Posudek práce

předložené na Matematicko-fyzikální fakultě
Univerzity Karlovy v Praze

❑ posudek vedoucího ■ posudek oponenta

■ bakalářské práce ❑ diplomové práce

Autor: Jiří Nárožný
Název práce: Diferenciální geometrie a dynamika
Studijní program a obor: Fyzika, Obecná fyzika
Rok odevzdání:2014

Jméno a tituly oponenta: Mgr. Martin Scholtz, Ph.D.
Pracoviště:Ústav teoretické fyziky
Kontaktní e-mail:scholtz@utf.mff.cuni.cz

Odborná úroveň práce:

❑ vynikající ■ velmi dobrá ❑ průměrná ❑ podprůměrná ❑ nevyhovující

Věcné chyby:

❑ téměř žádné ❑ vzhledem k rozsahu přiměřený počet ■ méně podstatné četné ❑ závažné

Výsledky:

❑ originální ❑ původní i převzaté ■ netriviální kompilace ❑ citované z literatury ❑ opsané

Rozsah práce:

❑ veliký ■ standardní ❑ dostatečný ❑ nedostatečný

Grafická, jazyková a formální úroveň:

❑ vynikající ❑ velmi dobrá ■ průměrná ❑ podprůměrná ❑ nevyhovující

Tiskové chyby:

❑ téměř žádné ❑ vzhledem k rozsahu a tématu přiměřený počet ■ četné

Celková úroveň práce:

❑ vynikající ■ velmi dobrá ❑ průměrná ❑ podprůměrná ❑ nevyhovující

Slovní vyjádření, komentáře a připomínky vedoucího/oponenta:

Práce se věnuje velmi zajímavé oblasti aplikací metod moderní diferenciální geometrie v klasické nerelativistické dynamice. Na dalších stránkách tohoto posudku uvádím detailní komentář k celé práci a podrobně vysvětluji své námitky a poznámky.

Student nepochybně prokázal schopnost samostatného studia pokročilejších partií diferenciální geometrie. Získané poznatky zpracoval v logicky poměrně dobře sestaveném textu. Zavádí zde základní pojmy teorie grup a topologie, což je velmi standardní materiál. To by nebylo na škodu, kdyby byly stejně podrobně zpracovány i méně standardní témata. Zajímavá je část o Kleinově geometrii a homogenních prostorech. Druhou část práce pak tvoří (nebo měly tvořit) aplikace vybudovaného aparátu v klasické dynamice. Bohužel, pracně vybudovaný aparát se v těchto aplikacích využívá spíš triviálně a do značné míry se jenom opakují známé vztahy z teoretické mechaniky v „obyčejném" formalismu. Výjimkou je rozšířená diskuse cyklických souřadnic a poslední kapitola o Jacobiho konexích. Příklad šikmého vrhu, který se uvádí jako aplikace zavedené metody, je však nedořešený, nejsou naznačeny ani výhody geometrického přístupu.

Problémem textu je do jisté míry autorův styl, který je často na úkor přesnosti a srozumitelnosti, jak níže demonstruji. Velmi četné jsou i překlepy a gramatické chyby, které dále podrobně uvádím. Z práce není vůbec jasné (i díky nesystematickému citování literatury), zda práce obsahuje i nové výsledky, zda je analýza uvedených příkladů převzata z literatury, nebo ji prováděl sám autor.

Hlavní přínos práce tedy spatřuji v netriviální kompilaci různých poznatků z diferenciální geometrie. Vzhledem k velkému počtu formálních chyb a menšímu počtu věcných nepřesností hodnotím práci jako velmi dobrou, ne však vynikající.

Případné otázky při obhajobě a náměty do diskuze:

Otázky jsou formulovány v příslušné sekci dokumentu přiloženého k posudku.

Práci

■ doporučuji

❑ nedoporučuji

uznat jako diplomovou/bakalářskou.

Navrhuji hodnocení stupněm:

❑ výborně ■ velmi dobře ❑ dobře ❑ neprospěl/a

Místo, datum a podpis vedoucího/oponenta: v Praze, 26. 8. 2014

1 Otázky do diskuse

- V definici 59 se definuje fázový prostor jako tečný bundle konfiguračního prostoru. Jsem zvyklý, že fázovým prostorem se nazývá ko-tečný bundle. Na tečném bundlu se buduje lagrangeovská, na ko-tečném hamiltonovská mechanika. Proč se fázovým prostorem nazývá tečný, nikoli ko-tečný bundle? Znamená to, že prvky tohoto bundlu se mají interpretovat jako hybnosti, ne jako rychlosti?

- Teorém 2 na straně 47 říká, že pro konzervativní systém s konexí ∇ má lagrangián tvar

$$\mathcal{L} = T - V \circ \pi.$$

  V poznámce pod teorémem se píše, že pokud teorém není platný, indikuje to špatnou volbu konexe. Mohl by to autor vysvětlit? Pod neplatností teorému zřejmě myslí, že nejsou splněny předpoklady. Které konkrétně? Nebo chce říct, že konzervativnost systému je věcí volby konexe? Lze například pro částici v elektromagnetickém poli definovat konexi tak, aby byl systém konzervativní?

- Na stranách 48–50 se diskutuje souvislost cyklických souřadnic, symetrií a zachovávajících se veličin. Jaká je souvislost těchto úvah s teorémem Noetherové? Umožňuje vyřešení podmínek na generátory cyklických souřadnic systematické nalezení všech symetrií lagrangiánu (akce)?

2 Komentář k práci

Než se dostanu k odborné stránce, musím autorovi vytknout styl a sloh. Obecně je sympatické, když je matematický text psán volnějším jazykem a pokouší se být trochu vtipný nebo odlehčený. Autor práce to však často přehání, snaha o poetično ho místy vede k mírně nesmyslným formulacím. Například hned v úvodu: “V rámci naší práce budeme *pěstovat* poznatky, které jsou v *odstínu* zmíněných teorií”. Jiný příklad, strana 15, “zobecníme tohle snažení obecnou definicí”. Podobných příkladů je v práci mnoho. Textu lze též vytknout poměrně velké množství překlepů, které dále uvádím. Rušivě pak působí i formulace typu “první, co nás praští do očí, je ...”

Trochu nešťastně je zvolena i struktura práce, která obsahuje pouze dvě kapitoly, každá se dvěma podkapitolami. To je samozřejmě věcí osobního vkusu, ale textu by prospělo jemnější dělení, byl by tak přehlednější.

Kapitola 1.1 – Základní pojmy z teorie grup

V této kapitole autor zavádí základní pojmy teorie grup a topologie. Jedná se o skutečně elementární materiál, který je však podán čtivě a srozumitelně. Trochu nelogická je definice 4 topologického prostoru pomocí pojmu topologie, který je však zaveden až v následující definici 5.

V textu by se hodilo více odkazů na literaturu, zaznamenal jsem jenom odkaz na publikaci [7] v poznámce na straně 7 a několik odkazů na důkazy některých tvzrení v publikaci [3]. Čtenář tak nemá možnost porovnat autorovu verzi s citovanou literaturou. To se projeví například v definici 6 Lieovy grupy. Jednak se zde autor odkazuje na pojem variety, který je zaveden teprve v definici 21, jednak je čtenáři zamlčen požadavek kompatibility grupového násobení se strukturou hladké variety. Proto by byl odkaz na literaturu, v níž čtenář najde detaily, vhodný.

Po zavedení základních pojmů autor dokazuje některá jednoduchá tvrzení, například věta 1. Důkazu této věty je věnována stránka a půl, důkaz sám je však dosti jednoduchý a stačilo by jej naznačit dvěma větami. Podobným příkladem je věta 3. Bylo by lepší věnovat méně místa podrobnému rozepisování jednoduchých důkazů, které lze provést jako cvičení, a naopak věnovat se víc důkazům méně triviálních vět.

Myslím, že anglický termín "with respect to" je vhodnější přeložit obvyklým způsobem jako "vzhledem k", než "s respektem". Na straně 11 před definicí 11 tak autor hovoří o "vlastnosti, s respektem k níž zavádíme akci grupy". Tyto části textu mimochodem hýří slovem "jistý" ve všech jeho podobách: zavádí se "jistá" grupa, "jistá" binární operace, prvky mají "jistou" vlastnost.

Autor sice věnuje hodně pozornosti elementárním pojmům, ale pak v textu pracuje s reprezentacemi grup, argumentuje ireducibilitou reprezentací, hovoří o věrných reprezentacích, ale tyto pojmy nejsou nikde zavedeny (s výjimkou poznámky na straně 7). Zdá se mi to důležitější než podrobné vysvětlování toho, co je relace ekvivalence.

Kapitola 1.2 – Homogenní prostory

V definici by se podle mě nemělo vyskytovat slovo "nechť". Věta má předpoklady uvedené slovem "nechť" a pak závěr, který z těchto předpokladů plyne. Definice není věta, není to tvrzení typu "nechť $\rightarrow$ potom", je to zavedení zkratky. Například definice 14 by tak měla znít (například): Zobrazení $f : X \mapsto Y$ topologických prostorů X a Y se nazývá spojité, jestliže ....

Definice 33, strana 20. Používá autor abstraktní indexovou notaci? Z textu se zdá, že nikoli, ale v této definici je tenzorem nazýván objekt $T^{ij..}_{lm..}$, což vypadá jako složky tenzoru vůči zvolené bázi vektorového prostoru. Pokud se myslí abstraktní indexy, měly by být příslušnými indexy opatřeny i vektorové prostory, tedy

$$T^{ij..}_{lm..} : V^i \times V^j \times \cdots \times V_l \times V_m \times \cdots \mapsto \mathbb{R}.$$

Poznámka o interpretaci geodetiky na straně 21 mi přijde matoucí. Říká se zde, že v ploché geometrii je přímka "křivkou, jejíž tečny mají stejný směr jako sama křivka". Podle mě směr křivky je dán právě tečným vektorem, čili každá křivka v každé geometrii má směr svého tečného vektoru. Autor však chtěl asi říci, že vektorové pole tečné ke křivce je podél přímky v plochém prostoru konstantní. Kromě toho, proč autor potřebuje vysvětlovat, že plochá geometrie je "ta, kterou známe ze středoškolské planimetrie"? Je to odborná bakalářská práce, ne populární text.

Strana 27. Diferenciálem druhého řádu se zde nazývá objekt $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$. Je to správně? V analýze se diferenciálem druhého řádu nazývá objekt d^2x, který je dán druhými parciálními derivacemi. Autor zde zřejmě myslí, že pokud chápeme $\mathrm{d}x$ jako infinitesimální veličinu prvního řádu, pak $(\mathrm{d}x)^2$ je infinitesimální veličina druhého řádu. Písmenko d ve výrazu $\mathrm{d}x$ zde ovšem nesouvisí s infinitesimálností, ale jde o gradient (nebo tečné zobrazení, jak je zavedeno v definici 41) souřadnicové funkce. To, co autor nazývá diferenciálem druhého řádu, je ve skutečnosti tenzorový součin $\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x$.

V diskusi o symetriích, které jsou spojeny s danou metrikou, bych čekal alespoň zmínku o izometriích generovaných Killingovými vektory. Teprve na straně 29 se začíná mluvit o homogenních prostorech a Erlangenském programu, což znamená, že na jedenácti stranách kapitoly o homogenních prostorech se tento pojem vůbec nevyskytuje. To uvádím jen jako příklad mé dřívější poznámky, že práce by byla přehlednější, kdyby měla víc kratších (pod)kapitol.

V definici 48 na straně 29 se zavádí homogenní prostor. Opět je škoda, že autor neuvádí zdroj, z něhož definici čerpal. Formálně by bylo vhodné označit homogenní prostor jako *trojici* (M, g, G), tedy spolu s příslušnou Lieovou grupou, která na varietě M působí. Jinými slovy, grupa G není určena metrikou g jednoznačně, takže musí být součástí definice homogenního prostoru. V seznamu literatury autor uvádí publikace [2],[5] a [7], ale ve všech se homogenní prostor definuje až jako faktor-množina G/H. Přístupů je samozřejmě víc, jenom mě udivuje, že autor používá jinou definici, než cituje. Chtělo by to alespoň vysvělit ekvivalenci definicí nebo diskutovat jemné rozdíly.

Ve formulaci větě 19 na straně 29 se mluví o stabilizátoru $H \in G$. Stabilizátor je množina (viz definice 9), takže asi to mělo být $H \subset G$. Autor čtenáře odkazuje na publikaci [2], ale v ní se důkaz nenachází. Naopak se mi líbí, že poměrně komplikovaný důkaz věty 21 sice neuvádí celý, ale dokazuje z celého tvrzení aspoň bijektivnost množin M a G/H (obsahem věty je difeomorfnost).

V důkazu lemmatu 6 na straně 30 v bodě 2 se mluví o negaci implikace, autor však myslí obměnu implikace. Věta 22 je opět dokazována zbytečně podrobně, navíc uvádět a dokazovat jako lemma implikaci

$$g \cdot m = n \qquad \rightarrow \qquad g^{-1} \cdot n = m$$

snad není nutné. Autor asi chtěl zdůraznit, že zde nejde přímo o grupové násobení, ale o akci r na množině, tedy $g \cdot m = r(g, m)$, tuto notaci však nepoužívá.

Na straně 33 je věta:

> Inspirováni definicí faktorové množiny a výsledkem, který nám říká, že jde o množinu tříd ekvivalence, zkusme blíže rozebrat, jakou množinu tříd ekvivalence představuje G/H.

Uvádím tuto větu jako příklad, kdy je autorova snaha o volnější styl na úkor srozumitelnosti. Avšak volnější styl by měl přispět k lepšímu porozumění obsahu, ne obsah naopak zamlžovat. Faktorová množina byla zavedena v definici 10 na straně 10 přímo jako množina tříd ekvivalence. Když autor mluví o "faktorové množině a výsledku, že jde o třídy ekvivalence", není jasné, co myslí. Jaký výsledek? Zřejmě myslí pouze definici. Obsah celé věty se tedy redukuje na oznámení "Teď se vrátíme k definici množiny tříd ekvivalence G/H." Víc informací věta nenese. Když chce autor čtenáři připomínat, jak byla množina G/H definovaná, mnohem užitečnější by bylo uvést referenci na definici 10.

Dalším příkladem slovní redundance:

> Zaveďme symbol $H\, g_a$, kterým budeme označovat množinu
>
> $$\{h \circ g_a \mid h \in H\},$$
>
> tedy množinu všech prvků ekvivalentních s prvkem g_a. *Z naší definice ekvivalence lze jednoduše rozpoznat, že žádné další prvky ekvivalentní s g_a existovat nemohou.*

Co se chce říct? Nejprve definujeme množinu všech ekvivalentních prvků a pak se ptáme, jestli obsahuje všechny ekvivalentní prvky? Věta vytištěna kurzívou nepřidává žádnou novou informaci, naopak je matoucí a vyvolává různé otázky. Jakou úvahou lze jednoduše rozpoznat, že žádné další ekvivalentní prvky existovat nemohou? Jak to souvisí s definicí ekvivalence? Zvlášť, když autor pokračuje slovy "Na základě této úvahy vystavějme množinu $\mathcal{A} = \ldots$" Na základě jaké úvahy?

Kapitola 2 Fyzikální aplikace

Opět je trochu nelogické nejprve definovat pojem pomocí pojmu, který teprve bude definován, jako v definicích 58 a 59. V definici 62 zní trochu krkolomně formulace "Fyzikální zákony je zobrazení". Možná by stálo za zmínku (týká se to definice 62), že je jemný rozdíl mezi tečným vektorem $\dot{\nu}$

ke křivce ν na konfiguračním prostoru a jejím zdvihem na tečném bundlu. Lagrangián $\mathcal{L}$ je pak vyčíslen právě na zdvihu, takže je nejen funkcí tečného vektoru samotného, ale i souřadnic.

Variační odvození Lagrangeových rovnic bohužel nijak netěží z aparátu diferenciální geometrie. Ačkoli tomuto odvození předchází formulace mechaniky v pojmech tečných bundlů, nijak se to v aplikaci neprojeví a to, co autor popisuje, je standardní odvození Lagrangeových rovnic v zobecněných souřadnicích známé z úvodního kurzu teoretické mechaniky. Zcela stranou jsou ponechána témata jako kanonická pole na tečném a kotečném bundlu (Liouvilleovo pole, vertikální endomorfismus, symplektická forma a její potenciál), bezsouřadnicový zápis Lagrangeových rovnic, geometrická interpretace kanonických transformací, etc.

Až kapitola o Jacobiho konexích je zajímavá tím, že dává do souvisu aparát homogenních prostorů zavedený v první kapitole práce s geometrií na konfiguračním prostoru. Teprve teď čtenář vidí netriviální aplikaci celé geometrické mašinerie. Bohužel, tato poslední kapitola je velmi nedotažená.

Pro ilustraci dané metody autor využívá fyzikální problém pohybu tělesa v homogenním gravitačním poli. Ukazuje, že metoda konstrukce Jacobiho metriky a konexe vede na složitou soustavu nelineárních diferenciálních rovnic, kterou nejde snadno řešit. Pak hovoří o "konceptuálně elegantním způsobu hledání geodetik" a odkazuje se na větu 32. A tím analýza uvedeného problému končí. Jelikož řešení tohoto problému konvenčními metodami je triviální, nepovažuji zvolený příklad za příliš šťastný, když "geometrickou" metodou nejde problém vůbec dořešit. Proč tedy zkoumat tak jednoduchý problém tak sofistikovanou mašinerií, když to k ničemu nevede?

Možná touto metodou nejde najít řešení pohybových rovnic, ale lze o systému zjistit něco důležitého, jako integrály pohybu, nějaké netriviální charkateristiky řešení nebo něco, ale o tom se autor nezmiňuje. Neuvádí ani příklad, kdy je "geometrická" metoda naopak užitečná. Závěr práce tak vyznívá do prázdna.

Věta 36 je bez důkazu, což nevadí, ale zase je i bez reference na literaturu, kde lze důkaz najít, a autor místo toho suše konstatuje, že důkaz "nebude". To se mi nezdá úplně vhodné.

V úplném závěru práce autor uvádí, že práce je zakončena konkrétním výsledkem pro speciální případ. Nevím, který výsledek se myslí. Je to snad věta 37? Znamená to, že tato věta je autorovým vlastním výsledkem? Z textu to není zřejmé. Ale pokud ano, chybějící důkaz je dost vážným nedostatkem. Autor jen uvádí, že věta byla dokázána pomocí výpočtů v počítačovém programu Maxima. Když je tato věta jediným konkrétním výsledkem, mohl autor uvést alespoň mezivýsledky (Maxima umožňuje poměrně pohodlný export do systému LaTeX, čili by ani nešlo o tolik ruční práce), nebo exportovat celý výpočet jako PDF a přiložit jej k práci. Jinak mi to připomíná tvrzení "důkaz se mi nevešel na okraj stránky".

2.1 Některé typografické chyby

- Množiny jako $\mathrm{Bij}(M)$ či $\mathrm{Diff}(M)$ by se měly označovat základním písmem, ne kurzívou jako $Bij(M)$ či $Diff(m)$.
- Přirozené číslo n by se mělo konzistentně psát jako proměnná, tedy kurzívou. V textu se však píše o n-dimenzionálním prostoru, ne o $n-$dimezionálním prostoru. Navíc, na začátku věty se z toho stává N-dimenzionální prostor. Myslím, že je zvykem rozlišovat n a N.

2.2 Některé překlepy a gramatické chyby

- Autor důsledně neskloňuje slovo "lemma" a uvádí jej pouze v nominativu.

- Slovo “zdali” autor systematicky píše v nesprávném tvaru “zda-li”
- Česky píšeme “difeomorfismus”, nikoli “diffeomorfismus”.
- Obecná teorie relativity si jistě zasluhuje úctu, ale pokud není na začátku věty, stačí ji psát s malým začátečním písmenem.
- Definice 3, “zároveń” $\mapsto$ “zároveň”
- Strana 7, bod 4. důkazu, “na konec” $\mapsto$ “nakonec”
- Věta 6, strana 12, “struktutu” $\mapsto$“strukturu”
- Strana 17, “struktury vzešli” $\mapsto$ “struktury vzešly”
- Strana 17, “respektice” $\mapsto$ “respektive”
- Strana 20, definice 36, “budleu” $\mapsto$ “bundlu”
- Strana 24, věta 17, “zabůsobíme” $\mapsto$ “zapůsobíme”
- Strana 25, důkaz 17, “vlastnoti” $\mapsto$ “vlastnosti”
- Strana 26, v poznámce, “geodetiké” $\mapsto$ “geodetické”
- Strana 27, “dvojdimenzionální” $\mapsto$ “dvojdimenzionálním”
- Strana 27, “Eulidově prostoru” $\mapsto$ “Euklidově prostoru”
- Strana 27, “Euklidovskou metriku” $\mapsto$ “euklidovskou metriku”
- Strana 27, “byla izometrie” $\mapsto$ “bylo izometrií”
- Strana 28, “Lorentzovská” $\mapsto$ “lorentzovská”
- Strana 28, “Riemannovské metriky” $\mapsto$ “riemannovské metriky”
- Strana 29, “dvoudimenzionální” $\mapsto$ “dvojdimenzionální”
- Strana 34, definice 50, “hlavní grupu” $\mapsto$ “hlavní grupou”
- Strana 34, v poznámce chybí tečka před poslední větou
- Strana 36, pod definicí 53, “automorfizm,” $\mapsto$ “automorfizmu”
- Strana 44, poznámka, “mimojiné” $\mapsto$ “mimo jiné”
- Strana 45, “variery” $\mapsto$ “variety”
- Strana 45, “kopírovali” $\mapsto$ “kopírovaly”
- Strana 47, první čárka v první větě poznámky
- Strana 47, teorém 2, “Riemannovskou” $\mapsto$ “riemannovskou”
- Strana 47, teorém 2, “zobrzení” $\mapsto$ “zobrazení”

- Strana 49, první odstavec, chybí mezera mezi slovy "přijít důležitá", za slovem "symetrie" je nesprávně čárka
- Strana 49, druhý odstavec, "struktutu" $\mapsto$ "strukturu"
- Strana 52, "Euklidovký" $\mapsto$ "euklidovský"
- Strana 52, "kinetického člene" $\mapsto$ "kinetického členu"
- Strana 52, formulace "vrátit se k ní vrátit"
- Strana 52, "a pariori"$\mapsto$"a priori"
- Strana 52, "z části" $\mapsto$ "zčásti"
- Strana 54, "vývojím" $\mapsto$ "vývojům"
- Strana 54, "Kronekerovská" $\mapsto$ "kroneckerovská"
- Strana 56, bod 2 důkazu 35, "musí mu příslušné" $\mapsto$ "musí jemu příslušné"
- Strana 56, "Euklidovské" $\mapsto$ "euklidovské"
- Strana 56, "zjištných" $\mapsto$ "zištných"