tedy při fixním m máme, že $\forall n \in M : \ \exists g \in G : g \cdot m = n$, čili pro libovolný prvek náležící do M platí, že náleží také do $\mathcal{O}_m$. Opačná množinová inkluze plyne rovnou z definice orbity.

Q.E.D.

V prvním lemma důkazu této věty jsme našli bijekci $\varphi : \mathcal{O}_m \to G/G_m$ pro libovolně zvolený prvek $m \in M$. Ve druhém lemma důkazu jsme ověřili, že pokud je akce grupy G na množině M tranzitivní, automaticky to znamená, že pro libovolně zvolený prvek $m \in M$ je jeho orbita $\mathcal{O}_m$ celá množina M. Syntézou těchto poznatků uzavřeme, že jsme zkonstruovali zobrazení φ splňující všechna kritéria na zobrazení, o jehož existenci se Věta 21 vyjadřuje, čímž jsme tedy potvrdili jeho existenci.

Q.E.D.

Z již dokázané nezávislosti předešlého tvrzení na volbě $m \in M$ je na spadnutí následující tvrzení.

Věta 22 *Mějme množinu M a grupu G, která na této množině operuje tranzitivně. Vyberme si libovolné dva prvky $m, n \in M$ a pro ně najděme příslušné stabilizátory G_m, G_n. Tvrdíme, že stabilizátory jsou izomorfní.*

Tomu však předchází kraťoučké lemma.

Lemma 8 *Nechť máme množinu M a grupu G, která má na množině akci r. Nechť $m, n \in M$. Pokud platí, že $g \cdot m = n$, kde $g \in G$, pak též platí $g^{-1} \cdot n = m$.*

Důkaz lemma 8 Předpokládejme, že platí $n = g \cdot m$. Na obě strany rovnice zapůsobme inverzním prvkem ke g, tedy g^{-1}. Dostáváme následující: $g^{-1} \cdot n = g^{-1} \cdot (g \cdot m) = (g^{-1} \circ g) \cdot m = m$.

Q.E.D.

Důkaz 22 Již tradičně ze začátku zvolme libovolně ale fixně dvojici bodů m, $n \in M$, a pro tuto volbu připišme příslušné stabilizátory těchto bodů, tedy $G_m,\ G_n$. Protože je akce grupy na množině tranzitivní, lze najít takové $g \in G :$ $: g \cdot m = n$, ponechejme pro takový prvek G označení g. Uvažujme zobrazení $\mathcal{J} : G_m \to G$, jehož působení budeme definovat jako $\mathcal{J}(g_m) = g \circ g_m \circ g^{-1}$. Nyní ukážeme, že zobrazení $\mathcal{J}$ je izomorfizmus grup G_m a G_n. Nejprve však, že jde o bijekci:

1. Jedná se o zobrazení do G_n. Zvolme tedy libovolně $g_m \in G_m$ a ukažme, že $\mathcal{J}(g_m) = g \circ g_m \circ g^{-1} \in G_n$. Čili, akce $g \circ g_m \circ g^{-1}$ na n musí vyjít jako identita. Pišme: $(g \circ g_m \circ g^{-1}) \cdot n = (g \circ g_m) \cdot (g^{-1} \cdot n) = (g \circ g_m) \cdot m =$ $= g \cdot (g_m \cdot m) = g \cdot m = n$.

2. Zobrazení $\mathcal{J}$ je prosté. Předpokládejme $g_m, h_m \in G_m$ taková, že $g_m \neq h_m$. Pro spor předpokládejme, že
$$\exists j \in G_n : g \circ g_m \circ g^{-1} = j = g \circ h_m \circ g^{-1}\,.$$
Z těchto rovnic dostáváme, že $g_m = g^{-1} \circ j \circ g = h_m$, což je spor s předpokladem.

3. Zobrazení $\mathcal{J}$ je „na“. Neboli tvrdíme, že každý prvek v G_n najde svůj vzor v G_m. Ukážeme, že $\forall j \in G_n$ je tento vzor dán předpisem $g^{-1} \circ j \circ g \in G_m$. Napřed však musíme ukázat, že skutečně $g^{-1} \circ j \circ g \in G_m$. Pišme:
$$\begin{aligned}\left(g^{-1} \circ j \circ g\right) \cdot m &= \left(g^{-1} \circ j\right) \cdot (g \cdot m) = \left(g^{-1} \circ j\right) \cdot n \\ &= g^{-1} \cdot (j \cdot n) = g^{-1} \cdot n \\ &= m\,.\end{aligned}$$
A nyní, že jde skutečně o vzor. Pišme:
$$g \circ \left(g^{-1} \circ j \circ g\right) \circ g^{-1} = \left(g \circ g^{-1}\right) \circ j \circ \left(g \circ g^{-1}\right) = j\,.$$

V tuto chvíli máme dokázáno, že zobrazení $\mathcal{J} : G_m \to G$ je bijekce z G_m na G_n. Naším současným úkolem je ukázat, že $\mathcal{J}$ je izomorfizmus grup. Matematicky psáno, musíme ukázat, že $\forall g_m, h_m \in G_m : \mathcal{J}(g_m \circ h_m) = \mathcal{J}(g_m) \circ \mathcal{J}(h_m)$. To je však snadné, když si zobrazení $\mathcal{J}$ rozepíšeme podle jeho definice. Rozepišme takto pravou stranu dokazované rovnosti. Máme:
$$\begin{aligned}\left(g \circ g_m \circ g^{-1}\right) \circ \left(g \circ h_m \circ g^{-1}\right) &= (g \circ g_m) \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ \left(h_m \circ g^{-1}\right) \\ &= g \circ (g_m \circ h_m) \circ g^{-1}\,.\end{aligned}$$
V tuto chvíli se lze snadno přesvědčit, že jsme obdrželi stejný výraz, jako bychom získali při rozpisu levé strany dokazované rovnosti.

Q.E.D.

Inspirováni definicí faktorové množiny a výsledkem, který nám říká, že jde o množinu tříd ekvivalence, zkusme blíže rozebrat, jakou množinu tříd ekvivalence přestavuje G/H. Vezmeme-li si libovolný bod $g \in G$, určitě každý prvek z G, zapsaný jako $h \circ g$, bude náležet do stejné třídy ekvivalence. Zaveďme proto symbol Hg_a, kterým budeme označovat množinu $\{h \circ g_a | \; h \in H\}$, tedy množinu všech prvků ekvivalentních s prvkem g_a. Z naší definice ekvivalence lze jednoduše rozpoznat, že žádné další prvky ekvivalentní s g_a existovat nemohou. Na základě této úvahy vystavějme množinu $\mathcal{A} = \{Hg_a \mid g_a \in A\}$, kde $A = \{g_a \in G \mid \forall g_b, g_c \in A : g_b \neq g_c \Rightarrow Hg_b \cap Hg_c = \emptyset \}$. Stojí za drobný komentář, že množina $\mathcal{A}$ splývá s G/H. První, co nás praští do očí je, že množina A není dána jednoznačně. To nám ale nevadí, rozmyslíme-li si, že konkrétní volba A neovlivní množinu $\mathcal{A}$. Důvod je ten, že A představuje maximální soubor neekvivalentních prvků z G, takže když dostaneme konkrétní podobu množiny A, máme jediný stupeň volnosti, a to libovolný prvek z A vyměnit za jiný prvek, který je s ním ekvivalentní, jinak se tato vlastnost množiny naruší. Co už víme, je, že množina $\mathcal{A}$ představuje skupinu disjunktních množin, které obsahují největší možný počet prvků z G, které jsou ekvivalentní. Co nás ještě dělí od závěru, že $\mathcal{A} \sim G/H$? Musíme dodat, proč nenastane případ $\mathcal{A} \subset G/H$. Řekněme, že existuje nějaká třída ekvivalence v G/H, která není obsažena v $\mathcal{A}$. Zvolme libovolný prvek z této třídy. Tento prvek musí být neekvivalentní se všemi prvky množiny A. To je ale nemožné, protože A je maximální množina neekvivalentních prvků. Takže v A jistě najdeme tento prvek nebo jiný prvek, který je s ním ekvivalentní. Libovolný z uvažovaných prvků však vytváří v $\mathcal{A}$ takovou množinu ekvivalence, o níž jsme na začátku předpokládali, že v $\mathcal{A}$ neexistuje. A to je očividně spor.

Díky tomu, že $\mathcal{A} \sim G/H$ a zároveň $G/H \simeq M$, můžeme očekávat existenci bijekce mezi $\mathcal{A}$ a M. Tato bijekce by mohla být dána jako mapa $Hg_a \mapsto n$, kde $g_a^{-1} \cdot m = n$ a m je libovolně zvolený prvek z M. Toto tvrzení není triviální, ale samozřejmě je dokazovat nebudeme, když si uvědomíme, že $[g_a] \equiv Hg_a$, a pro $[g_a]$ jsme tento výrok dokázali ve Větě 21.

Od této chvíle tedy budeme mít na paměti, že množina $\mathcal{A}$ je jen explicitnější zápis pro G/H.

Tato analýza struktury faktorové množiny G/H se bude hodit v následujícím momentě, kdy budeme nacházet převodní schéma mezi akcí grupy G na množině M a zobrazením na množině $\mathcal{A}$. Tuto pasáž můžeme chápat jako první praktické využití zavedení $\simeq$ mezi varietou M homogenního prostoru a faktorovou množinou G/H (*pozn. faktorové množině, která je tvaru „grupa/grupa“ se též říká faktorová grupa, ačkoli na této množině grupová struktura být nemusí*). Pro pohodlí zůstaneme u identifikce prvků M v $\mathcal{A}$, která je daná jako $Hg_a \mapsto n$, kde $g_a^{-1} \cdot m = n$ (samozřejmě libovolná bijekce prvků na množině M nebo na množině $\mathcal{A}$ sice způsobí změnu zobrazení mezi těmito množinami, avšak ponechává bijektivnost takových zobrazení). S touto identifikací již lehce nahlédneme, jak lze akce prvku $k \in G$ na M přepsat na akci tohoto prvku na $\mathcal{A}$. Zvolme libovolný prvek $n \in M$ a na tento prvek zapůsobme prvkem k grupy G dle definované akce. Na druhé straně najděme takový prvek g, pro který $g^{-1} \cdot m = n$. Odtud zjišťujeme, že podle naší identifikace můžeme prvek n reprezentovat jako $Hg \in \mathcal{A}$. V rámci této reprezentace prvku opět zapůsobme prvkem $k \in G$. Tuto akci napíšeme jako $k \cdot n = k \cdot (g^{-1} \cdot m) = (k \circ g^{-1}) \cdot m$. Dostaneme jiný prvek z M a je přirozené ptáti se, jakou bude mít reprezentaci v $\mathcal{A}$. Podle našeho pravidla bude reprezentován třídou Hr, kde $r \in G$, pro který $r^{-1} \cdot m = (k \circ g^{-1}) \cdot m$. Z toho dovozujeme, že $r^{-1} = k \circ g^{-1}$, tedy, že $r = g \circ k^{-1}$. Z výsledku vidíme, že prvek $k \cdot n$ lze reprezentovat třídou $H(g \circ k^{-1})$. Z čehož plyne závěr, že akce prvků grupy G na množině M je ekvivalentní působení inverzních prvků na třídy ekvivalence zprava, symbolicky $k \cdot M \Leftrightarrow (G \circ k^{-1})/H$.

Nyní jsme připraveni definovat *Kleinovu geometrii.*

Definice 50 *Kleinova geometrie* je dvojice (G, H), kde G je Lieova grupa a $H \subset G$ je uzavřená Lieova podgrupa, taková, že faktorová množina G/H, zvaná *prostor Kleinovy geometrie*, s indukovanou faktorovou topologií, je souvislá. Pak G nazveme *hlavní grupu Kleinovy geometrie. Jádro K* Kleinovy geometrie je největší podgrupa H, taková, že $K \lhd G$.

Poznámka: Když topologická grupa G operuje na Hausdorffově topologickém prostoru X, pak stabilizátor G_x libovolného prvku $x \in X$ je uzavřená podgrupa G. S uvážením tohoto (nedokazovaného) tvrzení spatřujeme, že podmínky na dvojici G, H, jmenované ve Větě 19, vymezují speciální případ Kleinovy geometrie. Splnění podmínky na souvislost grupy G zajišťuje, aby množina G/H s topologií byla geometricky orientovatelná Pokud je grupa G kompaktní, je pak kompaktní i příslušná faktorová množina G/H.

Věta 23 *Mějme Kleinovu geometrii (G, H), jak byla definována výše. Akce grupy G na prostoru G/H nechť je dána působením inverzí na prostor podílových tříd zprava. Akce G na G/H je efektivní, pokud je jádro K Kleinovy geometrie triviální grupa.*

Důkaz 23 Viz. [5]

Věta 24 *Mějme grupu G a její normální podgrupu K. Pak množina G/K má strukturu grupy.*

Důkaz 24 *Viz. [7]*

Definice 51 *Nechť (G, H) je Kleinova geometrie a K označuje jádro Kleinovy geometrie. Pak dvojici $(G/K, H/K)$ říkáme asociovaná efektivní Kleinova geometrie.*

Věta 25 *Asociovaná efektivní Kleinova geometrie $(G/K, H/K)$ je efektivní, neboli prvky G/K mají efektivní akci na H/K.*

Důkaz 25 Viz. [5].

Uvažme Kleinovu geometrii (G, H), společně s prostorem Kleinovy geometrie G/H. Není nezajímavé, že na této trojici můžeme zavést strukturu fibrovaného prostoru. Zavedením zobrazení $\pi : G \to G/H$ předpisem $\pi(g) = Hg \ \forall g \in G$ získáváme kanonickým způsobem projekční operátor. Navíc lze ukázat [4] že pokud G je libovolná topologická grupa a H je její uzavřená podgrupa, vždy existuje lokální trivializace prostoru G, tedy lokální homeomorfizmus $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times H \ \forall \alpha \in J$, kde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ je otevřené pokrytí G/H, jak bylo obecně definováno v Definici 28. Grupě G pak říkáme hlavní H bundle.

Další rozvíjení teoretického pozadí konceptu homogenních prostorů z čistě algebraicko-topologického pohledu dává prostor rozsáhlým pojednáním, která se však odchylují od cíle našeho povídání, připravit v rámci této teorie půdu pro aplikace v teoretické mechanice, hlavní náplň druhé kapitoly.

Jako motivaci pro zkoumání homogenních prostorů si nyní uvedeme několik konkrétních příkladů homogenních prostorů.

- $\mathbb{E}^n = SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n / SO(n)$, kde $\mathbb{E}^n$ je n-dimenzionální Euklidův prostor, na němž působí grupa $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n$ tranzitivně a izometricky. Tranzitivita byla v předešlé podkapitole práce dokázána, izometrie byla dokázána pro případ $n = 2$, až na „triviální“ translační část akce. Grupa $SO(n)$ je izomorfní stabilizátoru libovolného prvku Euklidova prostoru, jak bylo též v práci ukázáno.

  Další více i méně intuitivní příklady již uvádíme bez důkazu.

- $S^n = O(n+1)/O(n)$, kde S^n je n-dimenzionální sféra s Levi-Civitovou konexí a $O(n)$ je ortogonální grupa transformací n-dimenzionálního vektorového prostoru, která zachová skalární součin daný pozitivně definitní bilineární formou.

- $H(n) = (O(n, 1)/O(1))/(O(1) \times O(n))$, kde $H(n)$ je hyperbolická n-dimenzionální nadplocha a $O(n, 1)$ je grupa transformací $n + 1$ dimenzionálního vektorového prostoru, která zachová skalární součin daný semi-definitní bilineární formou se signaturou $(-1, \underbrace{1, 1, ..., 1}_{\text{n}})$.

- $\mathbb{L}^{n+1} = SO(n, 1) \rtimes \mathbb{R}^{n+1}/SO(n, 1)$, kde $\mathbb{L}^{n+1}$ je $n + 1$ dimenzionální Lorentzovský prostor, který je vystavěn velmi analogicky prostoru Euklidovu. Množina všech izometrií je v tomto případě grupa $SO(n, 1) \rtimes \mathbb{R}^{n+1}$, nazývaná jako *Poincarého grupa.*

  Dále zkusme uvést několik exotičtějších příkladů:

- $V_k(\mathbb{R}^n) = O(n)/O(n-k), V_k(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(n-k), V_k(\mathbb{H}^n) = Sp(n)/Sp(n-k)$, což je skupina tzv. Stiefelových variet, což jsou množiny všech ortonormálních systémů, uspořádaných k-tic lineárně nezávislých vektorů vektorového prostoru nad příslušným tělesem $(\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H})$ s dimenzí n, kde nutně $n \geq k$. Pro upřesnění, $U(n)$ je grupa, jejíž realizací může být množina unitárních matic nad (komplexním) Hilbertovým prostorem s operací maticového násobení. Grupa $Sp(n)$ je symplektická grupa, jejíž realizací může být množina invertibilních matic nad tělesem kvaternionů $\mathbb{H}$, která zachovává standardní skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbb{H}^n$. Grupovou operací je opět maticové násobení.

- $\mathbf{Gr}(r,n) = O(n)/(O(r) \times O(n-r))$, kde $\mathbf{Gr}(r,n)$ je tzv. Grassmanian, tedy prostor všech r-dimenzionálních lineárních podprostorů n-dimenzionálního vektorového prostoru, jenž je vybaven skalárním součinem. V případě nižších dimenzí je lehké představit si souvislost s projektivními prostory. Například $\mathbf{Gr}(2,3) \simeq \mathbf{P}^2$, kde $\mathbf{P}^2$ je soustava projektivních rovin. Nejjednodušší příklad Grassmanianu, který není izomorfní s žádným projektivním prostorem, je $\mathbf{Gr}(2,4)$.

- $\mathbf{PO}(n) = O(n)/C_2$, což je ortogonální projektivní prostor nad vektorovým prostorem V, vybaveným standardním skalárním součinem, a C_2 je cyklická grupa, izomorfní grupě všech ortogonálních skalárních transformací na vektorovém prostoru V dimenze n. Třídy ekvivalence zavedené stabilizátorem C_2 pak dávají dobrý smysl slovu projektivní, jelikož ztotožňují prvky V, které se liší o multiplikativní konstantu z tělesa.

Nyní již máme trochu jasnější představu o obrysech konceptu homogenních prostorů, ve speciálních případech již dovedeme ke grupě symetrií asociovat příslušnou varietu, ale přeci jen ještě neumíme zrekonstruovat informaci o geometrii celou. Zatím jsme totiž nerozebírali, jak získat důležitou ingredienci každé geometrie, a tím je její metrika.

Konvenční přístup nacházení metriky na homogenním prostoru bude jenom nastíněn, jelikož pro explicitní nalezení metriky představíme postup jiný.

Poznámka: K tomu budeme potřebovat vycházet ze základních pojmů Lieových algeber Lieových grup, které v této práci zavádět nebudeme a odkážeme se na [7]

Definice 52 Uvažujme Kleinovu geometrii (G, H). Dvojici $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ nazveme *Kleinův pár*, pokud $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra Lieovy grupy G a $\mathfrak{h}$ je Lieova algebra Lieovy grupy H.

Věta 26 *Algebra $\mathfrak{h}$ je podalgebrou $\mathfrak{g}$.*

Důkaz 26 *Viz. [5]*

Věta 27 *Faktorová množina $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ má strukturu vektorového prostoru.*

Důkaz 27 *Viz. [5]*

Definice 53 Uvažujme Lieovu grupu G, dále zobrazení $\psi : G \to Aut(G)$, definované předpisem $\psi(g) = \psi_g$, kde $\psi_g(h) = g \circ h \circ g^{-1}\ \forall h \in G$. *Adjungovanou reprezentaci* $Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ grupy G definujeme předpisem $Ad(g) = \mathrm{d}(\psi_g)_e$.

Jen pro doplnění, $\mathrm{d}(\psi_g)_e$ je diferenciál automorfizm, přiřazeného prvku $g \in G$ v bodě $e \in G$. Jedná se o zobrazení $\mathrm{d}(\psi_g)_e : T_eG \to T_{\psi_g(e)}(G)$. Že jde skutečně o prvek z $Aut(\mathfrak{g})$ lze očekávat díky Definici 41 a faktu, že Lieova algebra je vektorový prostor.

Definice 54 Uvažujme G, $\mathfrak{g}$, a Ad, jako výše. Pak zobrazení $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$, definované předpisem $ad(\mathfrak{g}) = \mathrm{d}(Ad)_e[\mathfrak{g}]$, se nazývá adjungovaná reprezentace Lieovy algebry Lieovy grupy G.

Věta 28 Nechť (G, H) je Kleinova geometrie a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ je Kleinův pár. Existuje jednoznačná korespondence mezi G-invariantní metrikou na G/H a skalárním součinem na prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, který je $ad_{\mathfrak{h}}$-invariantní.

Poznámka: Termínem „skalární součin na prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ je $ad_{\mathfrak{h}}$-invariantní“ míníme, že množina zobrazení $ad_{\mathfrak{h}} = \{ad_x \mid x \in \mathfrak{h}\}$ tento skalární součin nemění.

Důkaz 28 *Viz. [5]*

Nacházet $ad_{\mathfrak{h}}$-invariantní sklární součin na vektorovém prostoru $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ nebudeme, stejně jako v případě důkazu korespondence odkážeme čtenáře na [5]

Naše strategie hledání G-invariantní metriky na faktorovém prostoru G/H bude poněkud jiná. Využijeme k tomu metodu hledání invariantních ireducibilních vektorových podprostorů vektorových prostorů diferenciálních forem. Jedná se o metodu, která pracuje v souřadnicích, není tolik obecná, naproti tomu více přímočará.

Uvažujme grupu diffeomorfizmů G, která operuje na varietě M. K této grupě následně najdeme metriku g takovou, že bude grupa rázem operovat izometricky. Nižší obecnost přístupu nespočívá v užití souřadnicového formalizmu, přestože užívá konkrétních souřadnic, nicméně ty jsou na počátku zvoleny jakkoli libovolně (tak, aby příslušná mapa μ byla přípustná vzhledem k úplnému atlasu $\mathfrak{B}$). Zúžení spočívá v tom, že budeme uvažovat pouze takové diffeomorfizmy, které lze indukovat lineárními souřadnicovými transformacemi. Pak můžeme takovou grupu s výhodou přepsat do maticové reprezentace.

Na chvíli se zamyslíme, jakou má souvislost lineární transformace souřadnic s transformací souřadnic obecných diferenciálních forem a transformací souřadnic diferenciálních forem, které jsou k těmto formám v jistém smyslu příbuzné.

Věta 29 *Mějme polynom o nejvýše m proměnných, jehož každý sčítanec má součet exponentů od všech svých činitelů roven n. Prostor takových polynomů označme P_m^n. Zaveďme operátor formální záměnny:*

$$\varphi : f\Big(x^1, x^2, ..., x^m\Big) \to f\Big(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, ..., \mathrm{d}x^m\Big) \ \forall f \in P_m^n .$$

Násobení mezi diferenciály samozřejmě chápejme jako tenzorové. Dále uvažujme libovolnou lineární transformaci

$$\mathcal{L} : f\Big(x^1, x^2, ..., x^m\Big) \to f\Big(l^1(x^1, x^2, ...), l^2(x^1, x^2, ...), ..., l^n(x^1, x^2, ...)\Big) \ \forall f \in P_m^n ,$$

kde funkce $l^\alpha(x^1, x^2, ..., x^m) \in P_m^1$. Tvrdíme, že $\varphi[\mathcal{L}(f)] = \mathcal{L}(\varphi[f]) \ \forall f \in P_m^n$.

Důkaz 29 *Rozepíšeme si levou stranu rovnice dle definice zobrazení $\mathcal{L}$ a φ:*

$$\begin{aligned}
\varphi[\mathcal{L}(f)] = & \\
&= \varphi\Big[f\Big(l^1(x^1, x^2, \ldots), l^2(x^1, x^2, \ldots), \ldots, l^n(x^1, x^2, \ldots)\Big)\Big] \\
&= f\Big(\mathrm{d}l^1(x^1, x^2, \ldots), \mathrm{d}l^2(x^1, x^2, \ldots), \ldots, \mathrm{d}l^n(x^1, x^2, \ldots)\Big) \\
&= f\Big(l^1(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots), l^2(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots), \ldots, l^n(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots)\Big) \\
&= \mathcal{L}\Big(f(\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^m)\Big) \\
&= \mathcal{L}(\varphi[f])\,,\ \forall f \in P^n_m\,,
\end{aligned}$$

kde jsme u 3. rovnosti použili linearitu diferenciálu (viz. Věta 32).

Q.E.D.

Díky dokázanému tvrzení tedy víme, že pokud najdeme nějaký G-invariantní (kde $G \subseteq GL(m)$) polynom f, náležící do P^n_m, existuje k němu v 1-1 korespondenci G-invariantní forma $\varphi[f]$. O těchto dvou formách řekneme, že jsou G příbuzné. To fakticky znamená, stejně se transformující. Zobecnění tohoto tvrzení může být například modifikace operátoru $\varphi \to \widetilde{\varphi}$, taková, že

$$\widetilde{\varphi} : f(x^1, x^2, \ldots, x^m) \to f(x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^m)\,,$$

kde by se dalo velmi analogicky ukázat, že $\widetilde{\varphi}$ a $\mathcal{L}$ komutují, čímž pádem získáváme další G příbuzné formy.

Díky této větě jsme si tedy uvědomili, že najít G-invariantní formu znamená najít celou sadu takových forem. Všechny tyto formy spojují stejné transformační vlastnosti, které předepisuje akce grupy G. Z tohoto například snadno dovodíme, že žádný Levi-Civitův tenzor při libovolných lineárních transformacích souřadnic nemění svoje souřadnice, jelikož je příbuzný s nulovým polynomem.

Jelikož jsou souřadné funkce jen speciální případy našich funkcí P^n_m, tak z výše uvedeného tvrzení plynou expicitní transformační vlastnosti obecných forem. (*Poznámka: Důležité je uvědomit si, že grupa G na množině M obecně nemusí působit prostřednictvím nějaké své reprezentace, my jsme však díky ztotožnění grupy diffeomorfizmů a příslušné grupy transformací (které navíc požadujeme lineární) souřadnicových funkcí (což má strukturu vektorového prostoru) zpřístupnili možnost na tuto akci se dívat prostřednictvím reprezentace grupy na množině.*) Nechť množina $\{\mathrm{d}x^1, \mathrm{d}x^2, \ldots, \mathrm{d}x^m\}$ představuje vektorový prostor a transformace na tomto prostoru podmíněné souřadnicovými transformacemi jsou jednotlivé automorfizmy m-rozměrné (obecně reducibilní) lineární reprezentace grupy G. Linearita opět vyplývá z tvrzení. Direktním součinem těchto reprezentací získáváme multilineárně se transformující prvky tenzorového prostoru forem daného řádu. Tento prostor je pro nás ale výjimečně zajímavý, jelikož v něm přebývá potenciální kandidát na hledanou metriku. Jak jej ale najít? Pomůže nám následující věta.

Věta 30 *Mějme kompaktní Lieovu grupu G a obecně reducibilní reprezentaci Γ. Pak operátor, který projektuje vektory příslušné reprezentace Γ do invariantního* *ireducibilního lineárního podprostoru ireducibilní reprezentace ν, je dán formulí:*

$$\mathbf{P}^{\nu} = \frac{d_{\nu}}{Vol\ G} \int_{g \in G} \mathcal{X}^{\nu}(g) \Gamma(g)\, dg \ ,$$

kde d_{ν} je rozměr ireducibilní reprezentce, $Vol\, G$ míra (objem) Lieovy grupy G a $\mathcal{X}^{\nu}(g)$ charakter prvku g v (ireducibilní) reprezentaci ν.

Důkaz 30 *Viz. [7]*

Pro nás bude důležitá pouze triviální ireducibilní reprezentace, jelikož hledáme jednodimenzionální podprostory, na nichž navíc grupa transformací působí jako identita. Za těchto podmínek můžeme za $\mathcal{X}^{\nu}(g)$ a d_{ν} rovnou dosadit 1, a pomocí zkonstruovaného projektoru $\mathbf{P}^{\nu}$ zapůsobit na prvky báze ireducibilní reprezentace, čímž získáme diferenciální formy invariantní vůči působení grupy G.

„Vařit“ podle naší kuchařky si teď vyzkoušíme v praxi na osvědčeném příkladu grupy $SO(2)$.

Příklad 2 Uvažujme varietu M a mapu μ, a z ní extrahované souřadné funkce (x, y). Uvažujme grupu diffeomorfizmů, která je indukována souřadnicovými přechody, danými působením věrné reprezentace grupy $SO(2)$ na vektorovém prostoru s bází $\{x, y\}$. Díky Větě 29 víme, že stejná akce bude působit na vektorový prostor s bází $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\}$. Direktním součinem této reprezentace se sebou samotnou získáme reprezentaci na vektorovém prostoru s bází $\{\mathrm{d}x\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \mathrm{d}y\mathrm{d}x, \mathrm{d}y\mathrm{d}y\}$. V maticovém formalizmu je automorfizmus následující:

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (\cos\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\vartheta & (\sin\vartheta)^2 \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & (\cos\vartheta)^2 & (\sin\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & (\sin\vartheta)^2 & (\cos\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \\ (\sin\vartheta)^2 & \cos\vartheta\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta & (\cos\vartheta)^2 \end{pmatrix}$$

což je tedy onen automorfizmus s parametrem ϑ přiřazený reprezentací grupy $SO(2)$. Podle formulky ve Větě 30 máme:

$$\mathbf{P}^{\nu} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (\cos\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta & -\cos\vartheta\sin\vartheta & (\sin\vartheta)^2 \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & (\cos\vartheta)^2 & (\sin\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \\ \cos\vartheta\sin\vartheta & (\sin\vartheta)^2 & (\cos\vartheta)^2 & -\cos\vartheta\sin\vartheta \\ (\sin\vartheta)^2 & \cos\vartheta\sin\vartheta & \cos\vartheta\sin\vartheta & (\cos\vartheta)^2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ve výpočtu jsme užili informace, že míra grupy $SO(2)$ je stejná jako „objem“ jednotkové kružnice, tedy 2π. Po spočtení projekčního operátoru můžeme snadno ze sloupců matice odečítat tvary jednodimenzionálních invariantních podprostorů, jinými slovy diferenciální formy, které nemění svoje souřadnice při příslušných transformacích souřadných funkcí, a ještě jinými slovy, metrické tenzory, díky nimž operuje grupa $SO(2)$ izometricky. Není údivem, že mezi tyto invariantní metriky patří standardní Euklidovská metrika $\mathrm{d}x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y\mathrm{d}y$, respektive její násobky. Dále též spatřujeme, že též totálně antisymetrický tenzor (Levi-Civitův tenzor) je invariantní vůči působení grupy $SO(2)$. To ale též není velké překvapení.

Takto bychom mohli analyzovat další a další případy grupových akcí a k nim hledat invariantní tenzorová pole, ale to už jde nad rámec našeho příkladu.

Tímto příkladem symbolicky uzavíráme naše putování za odpovědí na otázku rekonstrukce geometrie na základě znalosti její grupy symetrie. Vysvětlili jsme si, jak pomocí faktorizace množin vystavět varietu homogenního prostoru, stejně jako jsme ukázali směry, jakými se vydat při hledání metriky na varietě homogenního prostoru zavedené.

Na úplný závěr této kapitoly v krátkosti představíme jedno užitečné tvrzení, které však bude mít významový přesah do druhé kapitoly. Bude se jednat o speciální orbity jednoparametrických podgrup grupy G působící na homogenním prostoru (M, g). K tomu je potřebné zavést následující pojmy.

Definice 55 Mějme Kleinovu geometrii (G, H). Homogenní prostor $(G/H, g)$ nazveme *reduktivní*, pokud existuje reduktivní dekompozice $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$, kde $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ jsou prvky Kleinova páru, a $\mathfrak{m}$ je vektorový podprostor $\mathfrak{g}$, který je Ad_H invariantní.

Poznámka: Pro reduktivní prostory existuje přirozená identifikace $\mathfrak{m} \sim \mathbf{T}_e M$*, navíc lze opět najít diffeomorfizmus* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{m}$.

Věta 31 *Uvažujme homogenní prostor* $(G/H, g)$*, kde* (G, H) *je Kleinova geometrie. Pokud* g *je Riemannova metrika, prostor* G/H *je vždy reduktivní.*

Důkaz 31 Viz. [1]

Definice 56 Homogenní prostor s Riemannovou metrikou nazvame *Riemannův homogenní prostor*. Pokud je homogenní prostor reduktivní, nazvame jej *reduktivní homogenní prostor*.

Definice 57 Nechť $(G/H, g)$ je reduktivní homogenní prostor, s reduktivním rozkladem $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. Nechť $p \in G/H$ je bod, který grupa H stabilizuje. Pokud bodem p prochází geodetika γ s paramerizací s, která zobrazuje z otevřeného intervalu $J \in \mathbb{R}$, nazveme ji *homogenní geodetika*, pokud splňuje následující

1. Existuje diffeomorfizmus $\varphi : \mathbb{R} \to J$.
2. Existuje takový vektor $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$: $\gamma(\varphi(t)) = \exp(t\mathbf{X}) \cdot \mathrm{p}\ \forall \mathrm{t} \in \mathbb{R}$.

   Pak $\mathbf{X}$ nazveme geodetický vektor.

Poznámka: Zobrazení $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *se nazývá exponenciální zobrazení a pro jeho přesnou definici nechť laskavý čtenář nahlédne do [7]*

Poznámka: Díky našemu zavedení přepisu akce grupy na varietě homogenního prostoru na čistě grupovou akci grupy na podílových třídách můžeme psát: $\exp(t\mathbf{X}) \cdot \mathrm{G/H} = (\mathrm{G} \circ \exp(-\mathrm{t}\mathbf{X}))/\mathrm{H}$.

Věta 32 *Uvažujme reduktivní homogenní prostor* $(G/H, g)$ *s dekompozicí* $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$. *Nechť* $p \in G/H$ *je bod, který grupa* H *stabilizuje, a* $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$. *Křivka* $\gamma : t \to \exp(t\mathbf{X}) \cdot \mathrm{p}$ *je geodetika právě když platí následující:*

$$\exists k \in \mathbb{R} : \langle [\mathbf{X}, \mathbf{Z}]_{\mathfrak{m}}, \mathbf{X}_{\mathfrak{m}} \rangle = k \langle \mathbf{X}_{\mathfrak{m}}, \mathbf{Z} \rangle \ \forall \mathbf{Z} \in \mathfrak{m}\,,$$

kde $\mathbf{X}_{\mathfrak{m}}$ *je projekce* $\mathbf{X} \in \mathfrak{g}$ *na prostor* $\mathfrak{m}$. *Bilineární forma* $\langle .\,, . \rangle : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$ *je* $ad_{\mathfrak{h}}$*-invariantní sklární součin na vektorovém prostoru* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{m}$.

Důkaz 32 *Viz. [1]*

2. Fyzikální aplikace

Cílem následující kapitoly bude představení použití metod využívajících prvků vybudovaného matematického aparátu první kapitoly k řešení konkrétního fyzikálního problému. Pozornost bude věnována též kritériím, která rozhodují, zda-li toto užití matematických prvků je možné. Tato kritéria však představují pouze dostačující podmínky, proto otázku možnosti použití těchto metod rezolutně neuzavírají.

2.1 Teoretická mechanika očima diferenciální geometrie

Abychom však mohli zdárně využívat techniky první kapitoly k řešení fyzikálně formulovaných problémů, musíme začít oba jazyky sjednocovat.

Definice 58 *Fyzikální systém* je dvojice $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$, kde prvek $\mathcal{M}$ označíme jako *konfigurační prostor* a prvek $\mathfrak{F}$ jako *fyzikální zákony.*

Definice 59 Konfigurační prostor $\mathcal{M}$ je varieta, neboli topologický prostor, který umožňuje zavedení diferencovatelné struktury. Tečný bundle $\mathbf{T}\mathcal{M}$ konfiguračního prostoru $\mathcal{M}$ nazveme *fázový prostor fyzikálního systému*$\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$, nebo také kratčeji jen *fázový prostor.*

Poznámka: Při této definici se zužujeme na bezčasové fíbrované struktury. Pro vyšší obecnost bychom mohli vystavět fíbrovaný prostor fázového prostoru $((\mathfrak{T}\mathbf{T}\mathcal{M}, \tau), ((\mathbf{T}\mathcal{M}, \pi), \mathcal{M}))$, *kde by však „časoprostorový“ fíbrovaný prostor* $\mathfrak{T}\mathbf{T}\mathcal{M}$ *nemusel mít součinovou topologii (jak je známo z Obecné teorie relativity), a některé později zmíněné pojmy by musely být definovány obecněji. Z důvodu této nižší obecnosti se budeme v dalším povídání omezovat na klasickou (nerelativistickou) fyziku.*

Definice 60 Konkrétní prvek $x \in \mathcal{M}$ nazveme *konfigurace fyzikálního systému* $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$.

Definice 61 Konkrétní prvek $\mathbf{a} \in \mathbf{T}\mathcal{M}$ nazveme *stav fyzikálního systému* $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$.

Poznámka: Pokud je to z kontextu jasné, již neupřesňujeme, jaký fyzikální systém máme na mysli.

Definice 62 Fyzikální zákony je zobrazení $\mathfrak{F} : \mathbf{T}\mathcal{M} \to \mathbf{U}$, kde $\mathbf{U}$ prostor křivek na konfiguračním prostoru $\mathcal{M}$. Pokud $\mathbf{a} \in \mathbf{T}\mathcal{M}$, a také $\mathfrak{F}(\mathbf{a}) = \nu$, pak nutně $\dot{\nu}[\pi(\mathbf{a})] = \mathbf{a}$. Křivce $\nu : t \to \mathcal{M}$ pak říkáme *vývoj systému*, a vektoru $\mathbf{a}$ *počáteční podmínky.*

Poznámka: Kvůli bezčasové struktuře fázového prostoru neuvažujeme ani časovou závislost fyzikálních zákonů.

Tímto jsme v krátkosti představili obecnou konstrukci klasického fyzikálního systému. Jedná se o klasickou teorii přírody, která vychází z několika premis: existují fyzikální zákony, konfigurační prostor lze modelovat jako hladkou varietu, křivky vývoje jsou vzhledem k úplnému atlasu konfiguračního prostoru hladké, pro každou sadu fyzikálních zákonů jsou křivky vývoje jednoznačně určeny volbou prvku z tečného bundleu konfigurační variety.

Při dalším rozboru fyzikálního systému, který bychom ve výsledku rádi učinili v praxi funkční, respektive prediktabilní, musíme detailněji zkoumat vlastnosti fyzikálních zákonů. O nich se vyjadřuje (mimo jiných) jeden velmi elegantní princip, který teď zmíníme.

Teorém 1 *Každému fyzikálnímu systému* $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$ *lze přiřadit zobrazení* $\mathcal{S} : \mathbf{U} \to \mathbb{R}$, *které nazýváme* ***akce****, pro něž platí následující. Nechť* ν *je libovolná křivka vývoje fyzikálního systému* $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$*, která prochází dvojicí bodů* $\{\nu(a), \nu(b)\}$ *na varietě* $\mathcal{M}$*. Pak je křivka* ν *se zúženým definičním oborem* (a, b) *zároveň extremálou zobrazení* $\mathcal{S}$ *z třídy křivek, jejichž koncové body jsou* $\{\nu(a), \nu(b)\}$*.*

Poznámka: Pokud máme křivku γ*, jejíž definiční obor je konečný otevřený interval* (a, b)*, pak koncové body této křivky budeme chápat jako body variety* $\mathcal{M}$*, které získáme takto: Ke křivce najděme „sdruženou křivku“* $\tilde{\gamma}$*, s definičním oborem* (c, d)*, takovým, že* $c < a < b < d$*, pro niž platí, že* $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)\ \forall x \in (a, b)$*. Koncové body křivky* γ *pak nazveme body* $\{\tilde{\gamma}(a), \tilde{\gamma}(b)\}$*. Důkaz, že koncové body křivky* γ *nezávisejí na volbě „sdružené křivky“ provádět nebudeme.*

Tento teorém nám dává velkou motivaci nacházet akce pro konkrétní fyzikální systémy. Bohužel, všeobecný návod, jak takové akce nacházet, není zatím znám. Pro velkou třídu fyzikálních systémů je ale možné použít notoricky známou konstrukci, která bude i v této práci posléze zmíněna. K tomu je ale zapotřebí dále zkoumat problematiku fyzikálních systémů.

V dalším postupu bude užitečné dvojici $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$ připsat dodatečnou strukturu, udávající geometrické vlastnosti konfiguračního prostoru $\mathcal{M}$. Jak uvidíme později, tato dodatečná informace nám pomůže rozlišovat mezi kinetikou a interakcemi systému. Tou esenciální informací je, jakým způsobem se liší skutečný vývoj systému od vývoje, kterým by se systém měl vyvíjet čistě na základě geometrie konfiguračního prostoru $\mathcal{M}$, která je zhotovena podle předlohy geometrie „skutečného světa“. Trochu precizněji řečeno, zavedeme na varietě $\mathcal{M}$ strukturu, která umožní rozhodovat o geodetikách. Opět se odvoláváme na první kapitolu, kde jsme si rozmysleli, že pojem geodetika lze zavést díky afinní konexi ∇. Tou opatříme i naši varietu. Trojici $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ pak pracovně nazveme *rozšířený fyzikální systém.*

Poznámka: Genialita Obecné teorie relativity spočívá, mimojiné, v tom, že nerozlišuje mezi křivkami vývoje a geodetikami předepsanými geometrií „skutečného světa“.

S odkazem na předchozí poznámku o Obecné teorii relativity nás může napadnout, jestli náhodou v našem případě také neexistuje speciální rozšíření fyzikálního systému $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$, pro které bychom geodetiky shledali právě křivkami vývoje systému. Touto otázkou se budeme v práci ještě později zabývat.

V tomto okamžiku na varietě můžeme nejen hledat geodetiky, navíc prostor můžeme přirozeným způsobem metrizovat. To díky zavedení metrického tenzoru, jak jsme též diskutovali v první kapitole. Obecně vzato, zavedení metriky není jednoznačné, jelikož si vybíráme z celé třídy topologicky ekvivalentních metrických struktur. Náš výběr bude dán podmínkou $\nabla g = 0$. Množině přípustných metrik g pak říkáme *přípustné metrizace* rozšířeného fyzikálního systému.

Jak jsme již v první kapitole poznali, občas se vyplatí pracovat v souřadnicích, proto si je též nyní vyrobíme. A to tak, že budeme požadovat, aby po volbě libovolné přípustné lokální mapy μ na $\mathcal{M}$, souřadnicové linie kopírovali geodetiky. Lépe pak psáno, že pokud mapa μ indukuje lokální souřadné linie $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, pak nutně $\nabla_{\dot{x}^a}\dot{x}^a = 0\ \forall m \in \mathcal{M},\ \forall a \in \{1, 2, \ldots, n\} = J$, kde n je dimenze konfiguračního prostoru. Takové souřadnice se nazývají *normální*. Pokud vyrobíme tečná pole k souřadným křivkám $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, jež budeme značit $\{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_{a\in J}$, přičemž $(\frac{\partial}{\partial x^a})_m$ je symbol pro tečný vektor k souřadné linii x^a v bodě m, získáme přirozeně bázi tečných prostorů variery.

Proč je tento výběr výhodný? Není obtížné nahlédnout, že je to proto, že přípustná metrizace g má v normálních souřadnicích tvar „konstantní matice" (Rozpisem do normálních souřadnic vymizí složky afinní konexe, takže kovariantní derivace působí stejně jako parciální derivace, a kovariantní derivace metriky je dle předpokladu 0). Ve většině případů je tato matice navíc diagonální, což zapíšeme způsobem: $g_m((\frac{\partial}{\partial x^a})_m, (\frac{\partial}{\partial x^b})_m) = c_a\delta^a_b\ \forall a, b \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \forall m \in \mathcal{M}$, $c_a \in \mathbb{R}\ \forall a \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde symbolem δ^a_b označujeme Kronekerovo delta. Musíme ale upozornit, že tato konstrukce, v obecném případě, diagonalitu zajišťovat nemusí. Nutnou a dostačující podmínkou pro (lokální) diagonalizaci metriky je existence báze, v níž je „matice metriky" A_g *normální*, tedy platí $A^*_g A_g = A_g A^*_g$, kde A^*_g je matice hermitovsky sdružená k A_g. Opět se odvolejme na teorii relativity, kde Kerrovo řešení Einsteinových rovnic pro rotující černou díru je metrický tenzor, který není diagonalizovatelný.

Nutno zdůraznit, že volba konkrétní přípustné metrizace g je užitečná, avšak množina symetrických nedegenerovaných 2-forem g, které lze na $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ je mnohem bohatší. Pro úplnost ještě musíme dodat, že zavedením metrického tenzoru jsme problém metrizace úplně vyřešili, jelikož jsme tak náš problém převedli na situaci, kdy dvojici $(\mathcal{M}, g)$ chceme chápat jako metrický prostor ve standardním slova smyslu. Ale to již bylo vyřešeno v předcházející kapitole.

Definice 63 Uvažujme rozšířený fyzikální systém $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ společně s přípustnou metrizací g. *Kinetickou energií* T rozšířeného fyzikálního systému $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ s metrizací g, ve stavu $\mathbf{a}$ nazveme hodnotu $T = \frac{1}{2}g(\mathbf{a}, \mathbf{a})$.

Definice 64 Řekneme, že rozšířený fyzikální systém $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ je *konzervativní*, pokud existují přípustná metrizace g a zobrazení $V : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, takové, že pro všechny křivky vývoje systému ν platí: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}g_{\nu(t)}(\dot{\nu}_{\nu(t)}, \dot{\nu}_{\nu(t)}) + V(\nu(t))) = 0$.

Definice 65 Pokud je rozšířený fyzikální systém $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ s přípustnou metrizací g konzervativní, zobrazení V nazýváme *potenciál.*

Definice 66 *Lagrangián* $\mathcal{L}$ fyzikálního systému $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}\}$ je zobrazení $\mathcal{L} : \mathbf{T}\mathcal{M} \to$ $\to \mathbb{R}$, pro která platí: $\mathcal{S}(\nu) = \int_a^b \mathcal{L}(\dot{\nu}_{\nu(t)})\,\mathrm{d}t$ pro všechny křivky vývoje systému ν s definičním oborem (a, b).

Jest jednoduchým cvičením na variování ukázat, že pokud pracujeme v „přirozených souřadnicích na tečném bundleu“(upřesněno níže) $\mathbf{T}\mathcal{M}$, tak díky Definici 66 a Teorému 1 získáváme kanonickou v souřadnicích psanou podmínku na křivku vývoje systému. V krátkosti tuto podmínku odvoďme:

V množině křivek, které mají definiční obor (a, b) a koncové body $\{A, B\}$ (označme si tuto množinu jednoduše $\{\gamma\}$) je křivka vývoje systému taková, která řeší rovnici:

$$\delta\mathcal{S}(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \delta\int_a^b \mathcal{L}(\dot{\gamma}_{\gamma(t)})\,\mathrm{d}t = 0.$$

Vezměme si nyní druhou rovnost, a zaměňme pořadí integrálního funkcionálu s variací. Pořád ještě pracujme v bezsouřadnicovém formalizmu:

$$\delta\int_a^b \mathcal{L}(\dot{\gamma}_{\gamma(t)})\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \int_a^b \delta\mathcal{L}(\dot{\gamma}_{\gamma(t)})\,\mathrm{d}t = 0.$$

Poslední rovnost si přepíšeme do přirozených souřadnic na tečném bundleu, čímž z variace funkcionálu Lagrangián učiníme variaci obyčejné funkce více proměnných (což je samozřejmě také speciální případ funkcionálu):

$$\int_a^b \delta\mathcal{L}\Big(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t), \ldots, \dot{x}^n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Provedeme variaci této funkce:

$$\int_a^b \left(\sum_{c=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^c}\delta x^c + \sum_{c=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c}\delta\dot{x}^c\right)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Jelikož pracujeme v přirozených souřadnicích na tečném bundleu, lze psát: $\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^c$. Na základě této rovnosti můžeme nahradit variaci $\delta\dot{x}^c$ za $\delta\frac{\mathrm{d}x^c}{\mathrm{d}t}$. Následně pozici této variaci zaměníme s pozicí totální derivace podle parametru t.

V posledním kroku užijeme větu o integraci per-partes, respektive její zobecnění na Pfaffovy formy (δx^c je speciální případ Pfaffovy formy). Tuto větu použijeme pouze pro druhou sumu:

$$\int_a^b \left(\sum_{c=1}^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^c}\delta x^c - \sum_{c=1}^n \delta x^c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c}\right)\,\mathrm{d}t + \sum_{c=1}^n \left[\delta x^c \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c}\right]_a^b = 0.$$

Protože uvažujeme variační úlohu s pevnými konci (třída uvažovaných křivek $\{\gamma\}$ připouští pouze koncové body $\{A, B\}$), tak

$$\delta x^c[b] = 0 = \delta x^c[a]\ \forall c \in J \Rightarrow [\delta x^c]_a^b = 0\ \forall c \in J\,.$$

Proto je poslední suma nulová. Jelikož na variaci δx^c neklademe žádné další podmínky, nulovost integrálu je možná jen pokud budou nulové všechny sčítance integrandu. Matematicky tak dospíváme k tzv.*Lagrangeovým rovnicím 2. druhu*, nebo jenom *Lagrangeovým rovnicím*(jelikož v práci Lagrangeovy rovnice 1.druhu neuvažujeme, nehrozí záměna):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^c} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \dot{x}^c} = 0\ \forall c \in J.$$

Poznámka: V postupu jsme učinili několik symbolických operací, jejichž oprávněnost by si zasloužila detailní ověření, které v práci uvádět nebudeme, jelikož bychom se významně odchýlili od hlavního tematického směru.

Poznámka: Přirozené souřadnice na tečném bundleu variety, jsou takové souřadnice na tečném bundleu variety, které získáme z libovolných přípustných souřadnic na varietě velmi logickým způsobem, který teď zmíníme. Každému prvku náležícímu do tečného bundleu přisoudíme uspořádanou 2n-tici čísel, tak, že první n-tice čísel budou souřadnice obrazu projekce tohoto prvku vzhledem k již zavedeným souřadnicovým funkcím, a druhá n-tice bude souřadnicové vyjádření tohoto prvku v rámci tečného prostoru, kterému náleží, pokud zvolíme bázi jako uspořádanou n-tici tečných vektorů k uspořádané n-tici souřadných linií, které prochází obrazem projekce tohoto prvku. Jedná se o lokální souřadnice, stejně jako jsou souřadnice na bázové varietě. V obecném případě totiž globální souřadnice existovat nemusejí.

Nyní zmíníme velice užitečné tvrzení, jehož platnost je však omezená.

Teorém 2 *Pokud je rozšířený fyzikální systém* $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ *s Riemannovskou metrizací* g *konzervativní, platí rovnost* $\mathcal{L} = T - V \circ \pi$, *kde* $(V \circ \pi)$ *chápejme jako složené zobrzení* $(V \circ \pi)(\mathbf{a}_m) : \mathbf{a}_m \to m \to \mathbb{R}$.

Poznámka: Tento teorém je jednoznačně odvislý od volby konexe, a pokud není platný, indikuje to „špatnou“ volbu konexe ∇.

Lze konstatovat, že současný rozsah našich znalostí již umožňuje řešení konkrétního fyzikálního problému. Ještě než začneme se samotným výpočtem, podotkněme, že uvažujeme systémy, kde platnost Teorému 2 je naplněna, navíc budeme vždy pracovat v přirozených souřadnicích tečného bundleu.

Příklad 3 *Harmonický oscilátor.*
Nechť je naším fyzikálním systémem hmotný bod, který je v beztížném stavu vázán na rovninnou plochu. Navíc je spojen s pružinou o charakteristické tuhosti α, jejíž druhý konec je připevněn k plošině. Síla pružiny působící na hmotný bod je lineární ve vzdálenosti, a je vždy přitažlivá. Na počátku děje je směrový vektor mířící od upevnění pružiny k hmotnému bodu $\vec{l}$, a rychlost hmotného bodu jest $\vec{v}$. Najděte křivky vývoje systému.
Řešení: Nejprve se zamysleme nad konfiguračním prostorem. Nutnou podmínkou je, že v něm musí být jednoznačně zakódována informace o konfiguraci „skutečného“ fyzikálního systému. V našem případě poloze hmotného bodu (uvědomme si, že polohou hmotného bodu udáme konfiguraci celého systému!). Dále musí také respektovat topologii „skutečného“ fyzikálního systému, lépe řečeno, zvolený konfigurační prostor s ním musí být homeomorfní. Není snad potřeba déle rozebírat, že dobrým kandidátem je náš oblíbený prostor $\mathbb{R}^2$. Podmínka na plochost roviny dává omezení na volbu konexe na konfiguračním prostoru. Zvolme proto takovou konexi na $\mathbb{R}^2$, jejíž tenzor křivosti bude nulový. Volbou konexe získáme možnost volby přirozené metrizace prostoru, navíc prakticky determinujeme set normálních souřadnic. Takové lokální souřadnice označme třeba (x, y). Dle výše psaného pojednání vyplývá, že jedna z cest k vyřešení fyzikálního problému

vede přes soustavu Lagrangeových rovnic. Než tuto soustavu sestavíme, musíme najít lagrangián $\mathcal{L}$. Dle Teorému 2 k tomu budeme potřebovat výraz pro kinetickou energii systému T a potenciál V. Jelikož je problém radiálně symetrický, nabízí se pracovat v polárních souřadnicích (později ale uvidíme, že pro vyřešení je užitečná soustava normálních souřadnic, nicméně díky této volbě „narazíme“ na jeden velmi důležitý jev). Souřadnicový přechod mezi normálními (kartézskými) souřadnicemi a polárními souřadnicemi je: $x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi)$. Nejprve se podívejme na kinetický člen. Z definice kinetické energie lze psát:

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}\Bigg(&\mathrm{d}x\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}x\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&+ \mathrm{d}y\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\mathrm{d}y\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\Bigg)\,,
\end{aligned}
$$

kde $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ je báze v polárních souřadnicích, a $(\dot{r}, \dot{\varphi})$ jsou souřadnice vektoru v polárních souřadnicích. Pro vyšší korektnost bychom měli říci, že souřadnice vektoru z tečného bundleu jsou $(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi})$. Standardním působením diferenciálu na vektor dostáváme pro kinetickou energii $T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2)$. Dále platí, že existence potenciálu V implikuje konzervativnost silového pole, které pružina vytváří. Díky tomu nám stačí integrovat silové pole po libovolné křivce, a až na volnost v aditivní konstantě, získáváme potenciál V. Zvolíme si proto integraci po souřadné linii r, a pišme: $V(0) + \int_r^0 (-\alpha R)\, dR = V(r)$, a s volbou $V(0) = 0$ máme: $V(r) = \frac{\alpha}{2} r^2$. Pro lagrangián tedy máme: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2) - \frac{\alpha}{2} r^2$. Sestavený lagrangián dosadíme do Lagrangeových rovnic druhého druhu, a za použití faktu, že jsme v přirozených souřadnicích dosaneme soustavu:

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} + r\left(\dot{\varphi}^2 - \alpha\right) &= 0\,, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\varphi} r^2\right) &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Druhou rovnici lze jednoduše „vyintegrovat“, díky tomu, že lagrangián nezávisí explicitně na dané souřadnici. Takové souřadnice nazýváme *cyklické*, a výskyt této souřadnice je vždy doprovázen *zachovávající se veličinou.* Zachovávající se veličina β je zobrazení $\beta : \mathbf{T}\mathcal{M} \to \mathbb{R}$, pro něž platí: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\beta \circ \nu) = 0$, kde ν je libovolná křivka vývoje systému. Existence zachovávající se veličiny tedy spojujeme se symetrií lagrangiánu, kterou též někdy nazýváme ***symetrií fyzikálního systému***.

Dopočet řešení soustavy diferenciálních rovnic je již formalitou. Vyjádříme si ze druhé rovnice první derivaci úhlové souřadnice a vyjádření dosadíme do rovnice první. Poté již řešíme jedinou diferenciální rovnici, jejíž řešení má nepěkné explictní vyjádření, více nám napoví, pokud opět přejdeme do souřadnic (x, y). Tam je řešení v explicitním tvaru velmi jednoduché:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= l_x \cos\left(\sqrt{\alpha} t\right) + \frac{v_x}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\alpha} t\right)\,, \\
y(t) &= l_y \cos\left(\sqrt{\alpha} t\right) + \frac{v_y}{\sqrt{\alpha}} \sin\left(\sqrt{\alpha} t\right)\,,
\end{aligned}
$$

kde (l_x, l_y) jsou souřadnice $\vec{l}$, a (v_x, v_y) souřadnice $\vec{v}$ na tečném prostoru. Řešením je celkem očekávaně elipsa.

V rámci tohoto příkladu jsme se seznámili s dalším významným druhem symetrie, a to symetrií fyzikálního systému. Při zavedení nového druhu symetrie, může v mžiku přijítdůležitá otázka. Jak takové symetrie hledat?

Hledání fyzikálních symetrií je obecně nelehká věc, avšak díky tvaru Lagrangeových rovnic některé symetrie získáme z cykličnoti jisté souřadnicové funkce. Jak uvidíme dále, podmínka na cykličnost nás přivede ke kritériu, z něhož již budeme moci vypozorovat další skutečnosti. Přechodem do lokálních souřadnic můžeme lagrangián přepsat na funkci $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ (nezapomínejme, že je to díky tomu, že varieta dimenze n je vždy lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, a také tomu, že derivujeme tenzor nultého řádu, takže nám přejde kovariantní derivace v parciální (na varietě nemáme jinou struktutu než tenzorovou, proto musíme vždy uvažovat jen kovariantní operace)), pak jej zderivujeme podle souřadnice, která má být cyklická, a položíme do rovnosti s nulou. Opět uvažujeme splnění Teorému 2 a pohybujeme se v přirozených souřadnicích na tečném bundleu.

Uvažujme rozšířený fyzikální systém $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$ společně s přípustnou metrizací g připsanou konexi ∇. Dále uvažujme přirozené souřadnice na tečném bundleu $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \dot{\alpha}^1, \dot{\alpha}^2, \ldots, \dot{\alpha}^n)$. V těchto souřadnicích rozepišme lagrangián:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}^i \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \right) - V\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right) .$$

Nutno říci, že $\frac{\partial}{\partial \alpha^i}$ jsou tečná pole k souřadnicovým liniím na konfiguračním prostoru, nikoli tečná pole k souřadnicovým liniím na fázovém prostoru. Díky tomu $(\frac{\partial}{\partial \alpha^i})_m \in \mathbf{T}\mathcal{M}$, kde $m \in \mathcal{M}$ a nikoli $(\frac{\partial}{\partial \alpha^i})_n \in \mathbf{TT}\mathcal{M}$, kde $n \in \mathbf{T}\mathcal{M}$.

Po drobné úpravě členů, umožněné bilinearitou metriky dostáváme:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in J \times J} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \right) - V\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right) .$$

Tuto funkci nyní zderivujme podle cyklické souřadnice $\alpha^k \in \{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\}$, dostaneme tak:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha^k} = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in J \times J} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j \frac{\partial g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \right)}{\partial \alpha^k} - \frac{\partial V\left(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n\right)}{\partial \alpha^k} .$$

Jelikož jsou souřadnice $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \dot{\alpha}^1, \dot{\alpha}^2, \ldots, \dot{\alpha}^n)$ nezávislé, získáváme tak několik podmínek kladených na souřadnici α^k, aby mohla být souřadnicí cyklickou. Podmínky již napíšeme bezsouřadnicově, užitím definice působení diferenciálu funkce na vektor.

$$\forall i \leq j \in J : \mathrm{d}\left(g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial \alpha^j} \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^j}, \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \right) \right) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \right] = 0 ,$$

$$\mathrm{d}V \left[\frac{\partial}{\partial \alpha^k} \right] = 0 .$$

Podmínku na souřadnici α^k jsme tak přepsali na podmínku na pole tečných vektorů k této souřadnici (respektive jejich souřadných linií). A protože integrální křivka tečného pole ke křivce je právě křivka sama (triviální tvrzení), tak můžeme tuto podmínku chápat jako plnohodnotnou náhradu podmínky na souřadnici

α^k, jelikož z těchto polí souřadné linie jednoznačně zrekonstruujeme. Poslední podmínce tedy budeme říkat podmínka na *generátory cyklických souřadnic*. Jak je patrné, hledání takových cyklických souřadnic, respektive jejich generátorů, znamená řešit soustavu $\frac{n^2+n+2}{2}$ parciálních diferenciálních rovnic druhého řádu, a to je opět velice náročné. Možnou strategií řešení může být napříkald nacházení lokálních normálních souřadnic, v nichž je nulovost derivace metriky zajištěna automaticky.

Nyní slíbené pozorování.

Věta 33 *Mějme dvojici generátorů cyklických souřadnic* $\{\frac{\partial}{\partial\alpha^k}, \frac{\partial}{\partial\beta^k}\}$*. Pokud platí, že rovnice*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^k}, \frac{\partial}{\partial\beta^k}\right) = \sqrt{g\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^k}, \frac{\partial}{\partial\alpha^k}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial\beta^k}, \frac{\partial}{\partial\beta^k}\right)}$$

nemá žádné řešení, jde o bázi vektorového prostoru generátorů cyklických souřadnic.

K tomu je potřeba následující malé lemma.

Lemma 9 *Mějme funkci* $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ *na varietě* $\mathcal{M}(\dim \mathcal{M} = n)$ *a dále vektorová pole* X, Y*, pro které platí:* $\mathrm{d}f[X] = 0 = \mathrm{d}f[Y]$*. Potom musí platit* $\mathrm{d}f[X+aY] = = 0$*, kde* $a \in F(\mathcal{M})$*.*

Důkaz lemma 9 Pravdivost plyne přímo z tvrzení, že diferenciál je kovektor, tedy lineární, navíc ultralokální($\mathrm{d}f[aX] = a\,\mathrm{d}f[X]$, kde a nemusí být jen konstanta, ale libovolná funkce) zobrazení.

Q.E.D.

Důkaz 33 Řekněme, že jsme jsme vyřešili soustavu rovnic udávajících podmínku pro cykličnost souřadnic, a vyšly dvě n-tice souřadných funkcí: $\{\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^k, \ldots, \alpha^n\}$ a $\{\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^k, \ldots, \beta^n\}$, kde α^k, β^k jsou cyklické. Abychom však mohli využít tvrzení předchozího lemma, musíme najít společný souřadný systém, jehož některé dvě souřadné linie, respektive kongruence souřadných linií (které odpovídají například souřadnicím $(\tilde{\alpha}^k, \tilde{\beta}^k)$), by byly generovány právě dvojicí $\{\frac{\partial}{\partial\alpha^k}, \frac{\partial}{\partial\beta^k}\}$. Generování takového nového souřadného systému je možné, pokud jsou tečná pole $\{\frac{\partial}{\partial\alpha^k}, \frac{\partial}{\partial\beta^k}\}$ kompatibilní v tom smyslu, že jejich integrální křivky nikde nesplývají. Splývání integrálních křivek však matematicky znamená existenci bodu na varietě, kde je tečný vektor k jedné souřadné linii násobkem tečného vektoru ke druhé souřadné linii. To však nenastane, jelikož se nikde na varietě neminimalizuje úhel odklonu tečných vektorů, jak je psáno v předpokladu této věty. Díky tomu můžeme najít společný souřadný systém jehož tečná pole k nějakým dvěma soustavám souřadných linií korespondují s generátory cyklických souřadnic. V této souřadné soustavě si vyrobíme tečná pole k souřadným liniím všech souřadnicových funkcí, a pomocí těchto vektorových polí určíme diferenciály v podmínce pro cykličnost souřadnice. Tyto diferenciály ztotožníme s diferenciálem vystupujícím v Lemma 9, jehož předpoklady jsou splněny, proto je platný i jeho závěr, který je současně závěrem naší věty.

Q.E.D.

Pojďme se ještě ale na chvíli zaobírat důsledky Teorému 2. Především by nás pak mohl zajímat tvar Lagrangeových rovnic pro lagrangián „tvaru $T-V$“. Jednu jeho část jsme již v práci uvedli, pokusme se ale nyní rozepsat úplný tvar těchto rovnic.

Postupně tedy upravujme Lagrangeovy rovnice, do nichž je dosazen lagrangián $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - V$. Pro stručnost zápisu užíváme Einsteinovu sumační konvenci a přejdeme k notaci

$$g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial \alpha^i}\right),$$

a podobně také

$$g_{ij,k} := \frac{\partial g\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^i}, \frac{\partial}{\partial \alpha^i}\right)}{\partial \alpha^k}.$$

Pišme:

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{2} g_{ij} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - V\right)}{\partial \alpha^k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial\left(\frac{1}{2} g_{ij} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - V\right)}{\partial \dot{\alpha}^k} = 0\,,$$

po provedení parciálního derivování a využití faktu, že metrický tenzor je symetrický:

$$\frac{1}{2} g_{ij,k} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - V_{,k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{kj} \dot{\alpha}^j\right) = 0\,,$$

provedeme totální derivaci podle parametru t a následně přeskupíme členy:

$$g_{kj} \ddot{\alpha}^j = -\frac{1}{2}\left(2 g_{kj,l} \dot{\alpha}^l \dot{\alpha}^j - g_{ij,k} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j\right) - V_{,k}\,,$$

nyní obě strany rovnice vynásobíme složkami kontravariantního duálu g^{kn} k metrickému tenzoru g, a použijeme vztah $g^{kn} g_{kj} = \delta^n_j$, který platí díky tomu, že právě metrický tenzor je bilineární 2-forma, prostřednictvím níž ztotožňujeme prvky tečného prostoru a kotečného prostoru. Jelikož je index l sčítací, můžeme též provést záměnu $l \to i$. Celkem:

$$\ddot{\alpha}^n = -\frac{1}{2} g^{kn}\left(2 g_{kj,i} - g_{ij,k}\right) \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - g^{kn} V_{,k}\,.$$

S výsledkem jsme téměř hotovi, ještě ale upravme metrický člen $g^{kn}(2g_{kj,i} - g_{ij,k})$. Ten si označme například jako Q^l_{ij}, a rozdělme si jej na symetrickou a antisymetrickou část v dolních dvou indexech, tedy

$$Q^l_{ij} = \frac{1}{2}\left(Q^l_{ij} + Q^l_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(Q^l_{ij} - Q^l_{ji}\right).$$

Symetrickou část označme Γ^n_{ij}, a antisymetrickou ζ^n_{ij}. Jelikož ale vysčítáváme přes (symetrický) výraz $\dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j$, antisymetrická složka vyjde celkově nulová. Proto lze psát:

$$\ddot{\alpha}^n = -\frac{1}{2} \Gamma^n_{ij} \dot{\alpha}^i \dot{\alpha}^j - g^{kn} V_{,k}\,.$$

Symbolu Γ^n_{ij} říkáme *Christoffelovy symboly*, které jsou dalším významným pojmem diferenciální geometrie. To proto, že pokud z metrického tenzoru g vyrobíme tyto složky, pak zobrazení definované vzorcem $\nabla : (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) \to \Gamma^k_{ji} \mathbf{e}_k$ a vlastnostmi uvedenými v Definici 36 přesně determinuje Riemannovu afinní konexi pro metrický tenzor g. To je silně netriviální tvrzení, a jeho důkaz spočívá v provedení rozsáhlého počítání. Uvádět jej nebudeme.

Z odvozené formulky si odneseme dvoje pozorování.

Jednak spatřujeme, že pokud uvážíme plochý (Euklidovký) konfigurační prostor, vyjde nám Newtonův zákon síly. Tedy, až na ten rozdíl, že my pracujeme na konfiguračním prostoru. Rovnici tedy můžeme chápat jako zobecněný Newtonův zákon síly pro křivá pozadí konfiguračních variet.

Druhé pozorování vychází z obdobné úvahy. Pokud totiž necháme potenciál vymizet, objevujeme v naší formuli přesně rovnici geodetiky pro Riemannovu afinní konexi. Z toho plyne závěr, že pokud na konfiguračním prostoru neexistuje potenciál, systém se pohybuje po geodetice na konfiguračním prostoru.

Pokud najdeme takovou beztorzní konexi jejíž geodetiky budou křivkami vývoje systému, můžeme pak velmi jednoduše zrekonstruovat i lagrangián. Podmínkou na lagrangián totiž je, aby řešení Lagrangeových rovnic pro tento lagrangián dávalo právě křivky vývoje systému. Jak jsme si ale ukázali, pokud je v lagrangiánu pouze kinetický člen daný metrikou g, křivky vývoje systému jsou právě geodetiky Riemannovy konexe této metriky. Proto nám stačí najít takovou metriku g, pro níž $\nabla g = 0$, protože pak z konexe ∇ učiníme Riemannovu konexi, a kinetický člen vystavěný pomocí této metriky bude dávat lagrangián, který když dosadíme do Lagrangeových rovnic, tak nám vyjdou geodetiky pro naši konexi ∇, o nichž víme, že jsou křivkami vývoje systému. Samozřejmě se na problém můžeme dívat i z druhé strany, pokud nám někdo zadá takovou metriku, jejíž Riemannova afinní konexe dává křivky vývoje systému, je lagrangián sestavený z kinetického člene pro tuto metriku ten správný.

2.2 Jacobiho dynamické systémy

V předchozí podkapitole jsme již zmínili myšlenku rozšíření fyzikálního systému o „tu pravou“ konexi, jejíž geodetiky jsou křivkami vývoje systému. Právě přichází ten správný okamžik vrátit se k ní vrátit. Mějme na paměti, že z ničeho a pariori nevyplývá, že by zobrazení s vlastnostmi konexe, natož lineární, mohlo úplně zastoupit fyzikální zákony. Skutečnost ale naznačuje, že aspoň „z části“ se tak příroda chová.

O konstrukci z části uspokojivé konexe se vyjadřuje následující věta.

Věta 34 ***Jacobiho věta.*** *Uvažujme rozšířený fyzikální systém $\{\mathcal{M}, \mathfrak{F}, \nabla\}$, který je konzervativní a platí pro něj Teorém 2. Dále uvažujme přípustnou metrizaci g. Nechť T, V jsou kinetická energie a potenciál zkonstruované jako obvykle. Uvažujme křivku vývoje systému $q : t \to q(t) \in \mathcal{M}$, pro niž najdeme konstantu $T(\mathbf{q}(t)) + V(\pi(\mathbf{q}(t))) = e$, kde $\mathbf{q}$ je tečné pole ke křivce q. Nechť je dimenze konfiguračního prostoru rovna n. Předpokládejme, že $V(\pi(\mathbf{q}(t))) \neq e$ $\forall t \in I$, kde I je definiční obor křivky q. Pak platí, že zobrazení $\varphi : I \to \mathbb{R}$, které definujeme* *předpisem*

$$\varphi(t) = 2\int_0^t \Big(e - \Big(V\left(\pi\left(\mathbf{q}\left(\tau\right)\right)\right)\Big)\Big)\,\mathrm{d}\tau$$

je diffeomorfní zobrazení $I \to J$, kde J je obraz tohoto zobrazení. Označme jeho inverzi $\varphi^{-1} : J \to I$. Navíc platí, že křivka q je křivkou vývoje systému, právě když křivka $\psi \equiv q \circ \varphi^{-1} : J \to \mathcal{M}$ je geodetikou Riemannovy konexe pro Jacobiho metriku $g_J = 2(e - V \circ \pi)g$.

Důkaz 34 Nejdříve si rozmyslíme, že jde skutečně o diffeomorfizmus. Bijektivnost se ukáže, ukáže-li se prostota, protože je zobrazení φ zkonstruováno tak, aby bylo „na". Protože však $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = e - V(\pi(\mathbf{q}(t))) > 0$, je prostota zaručena. Díky požadované hladkosti V dostáváme, že φ je opravdu diffeomorfizmus.

Pro důkaz druhé části tvrzení zavedeme na varietě $\mathcal{M}$ lokální souřadnice $\{\alpha^i\}_i$ ($\alpha^i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$). Díky identitě $\psi \circ \varphi = q$ můžeme psát: $\alpha^i(q(t)) = \alpha^i(\psi \circ \varphi(t))$, kde navíc, pro stručnost v dalším postupu, zavedeme následující symboliku: $q^i := \alpha^i(q) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{q}^i := \alpha^i(\psi) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Díky tomu lze napsat identitu: $q^i(t) = \tilde{q}^i(\varphi(t))$. Totální derivací této identity podle parametru t získáváme:

$$\frac{\mathrm{d}q^i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{q}^i(\varphi(t))}{\mathrm{d}t} = 2(e - v(s))\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s}\,,$$

kde jsme zavedli $s := \varphi(t) \in \mathbb{R}$, $v(s) := V(\psi(s)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obdržené výrazy derivujeme podle parametru t ještě jednou. Dostáváme tak:

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^i(t)}{\mathrm{d}t^2} = 4(e - v(s))^2\frac{\mathrm{d}^2\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s^2} + 4(e - v(s))\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}v(s)}{\mathrm{d}s}\,,$$

což si ještě přepíšeme na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}^2 q^i(t)}{\mathrm{d}t^2} = 4(e - v(s))^2\frac{\mathrm{d}^2\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s^2} + 4(e - v(s))\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial v(s)}{\partial\tilde{q}^l}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^l}{\mathrm{d}s}\,.$$

Nyní si uvědomíme, že podmínkou, aby křivka q byla křivkou vývoje systému, je, že musí být řešením Lagrangeových rovnic. Pokud však platí Teorém 2, musí být zároveň řešením, výše uvedeného, zobecněného Newtonova zákona. Když tuto křivku přepíšeme do souřadnic, a vsadíme do zmíněné rovnice, rovnice musí platit. Pokud platí, platí i její ekvivalentní rovnice, v níž provedeme ekvivalentní záměnu $q(t) \to \tilde{q}(s)$. Tím dostaneme rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{q}^i(s)}{\mathrm{d}s^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^k}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{e - v}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^i}{\mathrm{d}s}\frac{\partial v}{\partial\tilde{q}^l}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^l}{\mathrm{d}s} - \frac{1}{4(e - v)^2}g^{il}\frac{\partial v}{\partial\tilde{q}^l}\,.$$

Užijeme-li nyní zavedení konstanty e, můžeme napsat

$$e - v = \frac{1}{2}g_{jk}\frac{\mathrm{d}q^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}q^k}{\mathrm{d}t} = 2(e - v)^2 g_{jk}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^k}{\mathrm{d}s}$$

(kde opět využíváme sumační konvence), což když dosadíme do rovnice, dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{q}^i}{\mathrm{d}s^2} = \tilde{\Gamma}^i_{jk}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^j}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\tilde{q}^k}{\mathrm{d}s}\,,$$

kde symbolem $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ označujeme

$$\tilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{2(e-v)}\left(\delta^i_k \frac{\partial v}{\partial \tilde{q}^j} + \delta^i_j \frac{\partial v}{\partial \tilde{q}^k} - g_{jk} g^{il} \frac{\partial v}{\partial \tilde{q}^l}\right),$$

kde Γ^i_{jk} jsou Christoffelovy symboly Riemannovy konexe pro metriku g. Přichází na řadu důležité pozorování, a to, že $\tilde{\Gamma}^i_{jk}$ jsou Christoffelovy symboly Riemannovy konexe pro Jacobiho metriku g_J. Tento fakt lze ověřit přímočarou kalkulací.

Q.E.D.

Podle tvrzení předešlé věty tedy existují konexe, jejichž speciální geodetiky jsou, až na reparametrizaci, křivkami vývoje systému, jehož kinetická energie spočtená v původní metrizaci není nikdy nulová. Tyto geodetiky odopovídají vývojím systému s libovolně, ale fixně, danou hodnotou e, tedy *energií.* Jelikož je mezi skutečnými křivkami vývoje systému a geodetikami Riemannovy konexe pro Jacobiho metriku netriviální reparametrizace, tečná pole k těmto geodetikám neodpovídají skutečným stavům fyzikálního systému, obrazy těchto křivek na varietě jsou však stejné, proto nám poskytují přinejmenším správnou informaci o vývoji systému v rámci konfiguračního prostoru. Nalezení geodetiky Riemannovy konexe pro Jacobiho metriku tak představuje pouze půl cesty za vyšetřením vývoje systému. Pro úplnost totiž musíme provést příslušnou reparametrizaci. Ozkoušejme si tento přístup na konkrétním fyzikálním problému.

Příklad 4 *Vrh v gravitačním poli.*

Uvažujme hmotný bod, který je umístěn v trojrozměrném plochém prostoru, v homogenním gravitačním poli o intenzitě $\vec{g}$. Hmotný bod má počáteční vektor rychlosti $\vec{v}$ a počáteční polohu, která je dána směrovým vektorem $\vec{x}$ mířícím od fixně zvoleného referenčního bodu prostoru k tomuto bodu. Najděte křivky vývoje systému pomocí konstrukce Jacobiho konexe.

Řešení: Ze začátku budeme postupovat velmi analogicky řešení Příkladu 3. Je celkem přímočaré rozmyslet si, že vhodný konfigurační prostor je $\mathbb{R}^3$, společně s plochou konexí, k níž je přípustnou metrizací právě Euklidova metrika g. Kinetické energii odpovídající potenciál V může mít tvar $V = zg$, kde z je souřadnicová funkce, pro niž platí, že tečné vektory k souřadným liniím splývají s vektorovým polem $\vec{g}$. Další dvě souřadné funkce volme tak, aby byla metrika g diagonální, navíc „Kronekerovská“. Takové souřadnice označme (x, y). Na základě této konstrukce nyní najděme odpovídající Jacobiho konexi. K tomu budeme nejdříve potřebovat napsat tvar Jacobiho metriky. Podle Věty 34 to je metrika: $g_J = 2(e - V \circ \pi)g$, kde $e = \frac{1}{2}g_m(\vec{v}, \vec{v}) + z(\vec{x})g$ a m je bod na konfiguračním prostoru, který asociujeme s počáteční konfigurací „skutečného systému“. Spočteme-li nyní Christoffelovy symboly Riemannovy konexe pro tuto metriku, dostaneme $\Gamma^3_{11} = \Gamma^3_{22} = \frac{g}{2(gz-e)}$, a také $\Gamma^1_{13} = \Gamma^1_{31} = \Gamma^2_{23} = \Gamma^2_{32} = \Gamma^3_{33} = \frac{g}{2(e-gz)}$. Na základě spočteného můžeme psát pro geodetiku rovnice (kde proměnné x, y, z nyní už chápejme jako souřadnice geodetiky, tedy obecně $q^i \to q^i(\gamma))$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{g}{2(gz-e)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{2(-gz+e)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{g}{2(-gz+e)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,\\
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{g}{(-gz+e)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,,\\
\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{g}{(-gz+e)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,.
\end{aligned}$$

Tato soustava rovnic nám napovídá, že užití Jacobiho věty pro praktické výpočty je kvůli vysoké náročnosti hledání geodetických křivek značně neobratné. Už na jednoduchém příkladě, vrhu v gravitačním poli, dostáváme soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic s provázanými neznámými funkcemi, jejíž řešení je značně netriviální.

Než takovou soustavu řešit, raději se zamysleme nad otázkou, jestli jsme již v práci nepředstavili metodu, která by pro nacházení geodetických křivek mohla být přívětivější. Konceptuálně elegantní způsob hledání geodetik na varietách představuje Věta 32.

Pro tuto chvíli se opět přenesme do teoretičtější roviny, a zkoumejme její předpoklady. Jelikož jsme motivováni hledáním geodetických křivek na konfiguračním prostoru $\mathcal{M}$ s Jacobiho metrikou g_J (tuto dvojici nazvěme *Jacobiho prostor*), budeme právě pro takovou dvojici zkoumat, zda-li se jedná o homogenní prostor. (Samozřejmě tu máme k ověření další kritéria, například kritérium reduktivity. To je však splněno vždy, když je pro Jacobiho prostor původní metrikou metrika Riemannova, jelikož držíme podmínku $e>v$). Klíčovou roli ve vyšetřování, jestli je Jacobiho prostor homogenním prostorem, hraje existence, potažmo neexistence, grupy izometrií, která by na konfiguračním prostoru operovala tranzitivně. Ukázali jsme si, že nacházení grupy geometrických symetrií je často též velmi náročné, v obecnosti se opět potkáváme s potřebou vyřešit složité diferenciální rovnice, jak jsme uváděli v první kapitole. Tato otázka se tak díky své obecnosti jeví velmi nelehce. Nyní představíme způsob, jak rozšiřovat množinu metrických tenzorů, o nichž víme, že k nim existuje tranzitivně působící grupa izometrií.

Věta 35 *Mějme varietu M a metrický tenzor g. Uvažujme takovou grupu diffeomorfizmů $\{\sigma_x\}_x$, která na množině operuje tranzitivně a navíc izometricky, tedy: $(\sigma_x)^* g = g\ \forall \sigma_x \in \{\sigma_x\}_x$. Dále uvažujme diffeomorfizmus τ a metriku $\tilde{g}$, pro níž platí: $\tilde{g} = \tau^* g$. Pak tvrdíme, že existuje grupa diffeomorfizmů, která na dvojici $(M, \tilde{g})$ operuje tranzitivně a izometricky, navíc je tato grupa izomorfní s grupou $\{\sigma_x\}_x$.*

Důkaz 35 Důkaz bude proveden konstruktivně. Vytvoříme množinu diffeomorfizmů $\{\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}\}_x$, o níž ukážeme, že jde o grupu izomorfní s $\{\sigma_x\}_x$, navíc že tato množina diffeomorfizmů operuje tranzitivně a izometricky na porstoru $(M, \tilde{g})$. Důkaz si tak rozdělíme do dvou bodů:

1. Nejprve izomorfnost. Důkaz, že jde o bijekci je velmi snadný, a jedná se o pozorování, že přiřazení $\sigma_x \to \tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}$ je surjektivní i injektivní. Aby toto přiřazení bylo navíc homomorfizmem, musí též platit, že pokud $\sigma_x \to \tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}$ a $\sigma_y \to \tau \circ \sigma_y \circ \tau^{-1}$, pak
$$\sigma_x \sigma_y \to \left(\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}\right) \circ \left(\tau \circ \sigma_y \circ \tau^{-1}\right)\,.$$

Toto tvrzení je tak jednoduché, že se dokáže samo.

2. V tomto bodě dokážeme, že $\{\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}\}_x$ je množina operující tranzitivně a izometricky. Nejprve izometričnost. V první kapitole jsme dokázali ekvivalenci mezi působením zobrazení $\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}$ na body variety, a kotečným zobrazením $((\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1})^{-1})^*$. Má-li být zobrazení $\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}$ izometrie, musí mu příslušné kotečné zobrazení $((\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1})^{-1})^*$ působit dle diferenciálně-geometrické definice izometrie, tedy musí platit: $((\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1})^{-1})^* \tilde{g} = \tilde{g}$. Rozepsáním dostáváme:

$$\left(\left(\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1}\right)^{-1}\right)^* \tilde{g} = \left(\tau \circ \sigma_x^{-1} \circ \tau^{-1}\right)^* \tilde{g} = \left(\tau \circ \sigma_x^{-1}\right)^* \left(\left(\tau^{-1}\right)^* \tilde{g}\right)$$
$$= \left(\tau \circ \sigma_x^{-1}\right)^* g = (\tau)^* \left(\left(\sigma_x^{-1}\right)^* g\right) = \tau^* g = \tilde{g}\,.$$

Nyní tranzitivita. Předpokladem je, že $\forall a, b \in M\ \exists \sigma_x : \sigma_x(a) = b$. Chceme dokázat, že $\forall a, b \in M\ \exists \sigma_x : (\tau \circ \sigma_x \circ \tau^{-1})(a) = b$. Označme si $\tau(a) = \alpha, \tau(b) = \beta$. Pak můžeme podmínku přepsat na $\exists \sigma_x : \sigma_x(\alpha) = \beta$. Tato podmínka je ale samozřejmě splněna, právě díky tranzitivitě působení množiny $\{\sigma_x\}_x$ na M.

Q.E.D.

Máme-li na varietě dvě různé metriky, mezi nimiž najdeme kotečné zobrazení, můžeme dedukovat, že na ně působí izomorfní grupy diffeomorfizmů, které mohou být konkrétní realizací hladké, izometrické a tranzitivní akce jedné a té samé grupy. Pro výsledek věty máme ale i jinou interpretaci. Pokud máme metriku, a neznáme její grupu izometrií, ale najdeme takové kotečné zobrazení, kterým vyprodukujeme metriku, k níž již grupu izometrií známe, můžeme tuto grupu vzít jako grupu izometrií pro původní metriku. Co víc, dokonce známe i převodní přepis akcí těchto grup.

Teď už je jasné, že výše uvedená věta může značně napomoci hledání grupy symetrií pro Jacobiho metriku. Podívejme se teď na jeden konkrétní případ, kdy vystavíme Jacobiho metriku z metriky Euklidovské, metodou uvedenou výše, a budeme pro tento z části konktétní konstrukt zkoumat existenci kotečného zobrazení, které by tuto metriku „napravilo“ do podoby nějaké „hezké“ metriky. Ze zjištných důvodů uvažujme jako „hezkou“ metriku právě Euklidovu. O existenci takového kotečného zobrazení se totiž vyjadřuje jedna známá věta.

Věta 36 ***Riemannovo kritérium izometrické ekvivalence.***
Mějme varietu M a dvě Riemannovy metriky g, h, přičemž h je metrika Euklidova. Mezi těmito prostory s metrikou existuje takový diffeomorfizmus, jehož kotečné zobrazení zhotoví z jedné metriky druhou, tehdy a jen tehdy, když (Riemannův) tenzor křivosti Riemannovy konexe metriky g je identicky nulový.

Důkaz 36 Nebude.

Pro náš případ Jacobiho metriky tak napočítáním Riemannova tenzoru křivosti docházíme k podmínce, kdy je Jacobiho prostor homogenní (ve smyslu dostatečné podmínky), speciálněji, kdy je diffeomorfní s faktorovou grupou $SO(n) \rtimes \mathbb{R}^n / SO(n)$.

Zvláště pak jednoduché podmínky přijdou v úvahu, pokud je dimeze variety nízká. Například, pro případ dimenze dva, lze vyslovit následující větu:

Věta 37 *Jacobiho prostor* (M, g_J)*, kde* M *je varieta s dímenzí* 2*, a* g_J *Jacobiho metrika, pro níž lze psát* $g_J = 2(e - V \circ \pi)h$*, je diffeomorfní s faktorovou grupou* $SO(2) \rtimes \mathbb{R}^2/SO(2)$ *právě když v nějaké přípustné lokální souřadné mapě* μ *splňuje souřadnicové vyjádření potenciálu* $v := V(\mu^{-1})$ *tuto rovnici:*

$$\nabla v \cdot \nabla v + (e - v)\Delta v = 0\,,$$

kde v tomto kontextu je ∇ *gradient a* Δ *Laplaceův operátor.*

Důkaz 37 Důkaz je založen na tvrzení Věty 36 a mechanickém výpočtu Riemannova tenzoru pro Jacobiho metriku. Výpočet byl proveden v počítačovém algebraickém systému *wxMaxima 13.04.2*.

Q.E.D.

Závěr

Tato práce jako celek představuje skromnou ukázku neodmyslitelné provázanosti matematiky s fyzikou, speciálněji pak partie na pomezí těchto vědních disciplín, diferenciální geometrii a Lieovy grupy. V práci jsme představili základní pilíře těchto matematických nástrojů, stejně jako poodhalili pole jejich využití v klasické fyzice. Postupně jsme čtenáře seznamovali s množstvím pojmů, které byly vystavěny se snahou o přirozenou návaznost, což nemuselo být vždy snadno patrné, jelikož smyslem práce bylo širší představení kontextu matematického aparátu ve fyzice. Cílem práce však nebylo jen vystavění těchto základů, ale i nabízení témat, problémů a otázek nad rámec práce, o nichž je neméně zajímavé přemýšlet. Symbolické bylo též členění práce na kapitolu ryze matematickou a kapitolu věnovanou fyzikálním aplikacím.

V první kapitole byl vlajkovou lodí pojem grupa, který byl pečlivě vystavěn až od samotných základů, jelikož pak nacházel souvislosti s mnohými dalšími pojmy jako akce grupy, grupový součin nebo faktorová grupa. Ústřední motivací tohoto aktu bylo připravení půdy pro zavedení stěžejního konceptu, homogenních prostorů. Toto pokročilejší téma již bylo spojováno nejen s oblastí pojmů, které jsme zavedli v obecném pojetí slova grupa, ale i s diferenciální geometrií. Základy diferenciální geometrie, a s nimi související trivium z topologie, bylo též zevrubně popsáno. Pomyslným vrcholkem první kapitoly bylo uvedení Kleinovy geometrie, jakožto přirozeného zevšeobecnění úvah souvisejících s homogenními prostory a geometrií. Některé odbočky, jež nevypadaly jako rozumné pokračování hlavního proudu myšlenek byly často zdůvodňovány odkazem na použití či zmínku ve druhé kapitole.

Druhá kapitola měla za cíl spojit jazyk matematicky abstraktních konceptů první kapitoly s fyzikálně formulovanými problémy. Tomu byl věnován úvod, který se rozvinul do řeči diferenciální geometrie v klasické teoretické mechanice. Po této velice standardní části zakončené řešeným příkladem nasledovalo pojednání o fyzikálních symetriích, které bylo paralelou ke geometrickým symetriím, dalším významným pojmem této práce. Závěr druhé kapitoly patřil již méně obvyklému tématu, konstrukci Jacobiho konexe, jejíž praktické využití jsme neshledali jako valné, když jsme tuto metodu ilustrovali na dalším fyzikálním příkladu. Východisko této komplikace mělo představovat navrhované řešení, spočívající v nazírání této struktury v režimu homogenních prostorů. Kritérium oprávněnosti tohoto přístupu bylo obecně diskutováno, pro speciální případ jsme uvedli i konkrétní výsledek.

Seznam použité literatury

[1] Z. Dušek. *Survey on homogeneous geodesics*. 2009. DOI: 10.1285/i15900932v28n1supplp147. URL: http://siba-ese.unisalento.it/index.php/notemat/article/view/1767.

[2] S. Kobayashi a K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Foundations of Differential Geometry [by] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu v. 1. Wiley, 1963. ISBN: 9780470496473. URL: http://books.google.cz/books?id=iLANAQAAIAAJ.

[3] O. Kowalski. *Úvod do Riemannovy geometrie*. Karolinum, 2001. ISBN: 9788024603773. URL: http://books.google.cz/books?id=5ETstgAACAAJ.

[4] R. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*. Článek 1960. Dostupný ke dni 30.7.2014 na URL: vmm.math.uci.edu/ExistenceOfSlices.pdf.

[5] R. Sharpe a S. Chern. *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1997. ISBN: 9780387947327. URL: http://books.google.cz/books?id=poV6SSopE9QC.

[6] V. Souček. *Lineární algebra*. Studijní text 2012. Dostupný ke dni 30.7.2014 na URL: www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/LA_LS_11.pdf.

[7] S. Sternberg. *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press, 1995. ISBN: 9780521558853. URL: http://books.google.cz/books?id=k2Fp3JA93oYC.

Seznam použitých zkratek

BÚNO - bez újmy na obecnosti
atd. - a tak dále
apod. - a podobně
tj. - to je