Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Karel Lavička

Invariantní míry pro dissipativní stochastické diferenciální rovnice

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Seidler, CSc.

Studijní program: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie
Studijní obor: Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy

Praha 2012

Děkuji panu RNDr. Janu Seidlerovi, CSc., za zodpovědné vedení této diplomové práce, pomoc s matematickými problémy a za opravování mých chyb a nedostatků. Obzvláště mu pak děkuji za poznámky rozšiřující můj náhled na zpracovávané úlohy.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona ve znění pozdějších předpisů, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 19.7.2012 Karel Lavička

Název práce: Invariantní míry pro dissipativní stochastické diferenciální rovnice
Autor: Karel Lavička
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jan Seidler, CSc., Ústav teorie informace a automatizace AV ČR
email vedoucího: seidler@utia.cas.cz

Abstrakt: Hlavním tématem je formulace a nový zjednodušený důkaz Sunyachovy věty, která poskytuje postačující podmínky pro existenci a jednoznačnost invariantní míry markovského jádra na úplném separabilním metrickém prostoru s borelovskou σ-algebrou. Při silné fellerovskosti je původní slabá konvergence získaná ze Sunyachovy věty zesílena na konvergenci v totální variaci. Dále jsou formulovány podmínky na geometrickou rychlost této konvergence. Další oblastí je popis silné fellerovskosti, její charakterizace pomocí absolutní měřitelnosti a stejnoměrné integrovatelnosti a některé jiné postačující podmínky.

Klíčová slova: markovské jádro, invariantní míra, silná fellerovskost

Title: Invariant measures for dissipative stochastic differential equations
Author: Karel Lavička
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Jan Seidler, CSc., Institute of Information Theory and Automation of the ASCR
Supervisors's email: seidler@utia.cas.cz

Abstract: The main topic of this Thesis is a new simplified proof of the Sunyach theorem that provides sufficient conditions for existence and uniqueness of an invariant measure for a Markov kernel on a complete separable metric space equipped with its Borel σ-algebra. Weak convergence of measures following from Sunyach's theorem is strengthened to convergence in the total variation norm provided that the Markov kernel is strong Feller. Furthermore, sufficient conditions for geometric ergodicity are stated. Another topic treated is the strong Feller property: its characterization by absolute measurability and uniform integrability and derivation of some other sufficient conditions.

Keywords: Markov kernel, invariant measure, strong Feller property

Obsah

Úvod

Diplomová práce je věnována ergodické teorii markovských procesů. Jejím základem je Sunyachova věta, původně dokázaná v [12], jež pojednává o existenci a jednoznačnosti invariantní míry markovského jádra na úplném separabilním metrickém prostoru opatřeném borelovskou σ-algebrou. Je-li lineární operátor na měřitelných omezených reálných funkcích přiřazený markovskému jádru kontraktivní na prostoru lipschitzovských funkcí a míry odpovídající markovskému jádru mají konečný moment, existuje jediná invariantní míra markovského jádra a rozdělení markovského procesu s libovolným počátečním rozdělením k ní slabě konverguje. Zde předvedený důkaz je snadno srozumitelný, neboť je prostým užitím Banachovy věty o pevném bodu v prostoru měr opatřeném Wassersteinovou metrikou, kvůli čemuž je zároveň zaručena geometrická rychlost konvergence k invariantní míře. Původní Sunyachova práce možnost takového důkazu zmiňuje jen velmi vágně a skutečný důkaz, který obsahuje, je podstatně těžší na pochopení.

Důsledkem Sunyachovy věty je její analogie pro semigrupu markovských jader, pomocí které lze sestrojit podmínky na koeficienty autonomní stochastické diferenciální rovnice, při jejichž platnosti existuje právě jediná invariantní míra. Opět platí, že rozdělení řešení rovnice s libovolně zvoleným bodem jako počáteční podmínkou konverguje slabě k invariantní míře.

Silnější výsledek dostaneme, pokud je markovské jádro silně fellerovské. Je ukázáno, že slabá konvergence rozdělení markovského procesu získaná ze Sunyachovy věty je konvergencí měr v totální variaci za dodatečného předpokladu silné fellerovskosti. Dalšími slabými předpoklady lze zachovat geometrickou rychlost konvergence měr v totální variaci.

Silná fellerovskost markovského jádra se v některých případech ověřuje složitě, proto je vhodné nalézt její charakterizaci nebo alespoň postačující podmínky. Východiskem je pojem absolutní měřitelnosti markovského jádra, to jest existence míry zvané báze, vzhledem ke které jsou všechny míry odpovídající markovskému jádru absolutně spojité. Absolutní měřitelnost je slabší než silná fellerovskost, avšak v mnoha aplikacích, například ve stochastické analýze, se absolutně měřitelná fellerovská markovská jádra, která nejsou silně fellerovská, takřka neobjevují. René Schilling a Jiang Wang v preprintu [10] ukázali, že absolutně měřitelné fellerovské markovské jádro v euklidovském prostoru s lokálně omezenou hustotou je silně fellerovské. Povšimli jsme si, že jejich přístup lze podstatně zjednodušit a zároveň zobecnit pro jiné prostory, pokud je užita charakterizace silné fellerovskosti v řeči stejné σ-aditivity měr odpovídajících markovskému jádru zmíněná v článku [7]. Vyjasní se, že zásadní není lokální omezenost hustot, ale jejich stejnoměrná integrovatelnost. Výrazně zjednodušit se podařilo i Schillingův a Wangův důkaz věty říkající, že fellerovské markovské jádro omezeně zobrazující Orliczův prostor do L^∞ je silně fellerovské. Bohužel, pokus o popis silně fellerovských jader pomocí jejich báze nebyl úspešný, a tak například problém, zda existuje absolutně měřitelné fellerovské jádro na $[0, 1]$ s bází tvořenou Lebesgueovou mírou, které není silně fellerovské, zůstává otevřený.

Práce je uspořádána následujícím způsobem. V první kapitole jsou shrnuty výsledky o topologiích v prostorech měr a o markovských jádrech včetně popisu jejich fellerovskosti, silné fellerovskosti a ultra fellerovskosti. Druhá kapitola obsahuje znění a důkaz Sunyachovy věty, jejího důsledku pro semigrupy markovských jader a její využití v tvrzení o existenci a jednoznačnosti invariantní míry stochastické diferenciální rovnice. Dále obsahuje podkapitolu věnující se rozšíření Sunyachovy věty pro konvergenci měr v totální variaci. Třetí kapitola se věnuje popisu silné fellerovskosti markovských jader. Nejprve obsahuje jednoduše ověřitelnou, avšak nepříliš vyčerpávající postačující podmínku, která je následně zpřesněna na charakterizaci. Nakonec je zaveden Orliczův prostor a další postačující podmínka na silnou fellerovskost.

1 Průpravné výsledky o mírách a markovských jádrech

V celém dalším textu bude (E, d) označovat úplný separabilní metrický prostor a $\mathcal{E}$ σ-algebru jeho borelovských podmnožin. $(E, \mathcal{E})$ je prostorem, na kterém jsou definována všechna dále uvažovaná markovská jádra, a tedy je také prostorem hodnot jim příslušných náhodných procesů.

1.1 Konvergence měr

V následujícím budeme uvažovat čtyři druhy konvergence měr na prostoru $(E, \mathcal{E})$, konkrétně slabou konvergenci, bodovou konvergenci, konvergenci v totální variaci a konvergenci ve Wassersteinově metrice. V této sekci jsou všechny postupně zavedeny.

1.1.1 Slabá konvergence

Označme $\mathcal{C}_b(E)$ prostor spojitých omezených reálných funkcí definovaných na E.

Definice 1.1. Nechť $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost konečných měr na $\mathcal{E}$. Řekneme, že tato posloupnost *konverguje slabě* k míře μ na $\mathcal{E}$, pokud platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f \mathrm{d}\mu_n = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$.

Lemma 1.2. *Nechť μ a ν jsou konečné míry na $\mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$ je otevřená, $\mu(E \setminus A) = \nu(E \setminus A) = 0$ a pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$, nulovou na $E \setminus A$, platí*

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\nu,$$

potom je $\mu = \nu$.

Důkaz. Označme

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{E}, \mu(B) = \nu(B)\}$$

a $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ systém otevřených množin v E. Cílem je ukázat, že $\mathcal{E} = \mathcal{M}$. Nejdříve dokažme $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, to jest, že pro každou $B \in \mathcal{E}$ otevřenou platí $\mu(B) = \nu(B)$. Stačí však ukázat, že $\mu(B \cap A) = \nu(B \cap A)$, neboť

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \cap (E \setminus A)) = \mu(B \cap A), \text{ protože } 0 \le \mu(B \cap (E \setminus A)) \le \mu(E \setminus A) = 0,$$

a stejně tak pro ν. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď

$$f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, E \setminus (B \cap A))\},$$

potom, je-li $x \in E \setminus A$, je také $x \in E \setminus (B \cap A)$, a tedy $f_n(x) = 0$. Dále také platí $f_n \in \mathcal{C}_b(E)$, $0 \le f_n \le I_{B\cap A} \le 1$ a $f_n \nearrow I_{B\cap A}$, z čehož s pomocí věty o monotónní nebo majorizované konvergenci plyne

$$\mu(B \cap A) = \int_E I_{B\cap A} \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \mathrm{d}\nu = \int_E I_{B\cap A} \mathrm{d}\nu = \nu(B \cap A).$$

Skutečně tedy platí $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$.

Systém $\mathcal{M}$ je Dynkinův, proto je také $\delta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, kde $\delta(\mathcal{M})$ značí průnik všech Dynkinových systémů obsahujících $\mathcal{M}$. Dále z Dynkinova lemmatu $\sigma(\mathcal{U}) = \delta(\mathcal{U})$, neboť $\mathcal{U}$ je uzavřen na konečné průniky. Celkově platí $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{U}) = \delta(\mathcal{U}) \subset \delta(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, čímž je důkaz dokončen, neboť $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ jistě platí. $\square$

Důsledek 1.3. *Slabá limita měr je určena jednoznačně.*

Důkaz. Nechť $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost měr na $\mathcal{E}$ a μ a ν jsou míry na $\mathcal{E}$, pro něž platí $\mu_n \to \mu$ slabě a $\mu_n \to \nu$ slabě, potom z jednoznačnosti limity posloupnosti reálných čísel pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$ platí

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f \mathrm{d}\mu_n = \int_E f \mathrm{d}\nu.$$

Podle lemmatu 1.2 je $\mu = \nu$, v jeho předpokladech totiž stačí volit $A = E$. $\square$

1.1.2 Bodová konvergence

Označme $b\mathcal{E}$ prostor všech omezených měřitelných reálných funkcí definovaných na E. Platí následující jednoduché pozorování.

Poznámka 1.4. *Nechť $f \in b\mathcal{E}$ a $\|f\|_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$, potom $(b\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor.*

Důkaz. Jistě platí, že $\|\cdot\|_\infty$ je norma na $b\mathcal{E}$. Buď $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset b\mathcal{E}$ cauchyovská vzhledem k $\|\cdot\|_\infty$, potom pro $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$ kdykoliv $m, n > n_0$. Pro každé $x \in E$ definujme $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$, potom pro $n > n_0$ platí

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\in E}\left|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)\right| = \sup_{x\in E}\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \\ &\leq \limsup_{m\to\infty}\sup_{x\in E} |f_n(x) - f_m(x)| = \limsup_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \leq \epsilon,\end{aligned}$$

a tedy $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Zbývá ukázat platnost $f \in b\mathcal{E}$. K tomu si však stačí uvědomit, že bodová limita měřitelných funkcí je měřitelná funkce a dále pro $n > n_0$

$$\|f\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq \epsilon + \|f_n\|_\infty < \infty,$$

protože $f_n \in b\mathcal{E}$. ☐

Definice 1.5. Řekneme, že posloupnost měr $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ na $\mathcal{E}$ *konverguje v topologii bodové konvergence* τ_S na prostoru měr k míře μ, pokud pro každou $A \in \mathcal{E}$ platí $\mu_n(A) \to \mu(A)$.

Lemma 1.6. *Jsou-li μ a μ_n, $n \in \mathbb{N}$, konečné míry na $\mathcal{E}$, platí $\mu_n \to \mu$ v τ_S právě tehdy, když je pro každou $f \in b\mathcal{E}$ splněno*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f \mathrm{d}\mu_n = \int_E f \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nechť $\mu_n \to \mu$ v τ_S a $f \in b\mathcal{E}$. Bez újmy na obecnosti buď $f \geq 0$, potom existuje posloupnost $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset b\mathcal{E}$ jednoduchých funkcí taková, že $f_n \nearrow f$ stejnoměrně na E. Zároveň platí

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_E f_k \mathrm{d}\mu_n - \int_E f\mathrm{d}\mu_n\right| \leq \lim_{k\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_E \|f_k - f\|_\infty \mathrm{d}\mu_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_n(E)\lim_{k\to\infty}\|f_k - f\|_\infty = 0, \tag{1}$$

protože $\{\mu_n(E)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentní, a tedy omezená, posloupnost čísel. Funkce $f_k, k \in \mathbb{N}$, jsou tvaru

$$f_k = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{k,i} I_{A_{k,i}}, \quad A_{k,i} \in \mathcal{E}, \quad \alpha_{k,i} \geq 0,$$

takže platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_n &= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu_n = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu_n \\ &= \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\alpha_{k,i}\mu_n(A_{k,i}) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\alpha_{k,i}\mu(A_{k,i}) \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

přičemž záměna limity a integrálu je možná díky větě o monotónní konvergenci a záměna limit je důsledkem Mooreovy-Osgoodovy věty, jejíž předpoklad je ověřen vztahem (1).

Nechť naopak platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f\mathrm{d}\mu_n = \int_E f\mathrm{d}\mu$$

pro každou $f \in b\mathcal{E}$. Buď $A \in \mathcal{E}$ libovolná, potom $I_A \in b\mathcal{E}$, a tedy

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n(A) = \lim_{n\to\infty}\int_E I_A\mathrm{d}\mu_n = \int_E I_A\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

☐

Důsledek 1.7. *Konverguje-li posloupnost konečných měr v τ_S, potom konverguje slabě a má tutéž limitu.*

Důkaz. Platí $\mathcal{C}_b(E) \subset b\mathcal{E}$, takže stačí použít lemma 1.6 a definici slabé konvergence měr. □

Lemma 1.8. *Nechť μ je míra na $\mathcal{E}$ a $A \in \mathcal{E}$ a $\epsilon > 0$ jsou libovolné, potom platí následující.*

(i) Existuje $G \in \mathcal{E}$ otevřená taková, že $A \subset G$ a $\mu(G \setminus A) < \epsilon$.

(ii) Existuje $F \in \mathcal{E}$ uzavřená taková, že $F \subset A$ a $\mu(A \setminus F) < \epsilon$.

Důkaz. Viz [9], kapitola II, věta 1.2. □

Lemma 1.9. *Buď $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost konečných měr na $\mathcal{E}$. Pokud pro míru μ na $\mathcal{E}$ a všechny $B \in \mathcal{E}$ otevřené platí*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B),$$

potom je $\mu_n \to \mu$ v τ_S.

Důkaz. Jedná se o důsledek věty 4.1. v [1], pro názornost je však uveden elementární důkaz.

Je-li $F \in \mathcal{E}$ uzavřená, platí také $\lim_{n\to\infty} \mu_n(F) = \mu(F)$. Množina $E \setminus F$ je otevřená, a tedy

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(F) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) - \lim_{n\to\infty} \mu_n(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(E \setminus F) = \mu(F).$$

Nechť $A \in \mathcal{E}$ je libovolná a $\epsilon > 0$, potom podle lemmatu 1.8 existují $G \in \mathcal{E}$ otevřená a $F \in \mathcal{E}$ uzavřená takové, že $\mu(G \setminus A) < \frac{\epsilon}{2}$ a $\mu(A \setminus F) < \frac{\epsilon}{2}$. To také znamená, že

$$|\mu(G) - \mu(F)| = \mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus A) + \mu(A \setminus F) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \tag{2}$$

Platí

$$\mu(F) \le \mu(A) \le \mu(G) \;\text{ a }\; \mu_n(F) \le \mu_n(A) \le \mu_n(G),\; n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

takže také limitním přechodem pro $n \to \infty$

$$\mu(F) \le \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) \le \mu(G)$$

a s využitím (2) je

$$\left|\limsup_{n\to\infty} \mu_n(A) - \liminf_{n\to\infty} \mu_n(A)\right| \le |\mu(G) - \mu(F)| < \epsilon.$$

Protože ϵ bylo libovolné, existuje $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$. Z odhadů (2) a (3) je jasné, že $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$, takže $\mu_n \to \mu$ v τ_S. □

Definice 1.10. Systém měr $\{\mu_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ na $\mathcal{E}$ se nazývá *stejně σ-aditivní*, pokud pro každou $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ takovou, že $A_k \searrow \emptyset$, to jest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ a $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, platí $\sup_{\alpha\in\mathcal{A}} \mu_\alpha(A_k) \to 0$ pro $k \to \infty$.

Lemma 1.11. *Systém měr $\{\mu_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ na $\mathcal{E}$ je τ_S-relativně sekvenciálně kompaktní právě tehdy, když je stejně σ-aditivní.*

Důkaz. Viz [5], věta 2.6. □

1.1.3 Konvergence v totální variaci

Označme $ca(\mathcal{E})$ prostor konečných znaménkových měr na $\mathcal{E}$. Pro $\mu \in ca(\mathcal{E})$ buď

$$\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \le 1\right\}, \tag{4}$$

potom platí následující pozorování.

Lemma 1.12. *$\|\cdot\|$ definovaná vzorcem (4) je norma na $ca(\mathcal{E})$ a prostor $ca(\mathcal{E})$ lze isometricky vnořit do $b\mathcal{E}^*$, to jest do duálního prostoru k $b\mathcal{E}$.*

Důkaz. Nejprve sestrojíme vnoření $ca(\mathcal{E})$ do $b\mathcal{E}^*$, poté ukážeme, že vzhledem k němu odpovídá $\|\cdot\|$ duální normě na $b\mathcal{E}^*$, a tedy, že vnoření je isometrie.

Buď tedy $T : ca(\mathcal{E}) \to b\mathcal{E}^*$ takové, že

$$T : \mu \mapsto L, \quad \text{kde} \quad L : f \mapsto \int_E f \mathrm{d}\mu \quad \text{pro} \quad f \in b\mathcal{E}.$$

Skutečně $L \in b\mathcal{E}^*$, protože je zřejmě lineární a platí

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup\{|L(f)|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\} = \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu^+ - \int_E f \mathrm{d}\mu^-\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\|f\|_\infty \left|\mu^+(E) + \mu^-(E)\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} = |\mu|(E) < \infty. \end{aligned} \tag{5}$$

Pro $\mu, \nu \in ca(\mathcal{E})$, $\mu \neq \nu$ existuje $A \in \mathcal{E}$ splňující $\mu(A) \neq \nu(A)$, z čehož plyne, že T je prosté, protože

$$T(\mu)(I_A) = \int_E I_A \mathrm{d}\mu = \mu(A) \neq \nu(A) = \int_E I_A \mathrm{d}\nu = T(\nu)(I_A).$$

Ukázali jsme, že T je vnoření $ca(\mathcal{E})$ do $b\mathcal{E}^*$.

Podle (5) je

$$\|T(\mu)\| = \|L\| = \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} = \|\mu\|,$$

z čehož plyne, že $\|\cdot\|$ je norma na $ca(\mathcal{E})$ a T je isometrie. □

Dá se ukázat, že prostor $(ca(\mathcal{E}), \|\cdot\|)$ je Banachův. Následující poznámka ukazuje, že normu $\|\cdot\|$ lze nazývat *normou totální variace*, protože je ekvivalentní s variací míry.

Poznámka 1.13. *Pro každou $\mu \in ca(\mathcal{E})$ platí*

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)| \leq \|\mu\| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)|$$

a

$$\frac{1}{2} |\mu|(E) \leq \|\mu\| \leq |\mu|(E).$$

Je-li navíc $\mu(E) = 0$, platí $\|\mu\| = |\mu|(E) = 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)|$.

Důkaz. Platí

$$\sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)| = \sup_{A \in \mathcal{E}} \left|\int_E I_A \mathrm{d}\mu\right| \leq \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} = \|\mu\|.$$

Nechť (P, N) je Hahnův rozklad E podle μ, potom je

$$|\mu|(E) = \mu^+(E) + \mu^-(E) = \mu(P) + |\mu(N)| \leq 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)|.$$

Dále v (5) bylo ukázáno, že $\|\mu\| \leq |\mu|(E)$. Všechny dokazované nerovnosti z výše uvedeného vyplývají.

Nechť platí $\mu(E) = 0$, zbývá ukázat $2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)| \leq \|\mu\|$.

$$\begin{aligned} 2 \sup_{A \in \mathcal{E}} |\mu(A)| &= 2 \sup\left\{\left|\int_E I_A \mathrm{d}\mu\right|, A \in \mathcal{E}\right\} \\ &\leq 2 \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, f \geq 0, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, f \geq 0, \|f\|_\infty \leq 2\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_E (f+1) \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu + \mu(E)\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_E f \mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} = \|\mu\|. \end{aligned}$$

□

Důsledek 1.14. *Nechť μ a μ_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou konečné míry na $\mathcal{E}$. Pokud $\|\mu_n - \mu\| \to 0$, potom také $\mu_n \to \mu$ v τ_S i slabě.*

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{E}$, potom

$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{A\in\mathcal{E}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \leq \lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0.$$

Tvrzení o slabé konvergenci je dokázáno v důsledku 1.7. □

1.1.4 Konvergence ve Wassersteinově metrice

Označme $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ množinu pravděpodobnostních měr na $\mathcal{E}$ a dále její podmnožinu

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{E}) = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}),\ \text{existuje } x_0 \in E, \int_E d(x_0, y)\mu(\mathrm{d}y) < \infty\right\}.$$

Buď $\mathcal{C}^{0,1}(E)$ prostor reálných lipschitzovských funkcí definovaných na E, to jest takových $f : E \to \mathbb{R}$, které splňují

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}, x, y \in E, x \neq y\right\} < \infty,$$

potom platí následující jednoduché pozorování.

Poznámka 1.15. *Pro $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ platí $\mathcal{C}^{0,1}(E) \subset L^1(\mu)$.*

Důkaz. Buď $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$ a $x_0 \in E$ takové, že $\int_E d(x_0, y)\mu(\mathrm{d}y) < \infty$, potom

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E (|f(x_0) - f(y)| + |f(x_0)|)\,\mu(\mathrm{d}y) \leq\ \mathrm{Lip}(f) \int_E d(x_0, y)\mu(\mathrm{d}y) + |f(x_0)| < \infty.$$

□

Důsledek 1.16.

$$\mathcal{P}_1(\mathcal{E}) = \left\{\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E}),\ \text{pro všechna } x \in E, \int_E d(x, y)\mu(\mathrm{d}y) < \infty\right\}$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že pro $f : y \mapsto d(x, y)$ platí $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$. □

Konečně buď pro $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$

$$W_1(\mu, \nu) = \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\mu - \int_E f\mathrm{d}\nu\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E),\ \mathrm{Lip}(f) \leq 1\right\}$$

a dále

$$\overline{W}_1(\mu, \nu) = \inf\left\{\int_{E\times E} d(x, y)\mathrm{d}\pi(x, y), \pi \in \Pi(\mu, \nu)\right\},$$

kde $\Pi(\mu, \nu)$ je množina všech sdružených rozdělení, jejichž marginální rozdělení jsou μ a ν, to jest

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}), \mu(A) = \pi(A, E), \nu(A) = \pi(E, A), A \in \mathcal{E}\}.$$

Uvědomme si, že $\overline{W}_1$ je dobře definováno, neboť

$$\begin{aligned}\int_{E\times E} d(x, y)\mathrm{d}\pi(x, y) &\leq \int_{E\times E} d(x, z)\mathrm{d}\pi(x, y) + \int_{E\times E} d(z, y)\mathrm{d}\pi(x, y)\\ &= \int_E d(x, z)\mu(\mathrm{d}x) + \int_E d(z, y)\nu(\mathrm{d}y) < \infty.\end{aligned}$$

$\overline{W}_1$ se nazývá *Wassersteinova metrika*. Že je skutečně metrikou, ukazuje následující věta, která ji zároveň ztotožňuje s W_1. Dále pak bude řečeno, že příslušný metrický prostor je úplný. Důkazy těchto tvrzení však nejsou elementární a proto nebudou zahrnuty.

Věta 1.17. *W_1 a $\overline{W}_1$ jsou metriky na $\mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a pro všechny $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ platí*

$$W_1(\mu,\nu) = \overline{W}_1(\mu,\nu).$$

Důkaz. Viz [2], věta 11.8.2. a lemma 11.8.3. $\square$

Věta 1.18. *$(\mathcal{P}_1(\mathcal{E}), W_1)$, a tedy i $(\mathcal{P}_1(\mathcal{E}), \overline{W}_1)$, je úplný metrický prostor.*

Důkaz. Viz [13], věta 6.8. $\square$

Lemma 1.19. *Konverguje-li posloupnost měr z $\mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ ve Wassersteinově metrice, pak konverguje i slabě a má tutéž limitu.*

Důkaz. Nechť $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a

$$\beta(\mu,\nu) = \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\mu - \int_E f\mathrm{d}\nu\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \|f\|_\infty + \operatorname{Lip}(f) \le 1\right\}.$$

Zřejmě platí $\beta(\mu,\nu) \le W_1(\mu,\nu)$, takže je-li $W_1(\mu_n,\mu) \to 0$, je i $\beta(\mu_n,\mu) \to 0$. Věta 11.3.3. v [2] však říká, že β je metrika na $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ metrizující slabou konvergenci. $\square$

Příklad 1.20. Konvergence ve Wassersteinově metrice nezaručuje bodovou konvergenci, tedy ani konvergenci v totální variaci. Buď $E = \mathbb{R}$, $\mu_n = \delta_{\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ a $\mu = \delta_0$, potom

$$W_1(\mu_n,\mu) = \sup\left\{\left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R}),\ \operatorname{Lip}(f) \le 1\right\} \le \frac{1}{n} \to 0,$$

ale

$$\mu_n(\{0\}) = 0 \not\to 1 = \mu(\{0\}).$$

Podobně konvergence v totální variaci, tedy ani bodová konvergence, nezaručují, že platí i konvergence ve Wassersteinově metrice. Buď opět $E = \mathbb{R}$, $\mu_n = \frac{n-1}{n}\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $\mu = \delta_0$, potom

$$\|\mu_n - \mu\| = \sup\left\{\left|\frac{1}{n}f(n) - \frac{1}{n}f(0)\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \le 1\right\} \le \frac{2}{n} \to 0,$$

ale pro $f : x \mapsto x$ je $f \in \mathcal{C}^{0,1}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Lip}(f) = 1$, a tedy platí

$$W_1(\mu_n,\mu) \ge \left|\frac{1}{n}f(n) - \frac{1}{n}f(0)\right| = 1 \not\to 0.$$

1.2 Markovská jádra

Definice 1.21. Zobrazení $K : E \times \mathcal{E} \to [0,1]$ se nazývá *markovským jádrem* na $\mathcal{E}$, pokud platí následující podmínky.

(i) Pro každé $A \in \mathcal{E}$ je $K(\cdot, A)$ měřitelná funkce na E.

(ii) Pro každé $x \in E$ je $K(x, \cdot)$ pravděpodobnostní míra na $\mathcal{E}$.

Každému markovskému jádru K na $\mathcal{E}$ je přirozeně přiřazen operátor K na $b\mathcal{E}$ (k nedorozuměním plynoucím ze shodného značení nebude docházet) tvaru

$$Kf(x) = \int_E f(y)K(x,\mathrm{d}y) \quad \text{pro} \quad x \in E \quad \text{a} \quad f \in b\mathcal{E}. \tag{6}$$

Poznámka 1.22. *K je lineární a spojitý operátor na $b\mathcal{E}$.*

Důkaz. Nechť $f \in b\mathcal{E}$, bez újmy na obecnosti $f \ge 0$, ukážeme, že $Kf \in b\mathcal{E}$. Existuje posloupnost $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset b\mathcal{E}$ jednoduchých funkcí splňující $f_k \nearrow f$, kde pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $f_k = \sum_{i=0}^{n_k} \alpha_{k,i} I_{A_{k,i}}$ pro $\alpha_{k,i} \ge 0$, $A_{k,i} \in \mathcal{E}$. Potom s využitím věty o monotónní konvergenci platí

$$Kf(x) = \int_E f(y)K(x,\mathrm{d}y) = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(y)K(x,\mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(y)K(x,\mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k,i}K(x,A_{k,i})$$

a protože $K(\cdot, A)$ je měřitelná pro všechna $A \in \mathcal{E}$, je Kf limitou měřitelných funkcí, tedy je měřitelná. Dále platí

$$\|Kf\|_\infty = \sup_{x\in E}\left|\int_E f(y)K(x,\mathrm{d}y)\right| \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in E} K(x,E) = \|f\|_\infty\,,$$

z čehož plyne, že K je operátor na $b\mathcal{E}$ a že K je také spojitý. Linearita je důsledkem linearity Lebesgueova integrálu. $\square$

Podobně jako pro omezené měřitelné funkce určuje markovské jádro K na $\mathcal{E}$ operátor K^* na prostoru $ca(\mathcal{E})$. K^* je definovaný následovně.

$$K^*\mu(A) = \int_E K(y,A)\mu(\mathrm{d}y) \;\text{ pro }\; \mu \in ca(\mathcal{E}) \;\text{ a }\; A \in \mathcal{E}.$$

Ve speciálním případě $\mu = K(x,\cdot)$ zavádíme značení

$$K^{(1)}(x,A) = K(x,A), \qquad K^{(n)}(x,A) = K^*\left(K^{(n-1)}(x,\cdot)\right)(A),$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $x \in E$ a $A \in \mathcal{E}$. Z lemmatu 1.25 plyne, že $K^{(n)}$ lze zavést také ekvivalentní definicí jako $K^{(n)}(x,A) = K\left(K^{(n-1)}(\cdot,A)\right)(x)$.

Poznámka 1.23. *Pro každou $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ je $K^*\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $K^{(n)}$ markovké jádro na $\mathcal{E}$.*

Důkaz. $K^*\mu$ je pravděpodobnostní míra, protože

$$K^*\mu(\emptyset) = \int_E K(y,\emptyset)\mu(\mathrm{d}y) = \int_E 0\mu(\mathrm{d}y) = 0,$$

$$K^*\mu(E) = \int_E K(y,E)\mu(\mathrm{d}y) = \int_E 1\mu(\mathrm{d}y) = 1$$

a pro posloupnost $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ disjunktních množin je s využitím Fubiniho věty

$$K^*\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \int_E K\left(y, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\mu(\mathrm{d}y) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\int_E K(y,A_n)\mu(\mathrm{d}y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} K^*\mu(A_n).$$

Pro $A \in \mathcal{E}$ je zřejmě $K^{(1)}(\cdot,A)$ měřitelná, neboť $K^{(1)} = K$. Nechť je tedy $K^{(n)}$ markovské jádro pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, potom

$$K^{(n+1)}(x,A) = K^*\left(K^{(n)}(x,\cdot)\right)(A) = \int_E K(y,A)K^{(n)}(x,\mathrm{d}y) = K^{(n)}\left(K(\cdot,A)\right)(x)$$

a protože $K^{(n)}$ je markovské jádro, dostáváme z definice operátoru $K^{(n)}$ platnost $K^{(n+1)}(\cdot,A) \in b\mathcal{E}$. $\square$

Poznámka 1.24. *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$, $f \in b\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, potom platí*

$$\int_E f(y)K^*\mu(\mathrm{d}y) = \int_E Kf(y)\mu(\mathrm{d}y). \tag{7}$$

Důkaz. Nechť $f \in b\mathcal{E}$, bez újmy na obecnosti $f \geq 0$, potom existuje posloupnost $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset b\mathcal{E}$ jednoduchých funkcí splňující $f_k \nearrow f$, přičemž pro každé $k \in \mathbb{N}$ je f_k tvaru $f_k = \sum_{i=0}^{n_k}\alpha_{k,i}I_{A_{k,i}}$, kde $\alpha_{k,i} \geq 0$ a $A_{k,i} \in \mathcal{E}$. Platí

$$\int_E f_k(y)K(\cdot,\mathrm{d}y) \nearrow \int_E f(y)K(\cdot,\mathrm{d}y), \tag{8}$$

protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $f_k \leq f_{k+1}$, a tedy pro všechna $z \in E$

$$\int_E f_k(y)K(z,\mathrm{d}y) \leq \int_E f_{k+1}(y)K(z,\mathrm{d}y).$$

Důsledkem (8) a věty o monotónní konvergenci je

$$\lim_{k\to\infty}\int_E\int_E f_k(y)K(z,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}z) = \int_E\int_E f(y)K(z,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}z) = \int_E Kf(z)\mu(\mathrm{d}z).$$

Platí však

$$\begin{aligned}
\int_E f(y)K^*\mu(\mathrm{d}y) &= \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(y)K^*\mu(\mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k}\alpha_{k,i}K^*\mu(A_{k,i}) \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{n_k}\alpha_{k,i}\int_E K(z,A_{k,i})\mu(\mathrm{d}z) \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_E\sum_{i=0}^{n_k}\alpha_{k,i}K(z,A_{k,i})\mu(\mathrm{d}z) \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_E\int_E\sum_{i=0}^{n_k}\alpha_{k,i}I_{A_{k,i}}(y)K(z,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}z) \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_E\int_E f_k(y)K(z,\mathrm{d}y)\mu(\mathrm{d}z),
\end{aligned}$$

takže je požadovaná rovnost dokázána. □

Vzájemný vztah operátorů K a K^* v (7) je důležitý například proto, že umožňuje snadným způsobem dokázat následující velmi užitečné lemma.

Lemma 1.25 (Chapmanova-Kolmogorovova rovnost). *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$, $f\in b\mathcal{E}$, $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $m,n\in\mathbb{N}$, potom platí*

$$K^{(n+m)}f = K^{(n)}\left(K^{(m)}f\right)$$

a

$$K^{(n+m)*}\mu = K^{(n)*}\left(K^{(m)*}\mu\right).$$

Důkaz. Nejprve indukcí dokážeme první vztah. Nechť $n\in\mathbb{N}$ a $x\in E$, potom je

$$\begin{aligned}
K^{(n+1)}f(x) &= \int_E f(y)K^{(n+1)}(x,\mathrm{d}y) = \int_E f(y)K^*\left(K^{(n)}(x,\cdot)\right)(\mathrm{d}y) \\
&= \int_E Kf(y)K^{(n)}(x,\mathrm{d}y) = K^{(n)}\left(K^{(1)}f\right)(x),
\end{aligned}$$

takže rovnost platí pro $m=1$ a všechna $n\in\mathbb{N}$. Nechť tedy platí pro nějaké $m\in\mathbb{N}$ a všechna $n\in\mathbb{N}$, potom

$$K^{(n+m+1)}f = K^{(n+1)}\left(K^{(m)}f\right) = K^{(n)}\left(K^{(1)}\left(K^{(m)}f\right)\right) = K^{(n)}\left(K^{(m+1)}f\right),$$

čímž je ukázán i indukční krok a tvrzení je pravdivé pro všechna $m,n\in\mathbb{N}$.

Dále nechť $A\in\mathcal{E}$, důsledkem právě dokázané rovnosti je

$$\begin{aligned}
K^{(n+m)*}\mu(A) &= \int_E K^{(n+m)}(x,A)\mu(\mathrm{d}x) = \int_E K^{(n+m)}I_A(x)\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_E K^{(m)}\left(K^{(n)}I_A\right)(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_E K^{(n)}I_A(x)K^{(m)*}\mu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_E K^{(n)}(x,A)K^{(m)*}\mu(\mathrm{d}x) = K^{(n)*}\left(K^{(m)*}\mu\right)(A).
\end{aligned}$$

□

Důsledek 1.26. *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$, $f\in b\mathcal{E}$, $\mu\in\mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $n\in\mathbb{N}$, potom platí*

$$K^{(n)}f = K^n f \quad\text{a}\quad K^{(n)*}\mu = \left(K^*\right)^n\mu,$$

kde $K^{(n)*}$ je operátor odvozený z markovského jádra $K^{(n)}$ a $\left(K^*\right)^n$ je n-tá mocnina operátoru K^*.

Definice 1.27. Řekneme, že $\{P_t\}_{t\geq 0}$ je *semigrupa markovských jader* na $\mathcal{E}$, pokud platí následující.

(i) Pro každé $t\geq 0$ je P_t markovské jádro na $\mathcal{E}$.

(ii) Je splněna Chapmanova-Kolmogorovova rovnost, to jest pro každé $x \in E$, $A \in \mathcal{E}$ a $s, t \geq 0$ je

$$P_{t+s}(x, A) = \int_E P_s(y, A) P_t(x, \mathrm{d}y).$$

Poznámka 1.28. *Je-li $\{P_t\}_{t\geq 0}$ semigrupa markovských jader, platí analogie lemmatu 1.25, to jest pro $f \in b\mathcal{E}$, $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $s, t \geq 0$ je*

$$P_{t+s}f = P_t\left(P_s f\right)$$

a

$$P^*_{t+s}\mu = P^*_t\left(P^*_s \mu\right).$$

Důkaz. Nechť $A \in \mathcal{E}$ a $x \in E$, podle definice platí

$$\begin{aligned} P_{t+s} I_A(x) &= P_{t+s}(x, A) = \int_E P_s(y, A) P_t(x, \mathrm{d}y) \\ &= P_t\left(P_s(\cdot, A)\right)(x) = P_t\left(P_s I_A\right)(x). \end{aligned}$$

Rovnost $P_{t+s}f = P_t\left(P_s f\right)$, kde $f \in b\mathcal{E}$, je tedy pravdivá pro $f = I_A$. Standardním postupem přejdeme k platnosti pro jednoduché funkce a poté pro libovolné měřitelné a omezené. Důkaz $P^*_{t+s}\mu = P^*_t\left(P^*_s\mu\right)$ dostaneme, opakujeme-li postup v důkazu lemmatu 1.25. □

1.2.1 Fellerovská, silně fellerovská a ultra fellerovská markovská jádra

Až dosud jsme k žádnému výsledku o markovských jádrech nepotřebovali metrickou strukturu E, stačilo, aby $(E, \mathcal{E})$ byl libovolný měřitelný prostor. Situace se změní v následující definici, ve které je potřebná alespoň topologie, aby bylo možné hovořit o spojitosti funkcí na E. Dále však opět předpokládáme metrizovatelnost, separabilitu a úplnost.

Definice 1.29. Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$. K se nazývá

(i) *fellerovské*, pokud pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$ platí $Kf \in \mathcal{C}_b(E)$,

(ii) *silně fellerovské*, pokud pro každou $f \in b\mathcal{E}$ platí $Kf \in \mathcal{C}_b(E)$,

(iii) *ultra fellerovské*, pokud je zobrazení $E \to (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \|\cdot\|)$, $x \mapsto K(x, \cdot)$, spojité.

Semigrupa markovských jader $\{P_t\}_{t\geq 0}$ na $\mathcal{E}$ se nazývá *fellerovská* (*silně fellerovská*, *ultra fellerovská*), pokud P_t je fellerovské (silně fellerovské, ultra fellerovské) markovské jádro pro každé $t > 0$.

Lemma 1.30. *Markovské jádro K je silně fellerovské právě tehdy, když $K(\cdot, A) \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$.*

Důkaz. Pokud je K silně fellerovské, je také $K(\cdot, A) \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každé $A \in \mathcal{E}$, což lze získat speciální volbou $f = I_A$. Nechť tedy platí $K(\cdot, A) \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$ a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ je konvergentní posloupnost taková, že $x_n \to x_0$. Potom $K(x_n, A) \to K(x_0, A)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$, což znamená $K(x_n, \cdot) \to K(x_0, \cdot)$ v τ_S. Podle lemmatu 1.6 je pro každou $f \in b\mathcal{E}$

$$\lim_{n\to\infty} Kf(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_E f(y) K(x_n, \mathrm{d}y) = \int_E f(y) K(x_0, \mathrm{d}y) = Kf(x_0),$$

tedy $Kf \in \mathcal{C}_b(E)$. □

Lemma 1.31. *Markovské jádro K na $\mathcal{E}$ je silně fellerovské právě tehdy, když K je fellerovské a pro každou kompaktní množinu $L \in \mathcal{E}$ je $\{K(x, \cdot), x \in L\}$ stejně σ-aditivní.*

Důkaz. Nechť K je fellerovské a $\{K(x, \cdot), x \in L\}$ je stejně σ-aditivní pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní. Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergentní taková, že $x_n \to x_0$, potom je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ kompaktní a podle lemmatu 1.11 existuje μ míra na $\mathcal{E}$ taková, že $K(x_{n_k}, A) \to \mu(A)$ pro všechny $A \in \mathcal{E}$ a nějakou vybranou podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Odtud využitím lemmatu 1.6 pro každou $f \in b\mathcal{E}$ dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} Kf(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_E f(y) K(x_{n_k}, \mathrm{d}y) = \int_E f \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Protože K je fellerovské, je také pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$

$$\lim_{k\to\infty} Kf(x_{n_k}) = Kf(x_0) = \int_E f(y)K(x_0, \mathrm{d}y). \tag{10}$$

Důsledkem (9), (10) a lemmatu 1.2 pro $A = E$ je $\mu = K(x_0, \cdot)$, tedy pro $f \in b\mathcal{E}$ platí

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E f(y)K(x_0, \mathrm{d}y) = Kf(x_0)$$

a podle (9) a poznámky 3.7 je K silně fellerovské.

Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme silnou fellerovskost K. Zřejmě K je také fellerovské. Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ splňující $x_n \to x_0$, podle lemmatu 1.30 je $K(x_n, A) \to K(x_0, A)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$, což znamená, že množina $\{K(x_n, \cdot), n \in \mathbb{N}\}$ je τ_S-relativně sekvenciálně kompaktní. Důsledkem lemmatu 1.11 je stejná σ-aditivita množiny $\{K(x_n, \cdot), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, čímž je tvrzení dokázáno pro speciální případ $L = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$. Nechť je $L \in \mathcal{E}$ libovolná kompaktní a $\{K(x, \cdot), x \in L\}$ není stejně σ-aditivní, takže pro nějakou posloupnost $A_k \searrow \emptyset$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in L} K(x, A_k) \neq 0.$$

Existují tedy $\epsilon > 0$, vybraná podposloupnost $\{A_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ a $\{x_l\}_{l\in\mathbb{N}} \subset L$ takové, že $K(x_l, A_{k_l}) > \epsilon$. Z kompaktnosti L ale plyne existence vybraných podposloupností $\{x_{l_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{l_n} \to x_0$ a $\left\{A_{k_{l_n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňujících $K(x_{l_n}, A_{k_{l_n}}) > \epsilon$, což ale znamená, že $\{K(x_{l_n}, \cdot), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ není stejně σ-aditivní, čímž je tvrzení sporem dokázáno. □

Nechť $\mathcal{F}$ je podmnožina množiny reálných funkcí na E. Připomeňme, že $\mathcal{F}$ se nazývá *stejně spojitá v* $x \in E$, pokud pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že kdykoliv je $d(x, y) < \delta$, je také $\sup\{|f(x) - f(y)|, f \in \mathcal{F}\} < \epsilon$. Dále $\mathcal{F}$ se nazývá *stejně spojitá*, pokud je pro každé $x \in E$ stejně spojitá v x. Pomocí stejné spojitosti lze charakterizovat ultra fellerovská markovská jádra.

Lemma 1.32. *Markovské jádro K na $\mathcal{E}$ je ultra fellerovské právě tehdy, když $\{Kf, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\}$ je stejně omezená a stejně spojitá množina. Speciálně platí, že ultra fellerovské markovské jádro je silně fellerovské.*

Důkaz. Nechť $x, y \in E$, potom je

$$\begin{aligned} \|K(x,\cdot) - K(y,\cdot)\| &= \sup\left\{\left|\int_E f(z)K(x,\mathrm{d}z) - \int_E f(z)K(y,\mathrm{d}z)\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\ &= \sup\{|Kf(x) - Kf(y)|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\}, \end{aligned}$$

takže ze spojitosti $x \mapsto (K(x, \cdot), \|\cdot\|)$ plyne stejná spojitost $\{Kf, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\}$ a obráceně. Stejná omezenost téhož je zřejmá. □

Lemma 1.33. *Nechť K a L jsou silně fellerovská markovská jádra na $\mathcal{E}$, potom markovské jádro N na $\mathcal{E}$ definované jako*

$$N(x, \cdot) = K^*(L(x, \cdot)) \quad \text{pro} \quad x \in E$$

je ultra fellerovské. Speciálně $K^{(n)}$ pro $n \geq 2$ je ultra fellerovské a každá silně fellerovská semigrupa markovských jader na $\mathcal{E}$ je ultra fellerovská.

Důkaz. Viz [11], důsledek 5. □

2 Invariantní míry markovských jader

Některé poznatky této sekce, zejména lemma 2.3 a věta 2.4, jsou inspirovány přednáškou Markovské procesy na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze.

Definice 2.1. Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$, potom se μ nazývá *invariantní mírou* K, pokud platí $K^*\mu = \mu$.

Definice 2.2. Semigrupa markovských jader $\{P_t\}_{t \geq 0}$ na $\mathcal{E}$ se nazývá *měřitelná*, pokud je pro každou $A \in \mathcal{E}$ zobrazení $(t, x) \mapsto P_t(x, A)$ měřitelné vzhledem k $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{E}$.

Lemma 2.3. *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$ a μ je jeho invariantní míra, potom je také μ invariantní míra markovského jádra $K^{(n)}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť $\{P_t\}_{t \geq 0}$ je měřitelná semigrupa markovských jader na $\mathcal{E}$ a existují $t_0 > 0$ a míra ν na $\mathcal{E}$ takové, že ν je invariantní míra P_{t_0}, potom μ definovaná jako*

$$\mu(A) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad A \in \mathcal{E} \tag{11}$$

je invariantní míra P_t pro každé $t \geq 0$.

Důkaz. Podle důsledku 1.26 platí

$$K^{(n)*}\mu = (K^*)^n \mu = \mu.$$

Dále ukažme, že μ definovaná vztahem (11) je invariantní pro P_t, kde $t \geq 0$. Ověřit platnost $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ je s pomocí Fubiniho věty snadné. Podobným způsobem jako v důkazu poznámky 1.24 se dá ukázat

$$\int_E f(y)\mu(\mathrm{d}y) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_E f(y) P_s^* \nu(\mathrm{d}y) \mathrm{d}s$$

pro libovolnou $f \in b\mathcal{E}$. Počítejme tedy

$$\begin{aligned}
P_t^* \mu(A) &= \int_E I_A(y) P_t^* \mu(\mathrm{d}y) = \int_E P_t I_A(y) \mu(\mathrm{d}y) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_E P_t I_A(y) P_s^* \nu(\mathrm{d}y) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \int_E I_A(y) P_{t+s}^* \nu(\mathrm{d}y) \mathrm{d}s = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} P_{t+s}^* \nu(A) \mathrm{d}s = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s + \frac{1}{t_0} \int_{t_0}^{t+t_0} P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s - \frac{1}{t_0} \int_0^t P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s \\
&= \mu(A) + \frac{1}{t_0} \int_0^t P_s^* \left(P_{t_0}^* \nu\right)(A) \mathrm{d}s - \frac{1}{t_0} \int_0^t P_s^* \nu(A) \mathrm{d}s \\
&= \mu(A),
\end{aligned}$$

čímž jsme ověřili, že μ je invariantní míra P_t. □

2.1 Sunyachova věta. Konvergence k invariantní míře ve Wassersteinově metrice

Věta 2.4 (Sunyach)**.** *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$, které splňuje následující podmínky.*

(1) Existuje $x_0 \in E$ takové, že $K(x_0, \cdot) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$.

(2) Existuje $\theta < 1$ takové, že pro všechny $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E) = \mathcal{C}^{0,1}(E) \cap b\mathcal{E}$ platí $Kf \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ a $\mathrm{Lip}(Kf) \leq \theta \mathrm{Lip}(f)$.

Potom platí dále uvedená tvrzení.

(i) Existuje jediná míra μ na $\mathcal{E}$, která je invariantní pro K. Navíc je $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$.

(ii) Funkce φ definovaná jako

$$\varphi(x) = \int_E d(x, y) K(x, \mathrm{d}y) \quad \text{pro} \quad x \in E$$

splňuje $\varphi \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$.

(iii) Pro každé $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a $k \in \mathbb{N}$ platí

$$W_1\left(K^{(k)*}\nu, \mu\right) \leq \frac{\theta^k}{1-\theta}\int_E \varphi \mathrm{d}\nu.$$

(iv) Pro každou $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ platí $K^{(n)*}\rho \to \mu$ slabě.

Důkaz. Nejprve ukažme, že předpoklad (1) platí pro všechna $x \in E$, to jest pro každé $x \in E$ je $K(x,\cdot) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$. Buď $z \in E$ libovolné pevné, potom podle (1) existuje $c < \infty$ splňující $\int_E d(z,y)K(x_0,\mathrm{d}y) < c$. Platí

$$\begin{aligned}
\int_E d(z,y)K(x,\mathrm{d}y) &\leq \left|\int_E d(z,y)K(x,\mathrm{d}y) - \int_E d(z,y)K(x_0,\mathrm{d}y)\right| + \left|\int_E d(z,y)K(x_0,\mathrm{d}y)\right| \\
&< \lim_{k\to\infty}\left|\int_E (k \wedge d(z,y))\, K(x,\mathrm{d}y) - \int_E (k \wedge d(z,y))\, K(x_0,\mathrm{d}y)\right| + c \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|K\left(k \wedge d(z,\cdot)\right)(x) - K\left(k \wedge d(z,\cdot)\right)(x_0)\right| + c \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \mathrm{Lip}\left(K\left(k \wedge d(z,\cdot)\right)\right) d(x,x_0) + c \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \theta \mathrm{Lip}\left(k \wedge d(z,\cdot)\right) d(x,x_0) + c \\
&\leq \theta d(x,x_0) + c < \infty,
\end{aligned}$$

což znamená, že $K(x,\cdot) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$.

Dále platí, že předpoklad (2) je splněn pro každou $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$. Buď $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$, podle poznámky 1.15 je $f \in L^1(K(x,\cdot))$, takže Kf je reálná funkce na E. Bez újmy na obecnosti uvažujme $f \geq 0$, potom je

$$\begin{aligned}
|Kf(x) - Kf(y)| &= \lim_{k\to\infty} \left|K\left(k \wedge f(\cdot)\right)(x) - K\left(k \wedge f(\cdot)\right)(y)\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \mathrm{Lip}\left(K(k \wedge f(\cdot))\right) d(x,y) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \theta \mathrm{Lip}\left(k \wedge f(\cdot)\right) d(x,y) \\
&\leq \theta \mathrm{Lip}\left(f\right) d(x,y),
\end{aligned}$$

tedy $Kf \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$ a $\mathrm{Lip}(Kf) \leq \theta \mathrm{Lip}(f)$.

Lipschitzovskost φ dostáváme z následujících odhadů pro $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &= \left|K\left(d(x,\cdot)\right)(x) - K\left(d(y,\cdot)\right)(y)\right| \\
&\leq \left|K\left(d(x,\cdot)\right)(x) - K\left(d(y,\cdot)\right)(x)\right| + \left|K\left(d(y,\cdot)\right)(x) - K\left(d(y,\cdot)\right)(y)\right| \\
&\leq \left|K\left(d(x,\cdot) - d(y,\cdot)\right)(x)\right| + \mathrm{Lip}\left(K\left(d(y,\cdot)\right)\right) d(x,y) \\
&\leq K\left(|d(x,\cdot) - d(y,\cdot)|\right)(x) + \theta d(x,y) \\
&\leq K\left(d(x,y)\right)(x) + \theta d(x,y) \\
&= (1+\theta) d(x,y).
\end{aligned}$$

Rovnost

$$\int_E f \mathrm{d}K^*\nu = \int_E Kf \mathrm{d}\nu$$

je splněna kdykoliv $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$ a $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$, jak lze opět ukázat s pomocí věty o monotónní konvergenci pro funkce $f_k = k \wedge f \nearrow f$. Důsledkem je $K^*\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ kdykoliv $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$, protože pro $z \in E$ platí $K(d(z,\cdot)) \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$, a tedy

$$\int_E d(z,y)K^*\nu(\mathrm{d}y) = \int_E K(d(z,\cdot))(y)\nu(\mathrm{d}y) < \infty.$$

V $\mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ existuje právě jeden pevný bod K^*, protože K^* je kontrakce vzhledem k Wassersteinově metrice, vůči níž je $\mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ úplný. Buďte $\nu, \gamma \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$, potom

$$\begin{aligned}
W_1\left(K^*\nu, K^*\gamma\right) &= \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}K^*\nu - \int_E f\mathrm{d}K^*\gamma\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_E Kf\mathrm{d}\nu - \int_E Kf\mathrm{d}\gamma\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1\right\} \\
&\leq \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\nu - \int_E f\mathrm{d}\gamma\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq \theta\right\} \\
&= \theta \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\nu - \int_E f\mathrm{d}\gamma\right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1\right\} \\
&= \theta W_1(\nu, \gamma).
\end{aligned}$$

Jedinou invariantní míru K z $\mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ označme μ. Podle znění Banachovy věty pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ platí

$$W_1\left(K^{(k)*}\nu, \mu\right) = W_1\left(\left(K^*\right)^k \nu, \mu\right) \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} W_1\left(K^*\nu, \nu\right).$$

Ukažme, že $W_1\left(K^*\nu, \nu\right) \leq \int_E \varphi \mathrm{d}\nu$. Buď $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$, $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$, potom

$$\begin{aligned}
\left|\int_E f\mathrm{d}K^*\nu - \int_E f\mathrm{d}\nu\right| &= \left|\int_E Kf\mathrm{d}\nu - \int_E f\mathrm{d}\nu\right| = \left|\int_E \int_E f(y)K(x,\mathrm{d}y)\nu(\mathrm{d}x) - \int_E f(x)\nu(\mathrm{d}x)\right| \\
&= \left|\int_E \int_E \left(f(y) - f(x)\right) K(x,\mathrm{d}y)\nu(\mathrm{d}x)\right| \\
&\leq \int_E \int_E \left|f(y) - f(x)\right| K(x,\mathrm{d}y)\nu(\mathrm{d}x) \\
&\leq \int_E \int_E d(x,y) K(x,\mathrm{d}y)\nu(\mathrm{d}x) \\
&= \int_E \varphi(x)\nu(\mathrm{d}x),
\end{aligned}$$

takže z definice W_1 skutečně dostaneme požadovanou nerovnost. Celkově tedy platí pro každou $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a každé $k \in \mathbb{N}$ odhad

$$W_1\left(K^{(k)*}\nu, \mu\right) \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} \int_E \varphi \mathrm{d}\nu, \tag{12}$$

z čehož plyne $K^{(k)*}\nu \to \mu$ ve Wassersteinově metrice, a tedy i slabě.

Buď $x \in E$, důsledkem speciální volby $\nu = \delta_x$ v odhadu (12) je $W_1\left(K^{(k)}(x,\cdot), \mu\right) \to 0$, a tedy $K^{(k)}(x,\cdot) \to \mu$ slabě, což znamená

$$\lim_{k\to\infty} K^{(k)}f(x) = \lim_{k\to\infty} \int_E f(y)K^{(k)}(x,\mathrm{d}y) = \int_E f\mathrm{d}\mu$$

pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$. Pak ale $K^{(k)*}\rho \to \mu$ slabě, protože

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\int_E f\mathrm{d}K^{(k)*}\rho - \int_E f\mathrm{d}\mu\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\int_E K^{(k)}f\mathrm{d}\rho - \int_E f\mathrm{d}\mu\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\int_E \left(K^{(k)}f(x) - \int_E f\mathrm{d}\mu\right)\rho(\mathrm{d}x)\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

pro všechny $f \in \mathcal{C}_b(E)$, což plyne z věty o majorizované konvergenci, a tedy platí (iv).

Nakonec dokážeme, že neexistuje jiná invariantní míra $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ pro K. Je-li totiž ρ invariantní míra pro K, platí $K^{(k)*}\rho = \rho$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a zároveň $K^{(k)*}\rho \to \mu$ slabě. Z jednoznačnosti slabé limity tím získáváme $\rho = \mu$. Míra μ je tedy jedinou invariantní mírou K. □

Věta 2.5. *Nechť $\{P_t\}_{t\geq 0}$ je měřitelná semigrupa markovských jader na $\mathcal{E}$ a existuje $t_0 > 0$, pro které jsou splněny následující podmínky.*

(1) Existuje $x_0 \in E$ takové, že $P_{t_0}(x_0,\cdot) \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$.

(2) Existuje $\theta < 1$ takové, že pro všechny $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ platí $P_{t_0} f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ a $\mathrm{Lip}(P_{t_0} f) \leq \theta \mathrm{Lip}(f)$.

(3) Existuje $M < \infty$ takové, že pro každou $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ a každé $0 \leq s \leq t_0$ je $P_s f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ a $\mathrm{Lip}(P_s f) \leq M \mathrm{Lip}(f)$.

Potom platí dále uvedená tvrzení.

(i) Existuje jediná míra μ na $\mathcal{E}$, která je invariantní pro P_t pro každé $t \geq 0$. Navíc je $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$.

(ii) Funkce φ definovaná jako

$$\varphi(x) = \int_E d(x,y) P_{t_0}(x, \mathrm{d}y) \quad \text{pro} \quad x \in E$$

splňuje $\varphi \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$.

(iii) Pro každé $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a $t \geq 0$ platí

$$W_1 \left(P_t^* \nu, \mu \right) \leq e^{-t \frac{|\log \theta|}{t_0}} \frac{M}{\theta(1-\theta)} \int_E \varphi \mathrm{d}\nu.$$

(iv) Pro každou $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ platí $P_t^* \rho \to \mu$ slabě.

Důkaz. Podle věty 2.4 víme, že existuje jediná invariantní míra μ markovského jádra P_{t_0} a navíc je $\mu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$. Lemma 2.3 zaručuje existenci invariantní míry ρ pro P_t, $t \geq 0$. Je však $\rho = \mu$, protože P_{t_0} má jedinou invariantní míru μ. Dále víme, že pro každé $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$ a $k \in \mathbb{N}$ platí odhad

$$W_1 \left(\left(P_{t_0}^* \right)^k \nu, \mu \right) \leq \frac{\theta^k}{1-\theta} \int_E \varphi \mathrm{d}\nu.$$

Poznamenejme, že pro všechna $t \geq 0$ je splněno $P_t^* \nu \in \mathcal{P}_1(\mathcal{E})$. To lze snadno ukázat z předpokladu (3), jehož platnost pro každou $f \in \mathcal{C}^{0,1}(E)$ lze ukázat jako v důkazu věty 2.4, speciální volbou $f = d(z, \cdot)$ pro $z \in E$. Existují $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $0 \leq s \leq t_0$ takové, že $t = kt_0 + s$. Potom platí

$$\begin{aligned}
W_1 \left(P_t^* \nu, \mu \right) &= \sup \left\{ \left| \int_E f \mathrm{d} P_t^* \nu - \int_E f \mathrm{d}\mu \right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \int_E f \mathrm{d} P_{kt_0+s}^* \nu - \int_E f \mathrm{d} P_s^* \mu \right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \int_E P_s f \mathrm{d} P_{kt_0}^* \nu - \int_E P_s f \mathrm{d}\mu \right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \right\} \\
&\leq M \sup \left\{ \left| \int_E f \mathrm{d} \left(P_{t_0}^* \right)^k \nu - \int_E f \mathrm{d}\mu \right|, f \in \mathcal{C}^{0,1}(E), \mathrm{Lip}(f) \leq 1 \right\} \\
&= M W_1 \left(\left(P_{t_0}^* \right)^k \nu, \mu \right) \\
&\leq \frac{M\theta^k}{1-\theta} \int_E \varphi \mathrm{d}\nu.
\end{aligned}$$

Platí však

$$\theta^k = \theta^{\frac{t-s}{t_0}} \leq \theta^{\frac{t-t_0}{t_0}} = \frac{e^{-t \frac{|\log \theta|}{t_0}}}{\theta},$$

takže je

$$W_1 \left(P_t^* \nu, \mu \right) \leq e^{-t \frac{|\log \theta|}{t_0}} \frac{M}{\theta(1-\theta)} \int_E \varphi \mathrm{d}\nu.$$

Slabá konvergence $P_t^* \rho \to \mu$ pro $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ se ukáže stejným způsobem jako ve větě 2.4, jejímž důsledkem je i lipschitzovskost φ.

$\square$

2.2 Užití Sunyachovy věty v teorii stochastických diferenciálních rovnic

Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ stochastická báze splňující obvyklé podmínky a nechť W značí n-dimenzionální $\mathcal{F}_t$-Wienerův proces. Označme $\mathbb{M}_{m\times n}$ prostor matic typu $m \times n$ s normou $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\operatorname{Tr}(A'A)}$, kde $\operatorname{Tr}(A)$ značí stopu $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$. Dále uvažujme lipschitzovské funkce $b : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{M}_{m\times n}$ a stochastickou diferenciální rovnici

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}W_t, \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ existuje právě jedno řešení $X^x = \{X_t^x\}_{t\geq 0}$ rovnice (13) s počáteční podmínkou $X_0^x = x$. Pro $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ definujme

$$P_t(x, A) = \mathbb{P}(X_t^x \in A), \tag{14}$$

potom se dá ukázat, že $\{P_t\}_{t\geq 0}$ tvoří semigrupu markovských jader na $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

Věta 2.6. *Nechť existuje $\omega > 0$ takové, že pro koeficienty rovnice* (13) *platí*

$$2\langle x - y, b(x) - b(y)\rangle + \|\sigma(x) - \sigma(y)\|^2 \leq -\omega \|x - y\|^2 \quad \text{kdykoliv} \quad x, y \in \mathbb{R}^m, \tag{15}$$

potom jsou pro semigrupu markovských jader definovanou vztahem (14) *splněny předpoklady věty 2.5.*

Důkaz. Předpoklad (1) věty 2.5 je splněn, protože pro každé $x \in \mathbb{R}^m$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^m} \|y\| \, P_1(x, \mathrm{d}y) = E\|X_1^x\| \leq \sqrt{E\|X_1^x\|^2} \leq c\sqrt{1 + \|x\|^2} < \infty.$$

Dále buď $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$, $x, y \in \mathbb{R}^m$ a $t \geq 0$, potom

$$\begin{aligned} |P_t f(x) - P_t f(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(z) P_t(x, \mathrm{d}z) - \int_{\mathbb{R}^m} f(z) P_t(y, \mathrm{d}z) \right| = |Ef(X_t^x) - Ef(X_t^y)| \\ &\leq E|f(X_t^x) - f(X_t^y)| \leq \operatorname{Lip}(f) E\|X_t^x - X_t^y\| \leq \operatorname{Lip}(f)\sqrt{E\|X_t^x - X_t^y\|^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Výraz (16) lze odhadnout následujícím postupem. Definujeme-li $Y_t = (X_t^x, X_t^y)'$, potom $Y = \{Y_t\}_{t\geq 0}$ řeší rovnici

$$\mathrm{d}Y_t = \begin{pmatrix} b(X_t^x) \\ b(X_t^y) \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \begin{pmatrix} \sigma(X_t^x) \\ \sigma(X_t^y) \end{pmatrix} \mathrm{d}W_t$$

s počáteční podmínkou $Y_0 = (x, y)'$. Dále buď $V : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$ taková, že $V((u, v)') = \|u - v\|^2$ pro $u, v \in \mathbb{R}^m$. Potom $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{2m})$ a platí

$$DV\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} u - v \\ v - u \end{pmatrix},$$

$$D^2V\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

kde $I \in \mathbb{M}_{m\times m}$ je jednotková matice a DV a D^2V značí první a druhou Fréchetovu derivaci V. Užitím Itôovy formule pro vícerozměrné spojité semimartingaly dostaneme

$$\begin{aligned} E\|X_t^x - X_t^y\|^2 &= \|x - y\|^2 + E\int_0^t \left\{ 2\left\langle \begin{pmatrix} X_s^x - X_s^y \\ X_s^y - X_s^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b(X_s^x) \\ b(X_s^y) \end{pmatrix} \right\rangle \right. \\ &\left. + \operatorname{Tr}\left(\begin{pmatrix} \sigma(X_s^x) \\ \sigma(X_s^y) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(X_s^x) \\ \sigma(X_s^y) \end{pmatrix} \right) \right\} \mathrm{d}s \\ &+ 2E\int_0^t \begin{pmatrix} X_s^x - X_s^y \\ X_s^y - X_s^x \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma(X_s^x) \\ \sigma(X_s^y) \end{pmatrix} \mathrm{d}W_s, \end{aligned} \tag{17}$$

přičemž střední hodnota stochastického integrálu v rovnici (17) je nulová pro každé $t \geq 0$, což lze ukázat pomocí následujícího odhadu pro $x \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{M}_{m\times n}$, kde A_j značí j-tý sloupec A.

$$\|x'A\|^2 = \|(\langle x, A_1\rangle, \ldots, \langle x, A_n\rangle)\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle x, A_j\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^n \|x\|^2 \|A_j\|^2 = \|x\|^2 \|A\|^2,$$

a tedy pro $t \geq 0$ je

$$\begin{aligned}
E\int_0^t \left\| \begin{pmatrix} X_s^x - X_s^y \\ X_s^y - X_s^x \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma(X_s^x) \\ \sigma(X_s^y) \end{pmatrix} \right\|^2 \mathrm{d}s &= E\int_0^t \left\|(X_s^x - X_s^y)'\left(\sigma(X_s^x) - \sigma(X_s^y)\right)\right\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leq E\int_0^t \|X_s^x - X_s^y\|^2 \|\sigma(X_s^x) - \sigma(X_s^y)\|^2 \mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{Lip}(\sigma)^2 E\int_0^t \|X_s^x - X_s^y\|^4 \mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{Lip}(\sigma)^2 tE \sup_{0\leq s\leq t} \|X_s^x - X_s^y\|^4 \\
&\leq c_t \|x-y\|^4 < \infty,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že stochastický integrál v (17) je L_2-martingal na $[0,t]$. Podle (17) tedy víme

$$\begin{aligned}
E\|X_t^x - X_t^y\|^2 &= \|x-y\|^2 + E\int_0^t \big\{2\langle X_s^x - X_s^y, b(X_s^x) - b(X_s^y)\rangle \\
&\quad +\mathrm{Tr}\left((\sigma(X_s^x) - \sigma(X_s^y))'\left(\sigma(X_s^x) - \sigma(X_s^y)\right)\right)\big\}\mathrm{d}s \\
&= \|x-y\|^2 + E\int_0^t \left\{2\langle X_s^x - X_s^y, b(X_s^x) - b(X_s^y)\rangle + \|\sigma(X_s^x) - \sigma(X_s^y)\|^2\right\}\mathrm{d}s \\
&\leq \|x-y\|^2 + \int_0^t -\omega E\|X_s^x - X_s^y\|^2 \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Označíme-li nyní $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ řešení obyčejné diferenciální rovnice $\psi'(t) = -\omega\psi(t)$, $\psi(0) = \|x-y\|^2$, které je tvaru $\psi(t) = e^{-\omega t}\|x-y\|^2$, platí podle srovnávací věty

$$E\|X_t^x - X_t^y\|^2 \leq \psi(t) = e^{-\omega t}\|x-y\|^2.$$

S využitím (16) nakonec získáváme

$$|P_t f(x) - P_t f(y)| \leq e^{-\frac{1}{2}\omega t}\mathrm{Lip}(f)\|x-y\|,$$

odkud již snadno plyne platnost předpokladů (2) a (3) věty 2.5. □

2.3 Konvergence k invariantní míře v normě totální variace

Lemma 2.7. *Buďte $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ takové, že $\mu_n \to \mu$ slabě. Dále buď $\mathcal{F}$ množina stejně omezených a stejně spojitých reálných funkcí na E, potom platí*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}\mu_n - \int_E f\mathrm{d}\mu\right|, f \in \mathcal{F}\right\} = 0.$$

Důkaz. Viz [2], důsledek 11.3.4. □

Důsledek 2.8. *Buďte $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$ takové, že $\mu_n \to \mu$ slabě. Potom, je-li K ultra fellerovské markovské jádro na $\mathcal{E}$, platí $\|K^*\mu_n - K^*\mu\| \to 0$.*

Důkaz. Nechť K je ultra fellerovské. Označme $\mathcal{F} = \{Kf, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\}$. Podle lemmatu 1.32 je stejně omezená a stejně spojitá. S využitím lemmatu 2.7 dostáváme

$$\begin{aligned}
\|K^*\mu_n - K^*\mu\| &= \sup\left\{\left|\int_E f\mathrm{d}K^*\mu_n - \int_E f\mathrm{d}K^*\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_E Kf\mathrm{d}\mu_n - \int_E Kf\mathrm{d}\mu\right|, f \in b\mathcal{E}, \|f\|_\infty \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\int_E g\mathrm{d}\mu_n - \int_E g\mathrm{d}\mu\right|, g \in \mathcal{F}\right\} \to 0.
\end{aligned}$$

□

Věta 2.9. *Platí následující tvrzení.*

(i) Buď K silně fellerovské markovské jádro na $\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ jeho invariantní míra. Nechť $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $K^{(n)*}\nu \to \mu$ slabě, potom $\left\|K^{(n)*}\nu - \mu\right\| \to 0$.

(ii) Buď $\{P_t\}_{t\geq 0}$ silně fellerovská semigrupa markovských jader na $\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ invariantní míra P_t pro každé $t \geq 0$. Nechť $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ a $P_t^*\nu \to \mu$ slabě, potom $\|P_t^*\nu - \mu\| \to 0$.

Důkaz. (i) : Podle lemmatu 1.33 je $K^{(2)*}$ ultra fellerovské. Důsledkem 2.8 tedy je

$$\lim_{n\to\infty} \left\|K^{(n)*}\nu - \mu\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|K^{(2)*}\left(K^{(n-2)*}\nu\right) - K^{(2)*}\mu\right\| = 0.$$

(ii) : Podle lemmatu 1.33 je $\{P_t\}_{t\geq 0}$ ultra fellerovská semigrupa. Zbytek se ukáže opět pomocí důsledku 2.8. $\square$

Ukázali jsme, že při silné fellerovskosti K respektive $\{P_t\}_{t\geq 0}$ konverguje $\left\{K^{(n)*}\nu\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ respektive $\{P_t^*\nu\}_{t\geq 0}$ v totální variaci právě tehdy, když konverguje slabě. Pro rychlost konvergence ale nemusí platit stejné horní odhady. Dále je ukázána podmínka na geometrickou respektive exponenciální rychlost konvergence v normě totální variace.

Věta 2.10. *Buď K markovské jádro na $\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ jeho invariantní míra. Nechť jsou splněny následující podmínky.*

(i) Existuje $\Gamma < \infty$ takové, že pro každou $f \in b\mathcal{E}$ a $x, y \in E$ platí

$$|Kf(x) - Kf(y)| \leq \Gamma \|f\|_\infty d(x,y).$$

(ii) Existují $\psi : E \to \mathbb{R}$ a $\theta < 1$ takové, že pro každé $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ platí

$$\left|K^{(n)}f(x) - \int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leq \theta^n \mathrm{Lip}(f)\psi(x).$$

Potom pro $n \geq 2$ a každou $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ takovou, že $\psi \in L^1(\nu)$, je

$$\left\|K^{(n)*}\nu - \mu\right\| \leq \theta^{n-1}\Gamma \int_E \psi \mathrm{d}\nu.$$

Důkaz. Buď $f \in b\mathcal{E}$ a $n \geq 2$, potom je

$$\begin{aligned} \left|\int_E f\mathrm{d}K^{(n)*}\nu - \int_E f\mathrm{d}\mu\right| &= \left|\int_E K^{(n-1)}(Kf)\,\mathrm{d}\nu - \int_E Kf\mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \int_E \left|K^{(n-1)}(Kf)(x) - \int_E Kf\mathrm{d}\mu\right| \nu(\mathrm{d}x) \\ &\leq \theta^{n-1}\mathrm{Lip}(Kf) \int_E \psi\mathrm{d}\nu \\ &\leq \theta^{n-1}\Gamma \|f\|_\infty \int_E \psi\mathrm{d}\nu, \end{aligned}$$

odkud z definice normy totální variace plyne požadované tvrzení. $\square$

Věta 2.11. *Buď $\{P_t\}_{t\geq 0}$ semigrupa markovských jader na $\mathcal{E}$ a $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ invariantní míra P_t pro každé $t \geq 0$. Nechť jsou splněny následující podmínky.*

(i) Existují $\Gamma < \infty$ a $T > 0$ takové, že pro každou $f \in b\mathcal{E}$ a $x, y \in E$ platí

$$|P_Tf(x) - P_Tf(y)| \leq \Gamma \|f\|_\infty d(x,y).$$

(ii) Existují $\psi : E \to \mathbb{R}$ a $\gamma > 0$ takové, že pro každé $x \in E$, $t \geq 0$ a $f \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ platí

$$\left|P_tf(x) - \int_E f\mathrm{d}\mu\right| \leq e^{-\gamma t}\mathrm{Lip}(f)\psi(x).$$

Potom pro $t \geq 0$ a každou $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ splňující $\psi \in L^1(\nu)$ je

$$\left\| P_{T+t}^* \nu - \mu \right\| \leq e^{-\gamma t} \Gamma \int_E \psi \mathrm{d}\nu.$$

Důkaz. Buď $f \in b\mathcal{E}$ a $t \geq 0$, potom je

$$\begin{aligned}
\left| \int_E f \mathrm{d} P_{T+t}^* \nu - \int_E f \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_E P_t \left(P_T f \right) \mathrm{d}\nu - \int_E P_T f \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \int_E \left| P_t \left(P_T f \right)(x) - \int_E P_T f \mathrm{d}\mu \right| \nu(\mathrm{d}x) \\
&\leq e^{-\gamma t} \mathrm{Lip}(P_T f) \int_E \psi \mathrm{d}\nu \\
&\leq e^{-\gamma t} \Gamma \left\| f \right\|_\infty \int_E \psi \mathrm{d}\nu,
\end{aligned}$$

odkud opět z definice normy totální variace plyne požadované tvrzení. □

Poznámka 2.12. *(1) Předpoklad (i) ve větách 2.10 a 2.11 již zaručuje ultra fellerovskost K a P_T.*

(2) Předpoklad (ii) ve větách 2.10 a 2.11 je splněn za předpokladů Sunyachovy věty.

Důkaz. Tvrzení dokážeme pouze pro markovské jádro K. Pro semigrupu $\{P_t\}_{t \geq 0}$ se provede analogicky.

(1) : Nechť $x, y \in E$, potom

$$\begin{aligned}
\left\| K(x,\cdot) - K(y,\cdot) \right\| &= \sup \left\{ \left| \int_E f(z) K(x, \mathrm{d}z) - \int_E f(z) K(y, \mathrm{d}z) \right|, f \in b\mathcal{E}, \left\| f \right\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| Kf(x) - Kf(y) \right|, f \in b\mathcal{E}, \left\| f \right\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \Gamma \left\| f \right\|_\infty d(x,y), f \in b\mathcal{E}, \left\| f \right\|_\infty \leq 1 \right\} \\
&= \Gamma d(x,y),
\end{aligned}$$

takže $E \to (\mathcal{P}(\mathcal{E}), \left\| \cdot \right\|)$, $x \mapsto K(x,\cdot)$, je spojité a K je ultra fellerovské.

(2) : Označme $g = \frac{f}{\mathrm{Lip}(f)}$, potom $g \in \mathcal{C}_b^{0,1}(E)$ a $\mathrm{Lip}(g) \leq 1$. Pro $x \in E$ a $n \in \mathbb{N}$ podle Sunyachovy věty platí

$$\begin{aligned}
\left| K^{(n)} f(x) - \int_E f \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_E f(y) K^{(n)*} \delta_x(\mathrm{d}y) - \int_E f \mathrm{d}\mu \right| \\
&= \mathrm{Lip}(f) \left| \int_E g(y) K^{(n)*} \delta_x(\mathrm{d}y) - \int_E g \mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \mathrm{Lip}(f) W_1 \left(K^{(n)*} \delta_x, \mu \right) \\
&\leq \frac{\theta^n}{1-\theta} \mathrm{Lip}(f) \varphi(x).
\end{aligned}$$

Stačí tedy volit $\psi = \frac{\varphi}{1-\theta}$. □

3 Postačující podmínky pro silnou fellerovskost markovských jader

Definice 3.1. Markovské jádro K na $\mathcal{E}$ se nazývá *absolutně měřitelné*, pokud existuje σ-konečná míra μ na $\mathcal{E}$ taková, že $K(x,\cdot) \ll \mu$ pro každé $x \in E$. V takovém případě se μ nazývá *bází* K a $\kappa : E \times E \to \mathbb{R}$ taková, že $\kappa(x,\cdot) = \frac{\mathrm{d}K(x,\cdot)}{\mathrm{d}\mu}$ pro $x \in E$, *hustotou* K.

Lemma 3.2. *Silně fellerovské markovské jádro je absolutně měřitelné.*

Důkaz. Buď K silně fellerovské markovské jádro na $\mathcal{E}$ a $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ spočetná a hustá množina. Položme $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{K(z_k,\cdot)}{2^k}$, potom μ je bází K, což lze dokázat sporem. Nechť tedy $\mu(A) = 0$ pro $A \in \mathcal{E}$ a existuje $z_0 \in E$ takové, že $K(z_0, A) > 0$. $K(\cdot, A) = KI_A$ je podle předpokladu spojitá, tudíž existuje $U \in \mathcal{E}$ otevřené okolí z_0 tak, že $K(x,A) > 0$ pro každé $x \in U$. Víme ale, že existuje $z_{k_0} \in U$, tedy také $K(z_{k_0}, A) > 0$, což je spor. □

Příklad 3.3. Viz [8]. Absolutně měřitelné fellerovské markovské jádro nemusí být silně fellerovské. Takovým příkladem je jádro K na prostoru $[0,1]$ s obvyklou metrikou.

$$Kf(x) = \begin{cases} f(0) & x = 0, \\ \frac{2}{x^2}\int_0^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

K je jistě absolutně měřitelné, přičemž bázi tvoří $\delta_0 + \lambda$. Fellerovskost K plyne z následujících odhadů.

Nechť nejprve $f \in \mathcal{C}_b\left([0,1]\right)$ a $0 < x_1 \leq x_2 \leq 1$, potom

$$\begin{aligned}
|Kf(x_1) - Kf(x_2)| &= \left|\frac{2}{x_1^2}\int_0^{x_1}(x_1-y)f(y)\mathrm{d}y - \frac{2}{x_2^2}\int_0^{x_2}(x_2-y)f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \left|\frac{2}{x_1^2}\int_0^{x_1}(x_1-y)f(y)\mathrm{d}y - \frac{2}{x_2^2}\int_0^{x_1}(x_1-y)f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad + \left|\frac{2}{x_2^2}\int_0^{x_1}(x_1-x_2)f(y)\mathrm{d}y - \frac{2}{x_2^2}\int_{x_1}^{x_2}(x_2-y)f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \left|\left(1-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\frac{2}{x_1^2}\int_0^{x_1}(x_1-y)f(y)\mathrm{d}y\right| + \left|\frac{2}{x_2^2}\int_0^{x_1}(x_1-x_2)f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad + \left|\frac{2}{x_2^2}\int_{x_1}^{x_2}(x_2-y)f(y)\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \|f\|\left|1-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right| + \frac{2}{x_2^2}\|f\|\,|x_1-x_2| + \frac{2}{x_2^2}\|f\|\,|x_1-x_2|^2 \to 0 \text{ pro } x_1 \to x_2,
\end{aligned}$$

a tedy je Kf spojitá na intervalu $(0,1]$. Je ale spojitá i v 0, neboť pro $0 < x \leq 1$ je

$$\begin{aligned}
|Kf(x) - Kf(0)| &= \left|\frac{2}{x^2}\int_0^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y - f(0)\right| = \left|\frac{2}{x^2}\int_0^x (x-y)(f(y)-f(0))\mathrm{d}y\right| \\
&\leq \sup_{y\in(0,x)} |f(y)-f(0)| \to 0 \text{ pro } x \to 0.
\end{aligned}$$

Markovské jádro K není ale silně fellerovské, protože $KI_{\{0\}} = I_{\{0\}} \notin \mathcal{C}_b\left([0,1]\right)$.

Věta 3.4. *Nechť K je fellerovské a absolutně měřitelné markovské jádro na $\mathcal{E}$ s bází μ a hustotou κ. Je-li μ konečná a κ omezená, je K silně fellerovské.*

Důkaz. Buď $L \subset E$ kompaktní a $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ taková, že $A_k \searrow \emptyset$, potom

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in L}|K(x,A_k)| = \lim_{k\to\infty}\sup_{x\in L}\left|\int_{A_k}\kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y)\right| \leq \lim_{k\to\infty}\beta\mu(A_k) = 0,$$

kde $\beta < \infty$ je libovolné takové, že $\kappa(x,y) \leq \beta$ pro všechna $x, y \in E$. Nyní stačí použít lemma 1.31. □

Předchozí tvrzení se dá podstatným způsobem zesílit, což je dále ukázáno v sekci 3.1 ve větě 3.11 nebo v sekci 3.2 ve větě 3.21.

3.1 Charakterizace silné fellerovskosti pomocí hustot

Definice 3.5. Nechť μ je míra na $\mathcal{E}$, potom se množina $\mathcal{F} \subset L^1(\mu)$ nazývá *stejnoměrně intagrovatelná*, pokud je omezená v $L^1(\mu)$ a pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každou $A \in \mathcal{E}$ platí implikace $\mu(A) < \delta \Rightarrow \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_A f \mathrm{d}\mu < \epsilon$.

Lemma 3.6. *Buď K markovské jádro na $\mathcal{E}$ s bází μ a hustotou κ, potom je-li pro každou kompaktní $L \in \mathcal{E}$ množina $\{K(x,\cdot), x \in L\}$ stejně σ-aditivní, je také množina $\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná. Je-li navíc μ konečná, platí i obrácené tvrzení.*

Důkaz. Podle důsledku IV.8.11 v [3] platí první část lemmatu. K důkazu druhé části předpokládejme, že $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ splňuje $A_k \searrow \emptyset$, potom kvůli konečnosti μ splňuje také $\mu(A_k) \to 0$, a tedy podle definice stejnoměrné integrovatelnosti pro každé $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro libovolné $n > n_0$ je $\sup_{x\in L} \int_{A_n} \kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y) < \epsilon$, což také znamená, že $\{K(x,\cdot), x \in L\}$ je stejně σ-aditivní. □

Věta 3.11 ukazuje, že tvrzení předchozího lemmatu lze pro fellerovská jádra obrátit i bez nutnosti předpokladu konečnosti báze μ. V jejím důkazu bude použita zobecněná verze Heineho charakterizace spojitosti funkce na metrickém prostoru, která má následující znění.

Poznámka 3.7. *Platí, že $f : E \to \mathbb{R}$ je spojitá v $x_0 \in E$ právě tehdy, když pro každou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $x_n \to x_0$, existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ splňující $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$.*

Důkaz. Nutná podmínka pro spojitost f v x_0 plyne z původní Heineho věty, neboť jestliže každá posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$, splňuje $f(x_n) \to f(x_0)$, pak stačí za vybranou podposloupnost zvolit opět $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že f není spojitá v x_0, tedy existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze nalézt $x \in B(x_0,\delta)$ splňující $|f(x) - f(x_0)| > \epsilon$. Nechť tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ takové, že $|f(x_n) - f(x_0)| > \epsilon$. Pak jistě každá vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnosti $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňuje opět $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| > \epsilon$, a tedy $f(x_{n_k}) \nrightarrow f(x_0)$. □

Definice 3.8. Míra μ na $\mathcal{E}$ se nazývá *lokálně konečná*, pokud pro každé $x \in E$ existuje $U \in \mathcal{E}$ otevřená taková, že $x \in U$ a $\mu(U) < \infty$.

Lemma 3.9. *Buď μ lokálně konečná míra na $\mathcal{E}$, potom existuje posloupnost $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ otevřených omezených množin taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $\mu(B_j) < \infty$, $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že je-li $U \in \mathcal{E}$ neprázdná a otevřená, existuje posloupnost otevřených množin $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ taková, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ je $\overline{V_k} \subset V_{k+1}$ a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k = U$. Buď $x_0 \in U$ a f funkce na E definovaná předpisem

$$f(y) = \frac{\operatorname{dist}(y, X \setminus U)}{\operatorname{dist}(y, X \setminus U) + d(y, x_0)}.$$

Dále nechť $V_k = \left\{x \in X, f(x) > \frac{1}{k+1}\right\}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Protože je $f \in \mathcal{C}(E)$ a $V_k = f^{-1}\left(\frac{1}{k+1}, \infty\right)$, je V_k otevřená pro každé $k \in \mathbb{N}$. Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V_k$, $x_n \to x' \in \overline{V_k}$, potom $f(x_n) > \frac{1}{k+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a také $f(x_n) \to f(x')$, proto platí $f(x') \geq \frac{1}{k+1}$, což znamená, že $\overline{V_k} \subset \left\{x \in E, f(x) \geq \frac{1}{k+1}\right\}$, odkud již plyne $\overline{V_k} \subset V_{k+1}$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, neboť

$$\overline{V_k} \subset \left\{x \in E, f(x) \geq \frac{1}{k+1}\right\} = f^{-1}\left[\frac{1}{k+1}, \infty\right) \subset f^{-1}\left(\frac{1}{k+2}, \infty\right) = V_{k+1}.$$

Vlastnost $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k = U$ je také splněna, protože pro libovolné $x' \in U$ je $f(x') > 0$, a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $f(x') > \frac{1}{k+1}$, tudíž i $x' \in V_k$.

Buď nyní $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ hustá množina. Kvůli lokální konečnosti μ a separabilitě E existují $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ otevřené a omezené splňující $\mu(U_n) < \infty$ a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = E$. Podle předchozího však pro každou U_n existuje posloupnost otevřených množin $\{V_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, pro kterou je $\overline{V_{n,k}} \subset V_{n,k+1}$ a $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_{n,k} = U_n$. Položme

$$B_j = \bigcup_{n=1}^{j} V_{n,j},$$

a jelikož $V_{n,k} \subset U_n$, je $\mu(V_{n,k}) < \infty$, B_j je omezená a také $\mu(B_j) < \infty$ pro všechna $j \in \mathbb{N}$. Vlastnost $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$ je splněna, neboť

$$\overline{B_j} \subset \bigcup_{n=1}^{j} \overline{V_{n,j}} \subset \bigcup_{n=1}^{j+1} V_{n,j+1} = B_{j+1}.$$

Nakonec stačí ukázat platnost $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$. Buď $x \in E$, pak existuje $n \in N$ takové, že $x \in U_n$, a tedy také existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in V_{n,k}$. Platí ale $V_{n,k} \subset \bigcup_{l=1}^{j} V_{l,j} = B_j$, kde $j \geq \max\{n, k\}$. $\square$

Lemma 3.10. *Nechť K je fellerovské absolutně měřitelné jádro s hustotou κ vzhledem k bázi μ, kde μ je lokálně konečná. Dále buď $L \in \mathcal{E}$ kompaktní, potom je následující ekvivalentní.*

(i) *$\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ je stejnoměrně integrovatelná v prostoru $L^1(\mu)$.*

(ii) *Pro každou $B \in \mathcal{E}$ otevřenou a omezenou splňující $\mu(B) < \infty$ je $\{I_B(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná v prostoru $L^1(\mu)$.*

(iii) *Existuje posloupnost $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ otevřených omezených množin taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $\mu(B_j) < \infty$, $B_j \subset B_{j+1}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$ a $\left\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\right\}$ je stejnoměrně integrovatelná v prostoru $L^1(\mu)$.*

(iv) *Existuje posloupnost $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ otevřených omezených množin taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $\mu(B_j) < \infty$, $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$ a $\left\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\right\}$ je stejnoměrně integrovatelná v prostoru $L^1(\mu)$.*

Důkaz. $(i) \Rightarrow (ii)$: Víme, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí-li pro nějakou $A \in \mathcal{E}$ $\mu(A) < \delta$, pak pro ni platí také $\sup_{x\in L} \int_A \kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y) < \epsilon$. Zároveň ale pro $B \in \mathcal{E}$ otevřenou a omezenou splňující $\mu(B) < \infty$ platí

$$\sup_{x\in L} \int_A I_B(y)\kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y) \leq \sup_{x\in L} \int_A \kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y) < \epsilon,$$

takže je $\{I_B(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná.

$(ii) \Rightarrow (iv)$: Existence posloupnosti $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ je ukázána v lemmatu 3.9 a stejnoměrná integrovatelnost $\left\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\right\}$ je předpokládána ve (ii).

$(iv) \Rightarrow (iii)$: Je-li pro každé $j \in \mathbb{N}$ splněno $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$, je i $B_j \subset B_{j+1}$. Ostatní vlastnosti jsou předpokládány.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Prvním cílem je ukázat platnost $KI_{B_j} \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$. Buď tedy j prozatím pevné a pro každé $n \in \mathbb{N}$ buď

$$\rho_n(\mathrm{d}y) = I_{B_j}(y)K(x_n, \mathrm{d}y),$$

pro libovolnou pevně zvolenou konvergentní posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Označme $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Posloupnost $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je stejně σ-aditivní, neboť pro $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ takovou, že $A_k \searrow \emptyset$, platí

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_n(A_k) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_k} I_{B_j}(y)K(x_n, \mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{A_k\cap B_j} I_{B_j}(y)\kappa(x_n, y)\mu(\mathrm{d}y) = 0,$$

protože $\mu(A_k \cap B_j) \to 0$ pro $k \to \infty$ a $\left\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x_n,\cdot), n \in \mathbb{N}\right\}$ je stejnoměrně integrovatelná. Podle lemmatu 1.11 je tedy $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zároveň τ_S-relativně sekvenciálně kompaktní, a tedy existují vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a míra ρ_0 na $\mathcal{E}$ takové, že pro libovolnou $f \in b\mathcal{E}$ je

$$\lim_{k\to\infty} K(fI_{B_j})(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_E f(y)I_{B_j}(y)K(x_{n_k}, \mathrm{d}y) = \lim_{k\to\infty} \int_E f\mathrm{d}\rho_{n_k} = \int_E f\mathrm{d}\rho_0. \tag{18}$$

Buď dále $f \in \mathcal{C}_b(E)$ nulová na $E \setminus B_j$. Platí $f = fI_{B_j}$, a tedy kvůli fellerovskosti K platí také

$$\lim_{k\to\infty} K(fI_{B_j})(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \int_E f(y)I_{B_j}(y)K(x_{n_k}, \mathrm{d}y) = \int_E f(y)I_{B_j}(y)K(x_0, \mathrm{d}y). \tag{19}$$

Nyní z (18) a (19) dostáváme, že pro každou $f \in \mathcal{C}_b(E)$ nulovou na $E \setminus B_j$ je

$$\int_E f\mathrm{d}\rho_0 = \int_E f(y)I_{B_j}(y)K(x_0, \mathrm{d}y).$$

Důsledkem lemmatu 1.2 je, že

$$\rho_0(\mathrm{d}y) = I_{B_j}(y)K(x_0, \mathrm{d}y), \tag{20}$$

neboť $\rho_0(E \setminus B_j) = 0$, což lze získat dosazením $f = I_{E\setminus B_j}$ do vztahu (18), a

$$\int_{E\setminus B_j} I_{B_j}(y)K(x_0, \mathrm{d}y) = K(x_0, \emptyset) = 0,$$

čímž jsou ověřeny všechny jeho předpoklady. Rovnosti (18) a (20) nyní pro $f \in b\mathcal{E}$ dohromady dávají

$$\lim_{k\to\infty} K(fI_{B_j})(x_{n_k}) = \int_E f\mathrm{d}\rho_0 = \int_E f(y)I_{B_j}(y)K(x_0, \mathrm{d}y) = K(fI_{B_j})(x_0)$$

a speciálně pro $f = I_E$ je $K(I_{B_j})(x_{n_k}) \to K(I_{B_j})(x_0)$, takže $K(I_{B_j}) \in \mathcal{C}_b(E)$ podle poznámky 3.7.

Nyní z vlastnosti $K(I_{B_j}) \in \mathcal{C}_b(E)$ plyne $K(I_{E\setminus B_j}) = I_E - K(I_{B_j}) \in \mathcal{C}_b(E)$. Dále $K(I_{E\setminus B_j}) \searrow 0$, neboť $I_{E\setminus B_j} \searrow 0$ a $I_{E\setminus B_j} \leq 1$, takže jde o důsledek věty o majorizované konvergenci. Podle Diniho věty pro každou kompaktní množinu $L \in \mathcal{E}$ platí

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in L} K(I_{E\setminus B_j})(x) = 0. \tag{21}$$

Buď $\epsilon > 0$ libovolné, pak podle výrazu (21) existuje $j \in \mathbb{N}$ velké tak, že

$$\sup_{x\in L} K(I_{E\setminus B_j})(x) = \sup_{x\in L} \int_E I_{E\setminus B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zároveň pro tato j a ϵ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $A \in \mathcal{E}$, pro něž je $\mu(A) < \delta$, je také $\sup_{x\in L} \int_A I_{B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) < \frac{\epsilon}{2}$. Platí tedy

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in L} \int_A \kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) &\leq \sup_{x\in L} \int_A I_{B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) + \sup_{x\in L} \int_A I_{E\setminus B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&\leq \sup_{x\in L} \int_A I_{B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) + \sup_{x\in L} \int_E I_{E\setminus B_j}(y)\kappa(x, y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

což znamená, že množina $\{\kappa(x, \cdot), x \in L\}$ je stejnoměrně integrovatelná. □

Věta 3.11. *Buď K fellerovské absolutně měřitelné jádro s lokálně konečnou bází μ a hustotou κ. Platí, že K je silně fellerovské právě tehdy, když je množina $\{\kappa(x, \cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná v $L^1(\mu)$ pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní.*

Poznámka 3.12. *Předpoklad stejnoměrné integrovatelnosti $\{\kappa(x, \cdot), x \in L\}$ ve větě lze nahradit libovolnou ekvivalentní podmínkou z lemmatu 3.10.*

Důkaz věty 3.11. Dokažme nejdříve silnou fellerovskost K. Podle lemmatu 3.10 je stejnoměrná integrovatelnost $\{\kappa(x, \cdot), x \in L\}$ ekvivalentní s existencí posloupnosti otevřených množin $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, kde pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\mu(B_j) < \infty$, $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$, $\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x, \cdot), x \in L\}$ je stejnoměrně integrovatelná a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$. Stejně jako v části *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)* tohoto lemmatu je možné ukázat, že $K(fI_{B_j}) \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každé $j \in \mathbb{N}$ a libovolnou $f \in b\mathcal{E}$ a také pro libovolnou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in L} K(I_{E\setminus B_j})(x) = 0. \tag{22}$$

Nechť $\epsilon > 0$ a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ je taková, že $x_n \to x_0$, potom podle (22) existuje $j \in \mathbb{N}$ dost velké, aby $\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} K(I_{E\setminus B_j})(x_n) < \epsilon$. Platí

$$\begin{aligned}
|Kf(x_n) - Kf(x_0)| &\leq \left|Kf(x_n) - K(fI_{B_j})(x_n)\right| + \left|K(fI_{B_j})(x_n) - K(fI_{B_j})(x_0)\right| \\
&+ \left|K(fI_{B_j})(x_0) - Kf(x_0)\right| \\
&\leq \|f\| \left|K(I_{E\setminus B_j})(x_n)\right| + \left|K(fI_{B_j})(x_n) - K(fI_{B_j})(x_0)\right| + \|f\| \left|K(I_{E\setminus B_j})(x_0)\right| \\
&< (2\|f\| + 1)\,\epsilon
\end{aligned}$$

pro všechna $n > n_0$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$, jehož existence je důsledkem spojitosti $K(fI_{B_j})$, je takové, že platí $\left|K(fI_{B_j})(x_{n_0}) - K(fI_{B_j})(x_0)\right| < \epsilon$. Ukázali jsme, že $Kf \in \mathcal{C}_b(E)$ pro libovolnou $f \in b\mathcal{E}$, tedy K je silně fellerovské.

Buď naopak K silně fellerovské, potom pro libovolnou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní je podle lemmatu 1.31 množina $\{K(x,\cdot), x \in L\}$ stejně σ-aditivní. To však podle lemmatu 3.6 znamená, že $\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ je stejnoměrně integrovatelná. □

Poznámka 3.13. *Nechť K je markovské jádro na $\mathcal{E}$ a κ je jeho hustota, potom je $\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní právě tehdy, když je $\{\kappa(x_n,\cdot), n \in \mathbb{N}\}$ stejnoměrně integrovatelná pro každou $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergentní.*

Důkaz. Nechť je $\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ stejnoměrně integrovatelná pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ buď konvergentní posloupnost s limitou x_0. Protože je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ kompaktní, je také $\{\kappa(x_n,\cdot), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ stejnoměrně integrovatelná a taktéž její podmnožina $\{\kappa(x_n,\cdot), n \in \mathbb{N}\}$.

Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že existuje $L \in \mathcal{E}$ kompaktní, pro kterou množina $\{\kappa(x,\cdot), x \in L\}$ není stejnoměrně integrovatelná, to jest existuje $\epsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $A \in \mathcal{E}$ splňující $\mu(A) < \delta$ a $\int_A \kappa(x,y)\mu(\mathrm{d}y) > \epsilon$ pro nějaké $x \in L$. Pro $\delta = \frac{1}{n}$ tedy nalezněme $A_n \in \mathcal{E}, \mu(A_n) < \frac{1}{n}$ a $x_n \in L$, pro které $\int_{A_n} \kappa(x_n,y)\mu(\mathrm{d}y) > \epsilon$. Je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L$, a tedy existuje vybraná podposloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $x_{n_k} \to x_0 \in L$. Množina $\{\kappa(x_{n_k},\cdot), k \in \mathbb{N}\}$ ale jistě není stejnoměrně integrovatelná. □

Důsledek 3.14. *Buď K fellerovské absolutně měřitelné markovské jádro s lokálně konečnou bází μ a hustotou κ. Dále buď pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní a pro každou $B \in \mathcal{E}$ omezenou κ omezená na $L \times B$, potom K je silně fellerovské.*

Důkaz. Podle lemmatu 3.9 existuje posloupnost $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ otevřených a omezených množin taková, že pro každé $j \in \mathbb{N}$ je $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$, $\mu(B_j) < \infty$ a $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = E$. Podle předpokladu je κ omezená na $L \times B_j$, a tedy je $\left\{I_{B_j}(\cdot)\kappa(x,\cdot), x \in L\right\}$ stejnoměrně integrovatelná. Z věty 3.11 a lemmatu 3.10, části $(i) \Leftrightarrow (iv)$, plyne silná fellerovskost K. □

Pro speciální případ $E = \mathbb{R}^n$ byl předchozí důsledek dokázán též v [10].

3.2 Orliczův prostor a postačující podmínka pro silnou fellerovskost

Definice 3.15. Funkce $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ se nazývá *orliczovská*, pokud platí následující.

(i) $\Phi(0) = 0$ a $\Phi(u) > 0$ pro nějaké $u > 0$.

(ii) Φ je neklesající a konvexní.

Poznámka 3.16. *Pro orliczovskou funkci Φ platí* $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$.

Důkaz. Buď $\Phi(u) > 0$ a $f(x) = \frac{\Phi(u)}{u}x$, potom pro $x \geq u$ platí $\Phi(x) \geq f(x)$. Je-li totiž $\Phi(x) < f(x)$, pak pro $\lambda = \frac{u}{x}$ platí

$$\lambda\Phi(x) + (1-\lambda)\Phi(0) = \lambda\Phi(x) < \lambda f(x) = \frac{u}{x}\frac{\Phi(u)}{u}x = \Phi(u) = \Phi(\lambda x + (1-\lambda)0),$$

což je spor s konvexitou Φ. Je tedy $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) \geq \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. □

Definice 3.17. Nechť Φ je orliczovská funkce, $f : E \to \mathbb{R}$ je měřitelná a μ je míra na $\mathcal{E}$, označme

$$M_\Phi(f) = \int_E \Phi(|f|)\mathrm{d}\mu.$$

Orliczovým prostorem nazýváme

$$L^\Phi(\mu) = \left\{[f], f : E \to \mathbb{R} \text{ měřitelná, existuje } a > 0 \;\; M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) < \infty\right\},$$

kde $[f]$ označuje množinu funkcí, které jsou měřitelné a μ-skoro všude rovné f.

Věta 3.18. *Buď Φ orliczovská funkce a*

$$\|[f]\|_\Phi = \inf\left\{a > 0, M_\Phi\left(\frac{g}{a}\right) \le 1, g \in [f]\right\} \quad \text{pro} \quad [f] \in L^\Phi(\mu),$$

potom je $\|\cdot\|_\Phi$ norma na $L^\Phi(\mu)$ a $(L^\Phi(\mu), \|\cdot\|_\Phi)$ je Banachův prostor.

Důkaz. Viz [4], věta 2.1.11, část (a). □

Dále zápisem $f \in L^\Phi(\mu)$ budeme mínit $[f] \in L^\Phi(\mu)$ a definujeme $\|f\|_\Phi = \|[f]\|_\Phi$.

Poznámka 3.19. *Speciální volbou $\Phi(u) = u^p$ pro $p \ge 1$ dostaneme $L^\Phi(\mu) = L^p(\mu)$ a $\|\cdot\|_\Phi = \|\cdot\|_{L^p(\mu)}$, protože pro $f \in L^\Phi(\mu)$ je*

$$\|f\|_\Phi = \inf\left\{a > 0, \int_E \left(\frac{|f|}{a}\right)^p \mathrm{d}\mu \le 1\right\} = \inf\left\{a > 0, \frac{1}{a^p}\|f\|^p_{L^p(\mu)} \mathrm{d}\mu \le 1\right\} = \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

Lemma 3.20. *Nechť Φ je orliczovská funkce, $f \in L^\Phi(\mu)$ a $f_n \in L^\Phi(\mu)$ pro $n \in \mathbb{N}$, potom $\|f_n - f\|_\Phi \to 0$ právě tehdy, když $M_\Phi(k(f_n - f)) \to 0$ pro každé $k > 0$.*

Důkaz. Viz [4], tvrzení 2.1.10, část (5). □

Věta 3.21. *Nechť K je fellerovské markovské jádro na $\mathcal{E}$ a existuje lokálně konečná míra μ na $\mathcal{E}$ taková, že pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní existují $c_L < \infty$ a orliczovská funkce Φ splňující*

$$\|I_L K f\|_\infty \le c_L \|f\|_\Phi \tag{23}$$

pro všechny $f \in \mathcal{C}_b(E) \cap L^\Phi(\mu)$. Potom K je silně fellerovské.

Důkaz. Nechť $G \in \mathcal{E}$ je otevřená a $\mu(G) < \infty$. Ukážeme, že $K(\cdot, G) \in \mathcal{C}_b(E)$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $f_n \in \mathcal{C}_b(E)$ jako

$$f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, E \setminus G)\}, \tag{24}$$

potom je $0 \le f_n \le I_G$ a $f_n \to I_G$ na E. Kvůli tomu, že Φ je neklesající, platí také $\Phi(f_n) \le \Phi(I_G)$, a tedy je pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$M_\Phi(f_n) \le M_\Phi(I_G) = \int_E \Phi(I_G)\mathrm{d}\mu = \int_G \Phi(1)\mathrm{d}\mu = \Phi(1)\mu(G) < \infty,$$

z čehož plyne $f_n \in L^\Phi(\mu)$ a $I_G \in L^\Phi(\mu)$. Protože $I_G - f_n \to 0$ na E, je $\Phi(k(I_G - f_n)) \to 0$ pro každé $k > 0$. Podle věty o majorizované konvergenci s majorantou $\Phi(k)I_G$ je

$$\lim_{n\to\infty} M_\Phi(k(I_G - f_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_E \Phi(k(I_G - f_n))\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} \Phi(k(I_G - f_n))\mathrm{d}\mu = 0,$$

tedy důsledkem lemmatu 3.20 je $\|I_G - f_n\|_\Phi \to 0$, z čehož plyne cauchyovskost $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v prostoru $L^\Phi(\mu)$. Podle předpokladu (23) pro $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sup_{x\in L} |Kf_n(x) - Kf_m(x)| = \|I_L K(f_n - f_m)\|_\infty \le c_L \|f_n - f_m\|_\Phi. \tag{25}$$

Dále z fellerovskosti K plyne $Kf_n \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy důsledkem (25) je, že $\left\{Kf_{n|L}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je cauchyovská v $\mathcal{C}_b(L)$. To znamená, že existuje $h \in \mathcal{C}_b(L)$, pro kterou platí $Kf_{n|L} \to h$ stejnoměrně na L. Zároveň však také platí $Kf_n \to KI_G = K(\cdot, G)$, což plyne z věty o monotónní nebo majorizované konvergenci. Z jednoznačnosti limity tudíž plyne $h = K(\cdot, G)_{|L}$, a tedy $K(\cdot, G)_{|L} \in \mathcal{C}_b(L)$. Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ konvergentní taková, že $x_n \to x_0$, potom volbou $L = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x_0\}$ dostáváme $K(x_n, G) \to K(x_0, G)$, což znamená, že $K(\cdot, G) \in \mathcal{C}_b(E)$.

Nechť $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ je posloupnost otevřených množin a pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí $\mu(B_j) < \infty$, $\overline{B_j} \subset B_{j+1}$ a $B_j \nearrow E$. Existence této posloupnosti je dokázána v lemmatu 3.9. Pro $j \in \mathbb{N}$ definujme funkce $h_j \in \mathcal{C}_b(E)$ předpisem

$$h_j(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \overline{B_j})}{\operatorname{dist}(x, \overline{B_j}) + \operatorname{dist}(x, E \setminus B_{j+1})},$$

potom $h_j \searrow 0$, $Kh_j \searrow 0$ a $K(\cdot, E \setminus B_{j+1}) = KI_{E\setminus B_{j+1}} \leq Kh_j$. Z fellerovskosti K je pro každé $j \in \mathbb{N}$ splněno $Kh_j \in \mathcal{C}_b(E)$, a tedy podle Diniho věty platí pro každou $L \in \mathcal{E}$ kompaktní

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in L} K(x, E \setminus B_j) = 0.$$

Buď nyní $B \in \mathcal{E}$ libovolná otevřená, $\epsilon > 0$ a $j \in \mathbb{N}$ pevné takové, že $\sup_{x\in L} K(x, E \setminus B_j) < \frac{\epsilon}{4}$. Dále buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, $x_n \to x_0$. Protože platí $\mu(B \cap B_j) < \infty$, existuje podle dříve ukázaného $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ je $|K(x_n, B \cap B_j) - K(x_0, B \cap B_j)| < \frac{\epsilon}{2}$. To ale znamená, že pro $n > n_0$ je

$$|K(x_n, B) - K(x_0, B)| \leq |K(x_n, B \cap B_j) - K(x_0, B \cap B_j)| + 2 \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} K(x_n, E \setminus B_j) < \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4} = \epsilon,$$

tedy $K(x_n, B) \to K(x_0, B)$ a $K(\cdot, B) \in \mathcal{C}_b(E)$. Podle lemmatu 1.9 dostaneme $K(\cdot, A) \in \mathcal{C}_b(E)$ pro každou $A \in \mathcal{E}$, a tedy K je silně fellerovské. □

Příklad 3.22. Buď K silně fellerovské, μ báze K a $\Phi(u) = u$, potom podmínka (23) nemusí být splněna. Takovým příkladem je jádro K na prostoru $[0, 1)$ s bází tvořenou Lebesgueovou mírou λ a hustotou κ definovanou následovně.

$$\kappa(0, y) = 1 \quad \text{a pro} \quad 0 < x < 1 \quad \text{je} \quad \kappa(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 - x & 0 < y < x^2, \\ 1 - x & x^2 \leq y < 1. \end{cases}$$

Nejprve ukažme, že K je silně fellerovské. Buď tedy $f \in b\mathcal{E}$ a $0 < x_1 < x_2 < 1$, potom platí

$$\begin{aligned} |Kf(x_2) - Kf(x_1)| &= \left| \int_0^1 f(y)(\kappa(x_2, y) - \kappa(x_1, y))\lambda(\mathrm{d}y) \right| \leq \left| \int_0^{x_1^2} f(y) \left(\frac{1}{x_2} - x_2 - \frac{1}{x_1} + x_1 \right) \lambda(\mathrm{d}y) \right| \\ &\quad + \left| \int_{x_1^2}^{x_2^2} f(y) \left(x_1 - x_2 + \frac{1}{x_2} \right) \lambda(\mathrm{d}y) \right| + \left| \int_{x_2^2}^1 f(y)\,(x_1 - x_2)\,\lambda(\mathrm{d}y) \right| \\ &\leq \int_0^{x_1^2} |f(y)|\,\lambda(\mathrm{d}y) \left| \frac{1}{x_2} - x_2 - \frac{1}{x_1} + x_1 \right| + \left| x_1 - x_2 + \frac{1}{x_2} \right| \|f\|_\infty\,(x_2^2 - x_1^2) \\ &\quad + \int_{x_2^2}^1 |f(y)|\,\lambda(\mathrm{d}y)\,|x_1 - x_2| \to 0, \quad \text{pokud} \quad |x_2 - x_1| \to 0, \end{aligned}$$

čímž je ukázáno, že Kf je spojitá na $(0, 1)$. Je spojitá také v 0, neboť pro $x > 0$ je

$$\begin{aligned} |Kf(x) - Kf(0)| &= \left| \int_0^1 f(y)(\kappa(x, y) - 1)\lambda(\mathrm{d}y) \right| \leq \left| \int_0^{x^2} f(y) \left(\frac{1}{x} - x \right) \lambda(\mathrm{d}y) \right| + \left| \int_{x^2}^1 f(y)\,(-x)\,\lambda(\mathrm{d}y) \right| \\ &\leq 2\,\|f\|_\infty \left| x - x^3 \right| \to 0, \quad \text{pokud} \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Pomínka (23) z věty 3.21 ale pro K a orliczovskou funkci $\Phi(u) = u$ není splněna. Buď $0 < \delta < \frac{1}{2}$, ukážeme, že pro každé $c < \infty$ existuje $f_c \in \mathcal{C}_b([0, 1)) \cap L^1(\lambda)$ splňující

$$\left\| I_{[0,\delta]} K f_c \right\|_\infty > c\,\|f_c\|_{L^1(\lambda)}\,.$$

Nechť $0 < x_c \leq \delta$ je takové, že platí

$$\frac{1}{x_c} + \frac{3(1 - x_c)}{2} > \frac{3c}{2} \tag{26}$$

a funkce f_c je definována jako

$$f_c(y) = \begin{cases} \frac{1}{x_c^2} & 0 \leq y < x_c^2, \\ -\frac{y}{x_c^4} + \frac{2}{x_c^2} & x_c^2 \leq y \leq 2x_c^2, \\ 0 & 2x_c^2 < y < 1. \end{cases}$$

Pro takovou f_c platí $f_c \in \mathcal{C}_b([0, 1)) \cap L^1(\lambda)$ a

$$\|f_c\|_{L^1(\lambda)} = \int_0^1 f_c(y)\lambda(\mathrm{d}y) = \int_0^{x_c^2} \frac{1}{x_c^2}\lambda(\mathrm{d}y) + \int_{x_c^2}^{2x_c^2} \left(-\frac{y}{x_c^4} + \frac{2}{x_c^2} \right) \lambda(\mathrm{d}y) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dále také

$$\begin{aligned} Kf_c(x_c) &= \int_0^1 f_c(y)\kappa(x_c,y)\lambda(\mathrm{d}y) = \int_0^{x_c^2} \frac{1}{x_c^2}\left(\frac{1}{x_c}+1-x_c\right)\lambda(\mathrm{d}y) + \int_{x_c^2}^{2x_c^2}\left(-\frac{y}{x_c^4}+\frac{2}{x_c^2}\right)(1-x_c)\,\lambda(\mathrm{d}y) \\ &= \left(\frac{1}{x_c}+1-x_c\right)+\frac{1-x_c}{2} = \frac{1}{x_c}+\frac{3(1-x_c)}{2}, \end{aligned}$$

čímž s pomocí (26) dostáváme

$$\left\|I_{[0,\delta]}Kf_c\right\|_\infty = \sup_{0\le x\le\delta} Kf_c(x) \ge Kf_c(x_c) > c\,\|f_c\|_{L^1(\lambda)}\,.$$

Poznámka 3.23. *Za předpokladů věty 3.21 také platí, že za bázi K lze vzít míru μ.*

Důkaz. Buď pro otevřenou $G\in\mathcal{E}$, $\mu(G)<\infty$, posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definována předpisem (24), potom je pro $x\in E$

$$K(x,G) = KI_G(x) = \lim_{n\to\infty} Kf_n(x) \le \lim_{n\to\infty} c_x\,\|f_n\|_\Phi = c_x\,\|I_G\|_\Phi\,. \tag{27}$$

Poslední rovnost v (27) je platná, protože $\|I_G - f_n\|_\Phi \to 0$, jak je ukázáno v důkazu věty 3.21.

Buď nyní $A\in\mathcal{E}$ splňující $\mu(A)=0$, potom podle lemmatu 1.8 existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$ otevřená $G_n\in\mathcal{E}$, pro níž platí $A\subset G_n$ a $\mu(G_n)<2^{-n}$. Dále také platí

$$\begin{aligned} \|I_{G_n}\|_\Phi &= \inf\left\{a>0, \int_E \Phi\left(\frac{I_{G_n}}{a}\right)\mathrm{d}\mu\le 1\right\} = \inf\left\{a>0, \int_{G_n}\Phi\left(\frac{1}{a}\right)\mathrm{d}\mu\le 1\right\} \\ &= \inf\left\{a>0, \mu(G_n)\Phi\left(\frac{1}{a}\right)\mathrm{d}\mu\le 1\right\} \le \inf\left\{a>0, \Phi\left(\frac{1}{a}\right)\le 2^n\right\} \to 0 \ \text{ pro } \ n\to\infty. \end{aligned}$$

Důsledkem (27) je

$$K(x,A)\le K(x,G_n)\le c_x\,\|I_{G_n}\|_\Phi \to 0,$$

a tedy platí $K(x,\cdot)\ll\mu$. $\square$

Poznámka 3.24. *Pravdivost věty 3.21 zůstane zachována, uvažujeme-li platnost podmínky* (23) *pouze pro*

(i) $f\in\mathcal{C}_K(E)=\{f\in\mathcal{C}_b(E), \mathrm{supt}(f) \text{ je kompaktní}\}$ *a E lokálně kompaktní, to jest pro každé $x\in E$ existují $U\in\mathcal{E}$ otevřená a $K\in\mathcal{E}$ kompaktní splňující $x\in U\subset K$.*

(ii) $f\in\mathcal{C}_K^\infty(E)=\mathcal{C}^\infty(E)\cap\mathcal{C}_K(E)$ *a* $E=\mathbb{R}^n$.

Důkaz. Nejprve ukažme, že pro $f\in\mathcal{C}_K(E)$ platí $f\in L^\Phi(\mu)$. Buď tedy $f\in\mathcal{C}_K(E)$, potom existuje $L\in\mathcal{E}$ kompaktní taková, že $f(x)=0$ pro každé $x\in E\setminus L$ a protože je f spojitá, je také $|f|<c$ pro nějaké $c>0$. μ je lokálně konečná, a tedy pro každé $x\in L$ existuje $U_x\in\mathcal{E}$ otevřená taková, že $\mu(U_x)<\infty$. Zároveň $\{U_x\}_{x\in L}$ tvoří otevřené pokrytí L, z něhož lze kvůli kompaktnosti L vybrat konečné podpokrytí $\{U_{x_1},\dots,U_{x_k}\}$. Je tedy

$$\mu(L)\le\mu\left(\bigcup_{i=1}^k U_{x_i}\right)\le\sum_{i=1}^k\mu(U_{x_i})<\infty.$$

Celkově platí

$$\int_E\Phi(|f|)\mathrm{d}\mu = \int_L\Phi(|f|)\mathrm{d}\mu + \int_{E\setminus L}\Phi(0)\mathrm{d}\mu \le \Phi(c)\mu(L)<\infty,$$

což znamená $f\in L^\Phi(\mu)$.

Pokračování důkazu (i) a (ii) je analogické jako důkaz věty 3.21, jen s jinak definovanými aproximačními funkcemi f_k v rovnici (24), které musí pro $G\in\mathcal{E}$ otevřenou, $\mu(G)<\infty$, splňovat $0\le f_k\le I_G$, $f_k\to I_G$ a $f_k\in\mathcal{C}_K(E)$ resp. $f_k\in\mathcal{C}_K^\infty(E)$.

(i) : E je lokálně kompaktní, a tedy pro každé $x\in G$ existují $U_x\in\mathcal{E}$ otevřená a $L_x\in\mathcal{E}$ kompaktní takové, že $x\in U_x\subset L_x$. Zároveň $\{U_x\}_{x\in G}$ tvoří otevřené pokrytí G, takže ze separability E existuje vybrané spočetné podpokrytí $\{U_{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Platí

$$G\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}U_{x_k}\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}}L_{x_k}.$$

Označme

$$G^{-\epsilon} = \{x \in G,\ \operatorname{dist}(x, E \setminus G) \geq \epsilon\}\,, \tag{28}$$

potom je $G^{-\epsilon} \subset G$ a $G^{-\epsilon}$ je uzavřená. Dále pro $k \in \mathbb{N}$ označme

$$V_k = \bigcup_{i=1}^{k} L_{x_i} \cap G^{-\frac{1}{k}},$$

potom je V_k kompaktní, $V_k \subset V_{k+1}$, $V_k \subset G$ a $V_k \nearrow G$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in E$ definujme

$$f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, E \setminus V_n)\}\,.$$

Pro $x \in G$ z otevřenosti G existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $\delta > 0$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $B(x, \delta) \subset V_n$. Tedy $\operatorname{dist}(x, E \setminus V_n) \geq \delta$ a pro $n \geq n_0$ je

$$f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, E \setminus V_n)\} \geq \min\{1, n\delta\} \to 1.$$

Zároveň $\operatorname{dist}(x, E \setminus V_n) \leq \operatorname{dist}(x, E \setminus V_{n+1})$, takže

$$f_n(x) = \min\{1, n \operatorname{dist}(x, E \setminus V_n)\} \leq \min\{1, (n+1) \operatorname{dist}(x, E \setminus V_{n+1})\} = f_{n+1}(x).$$

Celkově máme $0 \leq f_n \leq f_{n+1} \leq I_G$, $f_n \to I_G$ a $\operatorname{supt}(f_n) \subset V_n$, což znamená $f_n \in \mathcal{C}_K(E)$.

(ii) : Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pro $k \in \mathbb{N}$ jsou množiny V_k definované jako

$$V_k = [-k, k]^n \cap G^{-\frac{2}{k}}$$

kompaktní a $V_k \nearrow G$, kde pro $\epsilon > 0$ je $G^{-\epsilon}$ definována v (28). Buďte pro $k \in \mathbb{N}$

$$L_k = V_k^{\frac{1}{k}} = \left\{x \in \mathbb{R}^n,\ \operatorname{dist}(x, V_k) \leq \frac{1}{k}\right\} \subset G$$

a $\varphi_{\frac{1}{k}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkce sestrojené v příloze A. Platí $\varphi_{\frac{1}{k}} \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supt}(\varphi_{\frac{1}{k}}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \frac{1}{k}\right\}$ a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{\frac{1}{k}} \mathrm{d}\lambda = 1$. Definujme aproximační funkce f_k, $k \in \mathbb{N}$, předpisem

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\left\{y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leq \frac{1}{k}\right\}} \varphi_{\frac{1}{k}}(y_1, \ldots, y_n) I_{L_k}(y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n. \tag{29}$$

Je-li $(x_1, \ldots, x_n) \in V_k$, platí

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\left\{y_1^2 + \ldots + y_n^2 \leq \frac{1}{k}\right\}} \varphi_{\frac{1}{k}}(y_1, \ldots, y_n) \mathrm{d}y_1 \ldots \mathrm{d}y_n = 1,$$

protože $\operatorname{dist}(V_k, \mathbb{R}^n \setminus L_k) \geq \frac{1}{k}$. Podobně $f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$, pokud $(x_1, \ldots, x_n) \notin G$. Zbývá ukázat, že $f_k \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$. To však plyne z faktu, že parciální derivace libovolného řádu funkce $\varphi_{\frac{1}{k}}$ je spojitá, přesněji tvaru (30) (viz příloha A), tedy lze zaměnit pořadí derivace a integrace. $\square$

Reference

[1] Wolfgang Adamski, Peter Gänssler, Sigmund Kaiser (1976): On Compactness and Convergence in Space of Measures. Mathematische Annalen 220, 193-210.

[2] Richard M. Dudley (2002): Real Analysis and Probability. Cambridge University Press.

[3] Nelson Dunford, Jacob T. Schwartz (1958): Linear Operators, General Theory. Wiley-Interscience.

[4] Gerald A. Edgar, Louis Sucheston (1992): Stopping Times and Directed Processes. Cambridge University Press.

[5] Peter Gänssler (1971): Compactness and sequential compactness in spaces of measures. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, **17**, 124-146.

[6] John L. Kelley (1975): General Topology. Springer.

[7] Bohdan Maslowski, Jan Seidler (2000): Probabilistic approach to the strong Feller property. Probability Theory and Related Fields 118, 187-210.

[8] Dagmar Medková: Osobní sdělení.

[9] Kalyanapuram R. Parthasarathy (1967): Probability measures on metric spaces. Academic Press.

[10] René L. Schilling, Jian Wang (2011): Strong Feller Continuity of Feller Processes and Semigroups.

[11] Jan Seidler (2001): A note on the strong Feller property. Lecture notes for Prague SPDEs seminar. http://simu0292.utia.cas.cz/seidler/seminar.html.

[12] Christian Sunyach (1975): Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet. Annales de l'Institut Henri Poincaré B11, 325-343.

[13] Cédric Villani (2008): Optimal Transport: Old and New. Springer.

Přílohy

A:

Buď $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definována předpisem

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{\frac{1}{p(x_1,\dots,x_n)}} & p(x_1, \dots, x_n) < 0, \\ 0 & p(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \end{cases}$$

kde $p(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1$. Indukcí ukážeme, že $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$. Předpokládejme, že

$$\frac{\partial^N}{\partial x_1^{N_1} \dots \partial x_n^{N_n}} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{q(x_1, \dots, x_n)}{p^k(x_1, \dots, x_n)} e^{\frac{1}{p(x_1 \dots, x_n)}} \tag{30}$$

pro $p(x_1 \dots, x_n) < 0$, $N = N_1 + \dots + N_n$, $k \geq 0$ a

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_1=0}^{d} \dots \sum_{j_n=0}^{d} a_{j_1,\dots,j_n} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

kde $d \in \mathbb{N}$ a $a_{j_1,\dots,j_n} \in \mathbb{R}$. Je-li $N = 0$, vztah (30) platí, stačí totiž uvažovat $q(x_1, \dots, x_n) = 1$ a $k = 0$. Pro $1 \leq i \leq n$ po derivování (30) vychází

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q(x_1, \dots, x_n)}{p^k(x_1, \dots, x_n)} e^{\frac{1}{p(x_1 \dots, x_n)}} \right) \quad = \quad & \left(\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} q(x_1, \dots, x_n)}{p^k(x_1, \dots, x_n)} - \frac{2k x_i q(x_1, \dots, x_n)}{p^{k+1}(x_1, \dots, x_n)} \right) e^{\frac{1}{p(x_1 \dots, x_n)}} \\ & - \frac{2 x_i q(x_1, \dots, x_n)}{p^{k+2}(x_1, \dots, x_n)} e^{\frac{1}{p(x_1 \dots, x_n)}}, \end{aligned}$$

což je opět funkce tvaru (30) pro nějaké jiné koeficienty $k \geq 0$, $q(x_1, \dots, x_n)$ a $d \in \mathbb{N}$. Pomocí L'Hospitalova pravidla se dá ukázat, že platí

$$\frac{q(x_1, \dots, x_n)}{p^k(x_1, \dots, x_n)} e^{\frac{1}{p(x_1 \dots, x_n)}} \to 0, \text{ pokud } p(x_1, \dots, x_n) \to 0_-,$$

takže φ má spojité parciální derivace všech řádů. Důsledkem je $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Pro $\epsilon > 0$ funkce $\varphi_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\varphi_\epsilon(x_1, \dots, x_n) = \frac{\varphi\left(\frac{x_1}{\epsilon}, \dots, \frac{x_n}{\epsilon}\right)}{\int_{R^n} \varphi\left(\frac{x_1}{\epsilon}, \dots, \frac{x_n}{\epsilon}\right) \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}$$

splňuje $\varphi_\epsilon \in \mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supt}(\varphi_\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \epsilon\}$ a $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon \mathrm{d}\lambda = 1$.

Značení