Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Radka Matěková

Algoritmizace geometrického zobrazování ploch

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Petra Surynková, Ph.D.**

Studijní program: **Matematika**

Studijní obor: **Učitelství matematiky-deskriptivní geometrie pro střední školy**

Praha 2014

Děkuji všem, kteří mě při psaní diplomové práce podporovali. Obzvlášť děkuji vedoucí mé diplomové práce, RNDr. Petře Surynkové, Ph.D., za cenné rady, připomínky a hlavně za čas, který mi věnovala.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 9. 4. 2014 Bc. Radka Matěková

Název práce: Algoritmizace geometrického zobrazování ploch

Autor: Bc. Radka Matěková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Práce se zabývá průměty ploch v rovnoběžném či středovém promítání a algoritmizací jejich tvorby. Poskytuje přehled o diferenciální geometrii ploch. Vysvětluje základní pojmy, dává návod ke hledání parametrických vyjádření několika typů ploch. Věnuje se základům promítání, pojednává o promítání rovnoběžném a středovém. Ukazuje výpočet průmětu plochy v daném promítání, ve speciálních případech uvádí výpočty obrysu plochy. Obsahuje programovou dokumentaci k implementovaným algoritmům. Programy slouží k zobrazování objektů v zadaných promítáních. Použití středového promítání je demonstrováno na anaglyfech. Výstupem práce jsou rovněž programy umožňující tvorbu anaglyfů. Přílohou práce jsou 3D brýle (red cyan) a CD, na němž lze najít diplomovou práci a složku mfiles, v níž jsou uloženy navržené programy. Práce je určena všem zájemcům o problematiku zobrazování ploch a je využitelná ve výuce deskriptivní geometrie či matematiky na střední i vysoké škole.

Klíčová slova: geometrická plocha, promítání, anaglyf, algoritmizace promítání

Title: Algorithms for geometric projections of surfaces

Author: Bc. Radka Matěková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Petra Surynková, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: My diploma thesis deals with parallel and central projections of surfaces and algorithmization of their creation. It gives information about differential geometry of surfaces. Basic terms are explained as well as methods how to derive parametrization of several types of surfaces. It is also devoted to projections – parallel and central projection. The thesis deals with calculation of projection of surface. The thesis deals with calculation of projection of surface and in special cases with calculation of its silhouette. There is the program documentation of implemented algorithms. The theory of anaglyphs and their creation by programs is included. 3D red cyan glasses are enclosed to the thesis as well as a CD containing the .pdf version of this thesis and file named „mfiles“, which contains proposed functions. The thesis is meant to be used by teachers and students in teaching and studying descriptive geometry and mathematics.

Keywords: geometric surface, projection, anaglyph, algorithmization of projection

Obsah

Seznam obrázků

Seznam ukázek zdrojových kódů

Úvod

Tato diplomová práce je zaměřena na geometrické plochy a jejich průměty v zobrazeních, se kterými se setkáváme v deskriptivní geometrii. Klade si za cíl navrhnout programový prototyp, který zadanou plochu promítne v daném promítání. Kvůli využití programu na střední škole přidáme možnost zobrazovat i přímky nebo tělesa. Všechny zmíněné objekty navíc bude možné zobrazit pomocí anaglyfů – 3D obrázků.

Vzhledem k tomu, že je práce vypsána na katedře didaktiky matematiky, snažíme se, aby byla svým stylem přístupná nejen odborné veřejnosti, ale i studentům středních škol se zájmem o matematiku, geometrii či programování. Text je doplněn o ilustrace, které usnadňují pochopení probíraných témat.

Práce je rozdělena do pěti kapitol. V první kapitole podáváme nutné základy diferenciální geometrie ploch. Kromě definic důležitých pojmů v ní nalezneme i část zaměřenou na některé speciální typy ploch a hledání jejich parametrických vyjádření.

Druhá kapitola obsahuje teorii o promítáních objektů v prostoru. Promítání rozdělujeme na středové a rovnoběžné. Věnujeme se průmětům ploch a křivek na těchto plochách. Ukazujeme čtenáři, jak se řeší viditelnost křivek na plochách.

Ve třetí kapitole navážeme na teorii o promítáních. Veškeré postupy zmíněné ve druhé kapitole převedeme do řeči analytické geometrie. Naučíme se počítat průměty bodů v daných promítáních, hledat průměty ploch a naznačíme i hledání skutečného obrysu plochy.

Čtvrtá kapitola pojednává o implementovaných algoritmech. Obsahuje programovou dokumentaci k navrženým programům a funkcím. Poskytuje čtenáři přehled o použitých postupech a dává návod k použití těchto programů.

V páté kapitole se krátce zmíníme o anaglyfech a jejich tvorbě. Zaměříme se na nejdůležitější pojmy týkající se této problematiky. Poté si ukážeme, jak lze vytvářet anaglyfy v navržených programech.

Přílohy práce obsahují seznam všech navržených programů (včetně stručného popisu) a jejich grafické výstupy.

Veškeré obrázky v této práci jsou mým dílem, žádný není převzatý. Vznikly v softwarech Rhinoceros a MATLAB, jež jsou přístupné studentům Matematicko-fyzikální fakulty v počítačových laboratořích.

Součástí práce je CD, na němž čtenář nalezne .pdf verzi této diplomové práce a složku mfiles, která obsahuje programy, jež jsme navrhli. Dále přikládáme 3D brýle z kartonu s filtry red a cyan. Upozorňujeme čtenáře, aby na filtry nesahal holými prsty, protože se tím filtry ničí.

Nyní se již přesuneme k odbornému textu diplomové práce. Věřím, že v ní čtenář najde zajímavé informace a četba práce ho bude bavit. Přeji příjemné čtení.

1. Diferenciální geometrie ploch

V první kapitole této práce se seznámíme s důležitými pojmy diferenciální geometrie, které budeme potřebovat ke studiu ploch a jejich zobrazování.

1.1 Úvodní pojmy

Než se dostaneme k diferenciální geometrii ploch, musíme si nejprve ujasnit některé pojmy, které budeme potřebovat.

Definice 1.1.1 *Buď $D \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $p: D \longrightarrow E_3$, resp. $p: D \longrightarrow V(E_3)$, nazveme bodovou, resp. vektorovou, funkcí jedné reálné proměnné s definičním oborem D.* ■

V dalších částech práce předpokládáme, že D je otevřený interval, nebude-li řečeno něco jiného.

Definice 1.1.2 *Říkáme, že bodová (nebo vektorová) funkce p definovaná na intervalu $D \subset \mathbb{R}$ má v bodě $t_0 \in D$ za limitu bod (nebo vektor) p_0, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|p(t) - p_0\| < \varepsilon$ pro každé $t \in D$, pro které $0 < |t - t_0| < \delta$. V tom případě píšeme $lim_{t \to t_0} p(t) = p_0$.* ■

Definice 1.1.3 *Říkáme, že bodová (nebo vektorová) funkce p jedné proměnné je spojitá v bodě $t_0 \in D$, jestliže p má v bodě t_0 limitu a tato limita je rovna $p(t_0)$. Říkáme dále, že p je spojitá v D, je-li spojitá v každém bodě $t_0 \in D$.* ■

Definice 1.1.4 *Buď $p(t)$ bodová (nebo vektorová) funkce definovaná na D, buď $t_0 \in D$. Jestliže existuje limita*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[p(t_0 + h) - p(t_0)],$$

Nazveme tuto limitu derivací funkce p v bodě t_0 a označíme $p'(t_0)$, případně $\frac{\partial p}{\partial t}(t_0)$. ■

Všechny výše uvedené definice jsou uvedeny v (Boček, Kubát, 1983, s. 7-8).

Povšimněme si, že v definici 1.1.4 je $p'(t_0)$ limitou funkce

$$q(h) = \frac{1}{h}[p(t_0 + h) - p(t_0)].$$

Funkce $q(h)$ je vždy vektorová nezávisle na tom, zdali funkce p je bodová nebo vektorová.

Nyní se podíváme, jak zadat předpis bodové funkce reálné proměnné, která reálnému číslu přiřazuje bod v eukleidovském prostoru.

V eukleidovském prostoru E_3 mějme kartézskou soustavu souřadnic $\langle P, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3} \rangle$. Díky ní máme dáno jednoznačné zobrazení mezi $\mathbb{R}^3$ a E_3.

Je-li p bodová funkce s definičním oborem D a $t \in D$, potom lze vektor $p(t) - P$ napsat jako lineární kombinaci

$$p(t) - P = p_1(t)\overrightarrow{e_1} + p_2(t)\overrightarrow{e_2} + p_3(t)\overrightarrow{e_3}.$$

Koeficienty této lineární kombinace jsou jednoznačně určeny. Je-li p vektorová funkce, píšeme

$$p(t) = p_1(t)\overrightarrow{e_1} + p_2(t)\overrightarrow{e_2} + p_3(t)\overrightarrow{e_3}.$$

Reálné funkce $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ definované na D jsou souřadnice bodové nebo vektorové funkce p vzhledem ke zvolené kartézské soustavě souřadnic.

Pomocí výše uvedených vztahů lze i obráceně zadat bodovou či vektorovou funkci p, pokud máme dány reálné funkce $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$. Tyto jsou pak souřadnicemi funkce p. Díky tomu můžeme ztotožnit bodovou / vektorovou funkci p a trojici reálných funkcí $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$. Potom píšeme

$$p(t) = [p_1(t), p_2(t), p_3(t)],$$

pokud p je bodová funkce. V případě vektorové funkce používáme zápis

$$p(t) = \big(p_1(t), p_2(t), p_3(t)\big).$$

Těmto rovnostem říkáme souřadnicové vyjádření funkce p. (Boček, Kubát, 1983, s. 9-10)

Nyní se přesuneme k teorii o bodových funkcích více proměnných.

Definice 1.1.5 *Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Zobrazení množiny Ω do E_3, resp. do $V(E_3)$, nazveme bodovou, resp. vektorovou, funkcí dvou proměnných s definičním oborem Ω.* ■

Definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 12). V dalších částech práce předpokládáme, že Ω je otevřená souvislá podmnožina $\mathbb{R}^2$, tzv. oblast.

Mějme bodovou, resp. vektorovou, funkci p dvou proměnných s definičním oborem $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Dále zvolíme $a = (a_1, a_2)$ a definujeme funkce $q_1(t)$, $q_2(t)$ takto:

$$q_1(t) = p(t, a_2), q_2(t) = p(a_1, t).$$

Tyto funkce jsou bodové, resp. vektorové, funkce jedné proměnné definované v okolí bodu a_1 nebo a_2. Předpokládejme, že existují $q_1{}'(a_1)$ a $q_2{}'(a_2)$. Můžeme pak napsat následující definici.

Definice 1.1.6 *Vektor $q_1{}'(a_1)$ nazýváme parciální derivací funkce p podle první proměnné v bodě $a = (a_1, a_2)$ a značíme $\frac{\partial p}{\partial u_1}(a_1, a_2)$, vektor $q_2{}'(a_2)$ nazýváme parciální derivací funkce p podle druhé proměnné v bodě $a = (a_1, a_2)$ a značíme $\frac{\partial p}{\partial u_2}(a_1, a_2)$.* ■

Definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 13).

Má-li funkce p parciální derivace podle obou proměnných ve všech bodech oblasti Ω, pak jsou tyto parciální derivace vektorové funkce dvou proměnných definované v Ω a značíme je $\frac{\partial p}{\partial u_1}, \frac{\partial p}{\partial u_2}$.

Mějme v eukleidovském prostoru E_3 zvolenu kartézskou soustavu souřadnic $\langle P, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\rangle$ a buď p bodová, resp. vektorová, funkce dvou proměnných definovaná v Ω. Pro každé $u = (u_1, u_2) \in \Omega$ lze psát

$$p(u_1, u_2) = P + p_1(u_1, u_2)\overrightarrow{e_1} + p_2(u_1, u_2)\overrightarrow{e_2} + p_3(u_1, u_2)\overrightarrow{e_3},$$

resp. $$p(u_1, u_2) = p_1(u_1, u_2)\overrightarrow{e_1} + p_2(u_1, u_2)\overrightarrow{e_2} + p_3(u_1, u_2)\overrightarrow{e_3}.$$

Hovoříme o souřadnicích a souřadnicovém vyjádření bodové, resp. vektorové funkce p a píšeme

$$p(u_1, u_2) = [p_1(u_1, u_2), p_2(u_1, u_2), p_3(u_1, u_2)],$$

resp. $$p(u_1, u_2) = \big(p_1(u_1, u_2), p_2(u_1, u_2), p_3(u_1, u_2)\big).$$

Díky definici 1.1.6 a větám, které čtenář nalezne v (Boček, Kubát, 1983, s. 12-13), lze ukázat, že

$$\frac{\partial p}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial p_1}{\partial u_i}, \frac{\partial p_2}{\partial u_i}, \frac{\partial p_3}{\partial u_i}\right), i = 1,2.$$

Derivování funkce více proměnných se takto převede na derivování tří reálných funkcí dvou proměnných. Nebudeme zde uvádět všechna pravidla derivování, ty si čtenář může najít například v (Kopáček, 2002). Ukážeme si však, jak derivujeme funkci složenou.

Mějme funkci $f: D \to \Omega$, kde D je interval v $\mathbb{R}$ a Ω oblast v $\mathbb{R}^2$, a bodovou, resp. vektorovou, funkci $p: \Omega \to E_3$, resp. $p: \Omega \to V(E_3)$. Potom $p \circ f$ je bodová, resp. vektorová, funkce jedné proměnné s definičním oborem D. Označíme $f = (f_1, f_2)$ a předpokládáme, že f_1 a f_2 mají vlastní derivace v $t_0 \in D$. Dále předpokládáme, že p má parciální derivace v bodě $u_0 = f(t_0) \in \Omega$. Potom platí:

$$(p \circ f)'(t_0) = (f_1)'(t_0) \frac{\partial p}{\partial u_1}(u_0) + (f_2)'(t_0) \frac{\partial p}{\partial u_2}(u_0).$$

Odůvodnění najdeme v (Boček, Kubát, 1983, s. 14).

V závěru první části kapitoly si ještě uvedeme definici křivky a její tečny.

Definice 1.1.7 *Buď p bodová funkce jedné proměnné s definičním oborem D. Budeme říkat, že p je parametrickým vyjádřením křivky třídy C^n $(n \in \mathbb{N})$, resp. třídy C^∞, jestliže platí:*

1. *p je třídy C^n, resp. C^∞*
2. *pro každé $t \in D$ je $p'(t) \neq 0$.*

Ve stejné situaci budeme někdy pro pohodlí říkat, že p určuje křivku třídy C^n nebo C^∞. Proměnnou t budeme nazývat parametr. ■

Definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 25).

V krátkosti si ještě představíme pojem tečny křivky. Tečna křivky $p(t)$ je přímka a, která prochází bodem $p(t)$ a její směrovým vektorem je vektor $p'(t)$.

1.2 Zavedení pojmu plocha

Přistoupíme k samotnému pojmu plochy. Předpokládáme, že čtenář se již s pojmem plochy setkal – například s plochou kulovou. Nyní si uvedeme definici.

Definice 1.2.1 *Nechť je Ω oblast v $\mathbb{R}^2$, tj. otevřená a souvislá podmnožina v $\mathbb{R}^2$. Dále předpokládejme, že p je bodová funkce definovaná na oblasti Ω s hodnotami v třírozměrném eukleidovském prostoru E_3. Každému bodu $(u, v) \in \Omega$ je tedy přiřazen bod $p(u, v) \in E_3$. Nechť má funkce p tyto dvě vlastnosti:*

a) Funkce p má spojité parciální derivace ve všech bodech Ω.

b) V každém bodě $(u, v) \in \Omega$ jsou parciální derivace $\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}$ lineárně nezávislé vektory.

Pak říkáme, že bodová funkce p je parametrickým vyjádřením plochy, stručně mluvíme o ploše p nebo o ploše $p(\Omega)$. ■

Definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 52).

V dalších částech práce se objeví výpočty, ve kterých budeme potřebovat, aby funkce p byla alespoň jednou diferencovatelná. V definici 1.2.1 proto nesmíme vynechat předpoklad *a)*. Zároveň neopomeneme předpoklad *b)*, díky kterému je jisté, že plocha nedegeneruje na křivku.

Může se stát, že v izolovaných bodech plochy není předpoklad *b)* splněn. Tuto situaci připouštíme a daným bodům říkáme *singulární body* parametrického vyjádření plochy. Ostatní jsou *regulárními body* plochy.

Při zadávání parametrických vyjádření ploch budeme plochu značit řeckým písmenem κ v souladu s učebnicemi deskriptivní geometrie, např. (Urban, 1967). Toto značení použijeme i v druhé kapitole. Navíc takto lépe odlišíme křivky (značené latinkou) a plochy (značené řeckými písmeny). Značení s písmenem p budeme dodržovat v definicích v souladu s literaturou, ze které jsou definice převzaty.

U parametrického vyjádření plochy musíme dle definice vždy uvádět, jaké uspořádané dvojice obsahuje množina Ω. Zapíšeme to ve tvaru např. $u \in \langle 0; 2\pi \rangle$, $v \in \langle -\pi/2\,; \pi/2 \rangle$, přičemž máme na paměti, že $\Omega = \{(u, v)\}$, kde u a v jsou ze zadaných množin.

Nyní si uvedeme příklady několika ploch. V každém z nich předpokládáme (stejně jako později v dalších částech práce), že máme v eukleidovském prostoru E_3 zvolenou kartézskou soustavu souřadnic. V příkladech budeme zmiňovat též rovnice používané v analytické geometrii, jejichž obecné tvary lze najít v (Hlaváček, Dolanský, 1971).

Příklad 1.2.1 Mějme plochu $\kappa(u, v) = [a_1 + ub_1 + vc_1; a_2 + ub_2 + vc_2; a_3 + ub_3 + vc_3]$, $u \in \langle -2; 2 \rangle$, $v \in \langle -3; 3 \rangle$, kde $A = [a_1; a_2; a_3]$ je bodem v prostoru E_3 a $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$ jsou lineárně nezávislé vektory jeho zaměření $V(E_3)$. Z analytické geometrie víme, že tímto zadáním určíme část roviny. Spočítejme parciální derivace $\kappa(u, v)$: $\frac{\partial \kappa}{\partial u} = \vec{b}$, $\frac{\partial \kappa}{\partial v} = \vec{c}$. Obě parciální derivace jsou spojité (v tomto případě dokonce konstantní) a lineárně nezávislé. Parametrické vyjádření roviny tedy splňuje naši definici plochy, rovina je proto případem plochy. (Obr. 1.2.1)

Příklad 1.2.2 Je dána parametrická plocha $\kappa(u, v) = [3\cos u \cos v + 5; 3\cos u \sin v + 5; 3\sin u + 5]$, $u \in \langle -\pi/2\,; \pi/2 \rangle$, $v \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Dosadíme-li souřadnice bodů plochy za x, y, z do rovnice $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 9$, zjistíme, že body plochy této rovnici vyhovují. Takto v analytické geometrii zadáváme sféru. V našem příkladě má střed v bodě $S = [5; 5; 5]$ a poloměr $r = 3$. (Obr. 1.2.2)

Parciální derivace plochy vychází: $\frac{\partial \kappa}{\partial u} = (-3\sin u \cos v\,; -3\sin u \sin v\,; 3\cos u)$, $\frac{\partial \kappa}{\partial v} = (-3\cos u \sin v\,; 3\cos \mathrm{u} \cos v\,; 0)$. Vektory parciálních derivací jsou jistě spojité a navíc lineárně nezávislé, pokud $\cos u \neq 0$, tedy $u \in (-\pi/2\,; \pi/2)$. V krajním bodě $\pi/2$ tohoto intervalu jsou vektory ve tvaru $\frac{\partial \kappa}{\partial u}(\pi/2\,, v) = (-3\cos v\,; -3\sin v\,; 0)$, $\frac{\partial \kappa}{\partial v}(\pi/2\,, v) = (0; 0; 0)$. V tomto případě jsou vektory lineárně závislé a příslušný bod nesplňuje definici parametrického vyjádření plochy. Obdobný výsledek dostaneme i po dosazení hodnoty $u = -\pi/2$.

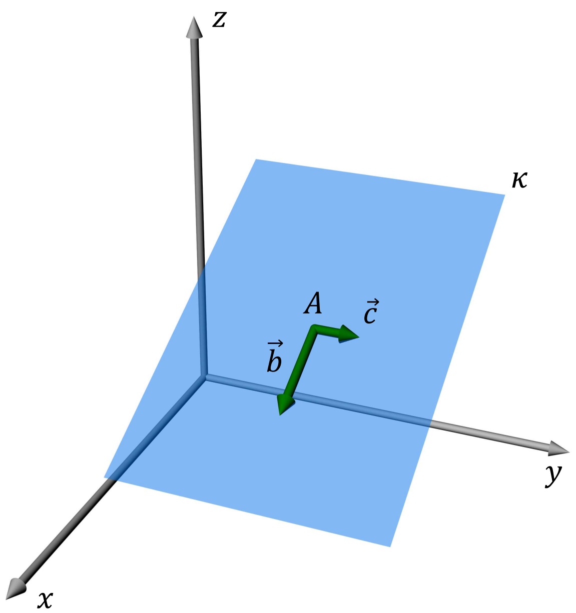
Při pozdějším zobrazování sféry nám toto nebude vadit, proto v zadání plochy $\kappa(u, v)$ zmíněné hodnoty parametru u připouštíme.

Příklad 1.2.3 Plocha je zadána předpisem $\kappa(u, v) = [u\cos v + 5; u\sin v + 5; u + 5]$, $u \in \langle -3; 3 \rangle$, $v \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Dosazením do rovnice $(x-5)^2 + (y-5)^2 = (z-5)^2$ ověříme, že body plochy jí vyhovují. Určili jsme část rotační kuželové plochy s osou rovnoběžnou se souřadnicovou osou z a vrcholem v bodě $V = [5; 5; 5]$.

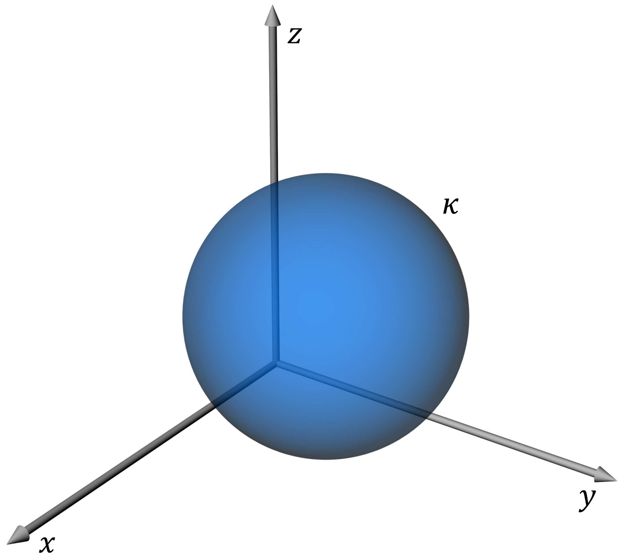
Nesmíme zapomenout ověřit, zda vektory parciálních derivací splňují naši definici plochy. Derivováním zjistíme, že $\frac{\partial \kappa}{\partial u} = (\cos v\,; \sin v\,; 1)$ a $\frac{\partial \kappa}{\partial v} = (-u\sin v\,; u\cos v\,; 0)$. Vidíme, že oba vektory jsou spojité a lineárně nezávislé pro všechny dvojice (u, v) až na případ, kdy $u = 0$. Parciální derivace podle v pak vychází nulová a dvojice zkoumaných vektorů je potom lineárně závislá.

Podobně jako v příkladu 1.2.2 tuto singularitu připouštíme. Čtenář si může všimnout, že dosazením hodnoty $u = 0$ vyjdou souřadnice bodu plochy $[5; 5; 5]$, který je vrcholem kuželové plochy. (Obr. 1.2.3)

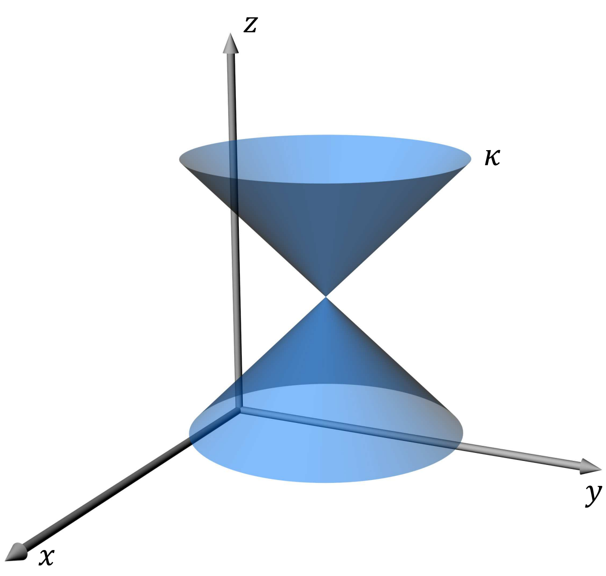
Příklad 1.2.4 Mějme plochu $\kappa(u,v) = [u; v; f(u,v)], u \in \langle 1; 4 \rangle, v \in \langle 1; 6 \rangle$, kde $f(u,v)$ je spojitě diferencovatelná reálná funkce dvou proměnných. Všimněme si, že se jedná o graf funkce $z = f(u,v)$ s definičním oborem $Df = \langle 1; 4 \rangle \times \langle 1; 6 \rangle$. Dále spočítáme parciální derivace plochy κ, tedy $\frac{\partial \kappa}{\partial u} = \left(1; 0; \frac{\partial f}{\partial u}\right), \frac{\partial \kappa}{\partial v} = \left(0; 1; \frac{\partial f}{\partial v}\right)$. Z prvních dvou souřadnic vektorů je patrné, že vektory jsou lineárně nezávislé. Má-li předpis pro κ vyhovovat definici 1.2.1, stačí, aby funkce $f(u,v)$ byla spojitě diferencovatelná, což předpokládáme. Graf této funkce je tedy zároveň plochou v diferenciální geometrii. (Obr. 1.2.4)



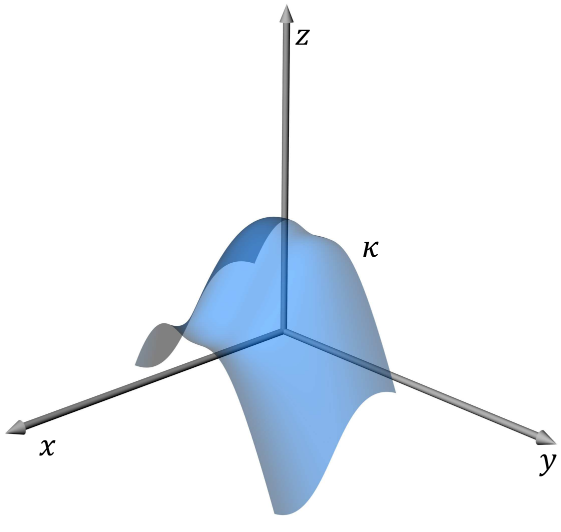
Obr. 1.2.1: Část roviny



Obr. 1.2.2: Sféra



Obr. 1.2.3: Část rotační kuželové plochy



Obr. 1.2.4: Plocha jako graf funkce

1.3 Křivka na ploše

Po zavedení parametrického vyjádření plochy se přesuneme k pojmu křivky na ploše a k síti křivek na ploše.

Definice 1.3.1 *Nechť je $p: \Omega \longrightarrow E_3$ parametrické vyjádření plochy a φ zobrazení otevřeného intervalu D do oblasti Ω, přiřazující hodnotě $t \in D$ bod $\varphi(t) = \big(u(t), v(t)\big) \in \Omega$. O zobrazení φ budeme vždy předpokládat, že*

1) *funkce $u(t), v(t)$ mají na intervalu D spojité derivace,*
2) *pro každé $t \in D$ je $\big(u'(t), v'(t)\big) \neq (0{,}0)$, tj. v každém bodě intervalu D je alespoň jedna z derivací funkcí u, v různá od nuly.*

Složené zobrazení $q = p \circ \varphi$ je pak zobrazením intervalu D do E_3, přiřazující hodnotě $t \in D$ bod $q(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$. Říkáme, že q je parametrickým vyjádřením křivky na ploše $p(\Omega)$. ■

Jiná formulace této definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 56).

Zobrazení q je diferencovatelné, a jak jsme se dozvěděli v části 1.1, vektor $q'(t)$ je roven

$$q'(t) = u'(t)\frac{\partial p}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big) + v'(t)\frac{\partial p}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big),$$

tedy je netriviální lineární kombinací vektorů $\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}$, které jsou lineárně nezávislé. Z toho vyplývá, že $q'(t)$ je nenulový vektor. Proto zobrazení q v definici 1.3.1 splňuje definici křivky 1.1.7.

Definice 1.3.2 *Sítí křivek na ploše rozumíme takový systém křivek na ploše, pro který platí, že každým bodem plochy procházejí právě dvě křivky systému, které mají v tomto bodě různé tečny.* ■

Definice 1.3.3 *Nechť je p parametrické vyjádření plochy definované na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a $(u_0, v_0) \in \Omega$. Pak existuje interval D tak, že pro $t \in D$ je $(t, v_0) \in \Omega$. Dokonce můžeme předpokládat, že D je největší interval s popsanou vlastností. Definujme zobrazení $\varphi: D \longrightarrow \Omega$ předpisem $u(t) = t$, $v(t) = v_0$, tedy $\varphi(t) = (t, v_0)$. Zobrazení φ je diferencovatelné a $u'(t) = 1 \neq 0$. Proto je složené zobrazení $q = p \circ \varphi$ parametrickým vyjádřením křivky na ploše $p(\Omega)$. Této křivce říkáme u-křivka plochy.* ■

Obě definice jsou uvedeny v (Boček, Kubát, 1983, s. 57). Obdobným způsobem jako v definici 1.3.3 zavádíme v-křivku plochy. Stačí položit $u(t) = u_0, v(t) = t$, potom je v-křivka dána jako $r(t) = p(u_0, t)$.

Mějme u-křivku q a v-křivku r. Každým bodem plochy $p(u_0, v_0)$ zřejmě prochází právě jedna u-křivka a v-křivka a tečné vektory v tomto bodě jsou $\frac{\partial q}{\partial t}(u_0) = \frac{\partial p}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial r}{\partial t}(v_0) = \frac{\partial p}{\partial v}(u_0, v_0)$, což jsou podle definice plochy lineárně nezávislé vektory. Všechny u-křivky a v-křivky tudíž splňují definici 1.3.2 a jedná se o síť křivek na ploše p.

V následujících kapitolách budeme síť u-křivek a v-křivek hojně používat při zobrazování ploch. Nyní si ukážeme několik konkrétních příkladů, jak sítě křivek vypadají. Zobrazujeme pouze některé křivky dané sítě na plochách, které jsme již použili v příkladech 1.2.1-1.2.4.

Příklad 1.3.1 Mějme dánu část roviny $\kappa(u,v)=[a_1+ub_1+vc_1;a_2+ub_2+vc_2;a_3+ub_3+vc_3]$, $u\in\langle -2;2\rangle$, $v\in\langle -3;3\rangle$ jako v příkladu 1.2.1. Uveďme si parametrické vyjádření u-křivky q a v-křivky r, které procházejí bodem plochy $\kappa(u_0,v_0)$.

$$q(t)=[a_1+tb_1+v_0c_1;a_2+tb_2+v_0c_2;a_3+tb_3+v_0c_3], t\in\langle -2;2\rangle$$
$$r(t)=[a_1+u_0b_1+tc_1;a_2+u_0b_2+tc_2;a_3+u_0b_3+tc_3], t\in\langle -3;3\rangle$$

Jak vidíme, v případě části roviny je síť tvořena úsečkami, které jsou rovnoběžné s vektory $\vec{b}$ (u-křivky) nebo $\vec{c}$ (v-křivky). (Obr. 1.3.1)

Příklad 1.3.2 Na sféře $\kappa(u,v)=[3\cos u\cos v+5;3\cos u\sin v+5;3\sin u+5], u\in\langle -\pi/2;\pi/2\rangle, v\in\langle 0;2\pi\rangle$ jsou u-křivkami půlkružnice kulové plochy v rovinách kolmých na souřadnicovou rovinu $\pi=(xy)$, tyto roviny navíc obsahují střed kulové plochy S. Kružnice na ploše v rovinách rovnoběžných s π jsou v-křivkami sféry. Nazýváme je rovnoběžky a parametr v je zeměpisnou délkou, u-křivkám říkáme poledníky a parametr u je zeměpisnou šířkou. Pro úplnost si uveďme vyjádření u-křivek q a v-křivek r v bodě $\kappa(u_0,v_0)$.

$$q(t)=[3\cos t\cos v_0+5;3\cos t\sin v_0+5;3\sin t+5], t\in\langle -\pi/2;\pi/2\rangle$$
$$r(t)=[3\cos u_0\cos t+5;3\cos u_0\sin t+5;3\sin u_0+5], t\in\langle 0;2\pi\rangle$$

Síť křivek na sféře si můžeme prohlédnout na obrázku 1.3.2.

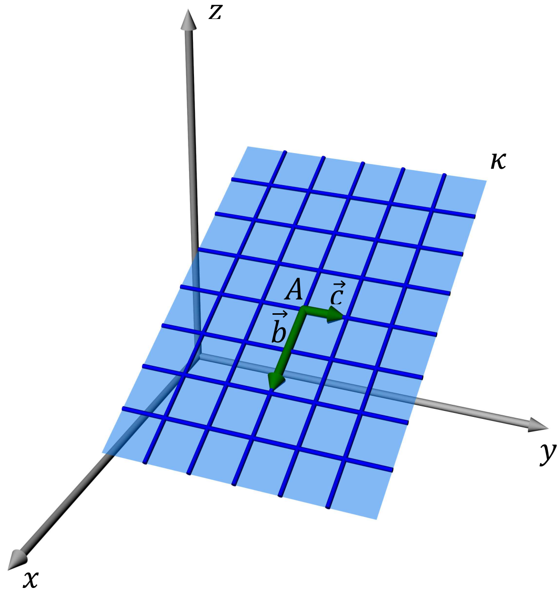
Příklad 1.3.3 Podívejme se, jak vypadá síť křivek na rotační kuželové ploše, přesněji řečeno na její části dané parametrickým vyjádřením $\kappa(u,v)=[u\cos v+5;u\sin v+5;u+5]$, $u\in\langle -3;3\rangle$, $v\in\langle 0;2\pi\rangle$. Předpisy q, r křivek sítě mají předpisy:

$$q(t)=[t\cos v_0+5;t\sin v_0+5;t+5], t\in\langle -3;3\rangle$$
$$r(t)=[u_0\cos t+5;u_0\sin t+5;u_0+5], t\in\langle 0;2\pi\rangle$$

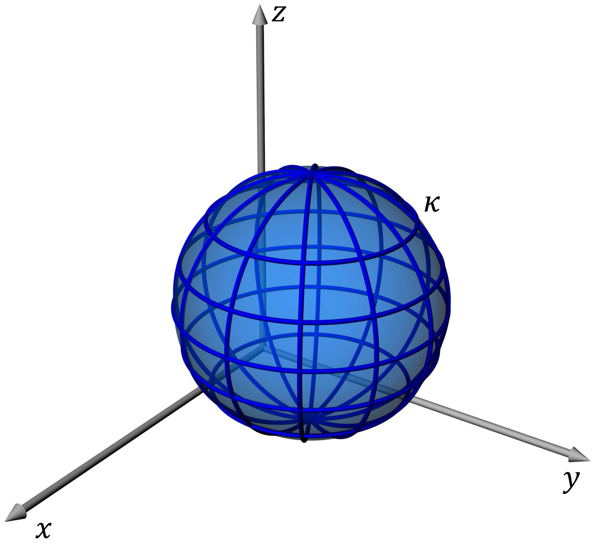
Čtenář snadno nahlédne, že u-křivky jsou úsečky a v-křivky kružnice. Některé křivky sítě plochy jsou znázorněné na obrázku 1.3.3.

Příklad 1.3.4 Mějme dánu plochu $\kappa(u,v)=[u;v;f(u,v)], u\in\langle 1;4\rangle, v\in\langle 1;6\rangle$, která je grafem funkce $z=f(u,v)$ jako v příkladu 1.2.4. Zde jsou v síti křivek řezy grafu dané funkce, které leží v rovinách rovnoběžných s rovinami $\nu=(xz)$ a $\mu=(yz)$, jak lze vyčíst z předpisů. Situace je navíc znázorněna na obrázku 1.3.4.

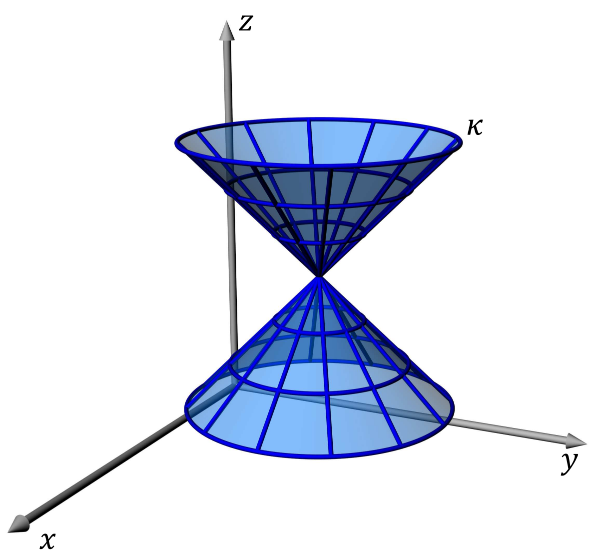
$$q(t)=[t;v_0;f(t,v_0)], t\in\langle 1;4\rangle$$
$$r(t)=[u_0;t;f(u_0,t)], t\in\langle 1;6\rangle$$



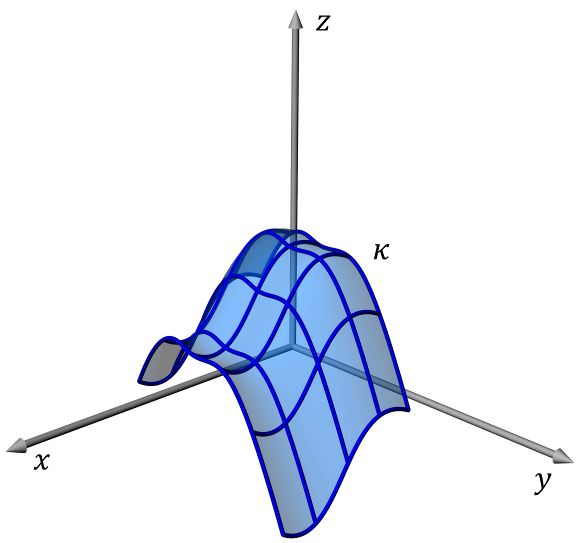
Obr. 1.3.1: Síť křivek části roviny



Obr. 1.3.2: Síť křivek kulové plochy



Obr. 1.3.3 Síť křivek části kuželové plochy



Obr. 1.3.4 Síť křivek na grafu funkce

1.4 Tečná rovina plochy

K některým výpočtům v dalších částech práce budeme potřebovat i pojem tečné roviny plochy, který si teď zavedeme.

Definice 1.4.1 *Nechť je q parametrické vyjádření křivky na ploše o parametrickém vyjádření p, tedy $q(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$, kde $u = u(t)$, $v = v(t)$ jsou diferencovatelné funkce a pro každé t je alespoň jedna z derivací $u'(t)$, $v'(t)$ nenulová. Tečný vektor $q'(t)$ křivky q je lineární kombinací vektorů $\frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial p}{\partial v}$, tečna křivky q v bodě $q(t)$ leží tudíž v rovině určené bodem*

$q(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ a lineárně nezávislými vektory $\frac{\partial p}{\partial u}\big(u(t), v(t)\big)$, $\frac{\partial p}{\partial v}\big(u(t), v(t)\big)$. Tato rovina se nazývá tečnou rovinou plochy p v jejím bodě $p(u, v)$, její zaměření se nazývá tečný vektorový prostor plochy p v tomto bodě. ■

Jiná formulace této definice je uvedena v (Boček, Kubát, 1983, s. 60). Za touto definicí je rovněž uvedeno zdůvodnění, že lze dokázat, že přímka v tečné rovině plochy p v jejím bodě $p(u, v)$ je tečnou nějaké křivky dané plochy v tomto bodě.

Chceme-li určit tečnou rovinu nějaké plochy v jejím bodě, stačí spočítat obě parciální derivace plochy v tomto bodě. Tyto vektory jsou pak směrovými vektory tečné roviny v bodě plochy. Ukažme si příklad.

Příklad 1.4.1 Určete parametrické vyjádření tečné roviny sféry $\kappa(u, v) = [3\cos u \cos v + 5; 3\cos u \sin v + 5; 3\sin u + 5], u \in \langle -\pi/2\,; \pi/2\rangle, v \in \langle 0; 2\pi\rangle$ v jejím bodě $T = \kappa(0, \pi/2)$.

Řešení: Nejprve spočítáme souřadnice bodu T na ploše, stačí dosadit zadané parametry do předpisu $\kappa(u, v)$.

$$T = \kappa(0, \pi/2) = [5; 8; 5]$$

Dále vypočítáme vektory parciálních derivací plochy (viz příklad 1.2.2) a jejich konkrétní hodnoty v bodě T.

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u}(0, \pi/2) = (0; 0; 3), \frac{\partial \kappa}{\partial v}(0, \pi/2) = (-3; 0; 0)$$

Tečná rovina τ sféry κ v bodě T pak má parametrické vyjádření:

$$\tau(r, s) = T + r\frac{\partial \kappa}{\partial u}(0, \pi/2) + s\frac{\partial \kappa}{\partial v}(0, \pi/2), r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

Nyní stačí dosadit souřadnice bodu T a tečných vektorů plochy v bodě T a získáme tak konkrétní tvar parametrického vyjádření tečné roviny τ sféry κ v bodě T.

$$\tau(r, s) = [5 - 3s; 8; 5 + 3r], r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

1.5 Typy ploch

V poslední části první kapitoly si představíme důležité typy ploch, které se hojně používají v praxi. Rovněž si ukážeme, jak spočítat jejich předpisy, což se nám bude hodit při pozdějším promítání ploch.

1.5.1 Rotační plochy

Rotační plochy vznikají otáčením křivky k kolem přímky o, které se říká osa otáčení (osa rotace). Křivkou k nemůže být osa otáčení a vyloučíme i případ, kdy křivka k leží v rovině kolmé k ose otáčení o. Křivce k říkáme tvořicí křivka rotační plochy.

Bod křivky k, pokud neleží na ose otáčení o, vytváří při rotačním pohybu kružnici, která leží na rotační ploše. Této kružnici říkáme rovnoběžka.

Další terminologii o rotačních plochách a také jejich vlastnosti čtenář nalezne v (Urban, 1967). My se zaměříme na to, jak určíme předpis rotačních ploch, známe-li parametrické vyjádření tvořicí křivky k a osu otáčení o, kde osa o je totožná s jednou ze souřadnicových os x, y nebo z.

Příklad 1.5.1 Napište parametrické vyjádření rotační plochy κ, která vzniká rotací kružnice k kolem osy y. Kružnici k máme dánu svým parametrickým vyjádřením.

$$k(u) = [0; 2\cos u\,; 3 + 2\sin u], u \in \langle 0; 2\pi\rangle$$

Řešení: Každý bod K zadané kružnice k vytvoří při otáčení kolem osy otáčení y rovnoběžku, tedy kružnici na ploše κ. Střed této rovnoběžky je bodem osy y a jeho y-ová souřadnice je stejná jako y-ová souřadnice bodu K. Zapsáno v souřadnicích je střed rovnoběžky roven $S = [0; 2\cos u\,; 0]$. Poloměr rovnoběžky je roven vzdálenosti bodu K od osy y, kterou je z-ová souřadnice bodu K, proto $r = 3 + 2\sin u$. (Obrázek 1.5.1 vlevo)

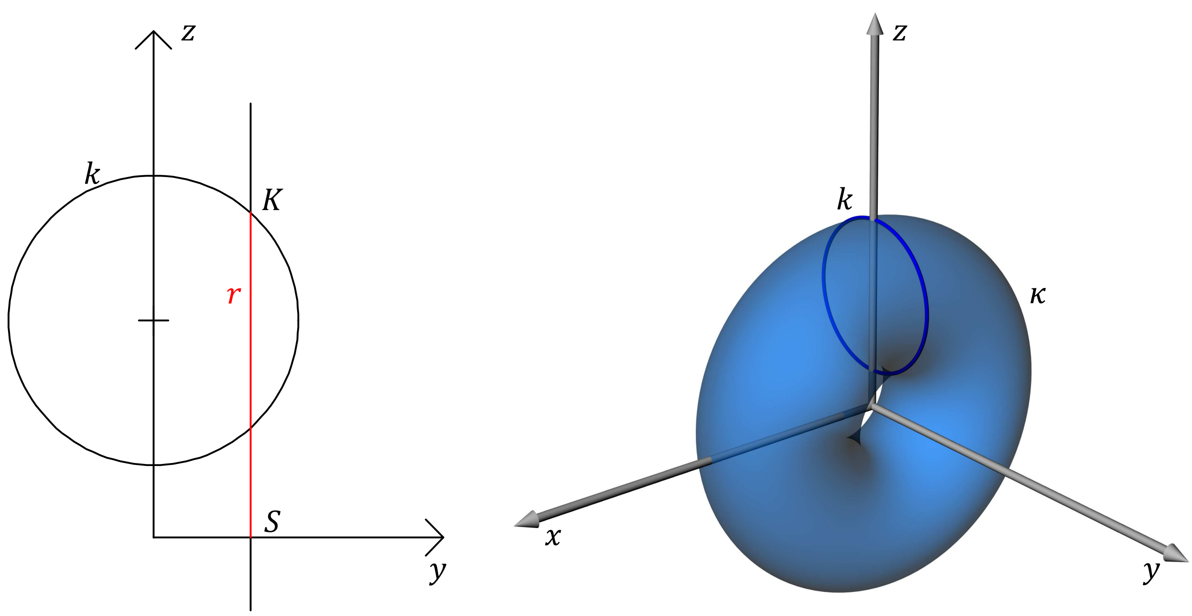
Rovnoběžka na ploše κ leží v rovině kolmé k ose otáčení y, v našem příkladě tedy v rovině rovnoběžné se souřadnicovou rovinou $\nu = (xz)$. Její parametrické vyjádření má pak tvar

$$[s_1 + r\sin v\,; s_2; s_3 + r\cos v], v \in \langle 0; 2\pi\rangle,$$

kde $S = [s_1; s_2; s_3]$ je střed rovnoběžky a r je poloměr rovnoběžky. Dosadíme-li za souřadnice středu S a poloměr r zjištěné hodnoty z našeho příkladu, dostaneme hledaný předpis zadané rotační plochy.

$$\kappa(u,v) = [(3 + 2\sin u)\sin v\,; 2\cos u\,; (3 + 2\sin u)\cos v], u \in \langle 0; 2\pi\rangle, v \in \langle 0; 2\pi\rangle$$

Získali jsme předpis rotační plochy, která vzniká rotací kružnice kolem osy y. Této ploše říkáme anuloid a je znázorněn na obrázku 1.5.1 vpravo.



Obr. 1.5.1: Rotační plocha – anuloid (vlevo nákres v rovině $\mu = (yz)$, vpravo celá plocha)

1.5.2 Šroubové plochy

Šroubové plochy vznikají šroubovým pohybem dané křivky k. Šroubový pohyb je složením rovnoměrného otáčivého pohybu kolem osy o a rovnoměrného posuvného pohybu ve směru osy o. Otáčíme-li proti směru hodinových ručiček a posouváme do poloprostoru, z něhož je na ručičky vidět, říkáme tomuto šroubovému pohybu *pravotočivý*, v opačném případě *levotočivý*. (Drábek, Harant, Setzer, 1979) Přímku o nazýváme osou šroubového pohybu (také osa šroubové plochy) a křivku k tvořicí křivkou plochy.

Každý bod K křivky k při šroubovém pohybu vytvoří křivku, tzv. šroubovici. Vzdálenost bodu K od osy o je konstantní. Otočí-li se při šroubovém pohybu bod K o úhel 2π, pak se zároveň posune o vzdálenost v ve směru osy o. Vzdálenosti v říkáme výška závitu. Všechny šroubovice bodů křivky k mají výšku závitu stejnou.

Při zadávání šroubového pohybu musíme tedy znát jeho osu o, výšku závitu v, a je-li pohyb pravotočivý či levotočivý. K zadání šroubové plochy pak navíc musíme přidat i tvořicí křivku k.

Pro účely naší práce nám stačí výše uvedené znalosti o šroubových plochách. Má-li čtenář zájem dozvědět se o jejich vlastnostech více, doporučujeme nahlédnout do (Drábek, Harant, Setzer, 1979).

Ukažme si, jak najdeme předpis šroubové plochy, máme-li zadanou její tvořicí křivku k a šroubový pohyb, kterým vzniká. Předpokládejme, že osa šroubového pohybu o je totožná s některou ze souřadnicových os.

Příklad 1.5.2 Napište parametrické vyjádření šroubové plochy κ, která vzniká pravotočivým šroubovým pohybem kolem souřadnicové osy z a výškou závitu 8. Tvořicí křivkou je kružnice $k(u) = [4 + \sin u\,; 0; \cos u], u \in \langle 0; 2\pi\rangle$ v souřadnicové rovině $\nu = (xz)$.

Řešení: V případě šroubových ploch vytváří bod K na tvořicí křivce k svým pohybem šroubovici. V našem příkladu je její osa totožná s osou z šroubového pohybu, výška závitu je 8 a tato šroubovice je pravotočivá. Předpis této šroubovice pak má tvar:

$$[s_1 + r\cos v\,; s_2 + r\sin v\,; s_3 + v_0 v], v \in \mathbb{R}$$

Jak jsme již zmínili, šroubový pohyb vzniká složením otáčení a posunutí. Otáčíme-li bod K kružnice k, pak střed $S = [s_1; s_2; s_3]$ tohoto otáčení leží na ose z a zároveň v rovině kolmé k ose z, která obsahuje bod K. Střed S má proto první dvě souřadnice nulové, z-ová souřadnice je stejná jako z-ová souřadnice bodu K. Zjistili jsme, že tedy $S = [0; 0; \cos u]$. (Obr. 1.5.2 vlevo)

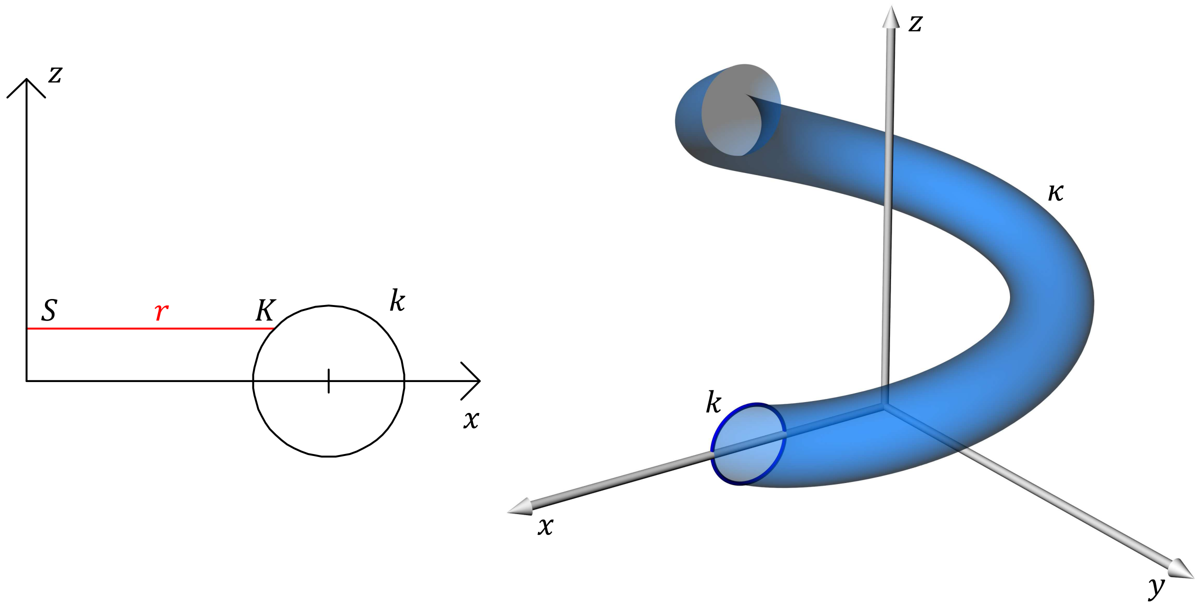
Číslo r v předpisu šroubovice je poloměr otáčení bodu K, který je roven vzdálenosti bodu K od osy otáčení z. V našem případě je roven x-ové souřadnici bodu K, $r = 4 + \sin u$.

Zbývá vysvětlit význam čísla v_0, které souvisí s výškou závitu šroubovice. Hodnotě v_0 se říká redukovaná výška závitu a vyjádříme ji ze vzorce $v = 2\pi v_0$, kde v je výška závitu. (Drábek, Harant, Setzer, 1979) Šroubovice bodu K má redukovanou výšku závitu rovnu $v_0 = 8/2\pi = 4/\pi$.

Dosazením spočítaných hodnot získáme hledaný předpis zadané šroubové plochy κ.

$$\kappa(u, v) = \left[(4 + \sin u)\cos v\,; (4 + \sin u)\sin v\,; \cos u + \frac{4}{\pi}v\right], u \in \langle 0; 2\pi\rangle, v \in \mathbb{R}$$

Znázornění části šroubové plochy κ vidíme na obrázku 1.5.2 vpravo.



Obr. 1.5.2: Šroubová plocha (vlevo nákres v rovině $\nu = (xz)$, vpravo jeden závit plochy)

1.5.3 Přímkové plochy

Přímkové plochy vznikají nějakým pohybem přímky v prostoru. Příkladem takové plochy je například válcová kruhová plocha. V prostoru je dána kružnicí k a směrem $\vec{s}$. Každá přímka této plochy musí procházet kružnicí k a musí být rovnoběžná se směrem $\vec{s}$. Parametrické vyjádření přímky p, která prochází bodem $K = [k_1; k_2; k_3]$ na kružnici k a je rovnoběžná se směrem $\vec{s} = (s_1; s_2; s_3)$ má tvar $p(v) = [k_1 + vs_1; k_2 + vs_2; k_3 + vs_3]$. Dosadíme-li za souřadnice bodu K vyjádření kružnice k, získáme předpis kruhové válcové plochy.

Zadání přímkové plochy je zobecněním výše uvedeného předpisu válcové plochy. Mějme tvořicí křivku $k(u) = [k_1(u); k_2(u); k_3(u)], u \in D$ a vektorovou funkci $\vec{s}(u) = \big(s_1(u); s_2(u); s_3(u)\big), u \in D$. Rovnice přímkové plochy κ má potom tvar

$$\kappa(u, v) = [k_1(u) + vs_1(u); k_2(u) + vs_2(u); k_3(u) + vs_3(u)], u \in D, v \in \mathbb{R}$$

Zvolíme-li konkrétní hodnotu u_0 parametru u, získáme konkrétní bod tvořicí křivky k a souřadnice směrového vektoru $\vec{s}$, s nímž je příslušná přímka plochy rovnoběžná.

Zadání přímkových ploch mohou být různá a nebudeme proto zacházet do detailů. Více informací najde čtenář například v (Urban, 1967), (Drábek, Harant, Setzer, 1979). My si nyní ukážeme jednu z možností, jak zadat přímkovou plochu a najít její předpis.

Příklad 1.5.3 Mějme dán přímý kruhový konoid κ. Tvořicí křivkou k je kružnice $k(u) = [5 + 3\cos u; 5 + 3\sin u; 0], u \in \langle 0; 2\pi \rangle$. Přímky této plochy jsou rovnoběžné se souřadnicovou rovinou $\nu = (xz)$ a navíc prochází přímkou $m(t) = [5; t; 5], t \in \mathbb{R}$. Napište parametrické vyjádření přímkové plochy κ.

Řešení: Ze zadání již známe předpis pro tvořicí křivku k, kterou je kružnice. Víme tedy, že přímky plochy musí procházet touto kružnicí. Zbývá spočítat směrový vektor přímky, která prochází bodem K na kružnici k.

Konkrétním bodem K prochází přímka p plochy κ rovnoběžná se souřadnicovou rovinou ν, jejíž obecná rovnice je $y = 0$. Přímka p tedy leží v rovině ν' rovnoběžné s rovinou ν, která navíc obsahuje bod K. Souřadnice bodu K na kružnici k mají tvar

$$K = [5 + 3\cos u\,; 5 + 3\sin u\,; 0],$$

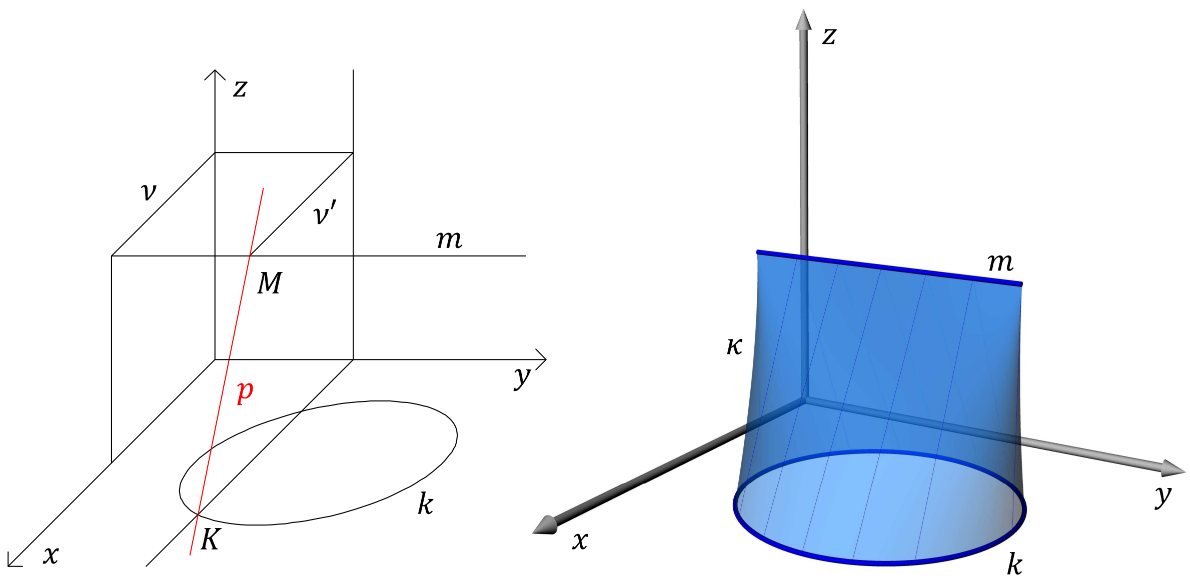
proto obecná rovnice roviny ν' je $y = 5 + 3\sin u$. Přímka p navíc protíná zadanou přímku m. Najdeme průsečík M přímky m a roviny ν'. K tomu stačí pouze dosadit parametrické vyjádření přímky m do obecné rovnice roviny ν'. Zjistíme, že $t = 5 + 3\sin u$. Pro tuto hodnotu parametru t získáme na přímce m bod $M = [5; 5 + 3\sin u\,; 5]$, kterým musí procházet přímka plochy p. (Obr. 1.5.3 vlevo)

Známe již dva body přímky p, můžeme tudíž spočítat její směrový vektor a získáme tvar hledané funkce $\vec{s}(u)$.

$$\vec{s}(u) = M - K = (5 - 5 - 3\cos u\,; 5 + 3\sin u - 5 - 3\sin u\,; 5 - 0) = (-3\cos u\,; 0; 5)$$

Nyní stačí dosadit do obecného předpisu přímkové plochy a dostaneme předpis zadaného přímého kruhového konoidu. (Obr. 1.5.3 vpravo)

$$\kappa(u, v) = [5 + 3\cos u - 3v\cos u\,; 5 + 3\sin u\,; 5v], u \in \langle 0; 2\pi\rangle, v \in \mathbb{R}$$



Obr. 1.5.3: Přímková plocha (vlevo nákres hledání přímky plochy; vpravo část plochy)

1.5.4 Translační plochy

Jak z názvu vyplývá, translační plochy vznikají posunutím. Není tím však myšleno přímočaré posunutí, ale obecně křivočaré posunutí. V prostoru máme křivku k a křivku l, které mají společný bod A. Křivku k budeme posouvat po křivce l, čímž vznikne translační plocha κ.

Posunutí křivky k z jedné polohy do druhé je určeno vektorem posunutí. Jak ho zjistíme? Bod A je společným bodem křivek k a l a dále zvolme na křivce l bod L, do kterého posuneme bod A. Vektor $\overrightarrow{AL}$ je vektorem posunutí křivky k po křivce l, při kterém se bod A

posune do bodu L. Stejným způsobem se posunou všechny body křivky k – ve směru vektoru $\overrightarrow{AL}$ a o vzdálenost, která je rovna velikosti vektoru $\overrightarrow{AL}$.

Analogicky bychom mohli posouvat křivku l po křivce k a vznikla by tatáž plocha κ. Více o translačních plochách najdeme například v (Drábek, Harant, Setzer, 1979). My si nyní ukážeme příklad translační plochy a její předpis.

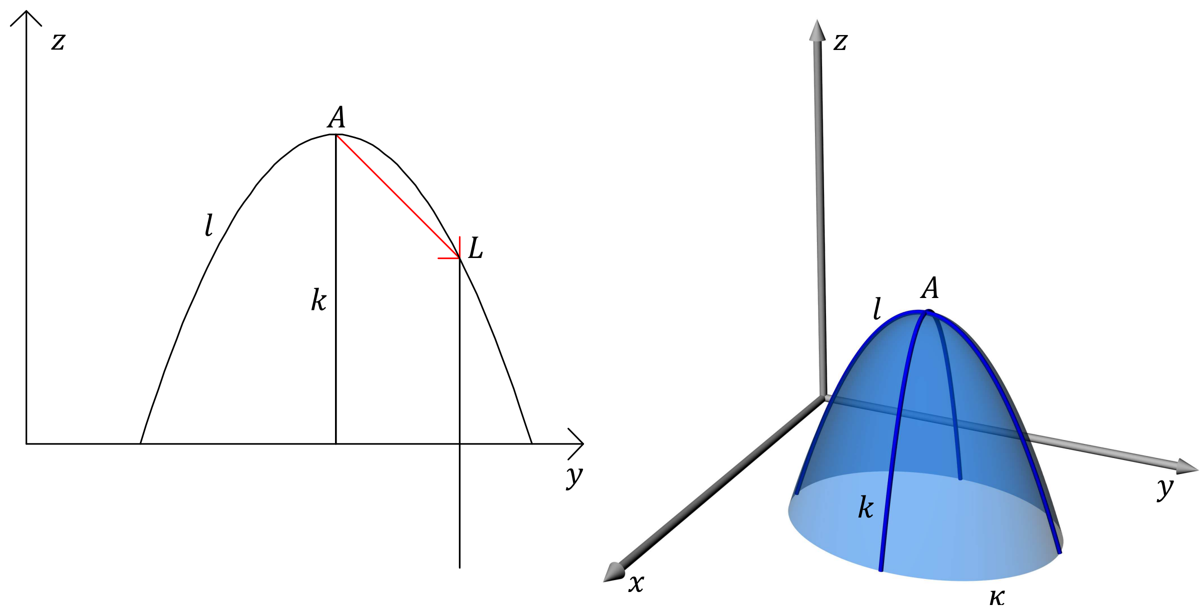
Příklad 1.5.4 V prostoru máme dánu parabolu $k(u) = [5 + u; 5; 5 - u^2], u \in \mathbb{R}$ a dále parabolu $l(v) = \left[5; 5 + v; 5 - \frac{1}{2}v^2\right], v \in \mathbb{R}$. Napište předpis translační plochy κ, která vzniká posunem paraboly k po parabole l.

Řešení: Nejprve najdeme společný bod obou parabol. Porovnáním zadaných souřadnic obou křivek zjistíme, že pro $u = 0$ a $v = 0$ vychází tentýž bod $A = [5; 5; 5]$. Dále víme, že parabola k se posune po parabole l a bod A tak přejde do bodu L na křivce l. (Obr. 1.5.4 vlevo) Spočítejme tvar vektoru $\overrightarrow{AL}$, který určuje dané posunutí. Souřadnice bodu A známe, bod L leží na parabole l, proto mají jeho souřadnice tvar $L = \left[5; 5 + v; 5 - \frac{1}{2}v^2\right]$, kde v je nějaké reálné číslo. Můžeme již napsat:

$$\overrightarrow{AL} = L - A = \left(5 - 5; 5 + v - 5; 5 - \tfrac{1}{2}v^2 - 5\right) = \left(0; v; -\tfrac{1}{2}v^2\right)$$

V analytické geometrii je obraz B' bodu B v posunutí o vektor $\vec{w}$ dán předpisem $B' = B + \vec{w}$. V našem příkladu místo bodu B posouváme parabolu k o vektor $\overrightarrow{AL}$. Dosadíme-li místo bodu B parametrické vyjádření křivky k a za vektor $\vec{w}$ souřadnice $\overrightarrow{AL}$, získáme hledaný předpis translační plochy κ.

$$\kappa(u, v) = \left[5 + u; 5 + v; 5 - u^2 - \tfrac{1}{2}v^2\right], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$$



Obr. 1.5.4: Translační plocha (vlevo bokorys, vpravo část plochy)

Má-li čtenář zájem dozvědět se o plochách více, doporučujeme například (Csachová a kol., 2013), (Budinský, 1983) a (Gray, Abbena, Salamon, 2006).

1.6 Závěr první kapitoly

V první kapitole jsme si představili důležité pojmy z diferenciální geometrie, které budeme v práci používat. V poslední části jsme pak ukázali postupy, jak najít parametrická vyjádření různých ploch používaných v praxi.

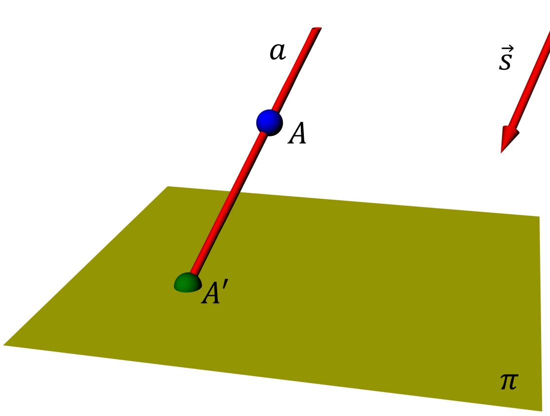
2. Základy promítání

Ve druhé kapitole se budeme věnovat promítáním. Řekneme si, jak zobrazujeme objekty v prostoru. Nejdříve si projdeme pravidla promítání, poté se zaměříme na zobrazování ploch.

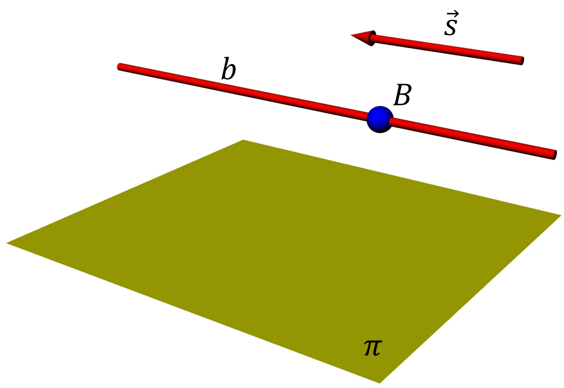
2.1 Promítání

Úkolem deskriptivní geometrie je zobrazovat prostorové situace do roviny. Díky tomu si představíme, jak objekty v prostoru vypadají, i když nemáme k dispozici reálný model. Nyní si uvedeme dva způsoby promítání, které budeme v práci používat.

Mějme v prostoru rovinu π a vektor $\vec{s}$, který s rovinou π není rovnoběžný. (Obr. 2.1.1) Dále je v prostoru bod A. Veďme bodem A přímku a, jejímž směrovým vektorem je vektor $\vec{s}$. Průsečík přímky a s rovinou π označme A'. Bodu A' říkáme *průmět* bodu A. V případě, že bod A leží v průmětně π, splyne průmět A' s bodem A. Promítání nazýváme *promítáním rovnoběžným* se *směrem* $\vec{s}$, rovině π říkáme *průmětna* a přímce a *promítací přímka* bodu A.



Obr. 2.1.1: Rovnoběžné promítání



Obr. 2.1.2: Směr $\vec{s}$ rovnoběžný s průmětnou

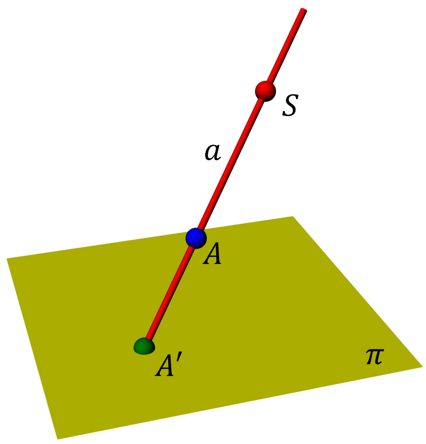
Všimněme si, že vylučujeme případ, kdy směr promítání $\vec{s}$ je rovnoběžný s průmětnou π. (Obr. 2.1.2) Promítací přímka b bodu B by v tomto promítání byla rovnoběžná s průmětnou a neexistoval by reálný průsečík této přímky a průmětny. Nenašli bychom tedy průmět B' bodu B, tento případ proto z našich úvah vyloučíme.

Rovnoběžné promítání ale není jediným způsobem, jak můžeme promítat body z prostoru do roviny.

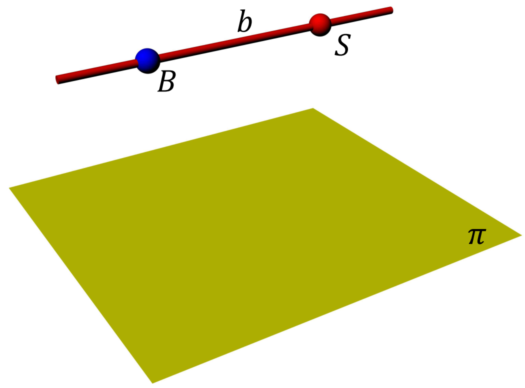
Mějme v prostoru rovinu π a bod S, který v rovině π neleží. Bod A v prostoru spojíme s bodem S a tuto přímku pojmenujeme a. (Obr. 2.1.3) Průsečík přímky a s rovinou π označíme A' a nazveme jej *průmětem* bodu A. Popsanému zobrazení říkáme *středové promítání* se *středem* S a *průmětnou* π. Přímce a říkáme *promítací přímka* bodu A.

V zavedení středového promítání jsme požadovali, aby střed S středového promítání nebyl incidentní s průmětnou π. Kdyby rovina π obsahovala S, pak by každá promítací přímka protnula průmětnu v bodě S, nebo by ležela v průmětně π. V takovém promítání by se body prostoru neležící v rovině π zobrazily do středu S. Tuto možnost ve shodě s literaturou neuvažujeme. (Kounovský, Vyčichlo, 1959)

Prozkoumejme ještě jeden speciální případ. (Obr 2.1.4) Představme si, že zobrazovaný bod B je v prostoru umístěn tak, že jeho promítací přímka $b = \overleftrightarrow{SB}$ je rovnoběžná s průmětnou π. Přímka b neprotne průmětnu π v reálném bodě B', neexistuje tedy průmět bodu B. Tato situace nastane pro jakýkoli bod B, který leží v rovině rovnoběžné s průmětnou π, která navíc obsahuje střed S. Pokud budeme zobrazovat ve středovém promítání, objekty v prostoru umístíme tak, aby žádný z promítaných bodů neležel v této rovině. Vyhneme se tak situacím, kdy by vlastní průměty bodů neexistovaly, což by komplikovalo výpočty řešené v následujících kapitolách a implementaci skriptů přiložených na CD.



Obr. 2.1.3: Středové promítání



Obr. 2.1.4: Promítací přímka rovnoběžná s průmětnou

Nyní již víme, jakým promítáním se v práci budeme věnovat a jak v nich zobrazujeme body.[1] V dalších částech si ukážeme, jak se v těchto promítáních zobrazují přímky a roviny a jak lze zobrazit plochy.

2.2 Průmět přímky a roviny

Postupy obou výše zmíněných promítáních jsou analogické, proto je popíšeme v jednom oddíle. V textu tak vyniknou společné vlastnosti středového i rovnoběžného promítání.

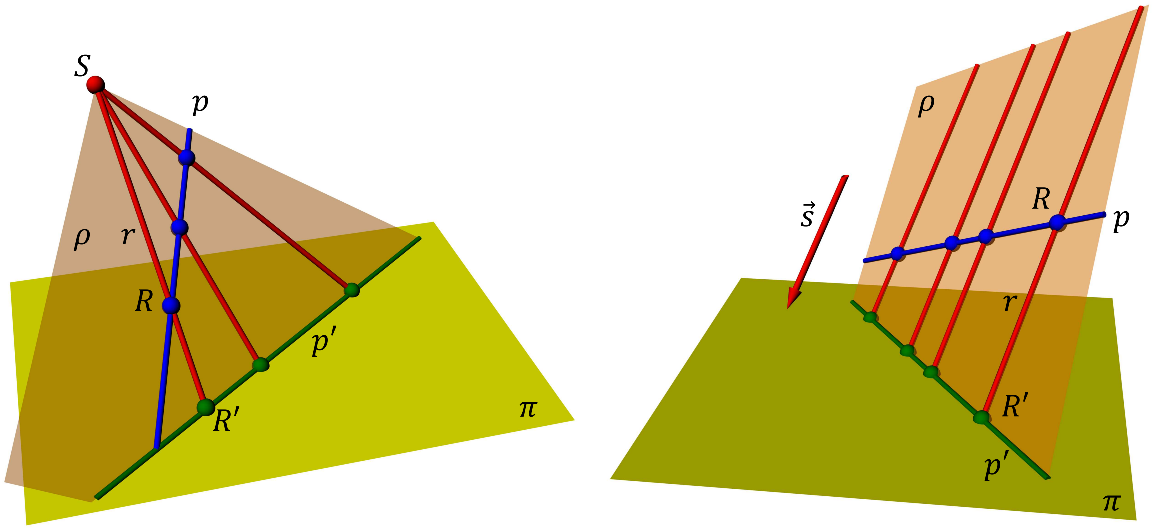
Máme v prostoru přímku p a chceme ji zobrazit v nějakém promítání. Vedeme každým[2] bodem R přímky p promítací přímku r, která protne průmětnu v průmětu R' bodu R. Množina všech promítacích přímek bodů přímky p vytvoří rovinu ρ, kterou nazýváme *promítací rovina* přímky p. Přímka se v promítání může zobrazit na přímku p' (Obr. 2.2.1), nebo ve speciálním případě (Obr. 2.2.2) se zobrazí jako bod P'.[3] Tato situace nastává tehdy, je-li zobrazovaná přímka p promítací přímkou daného promítání. V rovnoběžném promítání je tedy rovnoběžná se směrem promítání $\vec{s}$, ve středovém promítání prochází středem S. Ve všech ostatních případech se zobrazí na přímku.[4]

[1] Uvědomujeme si, že při takto definovaných promítáních nelze zpětně zkonstruovat objekt v prostoru. To ovšem není cílem práce, proto se této problematice nevěnujeme.

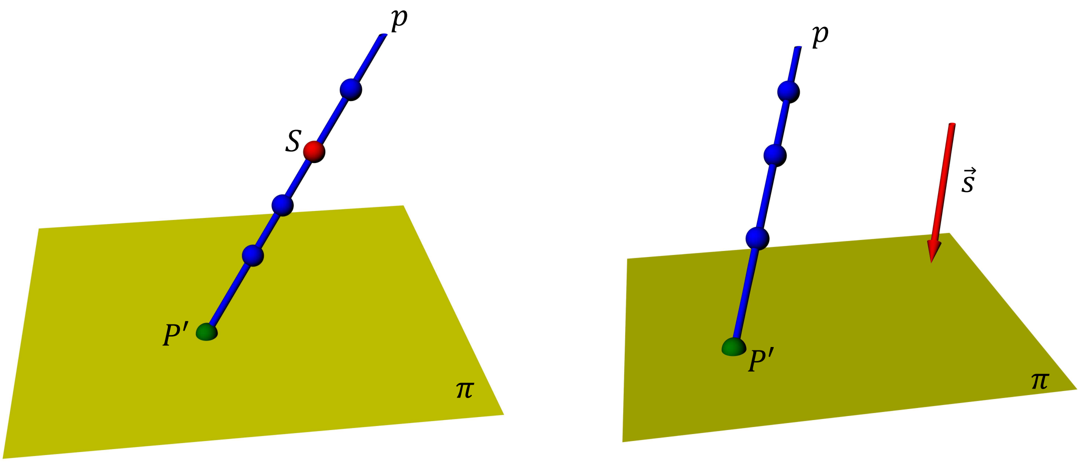
[2] Již jsme zmínili, že některé body prostoru ve středovém promítání nezobrazujeme. Může se stát, že na přímce p nějaký takový bod leží. Tento případ je pro naši práci nepodstatný, má-li čtenář o tuto problematiku zájem, doporučujeme literaturu (Volberg, 1953).

[3] V tomto případě není jednoznačně určena promítací rovina dané přímky. Čtenář si může představit, že tato rovina degeneruje na přímku, kterou promítáme. O promítací rovině tedy v této situaci nehovoříme.

[4] Nezapomínejme, že ve středovém promítání jsme vyloučili případy, kdy zobrazovaný útvar leží v rovině rovnoběžné s průmětnou π a obsahující střed S. Pokud by zobrazovaná přímka ležela v této rovině, nemohli bychom najít její vlastní průmět.



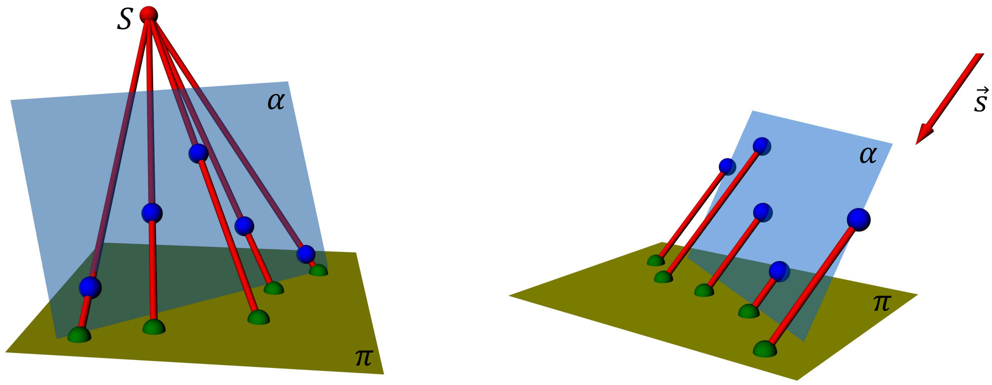
Obr. 2.2.1: Průmět přímky (vlevo středové promítání, vpravo rovnoběžné promítání)



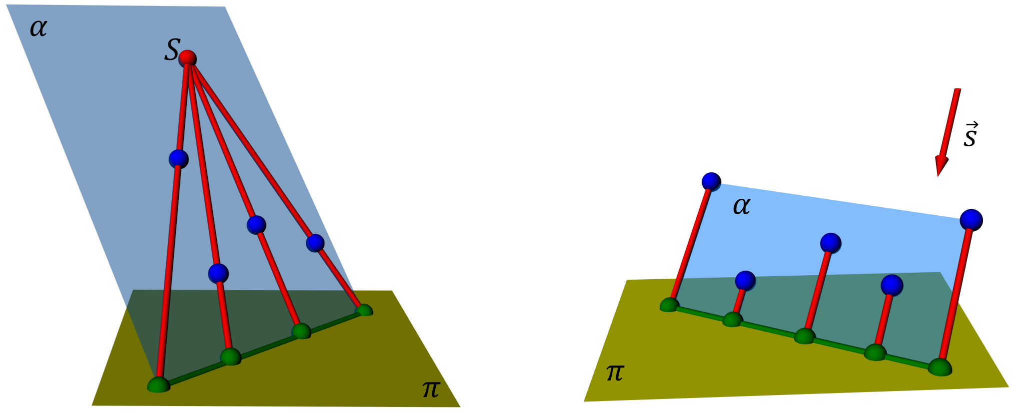
Obr. 2.2.2: Průmět promítací přímky (vlevo středové promítání, vpravo rovnoběžné promítání)

Průmět roviny α v daném promítání získáme analogicky jako u přímky. Každým bodem roviny vedeme promítací přímku, jejíž průsečík s průmětnou π je průmětem zobrazovaného bodu. Každý bod roviny α se zobrazí na nějaký bod v rovině π. Průmětem roviny α může být celá průmětna π. Pro názornost jsme na obrázcích 2.2.3 zobrazili několik bodů promítaných rovin. Čtenář si pak snadno představí, že zobrazením všech bodů promítaných rovin pokryjeme celou průmětnu. Ovšem ve speciálním případě (Obr. 2.2.4) se rovina může zobrazit na přímku v rovině π. Nastane to právě tehdy, když je rovina α promítací rovinou daného promítání. V rovnoběžném promítání je taková rovina rovnoběžná se směrem promítání, v promítání středovém obsahuje střed S.

Nyní víme, jak promítat body, přímky a roviny. Vlastnosti promítání (např. jak se zobrazují rovnoběžné přímky) v práci vynecháváme, protože to není hlavním tématem práce. My chceme podat pouze základní informace o promítání a následně se věnovat tomu, jak se dají tato promítání programovat. Má-li čtenář o tuto problematiku zájem, doporučujeme mu následující literaturu (Urban, 1965), (Drábek, Harant, Setzer, 1982).



Obr. 2.2.3: Průmět roviny (vlevo středové promítání, vpravo rovnoběžné promítání)

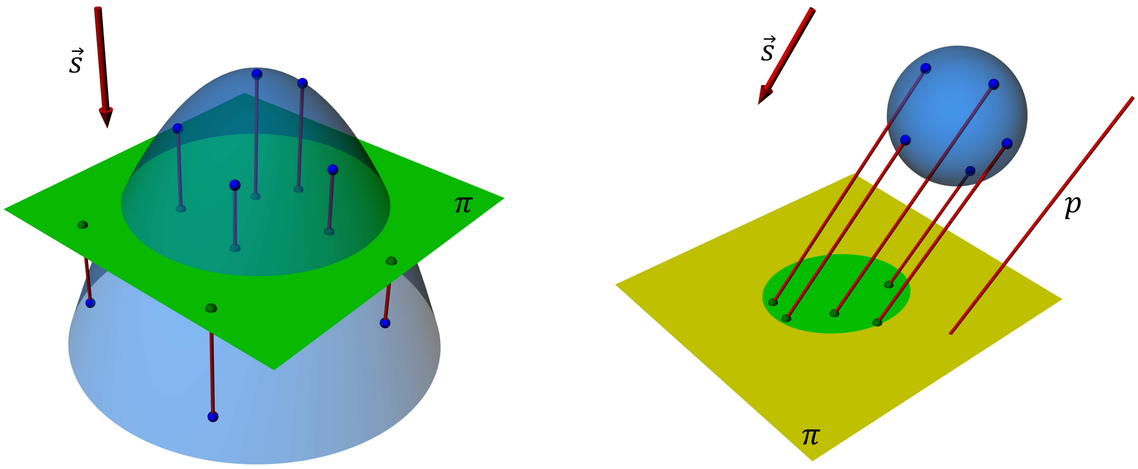


Obr. 2.2.4: Průmět promítací roviny (vlevo středové promítání, vpravo rovnoběžné promítání)

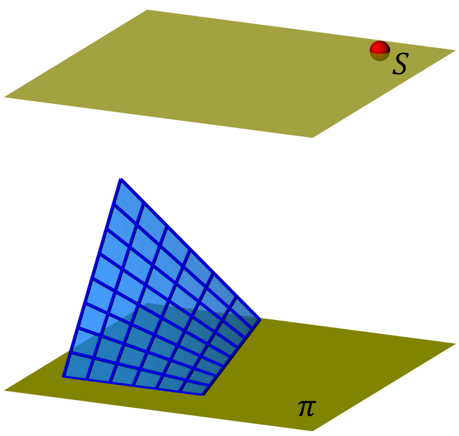
2.3 Průmět a obrys plochy

Průmětem plochy v nějakém promítání je množina průmětů všech jejích bodů. (Urban, 1967) Chceme-li promítnout plochu, vedeme každým jejím bodem promítací přímku a najdeme jeho průmět. Průmětem plochy může být celá průmětna, nebo jen její část. První případ (Obr. 2.3.1 vlevo) nastává, pokud každá promítací přímka daného promítání je promítací přímkou nějakého bodu na ploše. (V obrázku 2.3.1 vlevo je zobrazená pouze část rotačního paraboloidu, ale čtenář si jistě představí, že celá plocha se zobrazí na průmětnu π.) Pokud v prostoru existují promítací přímky (přímka p na obrázku 2.3.1 vpravo), které neprotínají zobrazovanou plochu, potom průmětem této plochy je jen část průmětny.

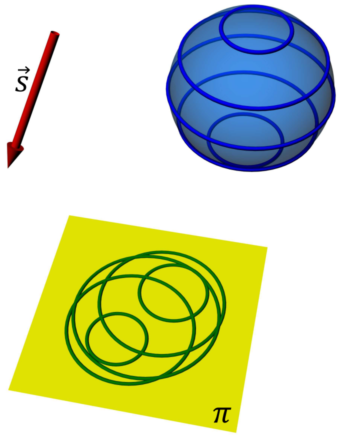
Budeme-li zobrazovat v promítání středovém, dáme si pozor, aby střed promítání S neležel na zobrazované ploše. Umístění plochy v prostoru zvolíme tak, aby každý z bodů plochy ležel v poloprostoru ohraničeném rovinou rovnoběžnou s průmětnou, která obsahuje střed S. Ve stejném poloprostoru jako plocha leží i průmětna π. (Obr. 2.3.2) V příkladech, se kterými se v práci setkáme, se v závislosti na typu plochy omezíme na nějakou její část, kterou zobrazíme. Tímto se vyhneme situacím, kdy by průmět bodu na ploše neexistoval. V důsledku těchto dvou omezení potom bude vždy platit, že se plocha zobrazí na část průmětny, nikoli na celou průmětnu.



Obr. 2.3.1: Průmět plochy – vlevo je průmětem plochy celá průmětna, vpravo pouze její část



Obr. 2.3.2: Umístění plochy v prostoru

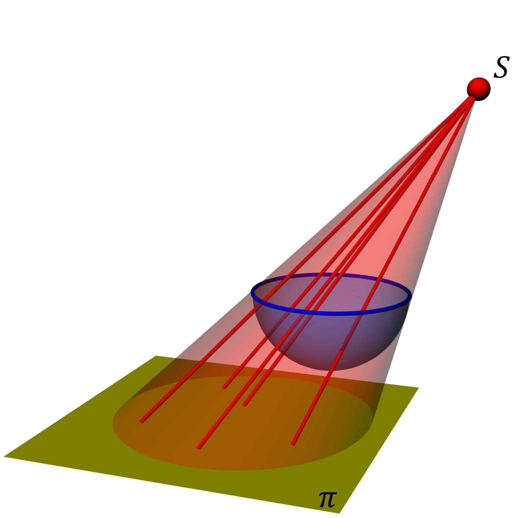


Obr. 2.3.3: Zobrazení křivek plochy

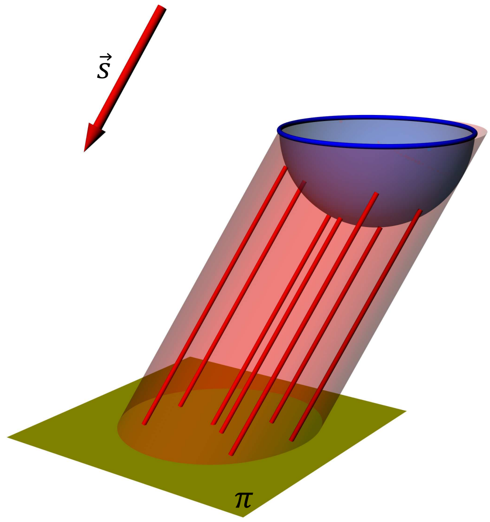
Na obrázku 2.3.1 jsme pro ilustraci náhodně zvolili několik bodů na ploše a zobrazili je. Při zobrazování plochy ovšem nebudeme vykreslovat průměty jejích jednotlivých bodů. Místo toho na ploše vybereme konkrétní křivky a promítneme pouze je (Obr. 2.3.3). V průmětně tak vznikne množina průmětů křivek dané plochy.

Výše jsme uvedli, že průmětem plochy je část průmětny. Zobrazované křivky nevyplní tuto část zcela, to bychom museli promítnout všechny body plochy. Nás bude ovšem zajímat hranice množiny průmětů bodů plochy. V následujících odstavcích si řekneme, jak zmíněnou hranici najít.

V prostoru tedy mějme umístěnou část plochy κ. (V dalším textu budeme mluvit pouze o ploše κ, ale myslíme tím pouze tu část, kterou zobrazujeme. Část plochy splňuje požadavky zmíněné v předchozích odstavcích.) Množina promítacích přímek plochy κ vyplní část prostoru. Ve středovém promítání je to kuželový prostor s vrcholem ve středu promítání S (Obr. 2.3.4), v případě rovnoběžného promítání vznikne válcový prostor, jehož přímky mají směr $\vec{s}$ (Obr. 2.3.5). Hranicí množiny promítacích přímek plochy κ je tedy kuželová nebo válcová plocha.

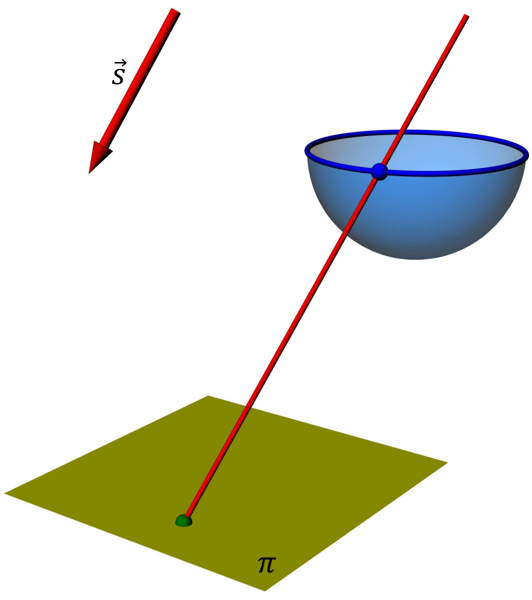


Obr. 2.3.4: Kuželový prostor promítacích přímek

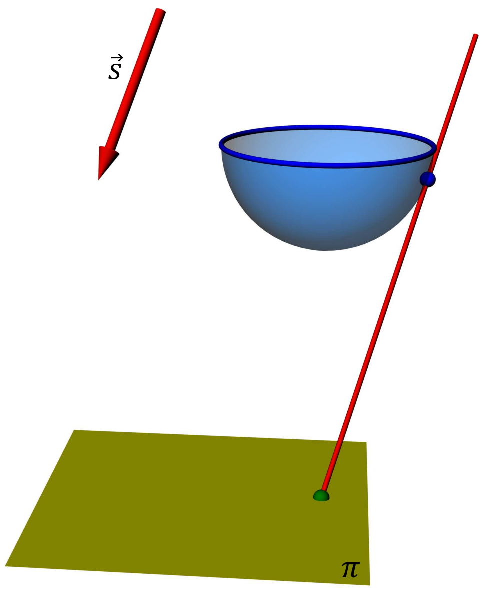


Obr. 2.3.5: Válcový prostor promítacích přímek

Přímky této kuželové nebo válcové plochy mohou být dvojího druhu. První z nich nazýváme přímky *styčné*. (Obr. 2.3.6) Tyto přímky prochází hraniční křivkou plochy κ, přesněji řečeno křivkou plochy κ, která je hranicí části plochy, na kterou jsme se při zobrazování omezili. Druhým typem přímek jsou přímky *tečné*. (Obr. 2.3.7) Tečné promítací přímky se dotýkají plochy podél nějaké křivky o. Křivku o nazýváme *skutečný obrys plochy* κ. Řez dotykové kuželové / válcové plochy zobrazované plochy κ průmětnou π je průmětem o' křivky o. (Obr. 2.3.8) Průmětu o' říkáme *zdánlivý obrys plochy* κ. (Drábek, Harant, Setzer, 1979)



Obr. 2.3.6: Styčná promítací přímka



Obr. 2.3.7: Tečná promítací přímka

V prostoru se do skutečného obrysu navíc zahrnují hraniční křivky plochy a případné singulární body. V souvislosti s tím se pak ke zdánlivému obrysu v průmětně π počítají navíc i průměty hraničních křivek a průměty singulárních bodů plochy.

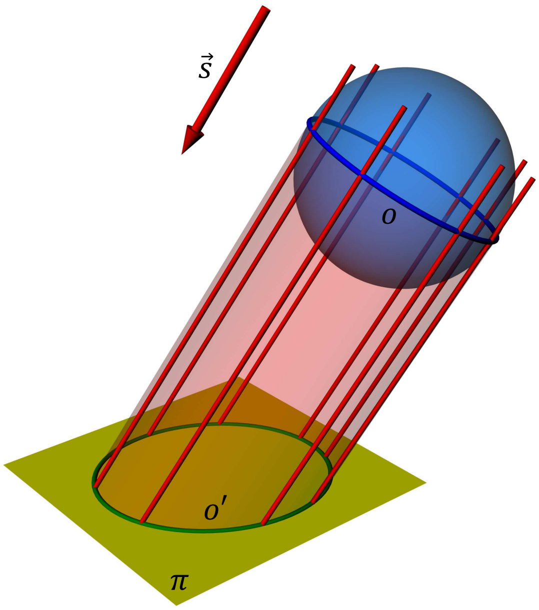
Nyní si uvedeme důležitou vlastnost zobrazované plochy κ a její dotykové kuželové / válcové plochy, kterou budeme ve třetí kapitole využívat při výpočtech obrysu plochy κ.

Věta 2.3.1 *Skutečný obrys plochy je množina všech dotykových bodů promítacích tečných rovin plochy.* ■

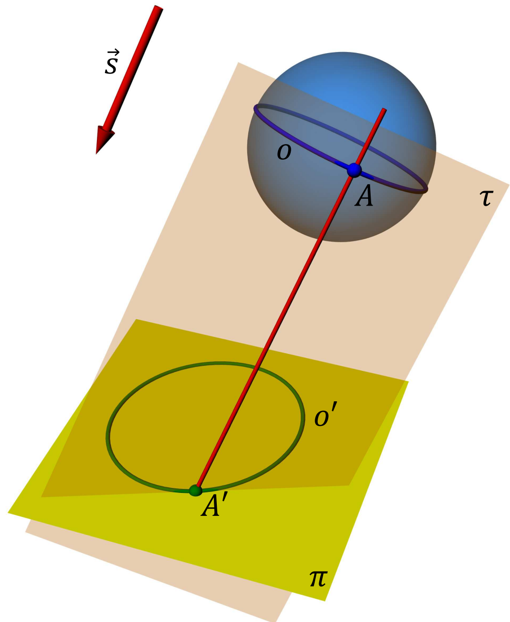
Věta je uvedena v (Drábek, Harant, Setzer, 1979, s. 121).

Dotyková kuželová / válcová plocha má s plochou κ společné tečné roviny v bodech skutečného obrysu o. Všechny přímky dotykové kuželové / válcové plochy jsou přímkami promítacími, proto jsou i jejich tečné roviny promítacími rovinami. Je-li tedy tečná rovina plochy κ zároveň promítací rovinou daného promítání, je příslušný dotykový bod plochy bodem skutečného obrysu o plochy κ a zobrazí se na bod zdánlivého obrysu o'. (Obr. 2.3.9)

Jedním ze způsobů, jak najít skutečný obrys plochy, je najít dotykové body tečných rovin dané plochy, které jsou zároveň rovinami promítacími.



Obr. 2.3.8: Skutečný a zdánlivý obrys plochy



Obr. 2.3.9: Bod skutečného obrysu plochy a jeho průmět

2.4 Viditelnost křivek na ploše

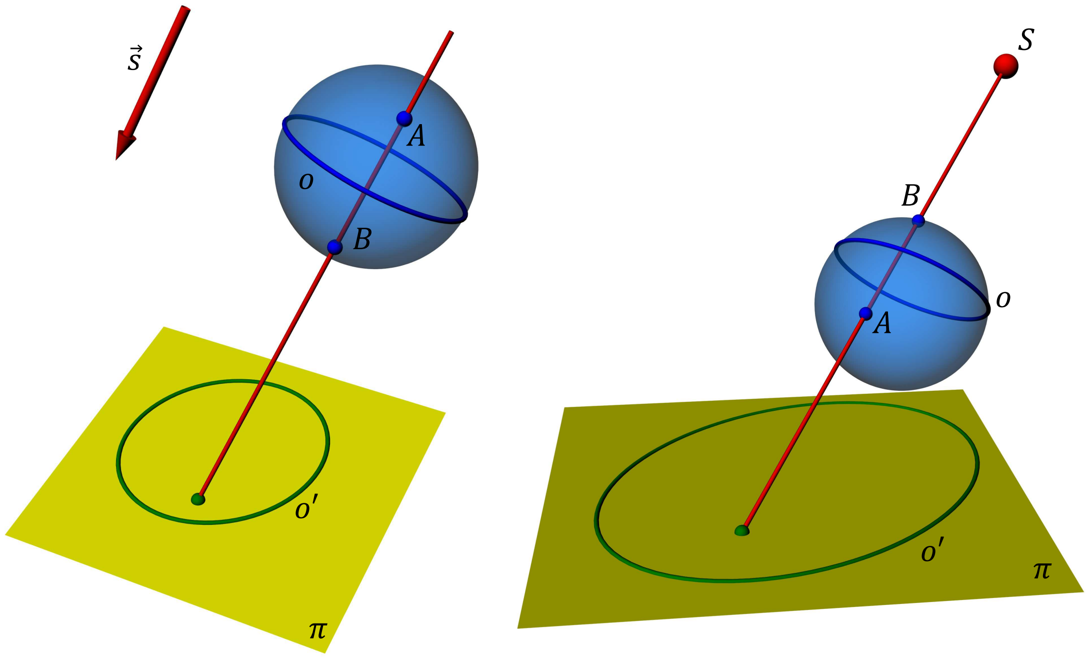
Promítneme-li křivky na ploše v zadaném promítání a najdeme-li skutečný i zdánlivý obrys plochy, zbývá vyřešit, která část křivek plochy je viditelná a která viditelná není. Pojem viditelnosti bodu a křivky si vysvětlíme na konkrétním příkladu nejprve v promítání rovnoběžném, poté v promítání středovém.

Mějme v prostoru umístěnou kulovou plochu κ, průmětnu π a směr promítání $\vec{s}$. Na ploše κ mějme bod A a veďme jím promítací přímku a. Pokud přímka a protíná plochu κ pouze v bodě A (Obr. 2.3.9), pak je zároveň její tečnou, tečná rovina τ plochy κ v bodě A obsahuje přímku a a rovina τ je rovinou promítací. Bod A je potom bodem skutečného obrysu plochy κ, průmět A' bodu A je bodem zdánlivého obrysu plochy κ a bod A je v daném promítání vidět.

Může však nastat situace (Obr. 2.4.1 vlevo), kdy promítací přímka a bodu A protne kouli κ v dalším bodě, označme jej B. V takovém případě je nutné rozhodnout o tom, který z bodů je viditelný a který ne.

Nyní proveďme úmluvu, že směr $\vec{s}$ bude zadáván tak, jak směřuje náš pohled v prostoru. V závislosti na zadání vektoru promítání budeme rozhodovat o viditelnosti bodů a křivek.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ na přímce a je stejného či opačného směru jako vektor $\vec{s}$ daného promítání. Je-li stejného směru, potom je vidět bod A, jelikož je počátkem tohoto vektoru. Pokud je opačného směru, je vidět bod B.



Obr. 2.4.1: Viditelnost bodu v promítání rovnoběžném (vlevo) a středovém (vpravo)

Ve středovém promítání je řešení viditelnosti podobné jako v promítání rovnoběžném. Mějme v prostoru umístěnou kulovou plochu κ, průmětnu π a střed S. Náš pohled směřuje z bodu S[5] k ploše κ. Bod A leží na ploše κ a vedeme jím promítací přímku a. Tato přímka je buď tečnou plochy κ, v takovém případě je A bodem skutečného obrysu a jeho průmět je viditelný, nebo plochu protne v dalším bodě, (Obr. 2.4.1 vpravo) označme jej B.

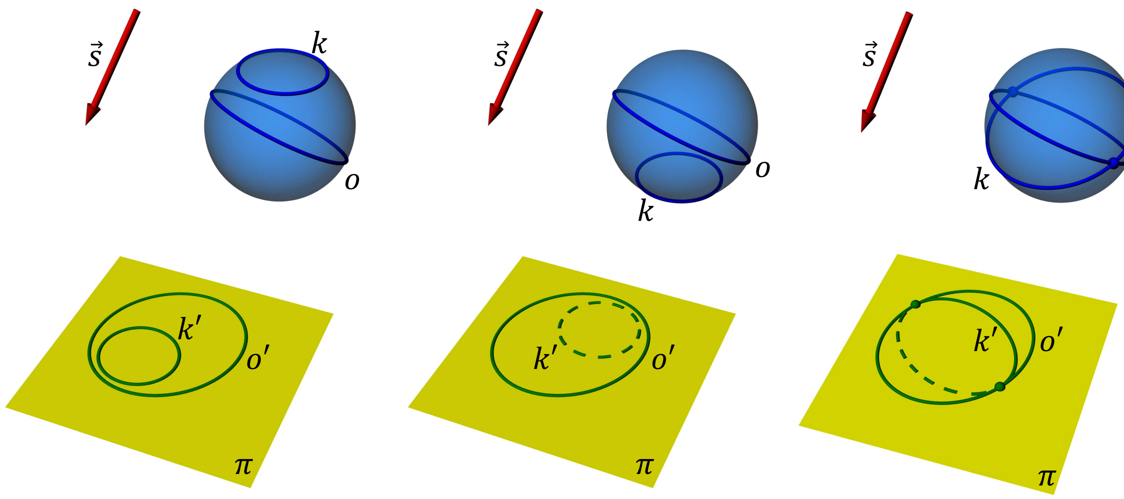
Je-li bod A blíže ke středu S než bod B, pak je bod A viditelný. Pokud platí nerovnost $|SB| < |SA|$, pak je bod A neviditelný.

Máme-li křivku na ploše, v daném promítání může být buď celá viditelná (všechny její body jsou viditelné; Obr. 2.4.2 vlevo), celá neviditelná (všechny její body jsou neviditelné; Obr. 2.4.2 uprostřed), nebo je nějaká její část viditelná a jiná neviditelná (Obr. 2.4.2 vpravo). V průmětu kreslíme viditelné části křivek plnou čarou, neviditelné části značíme čárkovaně.

Jsou-li na křivce k viditelné i neviditelné části, pak mezními body těchto částí jsou body, ve kterých křivka k protíná skutečný obrys plochy. Mezi průsečíky křivky k a skutečného obrysu jsou tedy všechny body křivky k viditelné, nebo všechny neviditelné. Zjednodušeně můžeme říci, že v místě, kde křivka k protne skutečný obrys plochy, se mění

[5] V některé literatuře se bodu S říká oko, např. (Volberg, 1953).

viditelnost křivky k. Při znázorňování průmětů křivek na ploše pak měníme styl čáry v místech, kde průmět křivky protne zdánlivý obrys plochy. (Obr. 2.4.2 vpravo)



Obr. 2.4.2: Viditelnost křivek na ploše

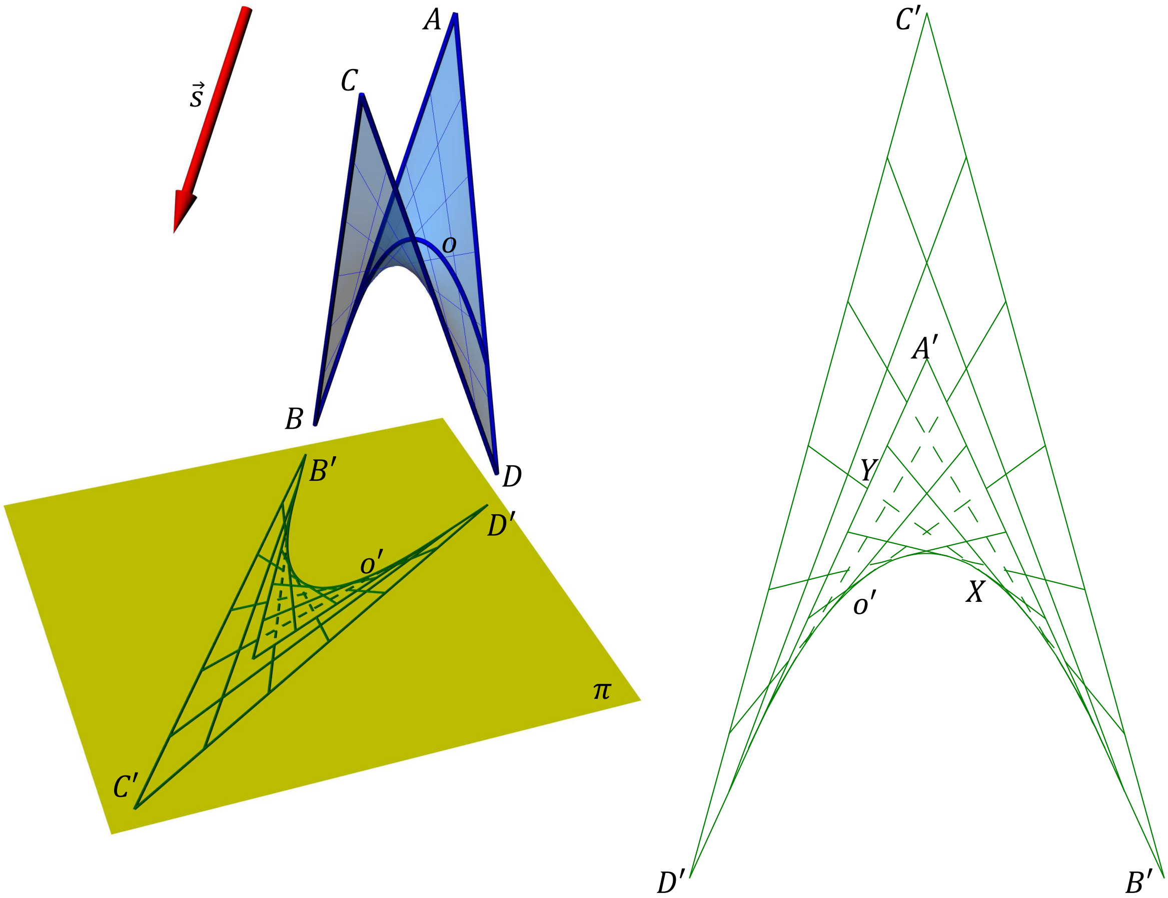
My se při zobrazování některých ploch ovšem omezíme na její části. Pak ovšem v zobrazování průmětů křivek a jejich viditelnosti musíme brát v potaz i průměty hraničních křivek. Ukažme si to na obrázku 2.4.3.

Promítáme hyperbolický paraboloid v rovnoběžném promítání. Zobrazujeme pouze jeho část danou zborceným čtyřúhelníkem $ABCD$. V průmětu zobrazujeme úsečky (části přímek), které na ploše leží. Jak si můžeme všimnout, některé úsečky protínají jak zdánlivý obrys o', tak průměty hraničních křivek (průměty $A'B'C'D'$ stran zborceného čtyřúhelníku).[6] Protne-li průmět úsečky na ploše zdánlivý obrys o' (průsečík X na obrázku 2.4.3 vpravo), změní se její viditelnost. Pokud protíná i průmět některé hraniční křivky (průsečík Y na obrázku 2.4.3 vpravo), opět se změní viditelnost.

Kdybychom se neomezovali pouze na část plochy, byla by přímka, jejímž průmětem je přímka $\leftrightarrow XY$, rozdělena na dvě části – jednu viditelnou a druhou neviditelnou. Mezním bodem těchto částí by byl vzor bodu X na hyperbolickém paraboloidu v daném rovnoběžném promítání. Stejně tak by byl rozdělen i průmět této přímky. Pokud se však při zobrazování omezíme na část plochy, může nastat situace, kdy průmět nějaké přímky plochy protne navíc průmět hraniční křivky a přímka je v další části opět viditelná.

V následující kapitole budeme provádět výpočty, díky kterým můžeme danou problematiku naprogramovat v příslušném softwaru. Nebudeme však řešit případy, jako byl ten na obrázku 2.4.3. Museli bychom pak používat algoritmy na hledání průsečíků dvou úseček v rovině, abychom zjistili, kde se protínají průměty zobrazované křivky a hraniční křivky plochy. Promítání budeme volit tak, abychom se těmto případům vyhnuli.

[6] V obrázku 2.20 vlevo vynecháváme popisek A' u průmětu bodu A, aby nezakryl část průmětů úseček plochy.



Obr. 2.4.3: Průmět hyperbolického paraboloidu v rovnoběžném promítání – vlevo model v prostoru, vpravo průmět s vyřešenou viditelností

2.5 Závěr druhé kapitoly

Nyní již máme potřebné znalosti promítání a můžeme přistoupit k výpočtům a později implementaci promítání ploch.

3. Výpočet průmětu plochy

V této kapitole si projdeme výpočty, které bylo nutné provést, abychom mohli efektivně naprogramovat promítání objektů. Ve speciálních případech navíc spočítáme obrysy ploch a viditelnost křivek, které na plochách vykreslujeme.

3.1 Průmět bodu

Máme-li v prostoru promítnout bod A, vedeme jím promítací přímku, která protne průmětnu daného promítání v bodě, jenž je průmětem A' bodu A v daném promítání. Řešíme-li problém analyticky, postupujeme obdobně. Nejdříve zjistíme parametrické vyjádření promítací přímky bodu A, pak spočítáme její průsečík s průmětnou a získáme tak průmět bodu A.

Mějme tedy v prostoru s kartézskou soustavou souřadnic zadaný bod A o souřadnicích $A = [a_1; a_2; a_3]$. Promítat budeme rovnoběžně ve směru vektoru $\vec{s} = (s_1; s_2; s_3)$ do půdorysny $\pi = (xy)$, tedy roviny s obecnou rovnicí $z = 0$. Vyloučíme však případ, kdy je směr $\vec{s}$ rovnoběžný s průmětnou π. Předpokládáme tedy, že souřadnice $s_3 \neq 0$.

Promítací přímka a bodu A má směrový vektor $\vec{u}$ rovný vektoru promítání $\vec{s}$ a prochází bodem A. Parametrické vyjádření přímky a je tedy:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1 \\ y &= a_2 + ts_2 \\ z &= a_3 + ts_3, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nyní musíme najít průsečík přímky a s průmětnou π. Spočítáme proto hodnotu parametru t, pro kterou bod na přímce a leží v půdorysně. Dosadíme do obecné rovnice $z = 0$ průmětny parametrické vyjádření promítací přímky a vyjádříme z ní parametr t.

$$\begin{aligned} a_3 + ts_3 &= 0 \qquad && / -a_3 \\ ts_3 &= -a_3 && /: s_3 \\ t &= -\frac{a_3}{s_3} \end{aligned}$$

Dosadíme-li do vyjádření přímky a právě spočítanou hodnotu parametru t, dostaneme souřadnice průmětu A' bodu A.

Jak si můžeme všimnout, během výpočtu jsme museli rovnici vydělit číslem s_3, což je z-ová souřadnice směru promítání. Pokud by toto číslo bylo rovno nule, nemohli bychom úpravu provést. V úloze ovšem vylučujeme možnost, kdy je vektor $\vec{s}$ rovnoběžný s průmětnou, tudíž souřadnice s_3 je jistě nenulová a lze touto hodnotou rovnici vydělit.

Souřadnice průmětu A' tedy vyjdou takto (vzorec 3.1.1):

$$A' = \left[a_1 - \frac{a_3}{s_3} s_1; a_2 - \frac{a_3}{s_3} s_2; 0\right] \qquad (3.1.1)$$

Ukažme si, jaké souřadnice bude mít průmět bodu $A = [a_1; a_2; a_3]$ v promítání středovém se středem $S = [s_1; s_2; s_3]$ a průmětnou $\pi = (xy)$. Předpokládáme, že střed S neleží v průmětně, tj. $s_3 \neq 0$.

Promítací přímka a bodu A je spojnicí bodu A a středu promítání S. Směrový vektor $\vec{u}$ je proto roven $\vec{u} = A - S = (a_1 - s_1; a_2 - s_2; a_3 - s_3)$. Napíšeme parametrické vyjádření přímky a:

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 + t(a_1 - s_1) \\
y &= a_2 + t(a_2 - s_3) \\
z &= a_3 + t(a_3 - s_3), t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

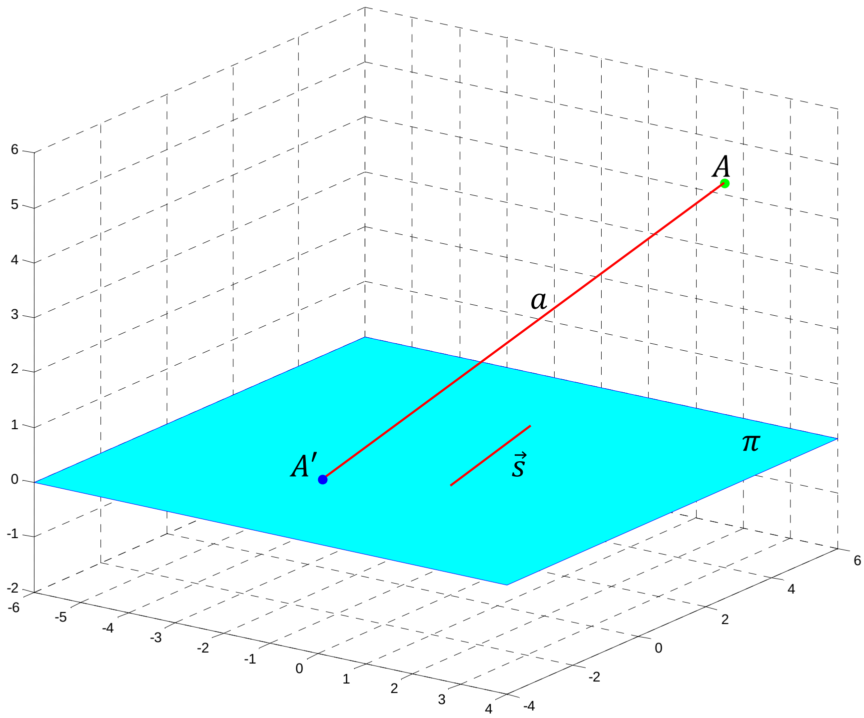
Zbývá spočítat průsečík této přímky s půdorysnou π. Dosadíme parametrické vyjádření přímky a do obecné rovnice roviny π.

$$
\begin{aligned}
&a_3 + t(a_3 - s_3) = 0 && /-a_3 \\
&t(a_3 - s_3) = -a_3 && /:(a_3 - s_3) \\
&t = -\frac{a_3}{a_3 - s_3} = \frac{a_3}{s_3 - a_3}
\end{aligned}
$$

Stejně jako v minulém výpočtu jsme dělili rovnici reálným číslem, tentokrát ve tvaru $a_3 - s_3$. Pokud by bylo rovno nule, znamenalo by to, že se rovnají z-ové souřadnice bodu A a středu promítání S. Promítací přímka a je pak rovnoběžná s průmětnou π. Tuto možnost vyloučíme, stejně jako jsme tak učinili ve druhé kapitole v části 2.1.

Předpokládejme proto, že bod A má jinou z-ovou souřadnici než střed promítání S. Souřadnice jeho průmětu A' pak mají tvar (vzorec 3.1.2):

$$A' = \left[a_1 + \frac{a_3(a_1 - s_1)}{s_3 - a_3}; a_2 + \frac{a_3(a_2 - s_2)}{s_3 - a_3}; 0\right] \tag{3.1.2}$$

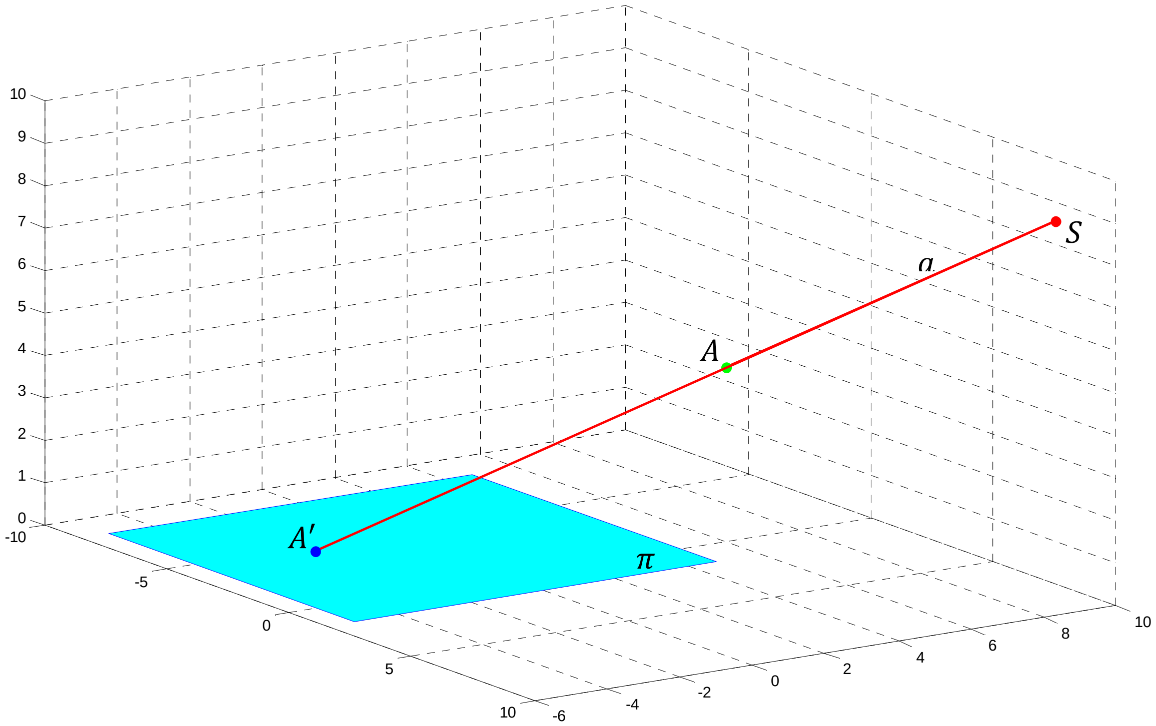


Obr. 3.1.1: Průmět bodu A v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s}$

Ukažme si na obrázcích průmět konkrétního bodu v daném promítání. Promítneme bod A o souřadnicích $A = [3; 4; 5]$ do půdorysny v rovnoběžném promítání se směrem

$\vec{s} = (1; 1; 1)$. Dosadíme-li jej do výše uvedeného vzorce 3.1.1, snadno zjistíme, že souřadnice průmětu A' vycházejí $A' = [-2; -1; 0]$. Zobrazíme bod A např. ve středovém promítání se středem $S = [9; 9; 9]$ do půdorysny π. Jeho průmět A' pak má souřadnice $A' = [-4,5; -2,25; 0]$.

Výsledek si čtenář může ověřit i prostřednictvím souborů *bodrp* a *bodsp*, které jsou na přiloženém CD. Stačí zadat vstupní data stejná jako ta, se kterými jsme právě počítali. Oba soubory pak zobrazí průmět bodu v průmětně a taktéž vykreslí i prostorovou situaci. Na obrázcích 3.1.1, 3.1.2 si můžeme prohlédnout znázornění obou prostorových situací. Obrázky s průměty bodu v daných promítáních do práce nepřidáváme. Čtenář je může získat z uvedených souborů.



Obr. 3.1.2: Průmět bodu A ve středovém promítání se středem S

Nyní již umíme spočítat průmět bodu, který máme zadaný souřadnicemi, v rovnoběžném či středovém promítání do půdorysny. Naším úkolem je naučit se promítnout nejen jednotlivý bod, ale i nějakou křivku či plochu.

Představme si, že máme parametricky zadanou plochu $\kappa(u,v) = [x(u,v); y(u,v); z(u,v)], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$. Zvolíme-li konkrétní čísla u a v, vyjde nám nějaký bod K na ploše, pro nějž hledáme souřadnice jeho průmětu. Výpočet probíhá stejně, jako když jsme zjišťovali průmět A' bodu A v předcházejících odstavcích. Nahradíme-li souřadnice bodu A souřadnicemi bodu K na ploše κ, dostaneme průmět K' bodu plochy.

V rovnoběžném promítání vypadají jeho souřadnice takto (vzorec 3.1.3):

$$K' = \left[x(u,v) - \frac{z(u,v)}{s_3}s_1; y(u,v) - \frac{z(u,v)}{s_3}s_2; 0\right] \tag{3.1.3}$$

Ve středovém promítání pak vyjdou (vzorec 3.1.4):

$$K' = \left[x(u,v) + \frac{z(u,v).(x(u,v) - s_1)}{s_3 - z(u,v)}; y(u,v) + \frac{z(u,v).(y(u,v) - s_2)}{s_3 - z(u,v)}; 0\right] \qquad (3.1.4)$$

Máme-li zadanou plochu κ a promítání a zvolíme-li konkrétní hodnoty u, v, dostaneme bod plochy κ. Pokud navíc dosadíme stejná čísla u, v do vzorců 3.1.3 či 3.1.4, získáme průmět vybraného bodu na ploše v zadaném promítání.

3.2 Obrys plochy

Nyní si vysvětlíme, jak bychom spočítali obrys plochy v nějakém promítání. Mějme plochu $\kappa(u,v) = [x(u,v); y(u,v); z(u,v)], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$. Jak jsme se již dozvěděli v druhé kapitole, bod na ploše je zároveň bodem T skutečného obrysu plochy, pokud je jeho tečná rovina zároveň rovinou promítací. Jak zjistíme, že bod je či není obrysem plochy? Najdeme tečnou rovinu plochy v daném bodě T a zjistíme, jestli je rovnoběžná se směrem $\vec{s}$, pokud zobrazujeme rovnoběžně, nebo jestli obsahuje střed S, pokud promítáme středově.

Ať už se jedná o promítání středové či rovnoběžné, oba výpočty mají společný začátek, kdy musíme nalézt tečnou rovinu τ v bodě T. Tečná rovina bodu na ploše má směrové vektory, které spočítáme jako parciální derivace zadané plochy. Směrové vektory tečné roviny v bodě $T = [x(u,v); y(u,v); z(u,v)]$ se proto rovnají:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v); \frac{\partial y}{\partial u}(u,v); \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial \kappa}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v); \frac{\partial y}{\partial v}(u,v); \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

Mohli bychom napsat parametrické vyjádření tečné roviny τ bodu T, ale jak za chvíli zjistíme, k výpočtu jej není zapotřebí. Musíme pouze zjistit, jestli je směr $\vec{s}$ rovnoběžný s tečnou rovinou, nebo jestli střed S leží v rovině τ. Nejdříve se zaměříme na promítání rovnoběžné, pak na středové.

Pro směr promítání předpokládejme pouze to, že je jím vektor $\vec{s} = (s_1; s_2; s_3)$. Pokud je směr promítání rovnoběžný s tečnou rovinou, znamená to, že je lineární kombinací směrových vektorů této roviny. Sestavíme proto ze směrových vektorů tečné roviny bodu T a vektoru $\vec{s}$ matici M řádu 3. Je-li její hodnost menší než 3, matice je singulární a vektory tvořící matici M jsou lineárně závislé.

$$M = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Mějme na paměti, že směr $\vec{s}$ je pevně zadaný, a vektory parciálních derivací plochy κ jsou tvořeny v každé souřadnici nějakým výrazem, jenž je závislý na parametrech u a v. Skutečným obrysem plochy je nějaká křivka na ploše. Budeme tedy hledat u v závislosti na v tak, aby matice M byla singulární. (Lze i obráceně hledat v v závislosti na u.) Takto pak získáme křivku na ploše, která je skutečným obrysem plochy κ v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s}$.

Postup pro středové promítání je analogický. Označme souřadnice středu $S[s_1; s_2; s_3]$. Musíme rozhodnout, jestli S leží v tečné rovině bodu T, pak je T bodem obrysu plochy κ. Pokud S je v rovině τ, leží v ní i úsečka ST. Vektor $\overrightarrow{w} = T - S$ potom musí být rovnoběžný s tečnou rovinou bodu T. Není-li s ní rovnoběžný, pak střed S v rovině τ neleží.

Pokud S leží v rovině τ, je vektor $\overrightarrow{w}$ lineární kombinací vektorů parciálních derivací plochy κ a matice M sestavená z těchto vektorů je singulární.

$$M = \begin{pmatrix} x(u,v) - s_1 & y(u,v) - s_2 & z(u,v) - s_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

Prvky matice M jsou i v tomto případě závislé na dvou parametrech u, v. Najdeme-li u v závislosti na v (nebo opačně) tak, aby M byla singulární, podaří se nám parametrizovat křivku na ploše, která tvoří její skutečný obrys.

Problematiku hledání obrysu jsme tedy převedli na problém najít hodnoty parametrů u a v, pro které je matice M singulární.

3.3 Viditelnost bodu na ploše

Již víme, jak se teoreticky hledá obrys plochy. Nabízí se tedy otázka, zvládneme-li rozhodnout, jestli je bod plochy vidět či není.

Mějme na ploše $\kappa(u,v) = [x(u,v); y(u,v); z(u,v)], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$ bod A, který vznikl dosazením parametrů u_0, v_0 do předpisu plochy. Jeho souřadnice označíme $A = [x(u_0,v_0); y(u_0,v_0); z(u_0,v_0)]$. Bodu A odpovídá v daném promítání promítací přímka a. Přímka a protíná plochu v bodě A, ale může se stát, že ji protne ve více bodech, záleží na typu plochy κ. Toto platí pro rovnoběžné i středové promítání,

V rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s}$ do půdorysny π předpokládejme, že náš pohled směřuje shora dolů (nadhled), pokud z-ová souřadnice vektoru $\vec{s}$ je záporná. Pokud je kladná, znamená to, že náš pohled směřuje nahoru (podhled). Směr našeho pohledu tedy určuje z-ová souřadnice směru promítání. Vyloučíme možnost $s_3 = 0$, tedy směr $\vec{s}$ není rovnoběžný s průmětnou $\pi = (xy)$.

Najdeme průsečíky promítací přímky a a plochy κ různé od bodu A. Vyberme jeden z nich a označme jej B. Dále určíme souřadnice vektoru $\vec{v} = B - A$, který je lineárně závislý s vektorem $\vec{s}$, protože body A a B leží na promítací přímce daného promítání. Porovnáme z-ové souřadnice těchto vektorů. (Ani jedna z nich nemůže být nulová, protože předpokládáme, že směr $\vec{s}$ není rovnoběžný s půdorysnou π.) Pokud jsou obě kladné či obě záporné, znamená to, že se z bodu A díváme k bodu B a bod A je vidět. Mají-li z-ové souřadnice vektorů $\vec{s}$ a $\vec{v}$ různá znaménka, pak bod A vidět není, protože nejdříve vidíme bod B.

Než si ukážeme, jak by probíhal příslušný výpočet, provedeme obdobnou úvahu pro promítání středové se středem S do průmětny π. Bodu A na ploše odpovídá promítací přímka $a = \leftrightarrow SA$. Náš pohled směřuje z bodu S k bodu A, zajímají nás proto pouze průsečíky na polopřímce $\mapsto SA$. Bod na ploše, který je na této polopřímce nejblíže bodu S, je vidět, ostatní body na ploše nevidíme. Je-li B průsečík přímky a a plochy κ, rozhodneme o viditelnosti bodu A následujícím způsobem. Spočítáme si vektory $\vec{u} = A - S$ a $\vec{v} = B - S$. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou jistě lineárně závislé, protože body A, B a S leží na přímce a. Vektor $\vec{u}$ je tedy nějakým k-násobkem vektoru $\vec{v}$, tedy $\vec{u} = k\vec{v}, k \in \mathbb{R}$. Pokud je k z intervalu $(0; 1)$, pak bod A je vidět, protože je k bodu S blíž. Pokud $k \in (1; +\infty)$, bod A by vidět nebyl. Je-li k záporné, pak bod B neleží na polopřímce $\mapsto SA$, nemůže zakrýt bod A a bod A je proto vidět.

Tímto způsobem tedy rozhodneme, zda vidíme bod A plochy κ v daném promítání nebo ne. Dodejme jen, že pokud je na promítací přímce a více průsečíků B, je možné, že nestačí pro výpočet volba pouze jednoho bodu B. Pokud při volbě bodu B zjistíme, že bod A vidět není, dál už pokračovat nemusíme. Pokud by však vidět byl, znamená to jenom, že nevidíme zvolený bod B, protože jej zakrývá bod A. Tím ovšem nevyloučíme možnost, že se na přímce a najde jiný průsečík B, který by vidět byl a zakryl by bod A.

Nyní shrneme průběh výpočtu, díky kterému rozhodneme o viditelnosti bodu plochy.

- Napíšeme parametrické vyjádření promítací přímky bodu plochy κ.
- Najdeme průsečíky této promítací přímky a plochy κ.
- V případě rovnoběžného promítání porovnáme z-ové souřadnice vektorů $\vec{s}$ a $B - A$.
- V případě promítání středového zjišťujeme, jakým k-násobkem vektoru $B - S$ je vektor $A - S$.

Doteď jsme uváděli teoretické postupy pro výpočet průmětu bodů na ploše, jejího obrysu v daném promítání a určení viditelnosti bodu na ploše. V následujících částech si ukážeme konkrétní výpočty pro hyperbolický paraboloid.

3.4 Hyperbolický paraboloid – rovnoběžné promítání

Mějme dán hyperbolický paraboloid $\kappa(u, v) = [u; v; uv], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$. Směr rovnoběžného promítání je dán vektorem $\vec{s} = (1; 1; 1)$. Průmětnou promítání je půdorysna π s obecnou rovnicí $z = 0$. Spočítejme průmět bodu K na ploše, skutečný obrys plochy a určeme viditelnost nějakého bodu A na ploše κ.

Průmět nějakého bodu $K[u; v; uv]$ na ploše zjistíme dosazením do vzorce 3.1.3:

$$K'\left[u - \frac{uv}{1}(1); v - \frac{uv}{1}(1); 0\right]$$

Souřadnice bodu K' upravíme do tvaru:

$$K'[u - uv; v - uv; 0]$$

Nyní spočítejme vektory parciálních derivací plochy κ, které jsou zároveň směrovými vektory tečné roviny bodu na ploše.

$$\frac{\partial \kappa}{\partial u}(u, v) = (1; 0; v)$$
$$\frac{\partial \kappa}{\partial v}(u, v) = (0; 1; u)$$

Sestavíme matici M, která obsahuje směrové vektory tečné roviny a navíc směr promítání $\vec{s}$. S pomocí Gaussovy eliminace zjistíme, pro jaké hodnoty u, v je matice M singulární.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 1 & 1-v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1-u-v \end{pmatrix}$$

Matice M je singulární, pokud je výraz $1-u-v$ roven 0. Nyní vyjádříme jeden parametr v závislosti na druhém. Můžeme si zvolit, jestli vyjádříme u v závislosti na v nebo opačně. Vždy se snažíme volit jednodušší variantu, v tomto případě na volbě nezáleží. Vyjádřeme z této rovnice parametr $v = 1-u$. Dosazením výrazu $1-u$ za v do předpisu plochy κ získáme předpis křivky o, která je skutečným obrysem plochy v prostoru.

$$o(u) = [u; 1-u; u(1-u)]$$

Z předpisu křivky o je jasně patrné, že skutečným obrysem hyperbolického paraboloidu v daném rovnoběžném promítání je parabola. Promítneme její body do půdorysny π. K tomu stačí pouze dosadit do vzorce 3.1.3.

Nyní rozhodneme, která část plochy je vidět. Víme, že skutečný obrys plochy ji rozděluje na části, které vidět jsou a které ne. Parabola $o(u)$ rozdělí hyperbolický paraboloid na dvě části. Zvolme v jedné z nich bod $A = \kappa(-2,-2)$ a určeme, zdali je vidět či ne. Bod A má souřadnice $A = [-2; -2; 4]$. Promítací přímka a tohoto bodu má parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= -2 + t \\ y &= -2 + t \\ z &= 4 + t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Předpis plochy κ je $x = u$, $y = v$ a $z = uv$. Dosadíme vyjádření přímky a do předpisu plochy a získáme následující soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} u &= -2 + t \\ v &= -2 + t \\ uv &= 4 + t \end{aligned}$$

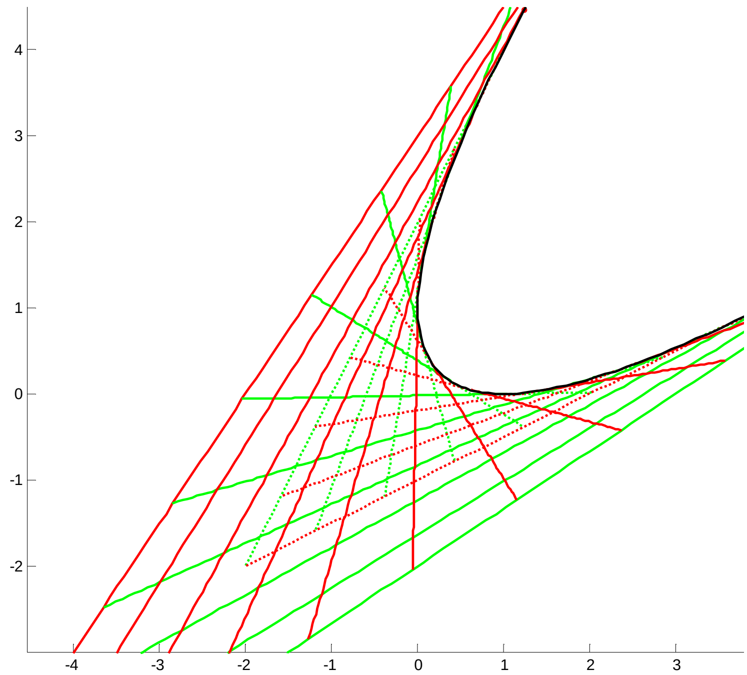
V prvních dvou rovnicích máme vyjádřené u a v. Tato vyjádření dosadíme do třetí rovnice, z které vypočítáme hodnotu parametru t.

$$\begin{aligned} (-2+t)(-2+t) &= 4 + t \\ 4 - 4t + t^2 &= 4 + t \\ t^2 - 5t &= 0 \\ t(t-5) &= 0 \end{aligned}$$

Rovnici řeší hodnoty $t_1 = 0$ a $t_2 = 5$. Číslo t_1 odpovídá bodu A na přímce a. Dosadíme-li do parametrického vyjádření přímky a za t číslo 5, dostaneme druhý průsečík přímky a s plochou κ. Pojmenujeme ho B a spočítáme jeho souřadnice, $B = [3; 3; 9]$.

Určíme souřadnice vektoru $\vec{v} = B - A = (3-(-2); 3-(-2); 9-4) = (5; 5; 5)$. Na první pohled vidíme, že vektor $\vec{v} = (5; 5; 5)$ a směr promítání $\vec{s} = (1; 1; 1)$ jsou lineárně závislé. (Kdyby tomu tak nebylo, ve výpočtu nastala chyba.) Znaménka z-ových souřadnic vektorů se shodují, tedy bod A je vidět. Body, které jsou v části plochy rozdělené jejím obrysem, ve které je i bod A, vidět jsou. Body druhé části (v ní leží i bod B) nevidíme.

Obrázek 3.4.1 znázorňuje průmět hyperbolického paraboloidu v daném promítání. Zobrazujeme část přímek na ploše a část obrysu.[1]



Obr. 3.4.1: Průmět části hyperbolického paraboloidu v rovnoběžném promítání

Obrázek může čtenář získat spuštěním souboru *hprov*, který je na přiloženém CD. Spolu s tímto obrázkem pak skript vygeneruje i znázornění prostorové situace – hyperbolický paraboloid v prostoru i jeho průmět včetně skutečného a zdánlivého obrysu. Doporučuji čtenáři, aby si zkusil natočit pohled v prostoru tak, aby směr promítání (růžová úsečka v prostoru) viděl pouze jako bod. Pak splyne průmět hyperbolického paraboloidu i jeho znázornění v prostoru, díky čemuž nahlédneme, že máme vše spočítané správně.

3.5 Hyperbolický paraboloid – středové promítání

Mějme dán hyperbolický paraboloid $\kappa(u,v) = [u; v; uv], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$. Střed středového promítání má souřadnice $S = [0; 5; 7]$. Průmětnou promítání je půdorysna π s obecnou rovnicí $z = 0$. Spočítejme průmět bodu K na ploše, skutečný obrys plochy a určeme viditelnost nějakého bodu A na ploše κ.

K výpočtu průmětu K' bodu K na ploše ve středovém promítání nám slouží vzorec 3.1.4, rovnou do něj dosadíme a upravíme souřadnice na jednodušší tvar:

$$K' = \left[u + \frac{uv(u-0)}{7-uv}; v + \frac{uv(v-5)}{7-uv}; 0\right] = \left[u + \frac{u^2 v}{7-uv}; v + \frac{uv^2 - 5uv}{7-uv}; 0\right]$$

[1] Tím, že se omezíme na část plochy, se může změnit viditelnost některých bodů, které byly předtím neviditelné. V našich příkladech totiž neřešíme viditelnost vůči hraničním křivkám.

Vektory parciálních derivací vyjdou stejně jako v části 3.4. K sestavení matice M nám tak zbývá jen spočítat vektor $\vec{w} = K - S = (u; v - 5; uv - 7)$, což je vektor promítací přímky bodu na ploše. Nyní napíšeme matici M a zjistíme, pro které hodnoty u a v je singulární, tedy vektor $\vec{w}$ je rovnoběžný s tečnou rovinou bodu na ploše.

$$M = \begin{pmatrix} u & v-5 & uv-7 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ u & v-5 & uv-7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & v-5 & -7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & -u(v-5)-7 \end{pmatrix}$$

Matice bude singulární, pokud výraz $-u(v-5)-7$ bude nulový. Sestavíme si proto rovnici a vyjádříme z ní parametr u.

$$-u(v-5)-7 = 0$$

$$u = \frac{7}{5-v}$$

Dosazením tohoto výrazu do předpisu plochy κ získáme skutečný obrys plochy $o(v)$.

$$o(v) = \left[\frac{7}{5-v}; v; \frac{7v}{5-v}\right]$$

Tato křivka rozdělí plochu na části, které vidět jsou a které vidět nejsou. Zbývá určit viditelnost nějaké bodu A na ploše. Zvolme tentýž bod, se kterým jsme počítali v předchozí části, tj. $A = [-2; -2; 4]$. Promítací přímka a bodu A má následující vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= -2 + t(-2-0) = -2-2t \\ y &= -2 + t(-2-5) = -2-7t \\ z &= 4 + t(4-7) = 4-3t, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nyní spočítáme průsečíky této přímky s hyperbolickým paraboloidem, pro nějž máme rovnice $x = u$, $y = v$, $z = uv$. Porovnáním obou vyjádření získáme rovnice:

$$\begin{aligned} u &= -2-2t \\ v &= -2-7t \\ uv &= 4-3t \end{aligned}$$

Výrazy z prvních dvou rovnic dosadíme za u a v do rovnice třetí a spočítáme hodnoty parametru t, pro které přímka a protíná plochu κ.

$$\begin{aligned} &(-2-2t)(-2-7t) = 4-3t \\ &4+18t+14t^2 = 4-3t \\ &14t^2+21t = 0 \\ &7t(2t+3) = 0 \end{aligned}$$

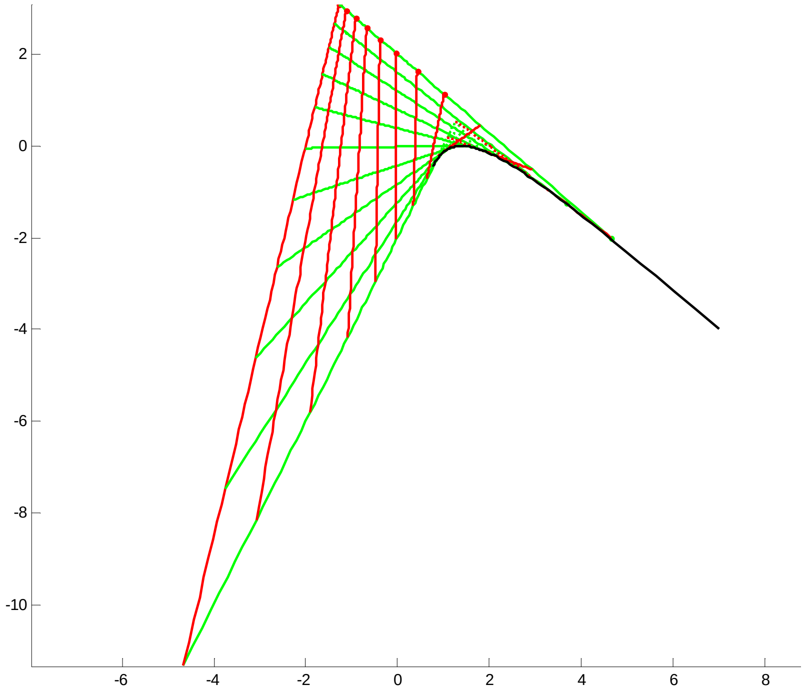
Výslednou rovnici řeší hodnoty $t_1 = 0$ a $t_2 = -1{,}5$. Dosadíme-li do vyjádření přímky a za parametr $t = 0$, vyjde nám bod A. Pro hodnotu $t = -1{,}5$ získáme hledaný druhý průsečík $B = [1; 8{,}5; 8{,}5]$ přímky a a hyperbolického paraboloidu.

Zbývá spočítat souřadnice vektorů $\vec{u} = A - S$ a $\vec{v} = B - S$. Souřadnice bodů A, B, S známe, nic nám tedy nebrání, abychom určili jejich souřadnice.

$$\vec{u} = (-2 - 0; -2 - 5; 4 - 7) = (-2; -7 - 3)$$
$$\vec{v} = (1 - 0; 8{,}5 - 5; 8{,}5 - 7) = (1; 3{,}5; 1{,}5)$$

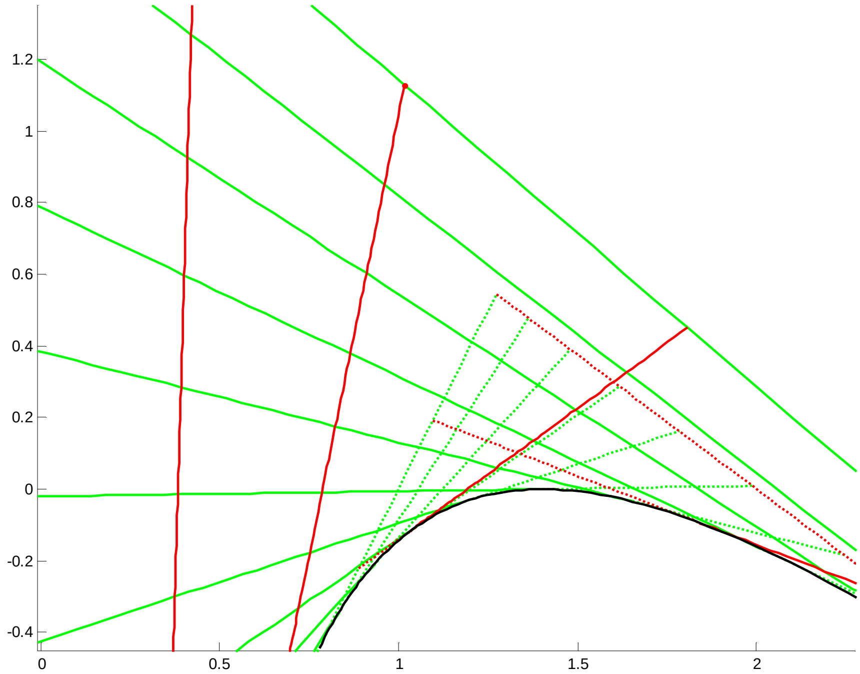
Jak si můžeme všimnout, pro vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí: $\vec{u} = -2\vec{v}$. Číslo $k = -2$ je záporné, bod B tedy neleží na polopřímce $\mapsto SA$ a nemůže zakrýt bod A. Jelikož více průsečíků přímky a a plochy κ neexistuje, závěr výpočtu zní, že bod A vidět je.

Obrázek 3.5.1 znázorňuje průmět hyperbolického paraboloidu včetně vyřešené viditelnosti. Opět se při zobrazení omezujeme na část plochy.



Obr. 3.5.1: Průmět hyperbolického paraboloidu ve středovém promítání

Na následujícím obrázku 3.5.2 je detail části obrázku 3.5.1, aby bylo lépe vidět, že jsme vyřešili i viditelnost. Většina části plochy, kterou zobrazujeme, je ze středu S viditelná, menší části vyznačených přímek však vidět nejsou. Obrázek si čtenář může vygenerovat spuštěním souboru *hpstred*, který kromě obrázku 3.5.1 ukáže i prostorovou situaci, kterou jsme v našem příkladě řešili.



Obr. 3.5.2: Průmět hyperbolického paraboloidu ve středovém promítání – detail

3.6 Závěr třetí kapitoly

Ve třetí kapitole jsme ukázali, jak postupujeme, máme-li počítat průměty bodů na ploše v nějakém promítání. Nastínili jsme i teoretický postup, jak získat obrys plochy a určit viditelnost bodu na ploše. Nabyté znalosti jsme pak zužitkovali při konkrétních výpočtech.

4. Programová dokumentace

Čtvrtá kapitola diplomové práce se věnuje algoritmům, které byly použity k naprogramování zobrazování ploch v rovnoběžném či středovém promítání. Taktéž obsahuje uživatelskou příručku, ve které se čtenář dozví, jak dané programy používat.

4.1 Programovací prostředí

Veškeré programy přiložené na CD byly vytvořeny v MATLABu. MATLAB je interaktivním programovacím prostředím a zároveň programovacím jazykem. Umožňuje práci s maticemi, vykreslování grafů ve 2D i 3D, analýzu a prezentaci dat, měření a zpracování signálů. Je vhodný pro vědecké a výzkumné účely a vývoj aplikací.

Proměnné v MATLABu nevyžadují deklaraci, vznikají prvním přiřazením hodnoty. Tuto hodnotu lze později přepsat a můžeme změnit i datový typ proměnné. Hlavní datovou strukturou MATLABu jsou matice. Pozice prvků v matici jsou označovány celými kladnými čísly a všechny prvky matice musí být stejného datového typu. Prvky matice ale nemusí být pouze čísla (celá čísla, komplexní čísla, …), ale i matice či znaky (řetězce).

Kromě grafických a výpočetních nástrojů má MATLAB k dispozici knihovnu různých funkcí, tzv. toolboxy, které lze využít např. ve statistice, biologii atp. Uživatel si navíc může sám naprogramovat funkce (m-file), které potřebuje ke své práci.

Pro účely naší práce stačily základní příkazy, výpočty s maticemi, příkazy, díky kterým zobrazujeme výsledky, a možnost tvorby vlastních programů (m-file).

4.2 Zadání problému a způsob jeho řešení

Jedním z cílů této diplomové práce je navrhnout a implementovat programový prototyp, který řeší zobrazování ploch, pro využití na střední škole má navíc zobrazovat i jednodušší objekty (hranatá tělesa) a také musí být schopen vytvořit anaglyf zadaného objektu.

Jako způsob zobrazování ploch jsme vybrali rovnoběžné a středové promítání (viz kapitola 2). Jakmile se nám podaří naprogramovat tato promítání, je potom velmi jednoduché přidat i program, který zobrazí daný objekt anaglyficky. O anaglyfech a programu, který je vytváří a byl napsán taktéž v rámci této diplomové práce, pojednáme v páté kapitole.

Nyní se věnujme návrhu řešení problému. Program má promítnout nějaký objekt, který mu zadá uživatel. Promítání je dáno průmětnou a směrem či středem promítání. Uživatel tedy zadá i průmětnu a směr či střed promítání.

Jak jsme se dozvěděli ve druhé kapitole, bod v prostoru zobrazujeme tak, že jím vedeme promítací přímku, najdeme průsečík této přímky s průmětnou a tento průsečík je průmětem bodu v daném promítání. Celý postup můžeme převést do analytické geometrie. Průmětnu popíšeme obecnou rovnicí, promítací přímku parametrickým vyjádřením, najdeme jejich průsečík a získáme tak průmět zobrazovaného bodu. Provádíme-li výpočet obecně, nikoli s konkrétními čísly, vznikne nám vzorec jak najít průmět bodu, dosadíme-li do něj jeho souřadnice.

Problémem je, že každé dvě různé roviny mají různé obecné rovnice, a tudíž i vzorce pro promítání s různými průmětnami se budou lišit. Bylo by komplikované určit vzorec, který závisí na průmětně, středu/směru promítání a promítaném bodu, a byl by použitelný v jakékoli situaci.

Proto jsme při řešení problému přistoupili k volbě konkrétní průmětny. Vzorce, které používáme pro promítání, jsou vytvořeny pro zadání, kdy průmětnou je půdorysna, tedy rovina $\pi = (xy)$. Uživatel ovšem může chtít, abychom zobrazovali i do jiné průmětny.

Než tedy promítneme zadaný objekt, nejprve zjistíme, jestli promítáme do půdorysny, nebo do jiné průmětny. Pokud nám uživatel zadá jinou průmětnu, transformujeme souřadnice průmětny, promítaného objektu a směru/středu promítání tak, aby průmětna splynula s půdorysnou. Poté promítneme zadaný objekt. Takto získaný průmět je shodný s průmětem, který hledáme, jen má v prostoru jiné souřadnice. K získání souřadnic průmětu objektu v původní poloze použijeme opět transformaci, která bude inverzní k transformaci, kterou jsme použili poprvé. Poté můžeme vykreslovat výsledky promítání.

Shrňme si schéma řešení zadaného problému v následujících bodech.

- Uživatel zadá zobrazovaný objekt, průmětnu a směr či střed promítání.
- Program provede transformaci zadaných objektů, aby průmětna splynula s půdorysnou.
- Program promítne zadaný objekt.
- Program zobrazí průmět zadané plochy v rovině.
- Program provede zpětnou transformaci průmětu plochy.
- Program zobrazí model celé situace v prostoru – zadanou plochu, její průmět v zadané průmětně a střed či směr promítání.

Celý program bychom mohli sepsat do jednoho souboru m-file, ale pro přehlednost kódu a snazší orientaci v něm jsme jej rozdělili na několik podprogramů (funkcí). Každý z nich zajišťuje nějakou část řešení zmíněnou výše, popřípadě další dílčí výpočty, které potřebujeme. V následující části pojednáme o důležitých programech a funkcích, díky kterým můžeme zobrazovat plochy či další objekty.

4.3 Důležité funkce a komunikace mezi nimi

Seznam všech programů a funkcí, které byly pro tuto diplomovou práci sepsány, najde čtenář v přílohách A. Hlavními programy, které spouští uživatel, jsou *projekce*, *mnohosten* a *usecka*. Kód všech tří programů je analogický, ovšem každý z nich promítá jiný typ objektů. Program *projekce* promítá plochy, program *mnohosten* promítá hranatá tělesa a program *usecka* zobrazuje úsečky. Programy *mnohosten* a *usecka* vznikly navíc, aby byla práce využitelná i na střední škole, kde se spíše setkáváme s hranatými tělesy než s plochami.

Uživatel spouští jeden z těchto programů v závislosti na tom, jaký typ objektu chce zobrazit. Důvodem vzniku tří na sobě nezávislých programů je různá reprezentace objektů, o které se zmíníme v uživatelské části, až budeme popisovat způsob zadávání dat. Nyní se zaměříme na program *projekce* a funkce, které využívá.

Uživatel v příkazovém okně MATLABu spustí program *projekce* a zadá mu vstupní data – číslo zobrazované plochy, průmětnu, směr promítání, střed promítání. O zadávání dat pojednáme v dalších částech kapitoly. Čtenáře by však mohlo zmást, že zadáváme programu směr i střed promítání, přestože program promítne plochu jen jedním způsobem.

Uživatel zadá programu vektory souřadnic směru i středu promítání. V případě rovnoběžného promítání zadá směr promítání reprezentovaný nenulovým vektorem a střed promítání reprezentovaný libovolným vektorem. Pokud zadává promítání středové, směr promítání reprezentuje nulovým vektorem a střed promítání zadá vektorem jeho souřadnic.

Schéma na následující straně ukazuje, jakým způsobem program *projekce* funguje, které funkce potřebuje ke svému běhu a jaké výstupy uživateli zobrazí.

Uživatel v příkazovém okně MATLABu spustí program *projekce* a zadá mu vstupní data – číslo zobrazované plochy, průmětnu, směr promítání, střed promítání.

projekce

→ volá funkci *zadani*, které předá číslo plochy

> *zadani*
>
> → pomocí příkazu `case` vrátí matice *x*, *y* a *z* obsahující souřadnice bodů té plochy, která má v příkazu `case` pořadové číslo zadané uživatelem

→ volá funkci *transformace*, které předá matici reprezentující průmětnu promítání, matice *x*, *y*, *z* obsahující souřadnice bodů promítané plochy, vektor směru promítání a vektor středu promítání

> *transformace*
>
> → volá funkci *vektor*, které předá matici tří bodů reprezentujících průmětnu
>
> > *vektor*
> >
> > → spočítá souřadnice normálového vektoru zadané roviny a vrátí je ve vektoru *n*
>
> → zjistí, zdali průmětna obsahuje počátek soustavy souřadnic; pokud ne, pak zadané objekty posune tak, aby v dané transformaci průmětna obsahovala počátek soustavy souřadnic
>
> → zjistí, zdali je normálový vektor průmětny rovnoběžný s osou z; pokud ne provede otočení kolem osy z (pokud není normálový vektor rovnoběžný s nárysnou $\nu = (xz)$) a pak otočení kolem osy y, aby průmětna v dané transformaci splynula s půdorysnou $\pi = (xy)$
>
> → vrátí transformované souřadnice bodů plochy (matice *x*, *y* a *z*) a směru a středu promítání

→ pokud je směr promítání nulový, volá funkci *stredove* (předá matice *x*, *y*, *z* a střed promítání *S*), jinak volá funkci *rovnobezne* (předá matice *x*, *y*, *z* a směr promítání *s*)

> *rovnobezne / stredove*
>
> → promítne zadaný objekt a vrátí matice *prumx*, *prumy*, *prumz*, které obsahují souřadnice průmětů zadaného objektu

→ vykreslí průmět objektu v rovině

→ volá funkci *zpetnatransformace*, které předá matici reprezentující průmětnu a souřadnice průmětu zadané plochy (matice *prumx*, *prumy*, *prumz*)

> *zpetnatransformace*
>
> → provede inverzní transformace na souřadnice průmětu objektu, než jaké provedla funkce *transformace* (otočení kolem osy y, otočení kolem osy z a posunutí) a vrátí programu matice nových souřadnic průmětu v prostoru

→ vykreslí model situace v prostoru

Obr. 4.3.1: Schéma běhu programu *projekce*

4.4 Reprezentace používaných objektů

Uživatel může díky našim programům promítat plochy, mnohostěny či úsečky v rovnoběžném či středovém promítání. Všechny tyto objekty musíme nějakým způsobem v programu reprezentovat.

Plochu popisujeme jejím parametrickým vyjádřením. MATLAB neumožňuje práci se symbolickými zápisy, proto ji reprezentujeme konečným počtem bodů, jejichž souřadnice ukládáme do matic *x*, *y* a *z*. Jak je získáme? Nejprve vytvoříme pomocné vektory a a *b*, do nichž uložíme konečný počet hodnot parametrů u a v. Tyto hodnoty jsou z intervalů pro parametry u a v.

Poté zavedeme proměnné *u* a *v*. Pokud do vektoru a uložíme k hodnot a do vektoru *b* uložíme l hodnot, pak rozměry matic u a *v* budou $l \times k$. Matice u má v každém svém řádku prvky vektoru a a celkem má l řádků, matice *v* má v každém svém sloupci prvky vektoru *b* a počet sloupců je k. Na místě *ij* v matici u a v matici *v* jsou hodnoty, které dohromady tvoří konkrétní dvojici parametrů u a v. Tato dvojice určí právě jeden bod plochy. Dohromady tedy máme k dispozici $l \times k$ dvojic parametrů a plochu budeme reprezentovat právě tolika body.

Nyní sepíšeme parametrické vyjádření dané plochy. Vzniknou nám matice *x*, *y* a *z*, ve kterých jsou uloženy souřadnice bodu plochy tak, že x-ová souřadnice je v matici *x* na místě *ij*, obdobně najdeme y-ovou a z-ovou souřadnici daného bodu v příslušné matici na místě *ij*. Jsou to souřadnice bodu plochy, jenž je určen dvojicí hodnot parametrů u a v, které jsou v maticích *u* a *v* na pozici *ij*.

Souřadnice těchto bodů ukládáme do matic *x*, *y* a *z*. V řádku / sloupci těchto matic jsou pak souřadnice bodů, které tvoří jednu křivku ze sítě křivek na ploše, tedy u-křivku či v-křivku. (Křivky na ploše též reprezentujeme konečným počtem bodů.) Toto se bude hodit při vykreslování ploch.

Hranaté těleso reprezentujeme pomocí dvou matic. Do jedné matice uložíme souřadnice vrcholů mnohostěnu. Má-li mnohostěn n vrcholů, pak tato matice má n řádků a 3 sloupce. V každém jejím řádku jsou uloženy souřadnice vrcholu mnohostěnu, proto se této matici říká *matice vrcholů*.

Každý vrchol mnohostěnu, který budeme chtít zadat, musíme očíslovat. Druhá matice, která poslouží k reprezentaci mnohostěnu, pak bude v každém řádku obsahovat čísla těch vrcholů, které tvoří jednu stěnu daného tělesa. Zmiňovaná matice se nazývá *matice stěn*. Má-li mnohostěn k stěn, pak jeho matice stěn má k řádků.

Průmětnu zadáme třemi navzájem různými body, které v ní leží. Souřadnice těchto bodů uložíme do matice, která bude reprezentovat průmětnu daného promítání. Směr či střed promítání uložíme taktéž do matice. Jelikož bude jednořádková (tři souřadnice v jednom řádku a třech sloupcích, tedy rozměr matice 1×3), reprezentujeme směr či střed promítání vektorem.

4.5 Implementace programu

V této části se zaměříme na program *projekce* a funkce *transformace*, *rovnobezne* a *stredove*. Popíšeme, jak fungují, a v některých případech připojíme i ukázku zdrojového kódu.

4.5.1 Program *projekce*

V programu *projekce* je implementována hlavní myšlenka celého řešení zadaného problému, jak je patrné již ze schématu na obrázku 4.3.1.

Uživatel jej spustí a na vstupu zadá číslo zobrazované plochy, průmětnu a směr a střed promítání. Průmětnu reprezentujeme třemi různými body, které v ní leží. Jejich souřadnice ukládáme do matice *prum*. Směr a střed promítání reprezentujeme vektory *s* a *S*.

Matice *x*, *y* a *z*, ve kterých jsou uloženy souřadnice bodů zobrazované plochy, získá program díky funkci *zadani*, kterou volá ihned po svém spuštění. Předá jí číslo zobrazované plochy. Funkce *zadani* pak programu *projekce* vrátí matice *x*, *y* a *z*, které náleží ploše s pořadovým číslem, jež zadal uživatel na vstupu jako *cisloplochy*.

Program *projekce* dále volá funkci *transformace*, díky které se transformují souřadnice zadaných objektů (plocha, směr a střed promítání) tak, aby průmětna daného promítání splynula s půdorysnou $\pi = (xy)$.

Po transformaci zadaných objektů program volá funkci *rovnobezne* nebo funkci *stredove*. Pokud uživatel zadal směr promítání jako nulový vektor, program volá funkci *stredove* a promítá středově. Je-li směr promítání nenulový vektor, program volá funkci *rovnobezne*, která zadanou plochu promítne rovnoběžně. Níže můžeme vidět příslušnou část kódu programu *projekce*.

```
if (s(1)==0 && s(2)==0 && s(3)==0)
    [prumx,prumy,prumz] = stredove(x,y,z,S);
else
    [prumx,prumy,prumz] = rovnobezne(x,y,z,s);
end
```
Zdrojový kód 4.5.1: Implementace části programu *projekce*, která řeší volbu promítání

Poté má program *projekce* k dispozici matice souřadnic průmětu bodů plochy. Průmět je v prostoru umístěn v půdorysně, nikoli v uživatelem zadané průmětně, ale je s hledaným průmětem shodný. Ukážeme si, že pro vytvoření 2D výstupu je jednodušší, je-li průmět plochy v půdorysně $\pi = (xy)$, než kdyby ležel v uživatelem zadané průmětně.

MATLAB vytváří 2D výstupy v rovině určené osami x a y. Průmět každého bodu zobrazované plochy má *z*-ovou souřadnici nulovou. Při vykreslování průmětu plochy proto můžeme použít pouze x-ové a y-ové souřadnice zobrazených bodů. Pokud bychom promítali do jiné roviny, než je půdorysna, museli bychom si v ní zavést kartézskou soustavu souřadnic a vyjádřit průměty bodů plochy v této soustavě. Pak bychom při vytvoření 2D obrázku použili tyto souřadnice pro vykreslování.

Ukazuje se tedy, že volba půdorysny jako pevné průmětny pro zobrazování je výhodná nejenom pro samotné promítání objektu, ale i pro zobrazování výsledků.

Jak jsme již zmínili v části 4.4, plochu reprezentujeme konečným počtem bodů, jejichž souřadnice uchováváme v maticích *x*, *y* a *z*. Body, jejichž souřadnice jsou v některém řádku těchto matic, tvoří u-křivku plochy, body ve sloupcích pak v-křivku plochy. V maticích *prumx*, *prumy* a *prumz* jsou pak průměty těchto bodů plochy, v řádcích jsou uloženy souřadnice průmětů u-křivek plochy a ve sloupcích souřadnice průmětů v-křivek plochy. Ve 2D obrázku, který je výstupem programu *projekce*, znázorňujeme průmět plochy v rovině tak, že zobrazíme průměty několika jejích u-křivek a v-křivek. Průměty u-křivek vykreslujeme zeleně, průměty v-křivek zobrazujeme červeně. Implementaci této části programu si čtenář může prohlédnout na zdrojovém kódu 4.5.2.

V poslední části zavolá program *projekce* funkci *zpetnatransformace*. Předá jí matici reprezentující zadanou průmětnu a souřadnice průmětů bodů plochy. Funkce transformuje průmět plochy v prostoru tak, aby ležel v uživatelem zadané průmětně. Provede tedy inverzní transformace, než jaké provedla funkce *transformace*. Poté vrátí programu projekce nové souřadnice průmětu plochy.

```
figure
hold on
plot(prumx(1,:),prumy(1,:),'g','LineWidth',2)
plot(prumx(:,1),prumy(:,1),'r','LineWidth',2)
[p q] = size(prumx);
for k=1:(p/10)
    plot(prumx(10*k,:),prumy(10*k,:),'g','LineWidth',2)
end
for k=1:(q/10)
    plot(prumx(:,10*k),prumy(:,10*k),'r','LineWidth',2)
end
axis equal
```
Zdrojový kód 4.5.2: Implementace vykreslování průmětu plochy v rovině

Posledním krokem programu *projekce* je zobrazení 3D modelu uživatelem zadané situace. Program vykreslí plochu v prostoru (konečný počet u-křivek a v-křivek modré barvy), průmět plochy v zadané průmětně (konečný počet průmětů u-křivek a v-křivek zelené a červené barvy), znázorní zadanou průmětnu (černým čtyřúhelníkem) a vykreslí směr promítání (červená úsečka) či střed promítání (červený bod). Poté program skončí.

4.5.2 Funkce *transformace*

Funkce *transformace* má za úkol přepočítat souřadnice bodů zadané plochy a směru / středu promítání tak, aby v této transformaci průmětna splynula s půdorysnou $\pi = (xy)$.

Funkce dostane na vstupu matici *rov*, ve které jsou uloženy souřadnice tří bodů zadané průmětny. Dále jsou funkci předány matice *x*, *y*, *z* souřadnic bodů plochy a vektory *s* a *S*, ve kterých jsou uloženy souřadnice směru (vektor *s*) a středu promítání (vektor *S*).

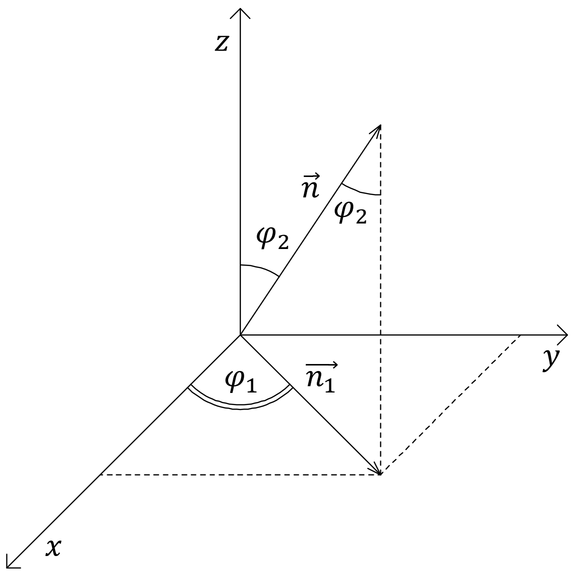
Nejprve spočítáme souřadnice normálového vektoru průmětny (k tomu slouží program *vektor*, který *transformace* zavolá) a uložíme je do vektoru *n*. Naším cílem je transformovat celou situaci v prostoru tak, aby průmětna zadaného promítání splynula s půdorysnou. Po transformaci tedy bude mít normálový vektor průmětny x-ovou a y-ovou souřadnici nulovou, jelikož normálový vektor půdorysny je rovnoběžný se souřadnicovou osou z. Také musíme zajistit, aby transformovaná průmětna obsahovala počátek soustavy souřadnic, jelikož ten v půdorysně leží. Tyto dvě vlastnosti využijeme ke správnému provedení zmíněné transformace.

Nejdříve zjistíme, jestli zadaná průmětna obsahuje počátek soustavy souřadnic. Známe její normálový vektor. Z analytické geometrie víme, že souřadnice normálového vektoru jsou konstanty a, b, c v obecné rovnici roviny $ax + by + cz + d = 0$. Pokud je absolutní člen d této rovnice nulový, pak rovina popsaná takovou obecnou rovnicí obsahuje počátek soustavy souřadnic. Vyjádříme proto d z obecné rovnice roviny, dosadíme souřadnice normálového vektoru zadané průmětny a dále souřadnice jednoho jejího bodu. Takto získáme hodnotu proměnné *konstanta*, která v programu *transformace* reprezentuje právě hodnotu absolutního členu d. Je-li nulový, průmětna obsahuje počátek soustavy souřadnic. Není-li nulový, posuneme průmětnu tak, aby počátek soustavy souřadnic v ní ležel.

Jak dané posunutí určíme? Vezmeme konkrétní bod *A* zadané průmětny, který máme uložen v matici *rov* v prvním řádku. Posunutí pak určíme vektorem $O - A$, kde O je počátek soustavy souřadnic. V tomto posunutí se bod *A* zobrazí na počátek soustavy souřadnic. Ve funkci definujeme matici *T*, která bude maticí tohoto posunutí, a transformujeme souřadnice zadaných objektů tak, že každý z nich touto maticí vynásobíme. Pouze vektor *s* reprezentující směr promítání neposuneme, jelikož v posunutí se vektor zobrazí na rovnoběžný vektor, transformace tohoto objektu by proto neměla smysl. Implementaci této části funkce vidíme na zdrojovém kódu 4.5.3.

```
if not(konstanta==0)
     T = [1 0 0 -rov(1,1);
          0 1 0 -rov(1,2);
          0 0 1 -rov(1,3);
          0 0 0     1];
     novyS = T*S;
     for k=1:p
        for l=1:q
           Q = T*[x(k,l);y(k,l);z(k,l);1];
           plochax(k,l)=Q(1);
           plochay(k,l)=Q(2);
           plochaz(k,l)=Q(3);
        end
     end
end
```
Zdrojový kód 4.5.3: Implementace posunutí zadaných objektů

Nyní již průmětna obsahuje počátek soustavy souřadnic. Zbývá provést transformaci, při níž se normálový vektor průmětny zobrazí na vektor rovnoběžný s osou z. K tomu využijeme otáčení kolem souřadnicových os z a y. Podívejme se na obrázek 4.5.1. Vidíme na něm normálový vektor $\vec{n}$ zadané průmětny. Označme jeho souřadnice $\vec{n} = (n_1; n_2; n_3)$. Dále je v obrázku vyznačen půdorys tohoto vektoru, který označíme $\overrightarrow{n_1}$ a jeho souřadnice jsou $\overrightarrow{n_1} = (n_1; n_2; 0)$.



Obr. 4.5.1: Náčrtek k výpočtu úhlů φ_1 a φ_2

Na obrázku máme vyznačeny úhly φ_1 a φ_2. Úhel φ_1 svírá půdorys $\overrightarrow{n_1}$ normálového vektoru $\vec{n}$ se souřadnicovou osou x, úhel φ_2 svírá normálový vektor $\vec{n}$ a osa z. V otočení kolem osy z o úhel $-\varphi_1$ se normálový vektor průmětny zobrazí na vektor ležící v nárysně $\nu = (xz)$. Pokud dále otočíme normálový vektor průmětny kolem osy y o úhel $-\varphi_2$, zobrazí se na směrový vektor souřadnicové osy z. Díky těmto transformacím tedy zadaná průmětna přejde do polohy, ve které splývá s půdorysnou $\pi = (xy)$.

K výše zmíněným otočením musíme najít jejich matice, proto potřebujeme spočítat hodnoty goniometrických funkcí sinus a kosinus úhlů φ_1 a φ_2. Opět se podívejme na obrázek 4.5.1. Úhel φ_1 je vyznačen v trojúhelníku, jehož strany jsou tvořeny rovnoběžkami s osami x a y a půdorysem normálového vektoru. Tento trojúhelník je pravoúhlý, jelikož osy x a y jsou na sebe kolmé, a vypočítáme z něj hodnoty $\sin\varphi_1$ a $\cos\varphi_1$. Úhel φ_2 můžeme vidět v pravoúhlém trojúhelníku, jehož strany tvoří vektor $\vec{n}$, jeho půdorys $\overrightarrow{n_1}$ a úsečka ležící na rovnoběžce s osou z, která prochází koncovým bodem normálového vektoru $\vec{n}$. Z tohoto trojúhelníku odvodíme hodnoty $\sin\varphi_2$ a $\cos\varphi_2$. Všechny potřebné hodnoty vyjádříme pomocí algebraických výrazů, které tvoří souřadnice normálového vektoru $\vec{n}$. Tyto výrazy pak použijeme v programu při výpočtu potřebných hodnot a napíšeme je do hledaných matic otočení, které v programu označujeme jako *Rz* a *Ry* (rotace kolem osy z a osy y). Pak už stačí vynásobit body plochy, střed / směr promítání těmito maticemi a transformace je dokončena.

Musíme však zmínit speciální případ, který by mohl nastat. Jak jsme již popsali, po posunutí průmětny do polohy, ve které průmětna obsahuje počátek kartézské soustavy souřadnic, provádíme otočení kolem osy z a poté kolem osy y, aby průmětna splynula s půdorysnou. Může se však stát, že otočení kolem osy z neprovedeme. To se děje v případě, kdy normálový vektor zadané průmětny je rovnoběžný s nárysnou $\nu = (xz)$. Potom průmětnu otočíme pouze kolem osy y. Program pak vrátí transformované souřadnice bodů plochy (matice *plochax*, *plochay* a *plochaz*) a směru / středu promítání (vektory *novys* a *novyS*).

Níže si čtenář může prohlédnout část zdrojového kódu funkce transformace, která řeší problém otočení zadaných objektů do polohy, v níž zadaná průmětna splývá s půdorysnou.

```
if not(n(1)==0 && n(2)==0)
    if n(2)==0
         sinfi2 = n(1)/sqrt(n(1)^2 + n(3)^2);
         cosfi2 = n(3)/sqrt(n(1)^2 + n(3)^2);
         Ry = [cosfi2 0 -sinfi2 0;
                  0   1    0    0;
               sinfi2 0  cosfi2 0;
                  0   0    0    1];
         novys = Ry*novys;
         novyS = Ry*novyS;
         for k=1:p
            for l=1:q
                Q = Ry*[plochax(k,l);plochay(k,l);plochaz(k,l);1];
                plochax(k,l)=Q(1);
                plochay(k,l)=Q(2);
                plochaz(k,l)=Q(3);
            end
         end
    else
         cosfi1 = n(1)/sqrt(n(1)^2 + n(2)^2);
         sinfi1 = n(2)/sqrt(n(1)^2 + n(2)^2);
         Rz = [cosfi1   sinfi1 0 0;
              -sinfi1   cosfi1 0 0;
                 0         0   1 0;
                 0         0   0 1];
         sinfi2 = sqrt(n(1)^2 + n(2)^2)/sqrt(n(1)^2 + n(2)^2 + n(3)^2);
         cosfi2 = n(3)/sqrt(n(1)^2 + n(2)^2 + n(3)^2);
         Ry = [cosfi2 0 -sinfi2 0;
                  0   1    0    0;
               sinfi2 0  cosfi2 0;
                  0   0    0    1];
         novys = Ry*Rz*novys;
         novyS = Ry*Rz*novyS;
         for k=1:p
            for l=1:q
                Q = Ry*Rz*[plochax(k,l);plochay(k,l);plochaz(k,l);1];
                plochax(k,l)=Q(1);
                plochay(k,l)=Q(2);
                plochaz(k,l)=Q(3);
            end

         end
    end
end
```

Zdrojový kód 4.5.4: Implementace otáčení zadaných objektů

Analogicky byl napsán i program *zpetnatransformace*. Provádí inverzní transformace k těm, které provádí program *transformace*. Nejdříve otočí všechny objekty kolem osy y o úhel φ_2, poté otočí objekty kolem osy z o úhel φ_1 a nakonec vše posune o vektor $A - O$, kde A je bod uživatelem zadané průmětny (v matici reprezentující průmětnu je v prvním řádku) a O je počátek soustavy souřadnic. Vrátí v maticích *plochax*, *plochay* a *plochaz*.

4.5.3 Funkce *rovnobezne* a *stredove*

Obě funkce mají za úkol promítnout objekt zadaný souřadnicemi, které jsou funkcím předány v maticích *x*, *y* a *z*. Funkce *rovnobezne* má na vstupu ještě vektor souřadnic *s* směru promítání, funkce *stredove* pak souřadnice středu promítání uložené ve vektoru *S*.

Obě funkce mají velmi krátký kód díky tomu, že jsme si předem spočítali, jak vypadají rovnice daných promítání. Ve třetí kapitole této práce jsme popsali postup výpočtu, kterým získáme vzorec na zobrazení bodu v rovnoběžném či středovém promítání na půdorysnu. Tyto rovnice jsou součástí kódu zmíněných funkcí.

Při hledání průmětu bodu v daném promítání by bylo možné postupovat tak, jak jsme popsali ve druhé kapitole. Určili bychom promítací přímku bodu a hledali její průsečík s průmětnou. Při množství zobrazovaných bodů by se však zvýšila časová složitost programu. Proto jsme zvolili tento jednoduchý postup, kdy jsme ručně odvodili vzorce pro výpočet souřadnic průmětu bodu a zahrnuli je do kódu. Obě funkce si čtenář může prohlédnout ve zdrojových kódech 4.5.5 a 4.5.6.

```
function[prumx,prumy,prumz]=rovnobezne(x,y,z,s)
[p q] = size(x);
prumx = zeros(p,q);
prumy = zeros(p,q);
prumz = zeros(p,q);
for k=1:p
    for l=1:q
        prumx(k,l) = x(k,l) - z(k,l)*s(1)/s(3);
        prumy(k,l) = y(k,l) - z(k,l)*s(2)/s(3);
    end
end
end
```

Zdrojový kód 4.5.5: Kód funkce *rovnobezne*

```
function[prumx,prumy,prumz]=stredove(x,y,z,S)
[p q] = size(x);
prumx = zeros(p,q);
prumy = zeros(p,q);
prumz = zeros(p,q);
for k=1:p
    for l=1:q
           prumx(k,l) = x(k,l)+z(k,l)*(x(k,l)-S(1))/(S(3)-z(k,l));
           prumy(k,l) = y(k,l)+z(k,l)*(y(k,l)-S(2))/(S(3)-z(k,l));
    end
end
end
```

Zdrojový kód 4.5.6: Kód funkce *stredove*

4.6 Řešení viditelnosti

Dozvěděli jsme se, jakým způsobem lze napsat programy a pomocné funkce, které promítnou zadanou plochu. Při vykreslování zobrazujeme průměty křivek na ploše, které patří do sítě u-křivek a v-křivek plochy. V druhé kapitole jsme se zmínili, že ne vždy je v daném promítání vidět celá křivka plochy, někdy je vidět pouze její část nebo není viditelná celá křivka. Průmět neviditelné části křivky znázorňujeme čárkovanou čarou.

Program *projekce* neřeší viditelnost křivek na ploše. K řešení viditelnosti bychom potřebovali najít skutečný obrys plochy. V MATLABu ovšem plochu reprezentujeme konečným počtem bodů, nikoli symbolicky, proto by hledání obrysu bylo komplikované. Buď bychom museli hledat obrys numericky (numericky počítat derivace a hledat body, v nichž jejich tečné roviny jsou zároveň promítacími rovinami daného promítání), nebo bychom museli do kódu programu zahrnout předpisy derivací ploch, se kterými počítáme. Plochu však zadává uživatel, takže i toto řešení by bylo problematické.

Rozhodli jsme se ovšem v této práci ukázat, jak by se viditelnost mohla řešit, známe-li dopředu předpis plochy, kterou zobrazujeme. Implementovali jsme zvlášť programy *hprov* a *hpstred*, které řeší průmět hyperbolického paraboloidu v rovnoběžném (*hprov*) a středovém promítání (*hpstred*) na půdorysnu. Kromě průmětu plochy určí i viditelnost zobrazovaných křivek plochy vůči jejímu skutečnému obrysu. V následujících odstavcích popíšeme, jak řeší viditelnost program *hprov*. (Program *hpstred* postupuje analogicky.)

Mějme dán v prostoru hyperbolický paraboloid $\kappa(u,v) = [u; v; uv], u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$. V daném promítání pak dokážeme spočítat obrys této plochy. Výpočet jsme provedli ve třetí kapitole v částech 3.4 a 3.5. Známe tedy parametrické vyjádření skutečného obrysu této plochy. Skutečný obrys tedy v programu reprezentujeme jako samostatnou křivku a jeho souřadnice ukládáme do matic *obrysx*, *obrysy* a *obrysz*.

K vyřešení viditelnosti bodů plochy si vytvoříme matici (v programu pod názvem *maticeviditelnosti*), která má stejné rozměry jako matice x, y a z, do kterých ukládáme příslušné souřadnice bodů hyperbolického paraboloidu. Viditelnost tedy řešíme pro konečný počet bodů, jimiž plochu reprezentujeme. Prvky matice viditelnosti budou nuly nebo jedničky. Jsou-li souřadnice bodu plochy v maticích x, y a z na místě *ij*, pak v matici viditelnosti bude na místě *ij* číslo 1, pokud je tento bod plochy v daném promítání vidět. V opačném případě bude na místě *ij* číslo 0.

Při inicializaci je matice viditelnosti nulová. Poté vezmeme jeden bod plochy, označíme jej A, a spočítáme, jestli je v daném promítání viditelný nebo ne. Tento výpočet byl proveden ve třetí kapitole v částech 3.4 a 3.5. Zjistíme tak, jestli v matici viditelnosti na místě *ij*, které odpovídá bodu A v maticích x, y a z, má být číslo 1 nebo číslo 0.

Dále využijeme znalostí z druhé kapitoly. Dozvěděli jsme se, že skutečný obrys plochy rozdělí křivku plochy na části viditelné a neviditelné. Mezními body těchto části jsou právě body skutečného obrysu plochy. Skutečný obrys plochy takto rozdělí každou křivku plochy na části viditelné a neviditelné. Můžeme tedy říci, že celá plocha je rozdělena na viditelné a neviditelné části. Mezí viditelnosti je právě skutečný obrys plochy.

Skutečný obrys plochy byl spočítán tak, že jsme parametr v vyjádřili pomocí parametru u. Pro konkrétní hodnotu parametru u_0 tudíž známe hodnotu parametru v_0, která odpovídá bodu na skutečném obrysu plochy. Stejné hodnotě parametru u_0 navíc odpovídá právě jedna v-křivka plochy. Tato v-křivka protne skutečný obrys plochy tehdy, když je parametr v roven číslu v_0. Číslo v_0 tedy rozdělí v-křivku plochy na dvě části, z nichž jedna je viditelná a druhá neviditelná.

Matici viditelnosti budeme postupně procházet po sloupcích. Ve sloupcích máme uložené souřadnice bodů v-křivky plochy. Porovnáme hodnoty parametru v bodů dané

v-křivky plochy, která je v právě procházeném sloupci, s hodnotou v_0 odpovídající bodu skutečného obrysu, v němž zkoumaná v-křivka skutečný obrys protíná.

Mohou nastat dva případy – body s menší hodnotou parametru v oproti číslu v_0 jsou vidět, nebo body s větší hodnotou parametru v oproti číslu v_0 jsou vidět. Jak rozlišíme, který z těchto dvou případů nastává?

Využijeme toho, že víme, zda je na ploše v daném promítání vidět bod A nebo není. Část v-křivky, která leží ve stejné části plochy jako bod A, je viditelná právě tehdy, když je viditelný i bod A. Díky tomu rozlišíme, která část v-křivky je vidět a která vidět není.

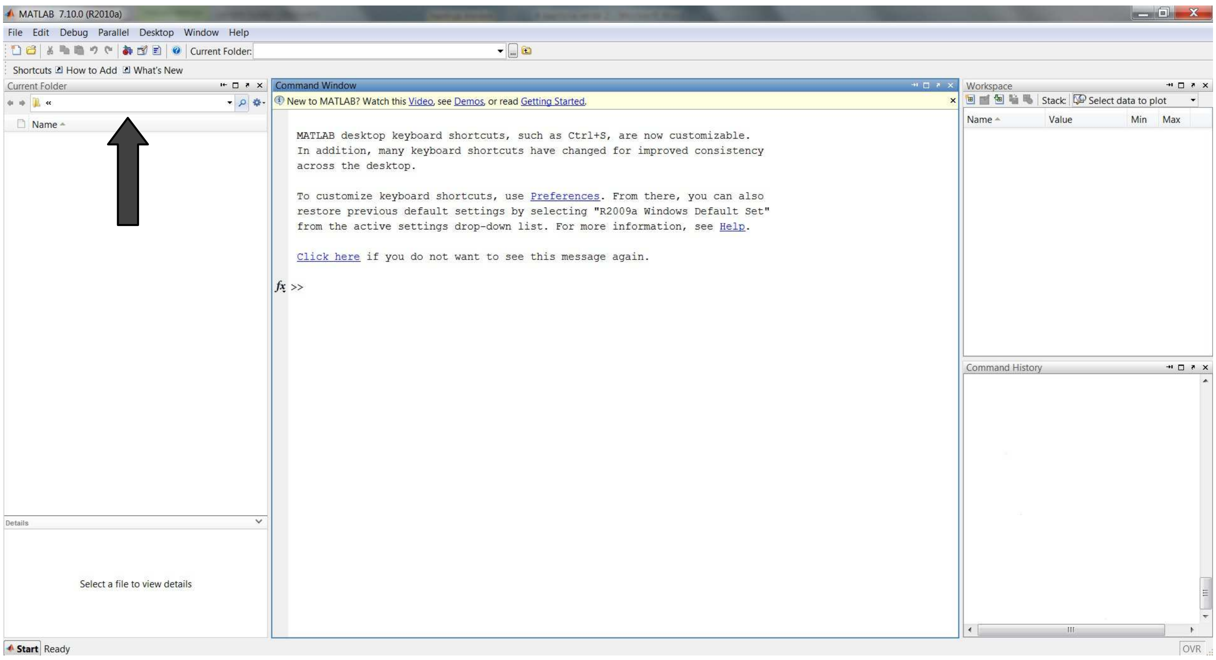
V matici viditelnosti změníme hodnotu 0 na 1 na místech, které odpovídají bodům viditelné části plochy. Procházíme tedy matici po sloupcích (procházíme body v-křivky), porovnáme hodnoty v a v_0, abychom zjistili, ve které části se bod v-křivky nachází. Pokud je ve stejné části plochy jako bod A, bude na daném místě v matici viditelnosti stejná hodnota (0 nebo 1) jako je na místě příslušném bodu A. Nachází-li se v opačné části plochy než bod A, bude jemu příslušná hodnota v matici viditelnosti opačná.

Tímto způsobem nám vzniknou v matici viditelnosti 0 a 1. Viditelné body zobrazované u-křivky / v-křivky spojíme plnou čarou, neviditelné body čárkovanou čarou.

4.7 Spouštění programů a zadávání dat

V poslední části čtvrté kapitoly čtenář najde návod, jak spustit programy napsané v rámci této diplomové práce a jak jim zadat vstupní data.

Veškeré programy a funkce najde čtenář na přiloženém CD ve složce mfiles. Tuto složku zkopírujte na pevný disk počítače a poté spusťte MATLAB. V levé části vedle příkazového okna MATLABu vidíme panel s názvem CurrentFolder, viz obrázek 4.7.1.



Obr. 4.7.1: Programovací prostředí MATLAB

Nyní je třeba MATLABu zadat cestu ke složce mfiles, v níž máme uložené všechny programy. Uživatel tedy zadá cestu k této složce v okně vyznačeném šipkou na obrázku 4.7.1.

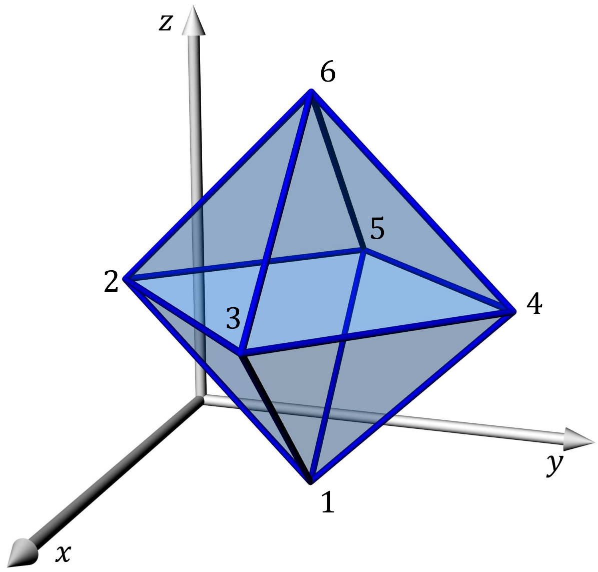
Poté se v levé části programovacího prostředí MATLAB objeví soupis všech funkcí, které ve složce mfiles jsou a nyní s nimi můžeme pracovat.

4.7.1 Program *mnohosten*

Pokud chce uživatel promítnout hranaté těleso, tedy mnohostěn, spustí program *mnohosten*. Při spouštění zároveň zadá vstupní data, která ale nejdříve musíme připravit.

Nejdříve umístíme těleso, které chceme zobrazit, do kartézské soustavy souřadnic, vrcholy tohoto tělesa označíme čísly (1, 2, 3…) a poznamenáme si jejich souřadnice. Tyto souřadnice napíšeme do matice v příkazovém okně MATLABu. Jméno matice může uživatel zvolit libovolné, navrhujeme použít název *vrcholy*.

Uveďme konkrétní příklad. Na následujícím obrázku 4.7.2 vidíme osmistěn. Jeho vrcholy byly očíslovány přirozenými čísly od jedné do šesti a u každého jsme si poznamenali jeho souřadnice.



$$1 = [3; 3; 0]$$

$$2 = [3; 0; 3]$$

$$3 = [6; 3; 3]$$

$$4 = [3; 6; 3]$$

$$5 = [0; 3; 3]$$

$$6 = [3; 3; 6]$$

Obr. 4.7.2: Osmistěn

Nyní můžeme zapsat všechny vrcholy osmistěnu do matice *vrcholy*. Do příkazového okna MATLABu napíšeme název matice, rovnítko, poté napíšeme do hranatých závorek souřadnice všech šesti vrcholů osmistěnu. Souřadnice jednoho bodu oddělujeme mezerou, body mezi sebou oddělujeme středníkem a píšeme je v tom pořadí, jak jsme očíslovali vrcholy osmistěnu. Příkaz tedy vypadá takto:

```
vrcholy = [3 3 0;3 0 3;6 3 3;3 6 3;0 3 3;3 3 6]
```

Máme-li příkaz napsaný, zmáčkneme klávesu enter. Tímto zavedeme v MATLABu proměnnou *vrcholy* datového typu matice.

Kromě matice vrcholů potřebujeme ještě MATLABu zadat matici stěn daného tělesa. V řádcích matice stěn jsou čísla vrcholů, které spolu tvoří jednu stěnu. V případě osmistěnu tedy bude mít matice stěn osm řádků, protože toto těleso má osm stěn. Čísla píšeme do řádku tak, jak jdou za sebou na obvodu stěny. Matici pojmenujeme *steny* a zadáme ji takto: napíšeme název matice, rovnítko a hranaté závorky. Do hranatých závorek napíšeme čísla stěn tělesa. Čísla jedné stěny oddělujeme mezerami, stěny mezi sebou oddělujeme středníkem. Příkaz tedy vypadá takto:

```
steny = [1 3 2;1 4 3;1 5 4;1 2 5;6 2 3;6 3 4;6 4 5;6 5 2]
```

Po napsání příkazu zmáčkneme enter, čímž vytvoříme proměnnou *steny*.

Nyní již máme připravené těleso k zobrazení a zbývá jen připravit data, díky kterým zadáme promítání, v němž těleso zobrazíme.

Průmětnu zadáme třemi různými body, které v ní leží. Jejich souřadnice sepíšeme do matice, kterou pojmenujeme *prumetna*. Matici *prumetna* zadáme obdobným způsobem jako matici vrcholů zobrazovaného tělesa. Napíšeme její název, rovnítko a do hranatých závorek vepíšeme souřadnice bodů průmětny. Souřadnice jednoho bodu oddělujeme mezerou, body mezi sebou oddělujeme středníkem. Uveďme si příklad:

```
prumetna = [1 0 0;0 1 0;0 0 1]
```

Posledním krokem před spuštěním programu *mnohosten* je zadání směru a středu promítání. Směr promítání napíšeme do vektoru s názvem *smer*, střed promítání bude reprezentován vektorem *stred*. Zadávání obou vektorů je analogické jako zadávání matic. Napíšeme název vektoru, rovnítko a do hranatých závorek napíšeme souřadnice směru / středu promítání.

Chceme-li promítat rovnoběžně, zadáme směr promítání jeho souřadnicemi (aspoň jedna musí být nenulová) a souřadnice středu promítání zadáme libovolné. Chceme-li promítat středově, souřadnice směru promítání zadáme všechny nulové a do vektoru *stred* napíšeme souřadnice středu promítání.

Program rozlišuje středové a rovnoběžné promítání podle toho, jsou-li ve vektoru *smer* všechny souřadnice nulové, nebo je alespoň jedna nenulová. Pokud jsou všechny nulové, promítne objekt středově, pokud je alespoň jedna nenulová, promítne objekt rovnoběžně.

Uveďme si příklad, jak zadat středové promítání. Do vektoru *smer* napíšeme samé nuly, do vektoru *stred* napíšeme souřadnice středu promítání. Příkazy, které napíšeme v příkazovém okně MATLABu, tedy vypadají takto:

```
smer = [0 0 0]
stred = [10 10 10]
```

Chceme-li promítat rovnoběžně, zadáme souřadnice směru promítání a souřadnice středu promítání zvolíme libovolné.

```
smer = [2 3 5]
stred = [12 1 8]
```

Tímto jsme připravili data (matice *vrcholy*, *steny*, *prumetna*, *smer*, *stred*), která zadáme programu *mnohosten*. Program spustíme tak, že do příkazového okna MATLABu napíšeme jeho název a do kulatých závorek vložíme data ve správném pořadí. Toto pořadí nám napoví sám MATLAB. Jakmile napíšeme slovo *mnohosten* a levou kulatou závorku, objeví se okénko jako na obrázku 4.7.3. Nápověda pro průmětnu je daná slovem *prum*, pro směr promítání malým *s* a pro střed promítáním velkým *S*. Data tedy zadáváme v pořadí *vrcholy*, *steny*, *prumetna*, *smer*, *stred*.

Obr. 4.7.3: Nápověda k programu *mnohosten*

Máme-li tedy připravená data, která zadáme programu *mnohosten*, spustíme jej napsáním příkazu v příkazovém okně MATLABu.

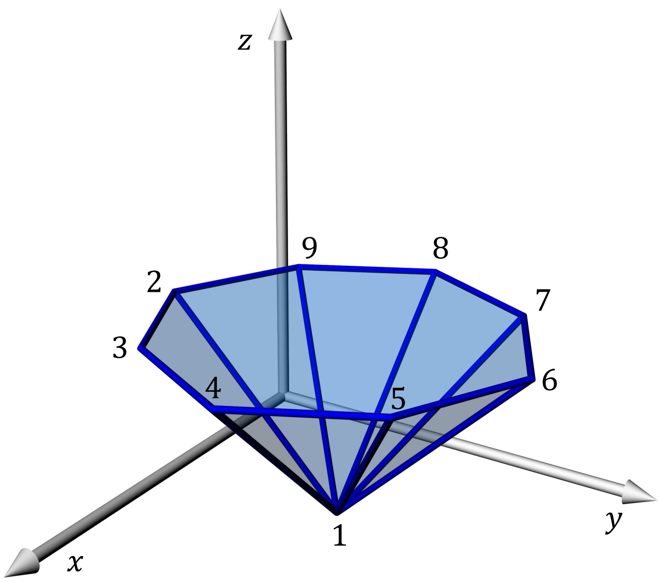
```
mnohosten(vrcholy,steny,prumetna,smer,stred)
```

Po stisknutí tlačítka enter se na obrazovce objeví dva výstupy programu. Prvním je průmět tělesa v rovině v zadaném promítání, druhým výstupem je model zadané situace v prostoru, na kterém vidíme těleso umístěné v prostoru, jeho průmět v zadané průmětně a střed či směr promítání. Střed / směr promítání je vyznačen bodem / úsečkou červené barvy.

Shrňme si celý postup do několika kroků.

- Umístíme těleso do kartézské soustavy souřadnic.
- Očíslujeme jeho vrcholy a poznamenáme si jejich souřadnice.
- Souřadnice vrcholů tělesa napíšeme do matice *vrcholy*.
- Zadáme MATLABu matici *steny*, která obsahuje čísla vrcholů tvořící stěny daného tělesa.
- Zadáme průmětnu zvoleného promítání, dále střed a směr promítání.
- Spustíme program *mnohosten*.

Při promítání těles dodržujeme výše popsaný postup. Musíme však uživatele upozornit na speciální případ, který může nastat. Představme si, že potřebujeme promítnout osmiboký jehlan, který vidíme na obrázku 4.7.4.



Obr. 4.7.4: Osmiboký jehlan

$1 = [3; 3; 0]$

$2 = [3; 0; 3]$

$3 = [5; 1; 3]$

$4 = [6; 3; 3]$

$5 = [5; 5; 3]$

$6 = [3; 6; 3]$

$7 = [1; 5; 3]$

$8 = [0; 3; 3]$

$9 = [1; 1; 3]$

Zadávání matice *vrcholy* pro tento jehlan bude analogické jako pro osmistěn. Problém však nastane u matice *steny*, protože jehlan je tvořen osmi stěnami o třech vrcholech a jednou stěnou o osmi vrcholech. Kdybychom zadali matici steny pro tento jehlan, jak jsme popsali výše, nebyl by v každém řádku stejný počet prvků, což MATLAB nepřipouští.

Matice *steny* musí mít v MATLABu rozměry $m \times n$, kde m je počet stěn tělesa a n je počet vrcholů té stěny, která je tvořena nejvíce vrcholy daného tělesa. V našem případě má tedy matice stěny rozměry 9×8, jelikož zobrazovaný jehlan má celkem devět vrcholů a podstavu tvoří osm z nich. Boční stěny jehlanu jsou tvořeny pouze třemi vrcholy.

Jak tedy zadat matici *steny* pro toto těleso? Potřebujeme, aby v každém řádku matice bylo osm prvků. Má-li nějaká stěna méně vrcholů, napíšeme do řádku matice její vrcholy vícekrát – budeme opakovat zadávání vrcholů stěny v tom pořadí, v jakém jsou na obvodu dané stěny.

Ukažme si, jak bude vypadat řádek matice pro stěnu tvořenou vrcholy 1, 9 a 2. Do řádku napíšeme tato čísla a v tomto pořadí je vepíšeme znovu tolikrát, aby celkový počet prvků v řádku byl 8. Příslušný řádek tedy bude vypadat takto:

```
steny = […;1 9 2 1 9 2 1 9;…]
```

Čtenář si může představit, jako bychom procházeli obvod dané stěny tolikrát, než dosáhneme potřebného počtu vrcholů. Výše jsme ukázali, jak vypadá jeden řádek dané matice, nyní se podívejme, jak napíšeme celý příkaz. Nejdříve vypíšeme podstavu jehlanu a poté všechny jeho boční stěny.

```
steny = [2 3 4 5 6 7 8 9;1 2 3 1 2 3 1 2;1 3 4 1 3 4 1 3;1 4 5 1 4 5 1 4;1
5 6 1 5 6 1 5;1 6 7 1 6 7 1 6;1 7 8 1 7 8 1 7;1 8 9 1 8 9 1 8;1 9 2 1 9 2 1
9]
```

Musíme si tedy dávat pozor, zadáváme-li tělesa, jejichž stěny nemají stejný počet vrcholů. Pak matice *steny* má tolik prvků v řádku, kolik má stěna s největším počtem vrcholů. Stěny s menším počtem vrcholů zadáváme tak, že příslušná čísla těchto vrcholů zadáváme opakovaně v daném pořadí, dokud nedosáhneme potřebného počtu vrcholů.

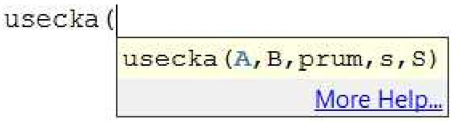
K programu *mnohosten* ještě dodejme, že ve speciálním případě může zobrazit i mnohoúhelník. Jeho vrcholy očíslujeme, napíšeme jejich souřadnice do matice *vrcholy* a matice *steny* bude v tomto případě jednořádková – bude obsahovat čísla vrcholů mnohoúhelníku v daném pořadí, jak za sebou následují na obvodu mnohoúhelníku.

4.7.2 Program *usecka*

V programu *usecka* je zadávání jednodušší. Úsečku reprezentujeme pomocí souřadnic jejích krajních bodů. Chceme-li promítnout úsečku v prostoru, nejprve ji umístíme do kartézské soustavy souřadnic, abychom mohli zapsat souřadnice jejích krajních bodů, označme je A a B. V příkazovém okně MATLABu pak vytvoříme proměnné *A* a *B*, což budou vektory obsahující souřadnice krajních bodů zobrazované úsečky. Zadávání je analogické jako v předchozích případech – napíšeme název vektoru, rovnítko a do hranatých závorek souřadnice bodu oddělené mezerami. Příkazy proto vypadají například takto:

```
A = [3 3 0]
B = [0 7 9]
```

Poté zadáme MATLABu průmětnu, směr a střed daného promítání stejným způsobem, jako ji zadáváme před spouštěním programu *mnohosten*. Nakonec spustíme program *usecka* analogicky jako program *mnohosten*. Napíšeme do příkazového okna slovo *usecka* a do kulatých závorek vepíšeme vstupní data. MATLAB nám po zapsání názvu programu a levé závorky opět zobrazí nápovědu, kterou si můžeme prohlédnout na obrázku 4.7.5.



Obr. 4.7.5: Nápověda k programu *usecka*

Vstupní data tedy vkládáme v pořadí: první krajní bod, druhý krajní bod, matice reprezentující průmětnu, vektor směru promítání, vektor středu promítání. Zachováme-li názvy matic průmětny a středu a směru promítání jako u programu *mnohosten*, bude příkaz, který spustí program *usecka*, vypadat takto:

```
usecka(A,B,prumetna,smer,stred)
```

Program *usecka* opět zobrazí dva výstupy – průmět úsečky a model situace v prostoru.

4.7.3 Program *projekce*

Program *projekce* má za úkol promítat plochy. MATLAB neumožňuje pracovat se symbolickým zápisem ploch, reprezentujeme je tedy konečným počtem bodů a jejich souřadnice ukládáme do matic x, y a z. Ukážeme si, jak připravit data před spuštěním programu a jak program spustit.

Plochu, kterou chce uživatel zobrazit, nejprve umístíme do kartézské soustavy souřadnic a spočítáme její parametrické vyjádření. Pro některé typy ploch jsme ukázali návod v první kapitole, čtenář jej může použít jako inspiraci. Představme si, že chceme zadat plochu, kterou jsme počítali v příkladu 1.5.2. Omezíme se však pouze na tři její závity, parametr v tedy neprobíhá všechna reálná čísla, ale pouze interval $\langle 0; 6\pi\rangle$.

$$\kappa(u,v) = \left[(4+\sin u)\cos v\,; (4+\sin u)\sin v\,; \cos u + \frac{4}{\pi}v\right], u \in \langle 0; 2\pi\rangle, v \in \langle 0; 6\pi\rangle$$

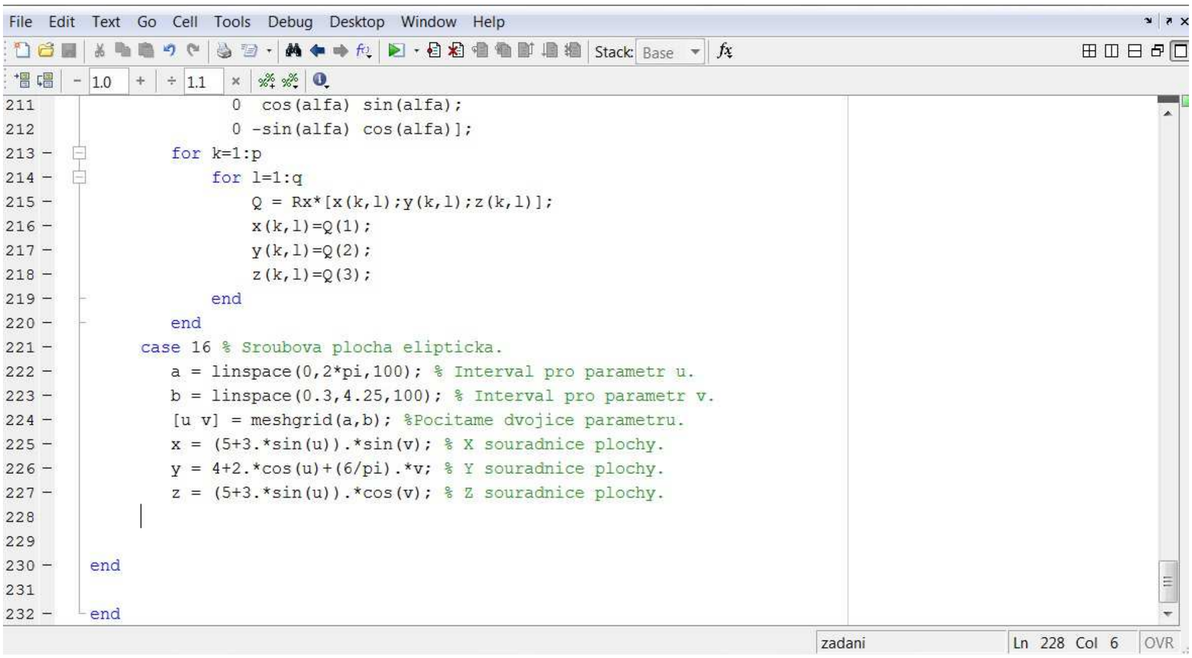
Parametrické vyjádření budeme vepisovat podle jistého schématu do funkce *zadani*. Tato funkce je součástí běhu programu *projekce* a je to jediná část, kterou uživatel může měnit. (Do ostatních funkcí doporučujeme nezasahovat.) V této funkci jsou již některé plochy předdefinovány – kulová plocha, válcová plocha, přímý kruhový konoid atp. Uživatel však může přidávat další plochy.

Do funkce *zadani* okopírujte následující zdrojový kód 4.7.1.

```
case cisloplochy % Nazev plochy.
        a = linspace(mez1,mez2,pocetbodu); % Interval pro parametr u.
        b = linspace(mez1,mez2,pocetbodu); % Interval pro parametr v.
        [u v] = meshgrid(a,b); % Tvorime matice parametru u a v.
        x = predpis pro x-ovou souradnici;
        y = predpis pro y-ovou souradnici;
        z = predpis pro z-ovou souradnici;
```
Zdrojový kód 4.7.1: Šablona pro reprezentaci uživatelem vkládané plochy

Kód funkce *zadani* končí dvěma příkazy `end`. Výše uvedenou šablonu 4.7.1 vložíme na prázdný řádek před těmito dvěma příkazy. Tento řádek (ve stávajícím kódu má číslo `228`) můžeme vidět na obrázku 4.7.6, je zde vyznačený i kurzor.

Máme-li kód zkopírovaný, stačí pouze pozměnit několik údajů. Místo `cisloplochy` napíšeme číslo, které odpovídá pořadí plochy v této funkci. Ve funkci je předdefinováno 16 ploch, proto další plocha bude mít číslo `17`.



Obr. 4.7.6: Náhled funkce *zadani*

V řádku `a = linspace(mez1,mez2,pocetbodu);` přepíšeme údaje příkazu `linspace` tak, aby odpovídaly intervalu pro parametr u zobrazované plochy. Místo `mez1` napíšeme `0`, místo `mez2` napíšeme `2*pi`. Nakonec místo `pocetbodu` napíšeme přirozené číslo, jež udává počet bodů, kterými aproximujeme u-křivku plochy. Čím větší číslo napíšeme, tím oblejší se bude plocha zdát na obrázku. Doporučujeme uživateli vkládat číslo `100`. Řádek tedy bude ve tvaru:

```
a = linspace(0,2*pi,100);
```

Obdobným způsobem přepíšeme řádek `b = linspace(mez1,mez2,pocetbodu);` tak, aby odpovídal údajům pro parametr v na zobrazované ploše. Výsledný příkaz pak vypadá takto:

```
b = linspace(0,6*pi,100);
```

Další dva řádky okopírovaného kódu necháme ve tvaru, v jakém jsou napsány. Díky nim funkce vytvoří matice parametrů u a v, které mají na místech ij hodnotu parametru bodu plochy, který pak bude mít souřadnice na místě ij v maticích x, y a z.

Zbývá tedy zapsat předpisy pro jednotlivé souřadnice bodů plochy. Přepíšeme tedy parametrické vyjádření zobrazované plochy v takovém tvaru, v jakém se v MATLABu předpisy ploch zapisují.

V tabulce 4.7.1 najde čtenář přehled značek, které odpovídají matematickým operacím. Znak pro násobení a dělení matic po prvcích funguje i v případě, že zadáváme násobení / dělení matice skalárem. Pak všechny prvky výsledné matice jsou tímto skalárem vynásobeny / vyděleny. Při zadávání parametrických vyjádření ploch budeme potřebovat právě tyto dvě operace násobení / dělení. Ať už budeme násobit / dělit matice mezi sebou po prvcích, nebo každý prvek matice skalárem, zadáme toto násobení / dělení stejným znakem.

Funkce sinus a kosinus zadáváme `sin(…)` a `cos(…)` a místo teček vepíšeme argument. Je-li uvnitř funkce `sin` matice, je každý prvek této matice dosazen do funkce sinus a výsledkem je opět matice. Nyní přejdeme k zápisu souřadnic bodů plochy.

znak operace	popis operace
`+`	sčítání
`-`	odčítání
`.*`	násobení matic – výsledná matice má na místě *ij* součin prvků, které jsou na místě *ij* v původních maticích
`.^q`	mocnina - výsledná matice má na místě *ij* prvky, které jsou na místě *ij* v původních maticích, umocněné na číslo *q*
`./`	dělení matic – výsledná matice má na místě *ij* podíl prvků, které jsou na místě *ij* v původních maticích

Tabulka 4.7.1: Početní operace v MATLABu

Nejprve zapíšeme x-ové souřadnice plochy. Musíme proto převést matematický zápis $(4+\sin u)\cos v$ do tvaru, ve kterém počítá MATLAB. Všechny operace x-ové souřadnice bodů plochy zapíšeme dle tabulky uvedené výše.

V řádku `x = predpis pro x-ovou souradnici;` nahradíme slovní nápovědu předpisem pro x-ovou souřadnici plochy. Bude tedy vypadat následujícím způsobem:

```
x = (4+sin(u)).*cos(v);
```

Obdobně zapíšeme i předpisy pro y-ovou a z-ovou souřadnici bodů plochy. Řádky kódu pak mají tvar:

```
y = (4+sin(u)).*sin(v);
z = cos(u)+(4./pi).*v;
```

Na závěr pak doporučujeme uživateli poznamenat si za číslo plochy i její název, tedy nahradit slova `Nazev plochy` slovy `Otevrena cyklicka sroubova plocha`.

Výsledný kód pro přidání plochy do funkce *zadani* pak vypadá jako zdrojový kód 4.7.2.

```
case 17 % Otevrena cyklicka sroubova plocha.
        a = linspace(0,2*pi,100); % Interval pro parametr u.
        b = linspace(0,6*pi,100); % Interval pro parametr v.
        [u v] = meshgrid(a,b); % Tvorime matice parametru u a v.
        x = (4+sin(u)).*cos(v);
        y = (4+sin(u)).*sin(v);
        z = cos(u)+(4./pi).*v;
```

Zdrojový kód 4.7.2: Kód pro uživatelem přidanou šroubovou plochu z př. 1.5.2

Nyní uložíme funkci *zadani* a připravíme si data reprezentující průmětnu, směr a střed promítání. Dodržujeme stejný postup jako pro program *mnohosten*. Do matice *prumetna* uložíme souřadnice tří různých bodů, které v průmětně leží, do vektoru *smer* uložíme souřadnice směru promítání (nenulové pro rovnoběžné promítání, nulové v případě středového promítání) a do vektoru *stred* uložíme souřadnice středu promítání.

Příklad příkazů, které můžeme v příkazovém okně MATLABu zadat:

```
prumetna = [0 0 1;0 1 0;1 1 0]
smer = [0 0 0]
stred = [19 10 30]
```

Poté spustíme program projekce. Do příkazového okna MATLABu napíšeme slovo projekce a do kulatých závorek zadáme číslo plochy, průmětnu, směr a střed promítání. Po napsání levé kulaté závorky MATLAB opět zobrazí nápovědu jako na obrázku 4.7.7.

Obr. 4.7.7: Nápověda k programu *projekce*

Příkaz, díky kterému spustíme program *projekce*, má proto tvar:

```
projekce(17,prumetna,smer,stred)
```

Program po stisknutí tlačítka enter zobrazí 2D i 3D výstup – průmět plochy v rovině (příloha B obr. B.8) a model celé situace v prostoru. Plochu reprezentujeme deseti tisíci body (matice x, y a z mají rozměry 100×100), což není tolik, aby program nemohl zobrazovat výsledky v reálném čase. Cílem této práce bylo implementovat v MATLABu programové prototypy, jež promítají zadané objekty, efektivitou programu při obrovském množství vstupních dat se nezabýváme.

4.7.4 Funkce *bodrp, bodsp, hprov, hpstred*

Ve třetí kapitole se zmiňujeme, že některé obrázky byly vygenerovány funkcemi *bodrp*, *bodsp*, *hprov* či *hpstred*. Byly napsány zvlášť jako speciální případy, ovšem jejich spouštění je analogické jako v předchozích případech. Všechny čtyři funkce mají pevnou průmětnu, kterou uživatel nemůže měnit. Funkce promítají zadané objekty do půdorysny $\pi = (xy)$.

Funkci *bodrp* spouštíme, pokud promítáme bod, označme jej A, v rovnoběžném promítání. V příkazovém okně MATLABu zavedeme vektor A, do něhož uložíme souřadnice bodu A. Dále zavedeme vektor *smer*, který reprezentuje směr promítání. Pak stačí napsat příkaz `bodrp(A,smer)` a zmáčknout enter. Do příkazovém okna MATLABu tedy postupně zadáme např. tyto příkazy:

```
A = [4 8 7]
smer = [-1 2 3]
bodrp(A,smer)
```

Funkci bodsp spouštíme, pokud ve středovém promítání promítáme bod A. V příkazovém okně MATLABu jej zadáme jeho souřadnicemi, dále do vektoru *stred* uložíme souřadnice středu promítání a spustíme funkci příkazem `bodsp(A,stred)`.

Funkce *hprov* a *hpstred* promítají pevně zadaný hyperbolický paraboloid na půdorysnu v pevně zvolených promítáních – funkce *hprov* v rovnoběžném promítání, funkce *hpstred* ve středovém promítání. Obě promítání odpovídají těm, které jsou zadány v částech 3.4 a 3.5 třetí kapitoly. Funkce spustíme tak, že v příkazovém okně MATLABu napíšeme jejich název a stiskneme enter. Funkce vygenerují 2D obrázek průmětu hyperbolického paraboloidu a 3D model celé situace.

4.8 Závěr čtvrté kapitoly

Ve čtvrté kapitole diplomové práce jsme podali čtenáři informaci o běhu některých programů a funkcí, které v rámci práce vznikly. Taktéž jsme popsali, jak programy spouštět a zadávat jim vstupní data.

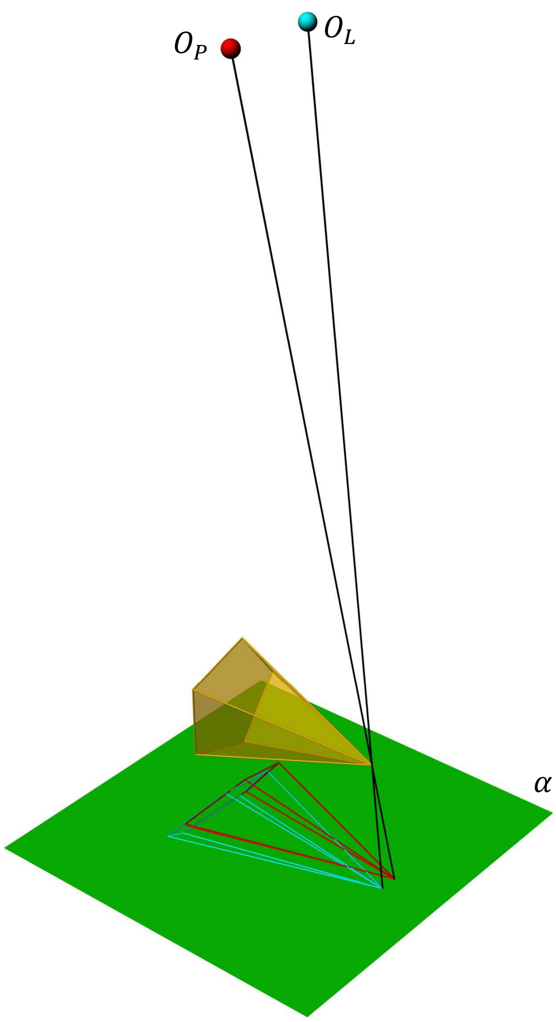
5. Anaglyfy

V poslední kapitole krátce pojednáme o tom, co jsou to anaglyfy a jak je lze vytvořit díky programům a funkcím, které jsme navrhli v rámci této diplomové práce.

5.1 Tvorba anaglyfů

Mějme v prostoru se zvolenou kartézskou soustavou souřadnic rovinu α a dva různé body O_L a O_P, které neleží v rovině α. Vzdálenost bodů O_L a O_P je rovna $|O_L O_P| = 6\ cm$. Vzdálenosti bodů O_L a O_P od roviny α jsou shodné a rovny $50\ cm$, tj. $l = |O_L\alpha| = |O_P\alpha| = 50\ cm$.

Dále mějme v prostoru umístěné těleso, například pětiboký jehlan na obrázku 5.1.1. Promítneme ho ve dvou středových promítáních – nejprve ve středovém promítání se středem v bodě O_L a průmětnou α, poté ve středovém promítání se středem v bodě O_P a průmětnou α. Průměty tělesa odlišíme barevně – průmět ze středu O_L znázorníme modře (barva cyan), průmět ze středu O_P vyznačíme červeně (red). Takto barevně odlišená dvojice průmětů téhož tělesa je *anaglyfem* tohoto tělesa. Body O_L a O_P se také nazývají levé a pravé oko.



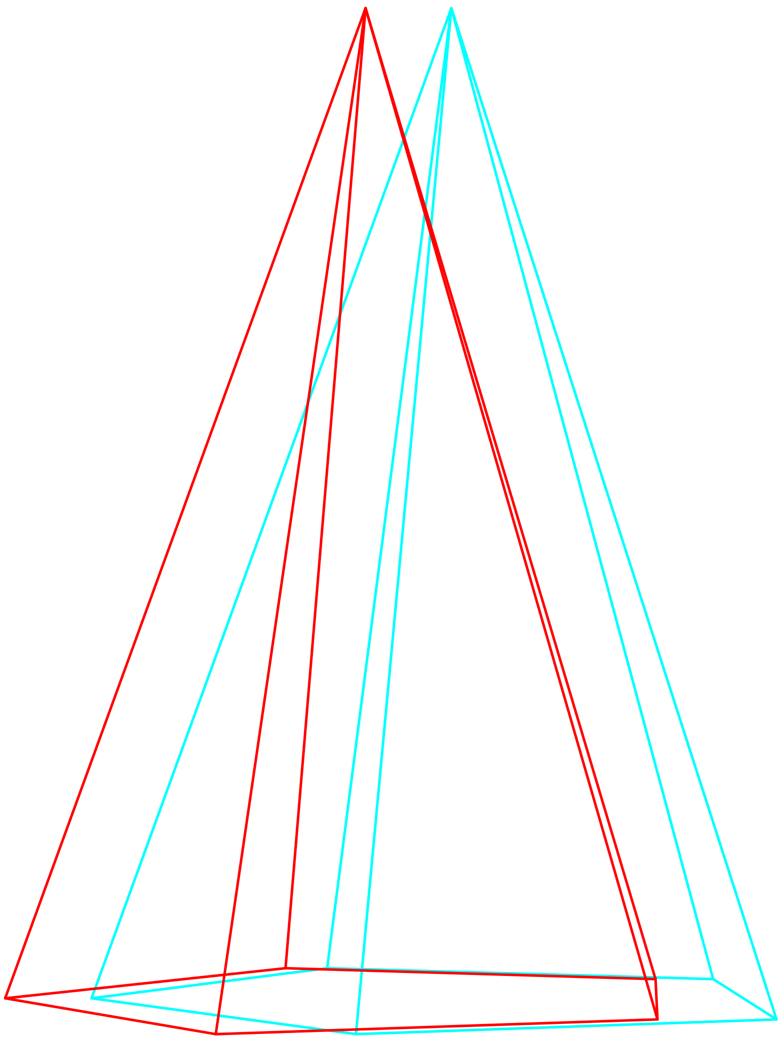
Obr. 5.1.1: Vznik anaglyfu

Máme-li anaglyf zobrazovaného tělesa, můžeme dané těleso vidět prostorově díky speciálním 3D brýlím. Brýle mají před pravým okem filtr modré barvy (cyan) a před levým okem filtr červené barvy. Pokud skrz ně pozorujeme anaglyf, pravé oko vidí pouze červený průmět (ze středu O_P), naopak levé oko vidí pouze modrý průmět (ze středu O_L). Obě oči tedy vnímají pouze průmět, který jim přísluší. Oba vjemy se pak spojí a vytvoří prostorový obraz objektu.

Čtenář si toto může ihned vyzkoušet na obrázku 5.1.2. V prostoru umístěný jehlan byl zobrazen ve dvou zvolených středových promítáních a byl vytvořen jeho anaglyf. Nasadíme si 3D brýle a podíváme se na něj ze vzdálenosti 50 cm, náš pohled směřuje kolmo k papíru (obrazovce počítače). Při pohledu na anaglyf se zdá, že jehlan vystupuje z papíru / před obrazovku počítače.

Nebudeme zde uvádět podrobný popis vzniku anaglyfu, typy, které se v praxi používají, ani návod, jak anaglyfy ručně rýsovat. Má-li čtenář o tuto problematiku zájem, doporučujeme nahlédnout do bakalářské práce Anaglyfy a jejich využití ve výuce stereometrie (Matěková, 2012).

V rámci této diplomové práce byly implementovány programy, jejichž výstupem jsou anaglyfy zadaných ploch či těles. Nyní si ukážeme, jaká středová promítání programy používají a jak v prostoru umístíme objekty, které chceme zobrazit pomocí anaglyfů.

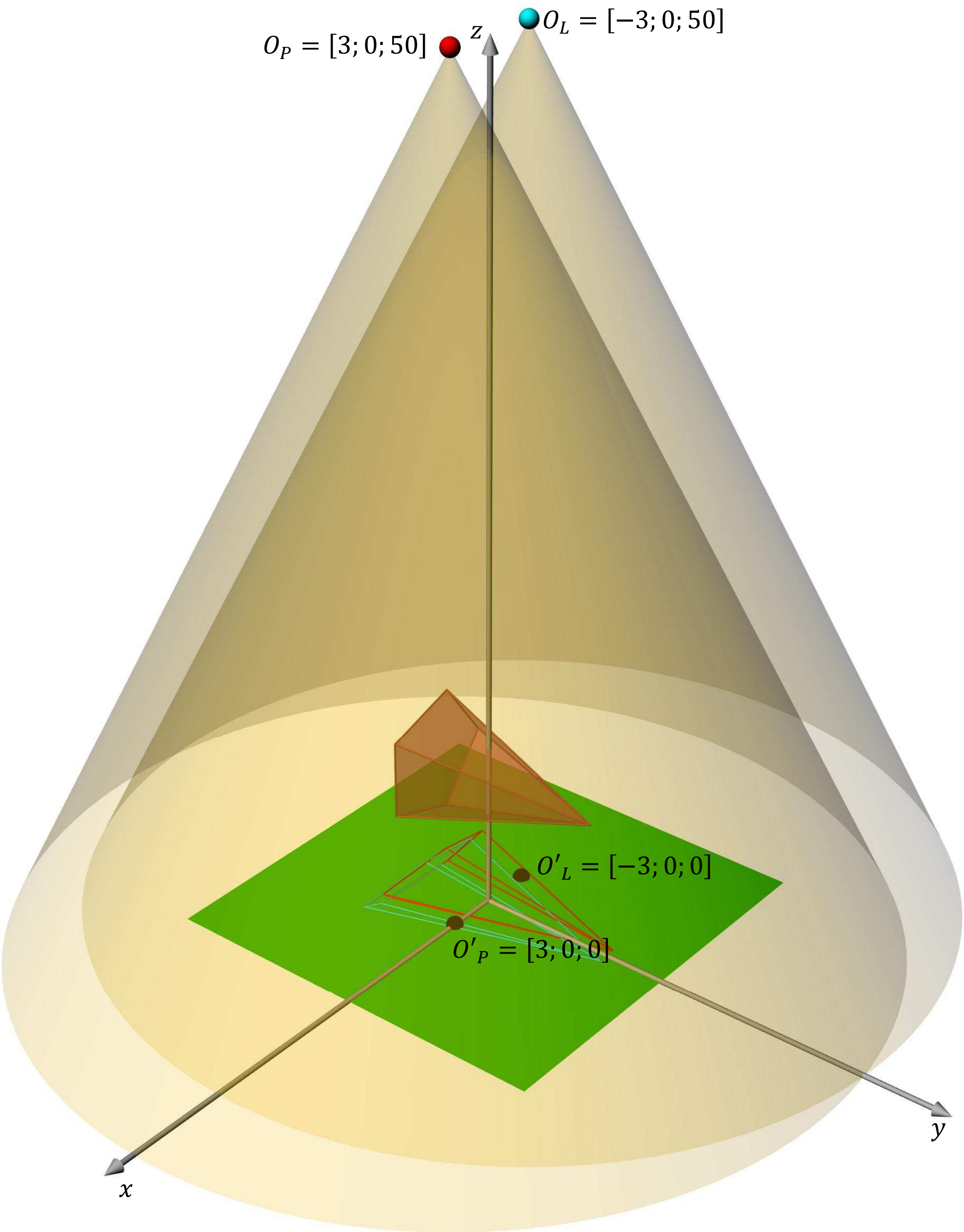


Obr. 5.1.2: Anaglyf pětibokého jehlanu

Nejdříve provedeme volbu obou středových promítání (Obr. 5.1.3). Průmětnou α obou středových promítání bude souřadnicová rovina $\pi = (xy)$, tj. půdorysna. Levé oko O_L má souřadnice $O_L = [-3; 0; 50]$ a pravé oko $O_P = [3; 0; 50]$. Anaglyfy objektů vytvoříme pomocí dvou středových promítání, jejichž průmětnou je půdorysna π a jejichž středy jsou body O_L a O_P. Pravoúhlé průměty středů promítání do půdorysny π označíme O_L' a O_P', jejich souřadnice jsou $O_L' = [-3; 0; 0]$ a $O_P' = [3; 0; 0]$.

Promítaný objekt umístíme do zorných kuželových ploch obou promítání. Zorná kuželová plocha středového promítání je rotační kuželová plocha s vrcholem ve středu promítání, její osa je kolmá k průmětně π a povrchové přímky svírají s osou kuželové plochy úhel, jehož velikost je přibližně rovna 27°. (Matěková, 2012) Zobrazovaný objekt navíc umístíme do vzdálenosti alespoň $30\,cm$ od středů promítání O_L a O_P. Tento požadavek klademe, protože lidské oči hůře zaostřují na objekty umístěné blíž.

V praxi se osvědčuje volit zobrazované těleso v prostoru tak, aby leželo před průmětnou, tj. v poloprostoru ohraničeném průmětnou, ve kterém jsou i středy promítání (Obr. 5.1.3). Při pohledu na anaglyf přes 3D brýle se pak zdá, že těleso vystupuje z papíru / obrazovky. (Zobrazovaný objekt ale lze umístit i za průmětnu.)



Obr. 5.1.3: Volba promítání a umístění objektů při vzniku anaglyfu

Nyní zobrazíme objekt v obou promítáních a průměty barevně odlišíme. Spolu s nimi vyznačíme i pravoúhlé průměty O'_L a O'_P levého a pravého oka, například černou barvou. Při tisku obrázku je potom nutné nastavit jeho velikost tak, aby vzdálenost bodů O'_L a O'_P na papíře byla $6\,cm$, jako je vzdálenost těchto bodů ve skutečnosti. Potom daný anaglyf odpovídá prostorové situaci, ve které vznikl. Bude-li vzdálenost bodů O'_L a O'_P na papíře jiná, 3D efekt by nemusel nastat.

Rozměry anaglyfu na počítači lze měnit – např. je-li obrázek v .pdf souboru, uživatel může nastavit zobrazení tohoto souboru tak, aby vzdálenost bodů O'_L a O'_P na monitoru byla požadovaných $6\,cm$. Toto je jedna z výhod, zobrazujeme-li anaglyfy na počítači.

Anaglyf pozorujeme přes 3D brýle. Náš pohled směřuje kolmo k papíru / obrazovce počítače a oči bychom měli mít ve vzdálenosti $50\,cm$ od bodů O'_L a O'_P. Zobrazený objekt pak vidíme, jako by opravdu existoval v prostoru.

Anaglyfy lze využít například ve výuce matematiky či deskriptivní geometrie na střední škole, jelikož pomáhají budovat prostorovou představivost.

5.2 Programy k tvorbě anaglyfů

K vytvoření anaglyfu bychom museli buď vše narýsovat ručně, nebo v softwaru určenému k rýsování a 3D modelování. (Anaglyf na obrázku 5.1.2 vznikl v modelovacím softwaru Rhinoceros.) V rámci této práce však spolu s programy na zobrazování ploch a těles v rovnoběžném či středovém promítání vznikly i dva speciální programy, díky kterým vytvoříme anaglyf zadaného objektu.

Příslušné programy najde čtenář na přiloženém CD ve složce mfiles pod názvy *anaglyf* a *anaglyfmnohosten*. Program *anaglyf* vytváří anaglyfy ploch, program *anaglyfmnohosten* vytváří anaglyfy mnohostěnů. Důvodem pro vznik dvou programů místo jediného je odlišná reprezentace zmíněných objektů, o které bylo pojednáno ve čtvrté kapitole této práce.

Oba programy fungují jednoduše – uživatel zadá objekt[1], program zavolá (dvakrát) funkci *stredove*, která zobrazí objekt ve středových promítáních s průmětnou $\pi = (xy)$ a středy O_L a O_P, a poté vykreslí oba průměty (červeně a modře) a body O'_L a O'_P (černě). Výstupy z obou programů čtenář najde v přílohách C.

Spouštění obou programů je analogické jako u programů *projekce* a *mnohosten*. Nejprve spustíme MATLAB a zadáme cestu ke složce mfiles.

Chceme-li vytvořit anaglyf hranatého tělesa, umístíme jej do kartézské soustavy souřadnic tak, aby splňoval podmínky zmíněné v části 5.1, a určíme matici vrcholů a stěn jako před spouštěním programu *mnohosten*. Poté spustíme program *anaglyfmnohosten*, kterému na vstupu předáme matice *vrcholy* a *steny*. Příslušný příkaz v MATLABU vypadá takto:

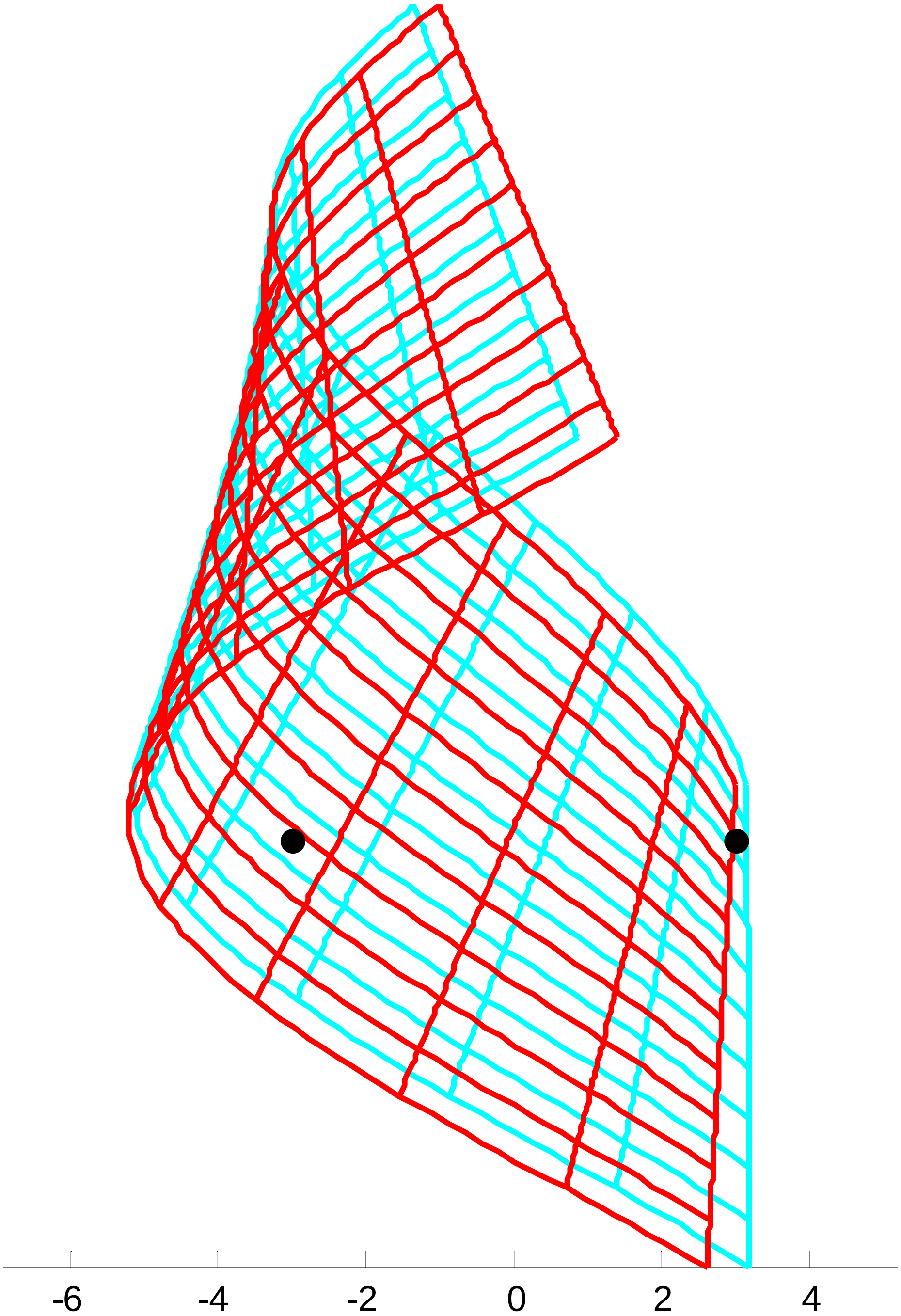
```
anaglyfmnohosten(vrcholy,steny)
```

Pokud potřebujeme vytvořit anaglyf nějaké plochy, umístíme ji do kartézské soustavy souřadnic tak, abychom splnili podmínky uvedené v části 5.1, a najdeme její parametrické vyjádření. Toto vyjádření připíšeme do funkce *zadani*, kterou program *anaglyf* využívá stejně jako program *projekce*. Návod, jak přidat zadání zobrazované plochy do funkce *zadani*, bylo popsáno ve čtvrté kapitole v části 4.7.3. Poté spustíme program *anaglyf*. Na vstupu mu zadáme číslo plochy, které odpovídá jejímu pořadí ve funkci *zadani*. Pokud například zobrazujeme anaglyf plochy s číslem 9, příslušný příkaz v MATLABu pro spuštění programu vypadá takto:

[1] Uživatel zadává pouze objekt, který chce zobrazit. Průmětna i středy promítání jsou v programu zvoleny jako v části 5.1.

`anaglyf(9)`

Na obrázku 5.2.1 si čtenář může prohlédnout výstup z programu *anaglyf* právě pro plochu s číslem 9. Program zobrazí dva barevně odlišené průměty a dvěma černými tečkami znázorní body O_L' a O_P'.



Obr. 5.2.1: Ukázka výstupu programu *anaglyf*

Tvorba anaglyfů se za pomoci programovacího softwaru velmi zjednodušila. Uživateli stačí umístit těleso v prostoru, reprezentovat jej v MATLABu dle již zmíněných pravidel a pak spustit příslušný program. Ve funkci *zadani* je nyní předdefinováno několik ploch (pořadová čísla 9 – 16), které vyhovují všem výše zmíněným požadavkům, chceme-li je zobrazit anaglyficky.

Výstupy z MATLABu lze ukládat ve formě obrázků – doporučujeme formát .emf (vektorový formát). Při prohlížení anaglyfu pak nesmíme zapomenout nastavit zobrazení tak, aby vzdálenost bodů O_L' a O_P' znázorněných černými tečkami byla 6 cm. Toto je nevýhoda tvorby anaglyfů na počítači – nelze předem nastavit velikost obrázku tak, aby vzdálenost bodů O_L' a O_P' na monitoru byla 6 cm. Zobrazujeme tedy pravoúhlé průměty středů O_L a O_P do průmětny π, aby uživatel pak mohl velikost výstupu z programu změnit tak, aby odpovídala dané prostorové situaci.

5.3 Závěr páté kapitoly

V páté kapitole jsme se krátce věnovali anaglyfům a jejich vzniku. Dále jsme ukázali, jak používat programy *anaglyf* a *anaglyfmnohosten* k jejich tvorbě.

Závěr

Cílem práce bylo navrhnout programový prototyp, jenž by zobrazoval objekty v prostoru do roviny v daných promítáních. Vznikla sada .m souborů naprogramovaných v programovacím prostředí MATLAB, která toto umožňuje. Nejenže můžeme zadaný objekt promítnout v rovnoběžném či středovém promítání, dokonce lze vytvořit i anaglyf. Automatická tvorba anaglyfů je velikým přínosem práce. Programu stačí pouze zadat vstupní data a počítač anaglyf vytvoří za nás. Dříve jejich tvorba vyžadovala rýsování na papír či v příslušných softwarech. Bude-li proto středoškolský učitel chtít anaglyfy použít jako názornou pomůcku při výuce geometrie, může je vytvořit díky mému programu.

Dalším přínosem práce jsou ilustrace, které obsahuje. Veškerou teorii jsem se snažila přiblížit nejen slovy, ale i obrázky, které mají čtenáři pomoci k pochopení probíraných témat. Zejména ve druhé kapitole, která se věnuje průmětům ploch a postupům syntetické geometrie v prostoru, se toto ukazuje jako velmi důležité. Citovaná literatura obsahuje omezené množství ilustrací, což je pochopitelné vzhledem k datu jejich vzniku. V diplomové práci jsem využila moderní metody, a v modelovacím softwaru Rhinoceros tak vznikly doprovodné ilustrace, které zvyšují úroveň práce.

Potěšilo by mě, kdyby byly využívány nejen naprogramované soubory, ale i samotný text práce. Myslím, že by mohl posloužit zájemcům o matematiku a geometrii jako průvodce o základech promítání, diferenciální geometrii či algoritmizaci zobrazování objektů pomocí metod deskriptivní geometrie.

Seznam použité literatury

BOČEK, Leo, KUBÁT, Václav. *Diferenciální geometrie křivek a ploch*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n. p., 1983.

BUDINSKÝ, Bruno. *Analytická a diferenciální geometrie*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n. p., 1983.

CSACHOVÁ, Lucia a kolektiv. *Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná*. 1. vyd. Editor Šárka Voráčová. Praha: Academia, 2012. Atlas (Academia).

DRÁBEK, Karel, HARANT, František, SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie I*. 2. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1982.

DRÁBEK, Karel, HARANT, František, SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie II*. 1. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, Alfa, vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1979.

GRAY, Alfred, ABBENA, Elsa, SALAMON, Simon. *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*. 3rd ed. Boca Raton, FL: Chapman, 2006.

HLAVÁČEK, Antonín, DOLANSKÝ, Petr. *Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky II. díl*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, n.p., 1971.

KOPÁČEK, Jiří. *Matematická analýza pro fyziky (I)*. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2002.

KOUNOVSKÝ, Josef, VYČICHLO, František. *Deskriptivní geometrie*. 5.vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959.

MATĚKOVÁ, Radka. *Anaglyfy a jejich využití ve výuce stereometrie*. Praha, 2012. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta. Vedoucí práce RNDr. Petra Surynková.

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie I*. 1. vyd. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1965.

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie II*. 1. vyd. Praha: SNTL - Státní nakladatelství technické literatury, 1967.

VOLBERG, O.A. *Deskriptivní geometrie*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1953.

PŘÍLOHY

A. Seznam programů a funkcí a jejich stručný popis

Následující tabulka obsahuje přehled všech navržených programů a funkcí, které v rámci této diplomové práce vznikly. Jsou uloženy ve složce *mfiles* na CD, jež je přiloženo k práci.

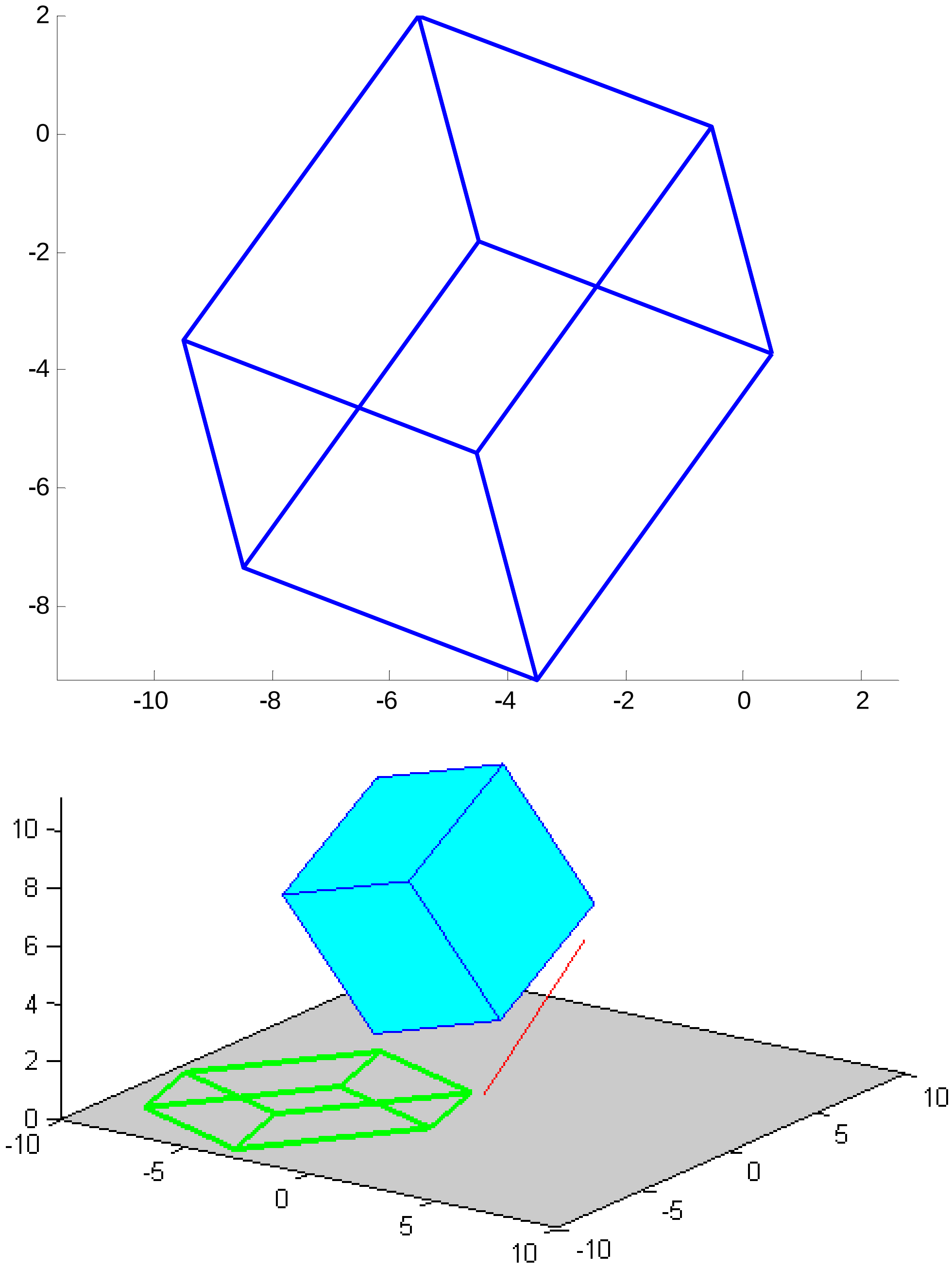
název	**vstupní data**	**funkce, které využívá**	**popis**
anaglyf	číslo plochy	*zadani; stredove*	vytvoří anaglyf zadané plochy
anaglyfmnohosten	matice vrcholů mnohostěnu; matice stěn mnohostěnu	*stredove*	vytvoří anaglyf zadaného tělesa
bodrp	bod; směr promítání	-	promítne bod v rovnoběžném promítání do půdorysny; vykreslí průmět bodu (2D výstup) a prostorovou situaci (3D výstup)
bodsp	bod; střed promítání	-	promítne bod ve středovém promítání do půdorysny; vykreslí průmět bodu (2D výstup) a prostorovou situaci (3D výstup)
hprov	-	*rovnobezne*	promítne hyperbolický paraboloid v rovnoběžném promítání do půdorysny; vyřeší viditelnosti zobrazovaných úseček; vykreslí průmět HP (2D výstup) a prostorovou situaci (3D výstup)
hpstred	-	*stredove*	promítne hyperbolický paraboloid ve středovém promítání do půdorysny; vyřeší viditelnosti zobrazovaných úseček; vykreslí průmět HP (2D výstup) a prostorovou situaci (3D výstup)
mnohosten	matice vrcholů mnohostěnu; matice stěn mnohostěnu; směr promítání; střed promítání; průmětna	*transformace; rovnobezne; stredove; zpetnatransformace; rovina;*	promítne zadaný mnohostěn v daném rovnoběžném / středovém promítání; vykreslí průmět tělesa (2D výstup) i prostorovou situaci (3D výstup)
projekce	číslo plochy; průmětna; směr promítání; střed promítání	*zadani; transformace; rovnobezne; stredove; zpetnatransformace; rovina;*	promítne zadanou plochu v daném rovnoběžném / středovém promítání; vykreslí průmět plochy (2D výstup) i prostorovou situaci (3D výstup)

rovina	matice tří bodů roviny	*vektor*	vrátí matici vrcholů a stěn rovnoběžníku, který leží v rovině určené zadanými body
rovnobezne	souřadnice objektu v maticích x, y, z a směr promítání	-	spočítá souřadnice průmětu zadaného objektu v rovnoběžném promítání do půdorysny; vrátí matice souřadnic průmětu
stredove	souřadnice objektu v maticích x, y, z a střed promítání	-	spočítá souřadnice průmětu zadaného objektu ve středovém promítání do půdorysny; vrátí matice souřadnic průmětu
transformace	matice průmětny; souřadnice objektu v maticích x, y, z; směr promítání; střed promítání	*vektor;*	transformuje souřadnice zadaných objektů tak, aby průmětna splynula s půdorysnou; vrátí transformované souřadnice objektů
usecka	krajní body úsečky; prumětna; směr promítání; střed promítání	*transfor-mace; rovnobezne; stredove; zpetnatrans-formace; rovina*	promítne zadanou úsečku v daném rovnoběžném / středovém promítání; vykreslí průmět tělesa (2D výstup) i prostorovou situaci (3D výstup)
vektor	matice tří bodů roviny	-	spočítá a vrátí souřadnice normálového vektoru roviny
zadani	číslo plochy	-	vrátí matice souřadnic x, y, z plochy, která má ve funkci zadané pořadové číslo
zpetnatransformace	matice průmětny; souřadnice průmětu objektu v maticích x, y, z	*vektor*	transformuje souřadnice průmětu objektu tak, aby ležel v původní průmětně (nikoli v půdorysně); vrátí nové souřadnice průmětu

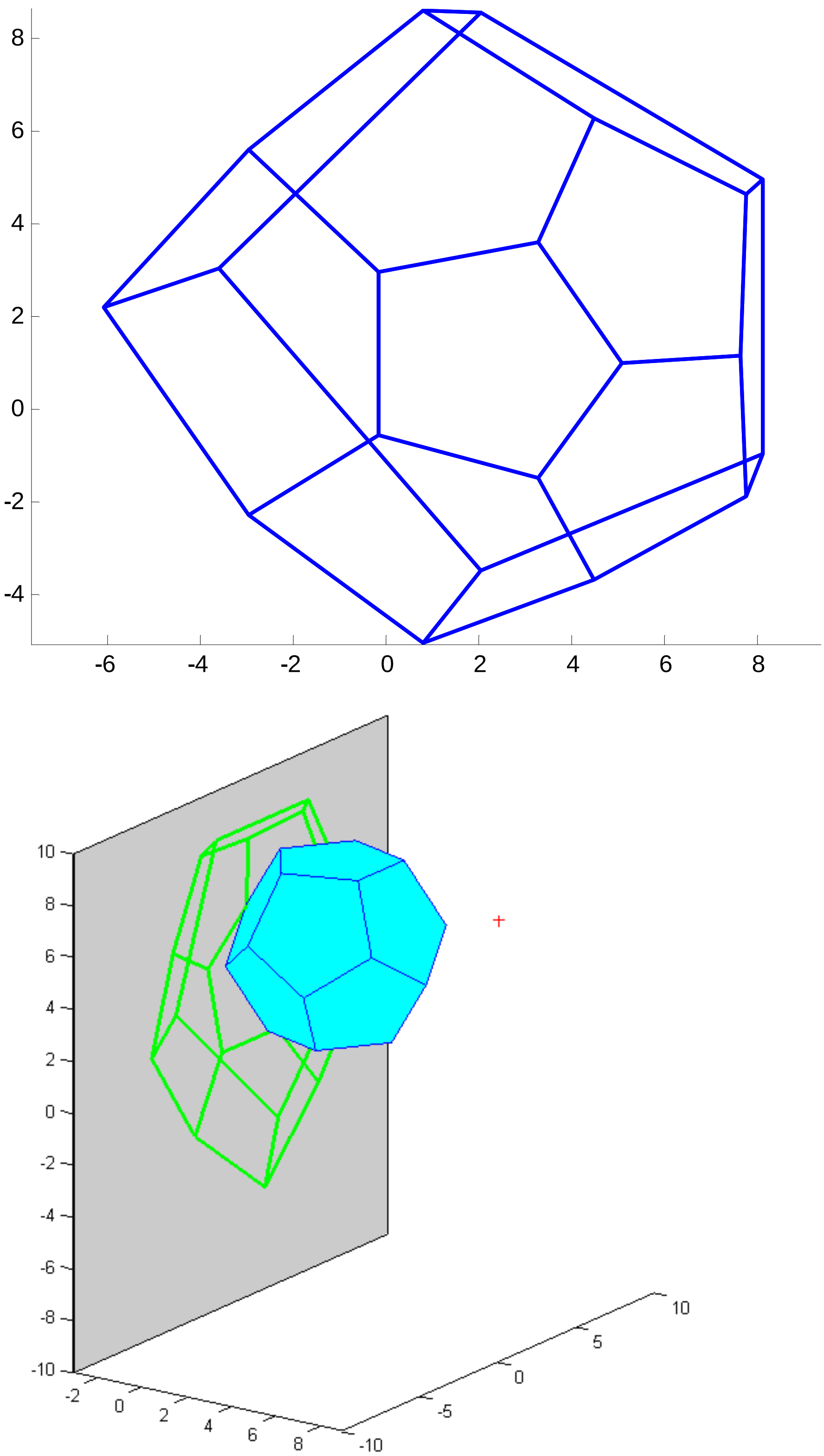
Tabulka A.1: Seznam programů a funkcí

B. Výstupy z programů *projekce* a *mnohosten*

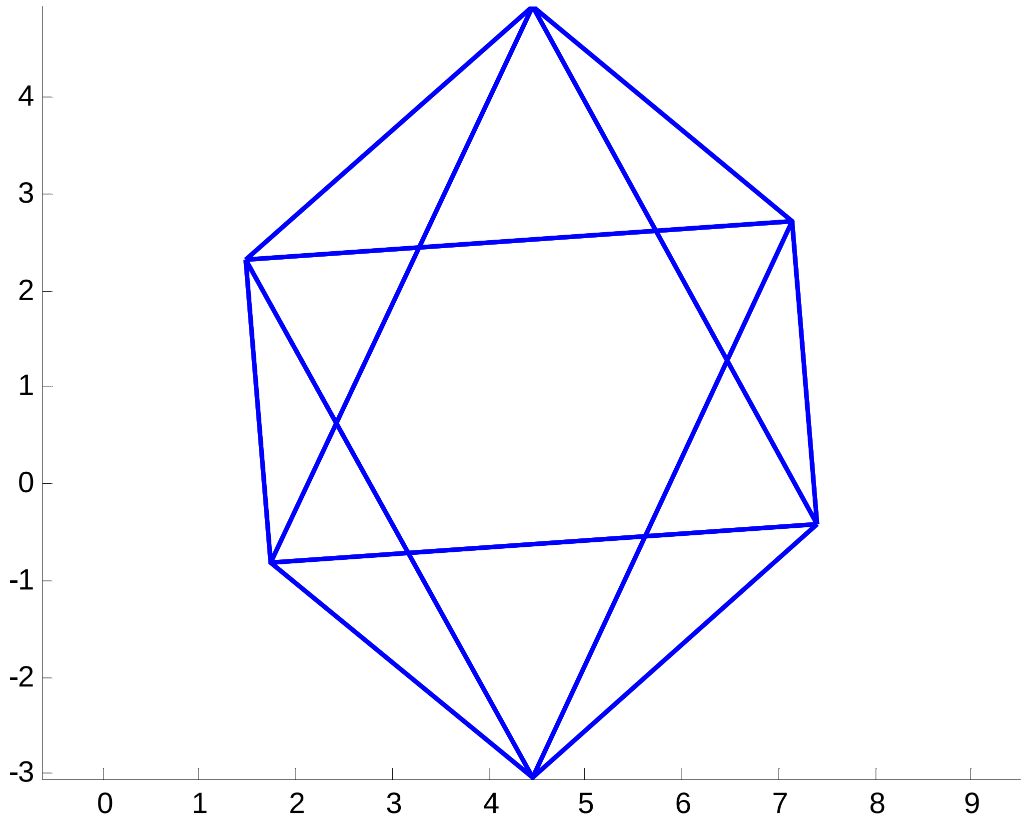
V této části příloh čtenář nalezne ukázky výstupů z programů *projekce* a *mnohosten*.



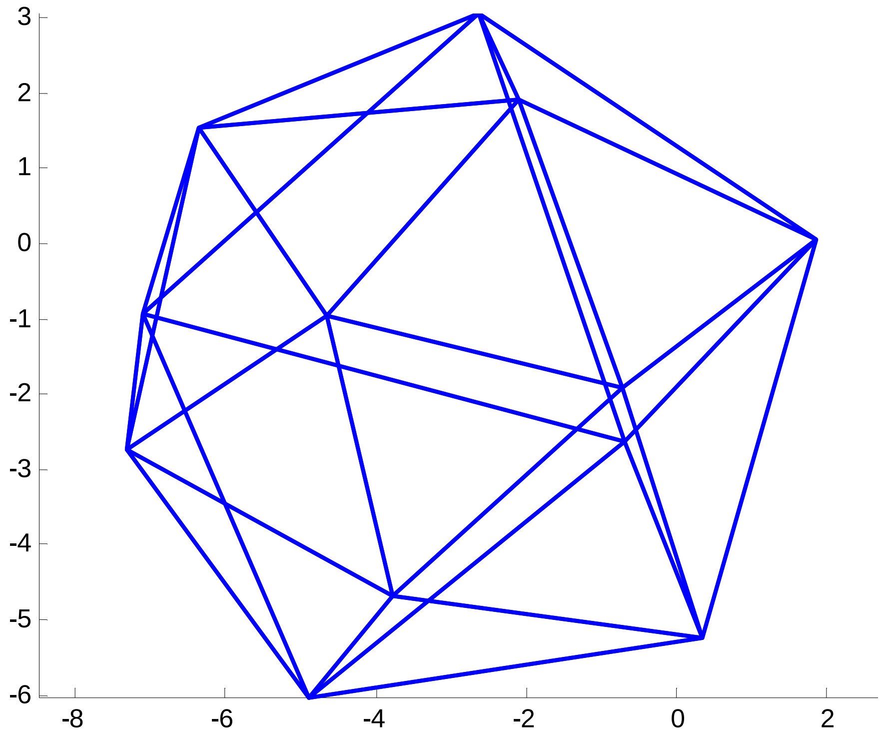
Obr. B.1: Průmět krychle v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s} = (2; 3; 5)$ do půdorysny $\pi = (xy)$; nahoře průmět v rovině, dole model prostorové situace



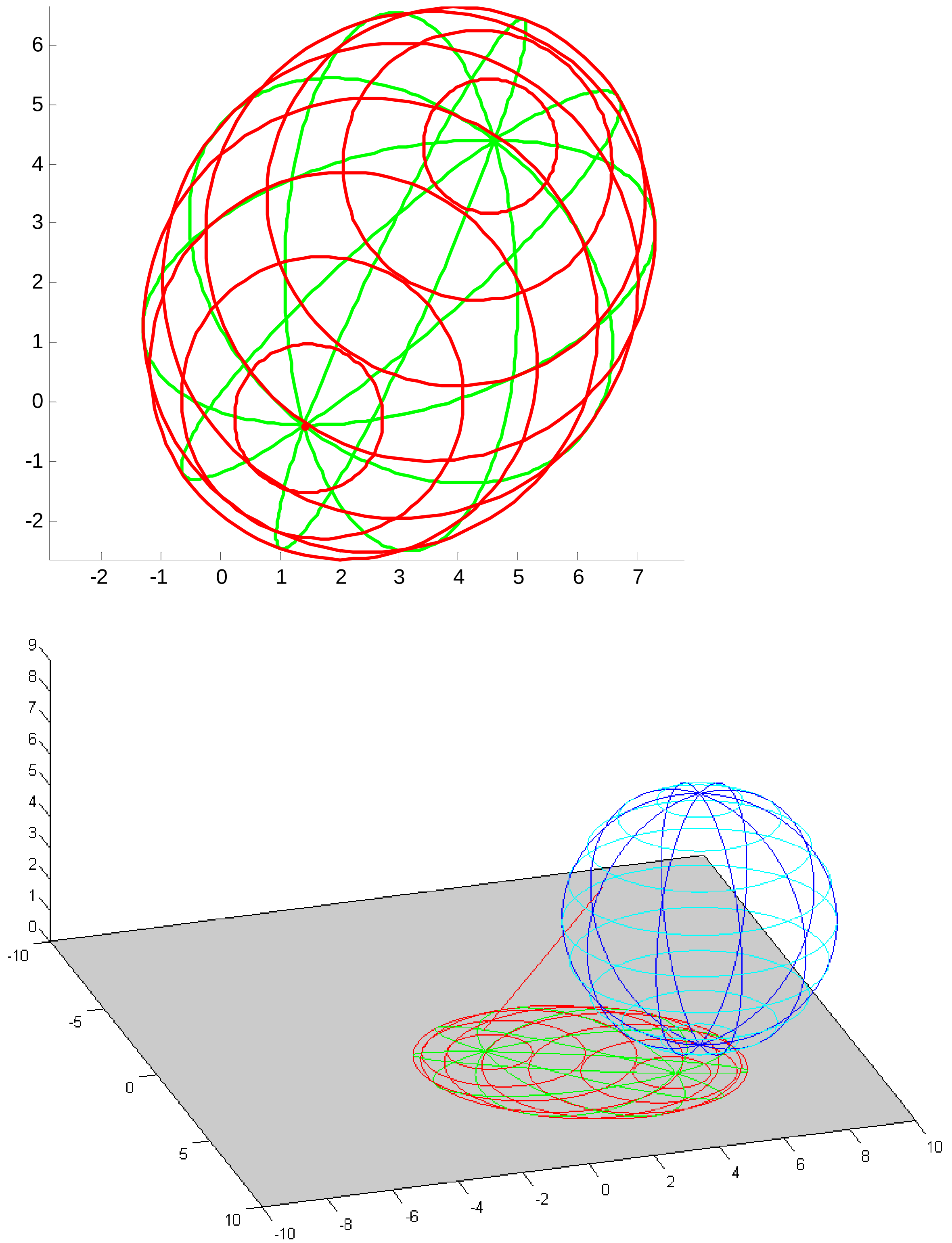
Obr. B.2: Průmět dvanáctistěnu ve středovém promítání se středem $S = [9; 0; 7]$ do roviny určené body o souřadnicích $[-3; 0; 0], [-3; 1; 0], [-3; 0; 1]$; nahoře průmět v rovině, dole model prostorové situace



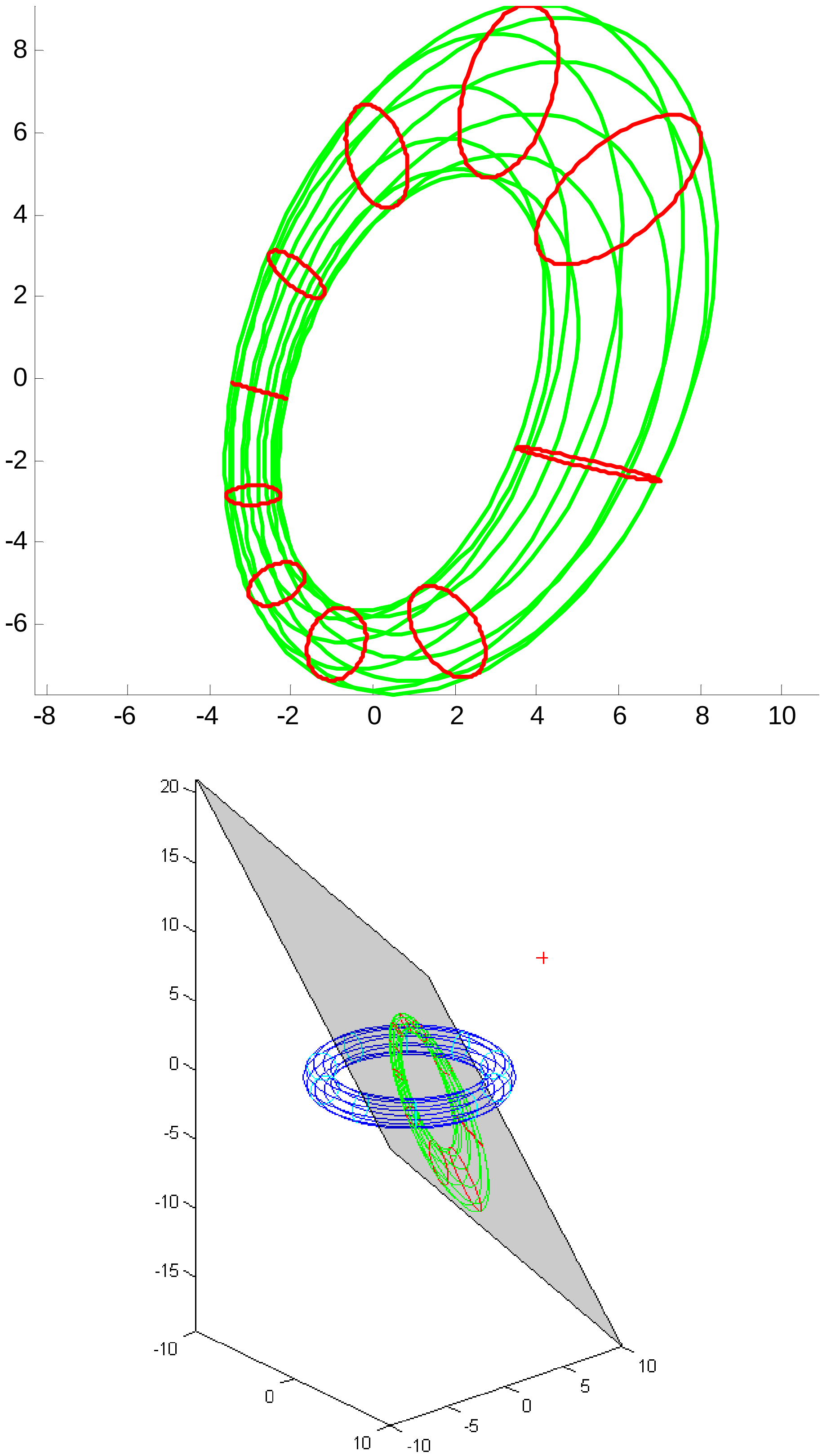
Obr. B.3: Průmět osmistěnu v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s} = (2; 3; 5)$ do roviny určené body o souřadnicích $[-2; -2; 1], [2; 2; -1], [0; 1; 0]$



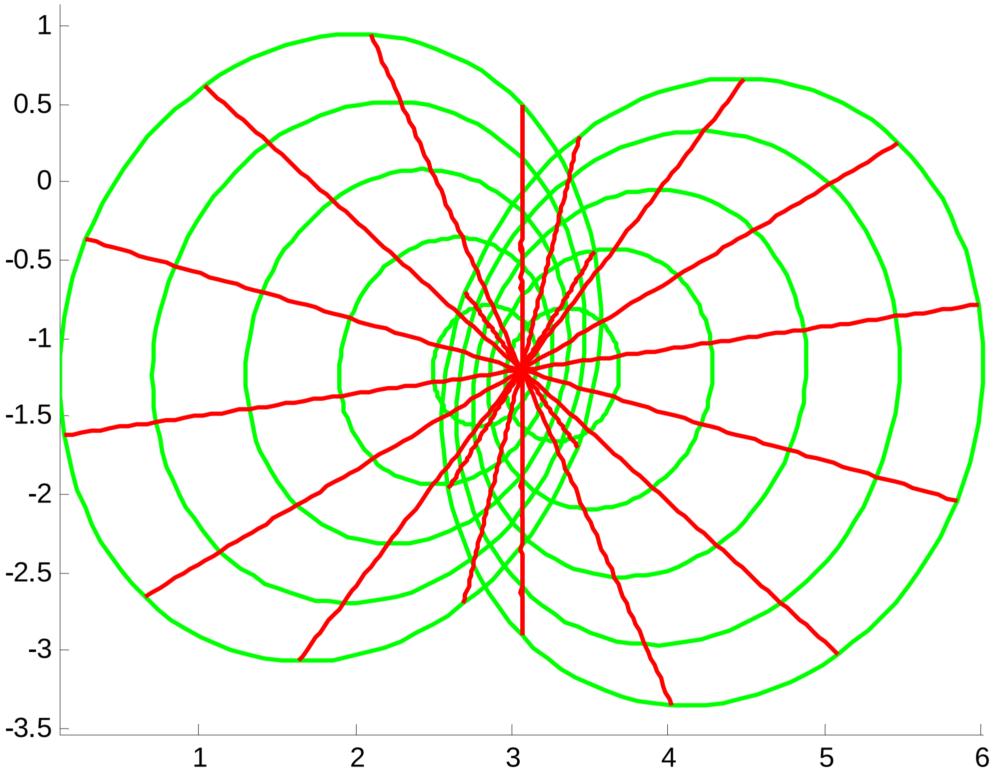
Obr. B.4: Průmět dvacetistěnu ve středovém promítání se středem $S = [0; 9; 7]$ do roviny určené body o souřadnicích $[1; -5; 0], [0; -5; 0], [0; -5; 1]$;



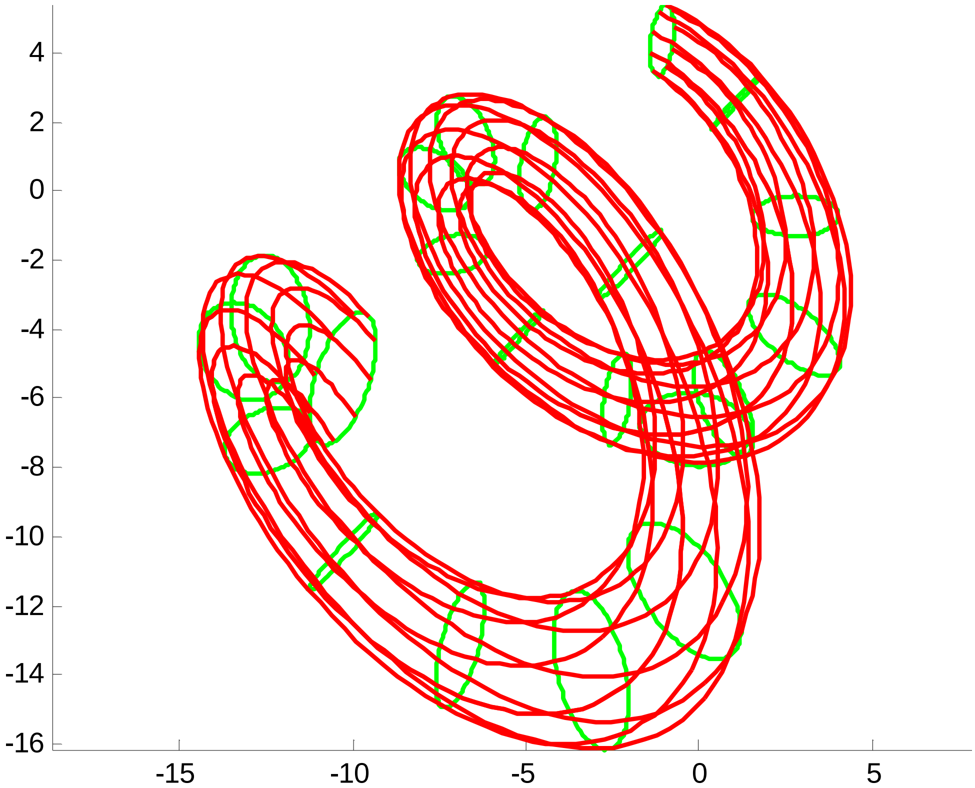
Obr. B.5: Průmět kulové plochy v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s} = (2; 3; 5)$ do půdorysny $\pi = (xy)$; nahoře průmět v rovině, dole model prostorové situace



Obr. B.6: Průmět anuloidu ve středovém promítání se středem $S = [3; 9; 7]$ do roviny určené body o souřadnicích $[1; 0; 0]$, $[0; 1; 0]$, $[0; 0; 1]$; nahoře průmět v rovině, dole model prostorové situace



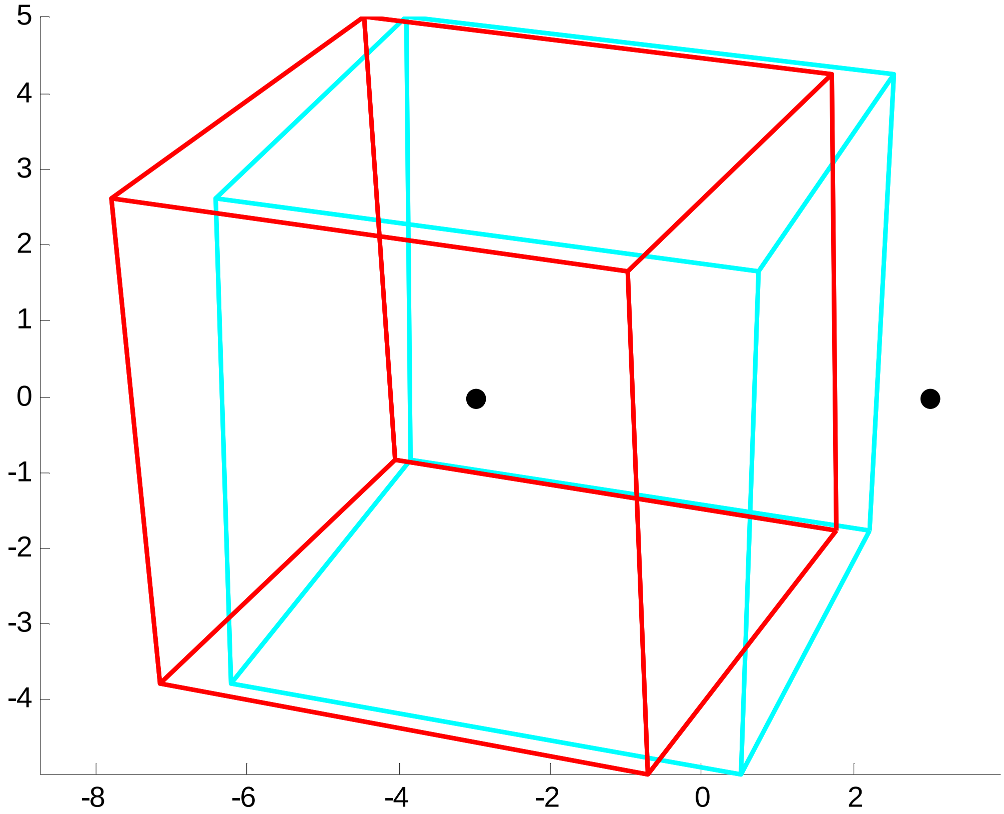
Obr. B.7: Průmět kuželové plochy v rovnoběžném promítání se směrem $\vec{s} = (2; 3; 5)$ do roviny určené body o souřadnicích $[1; 0; 6], [0; 1; 6], [0; 0; 7]$



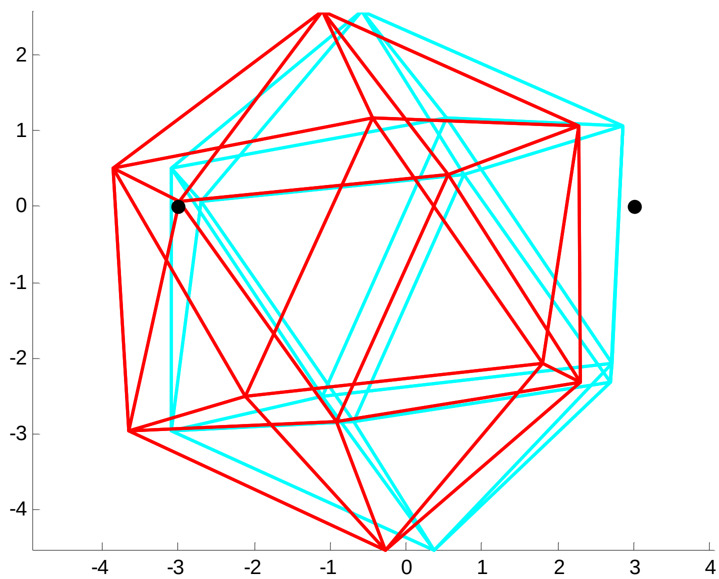
Obr. B.8: Průmět otevřené cyklické šroubové plochy ve středovém promítání se středem $S = [19; 10; 30]$ do roviny určené body o souřadnicích $[0; 1; 0], [1; 1; 0], [0; 0; 1]$

C. Anaglyfy mnohostěnů a ploch

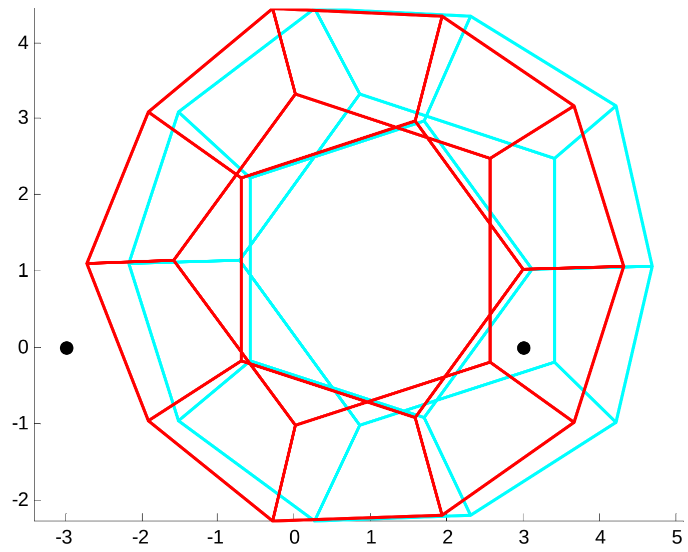
V této části příloh čtenář nalezne výstupy z programů *anaglyfmnohosten* a *anaglyf*.



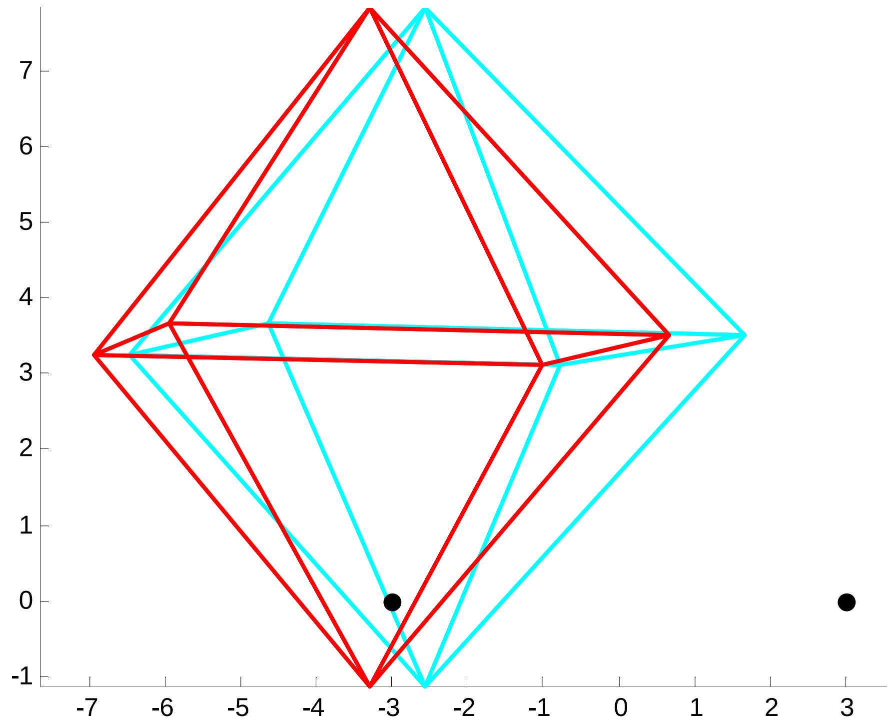
Obr. C.1: Anaglyf krychle



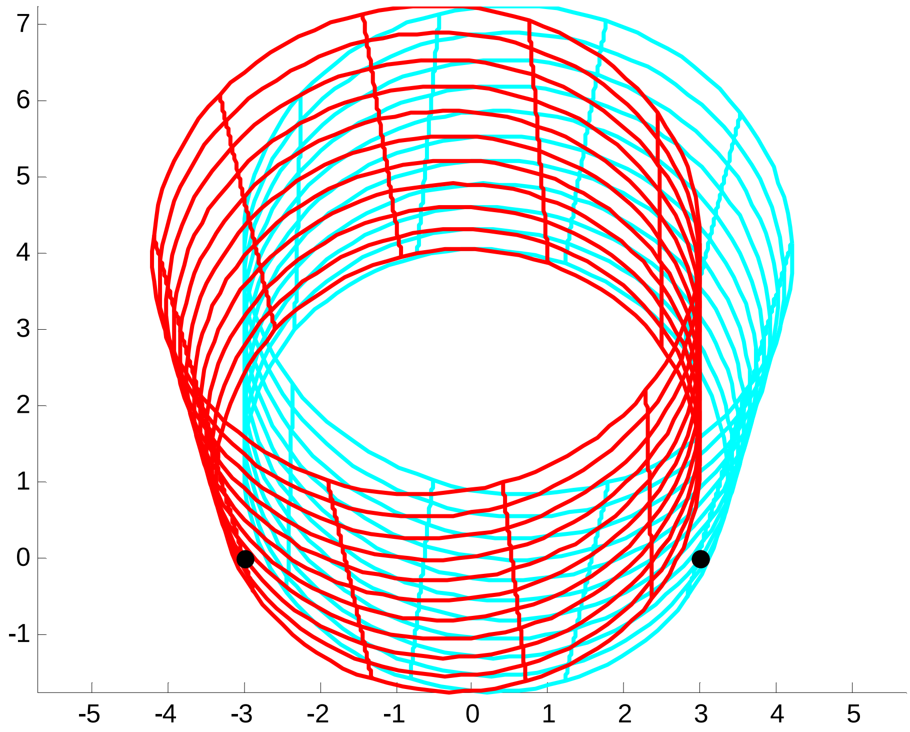
Obr. C.2: Anaglyf pravidelného dvacetistěnu



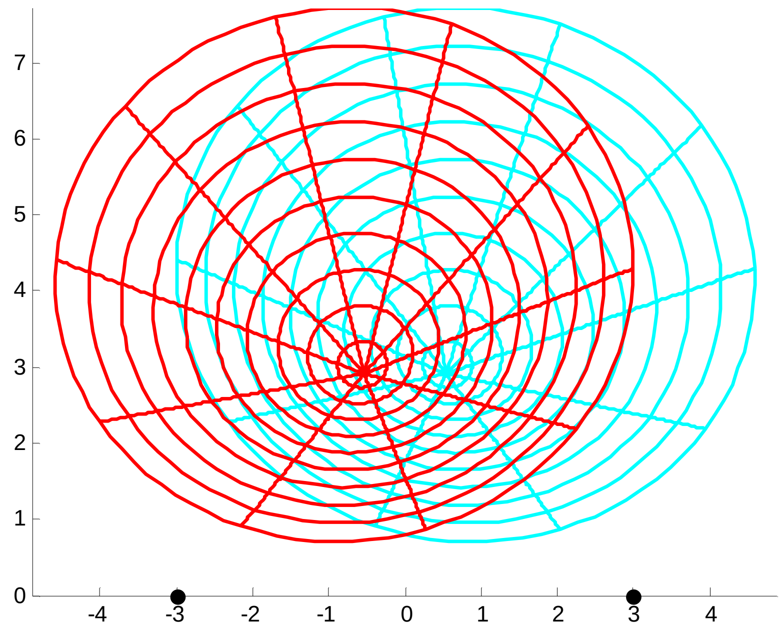
Obr. C.3: Anaglyf pravidelného dvanáctistěnu



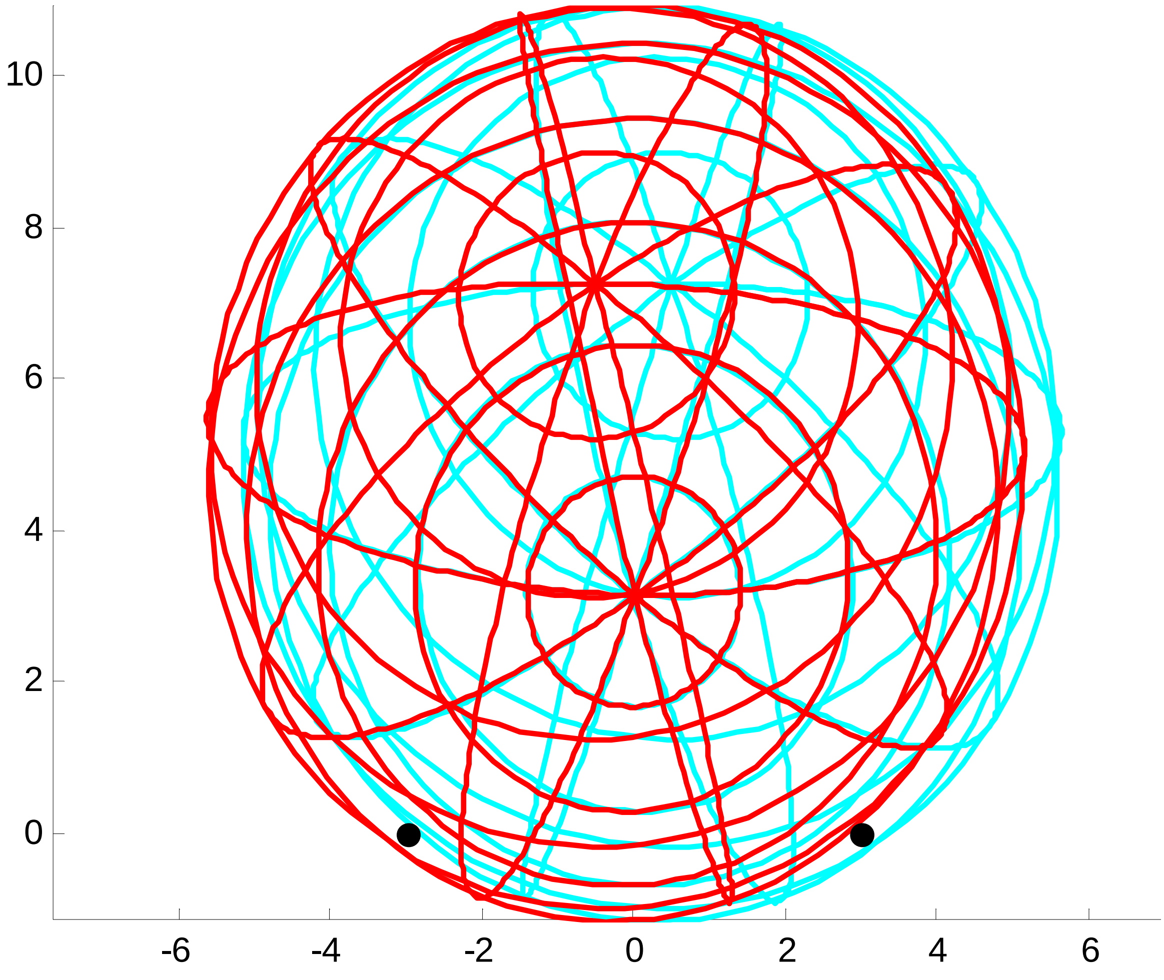
Obr. C.4: Anaglyf pravidelného osmistěnu



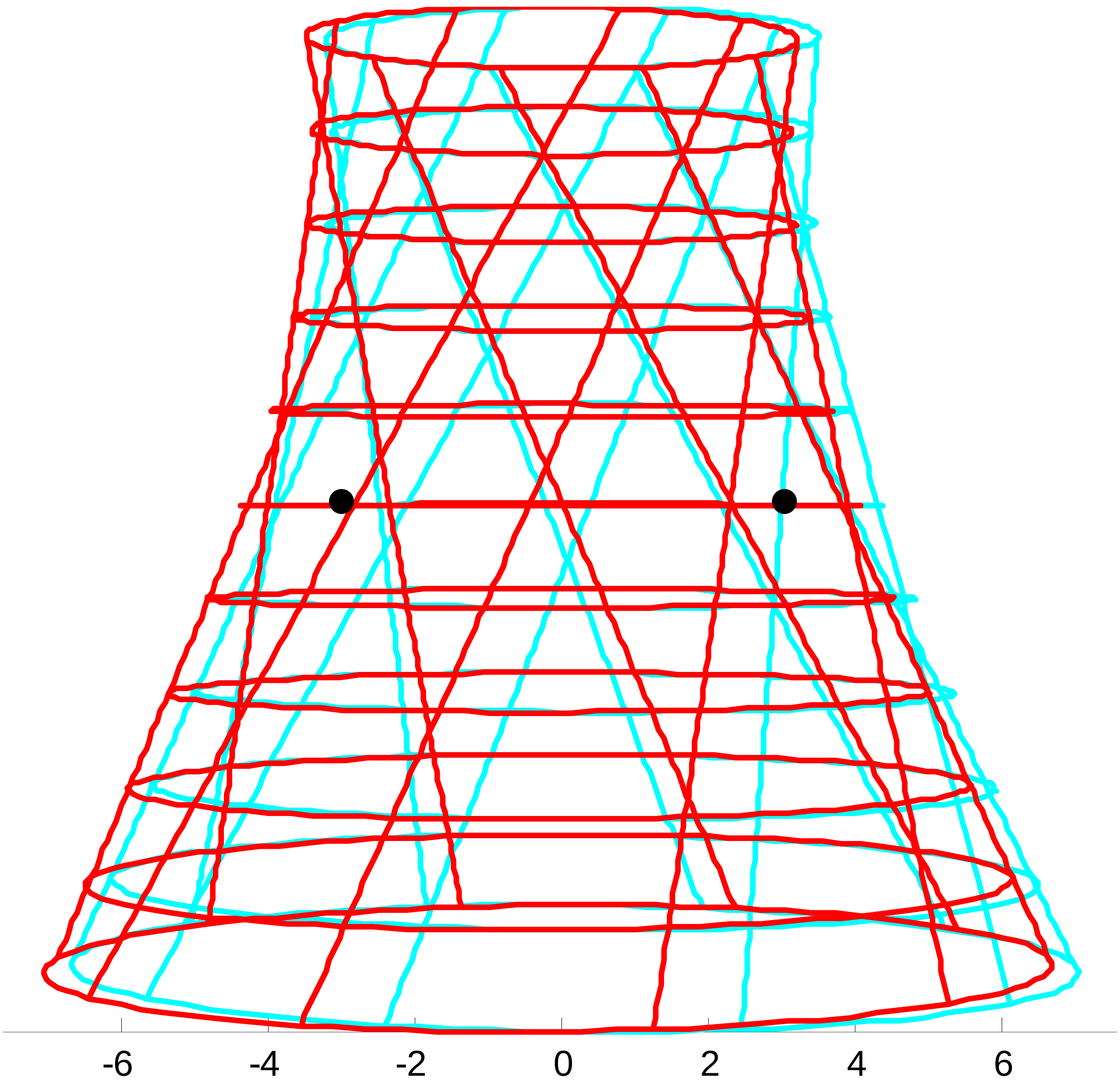
Obr. C.5: Anaglyf válcové plochy



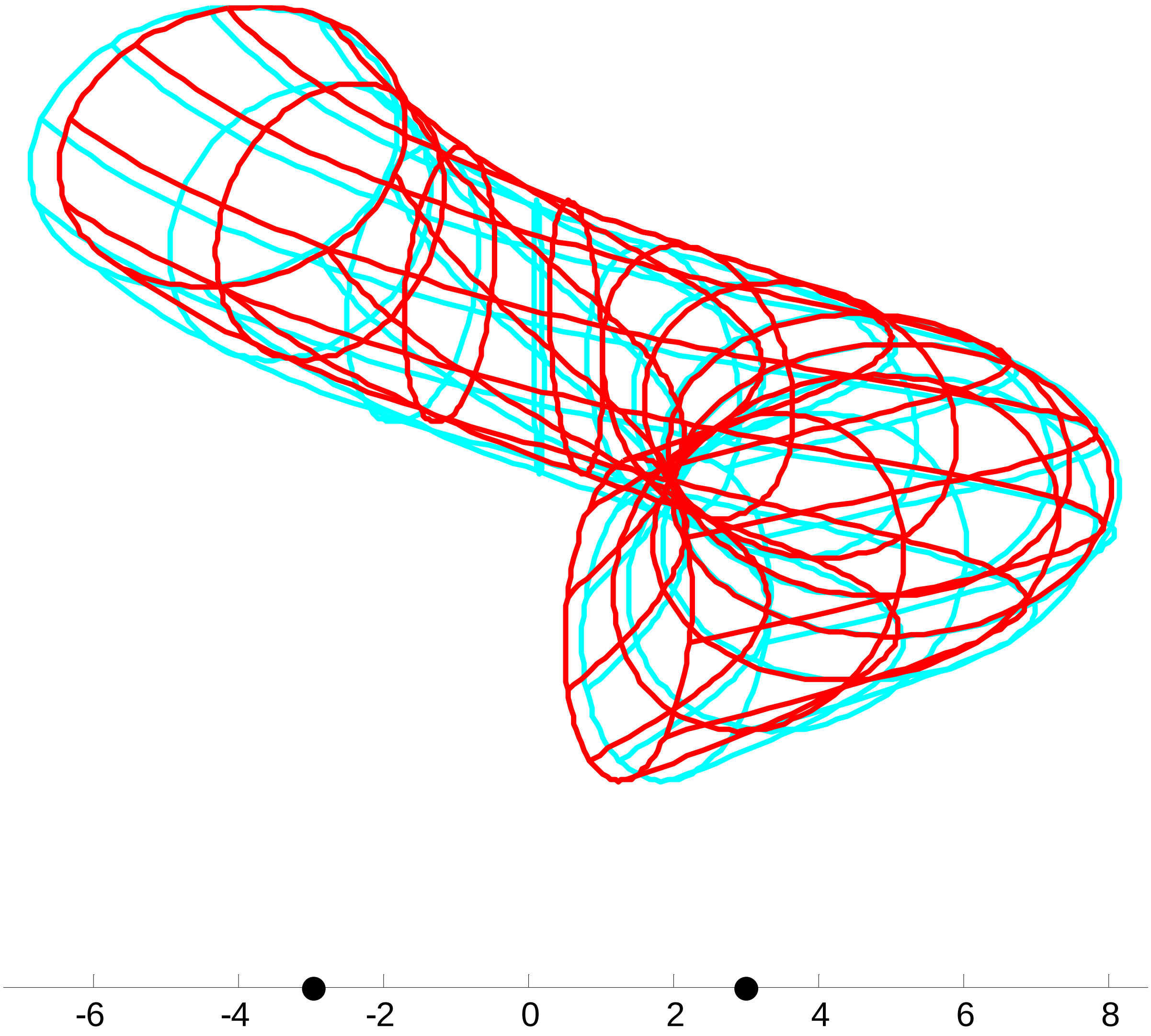
Obr. C.6: Anaglyf kuželové plochy



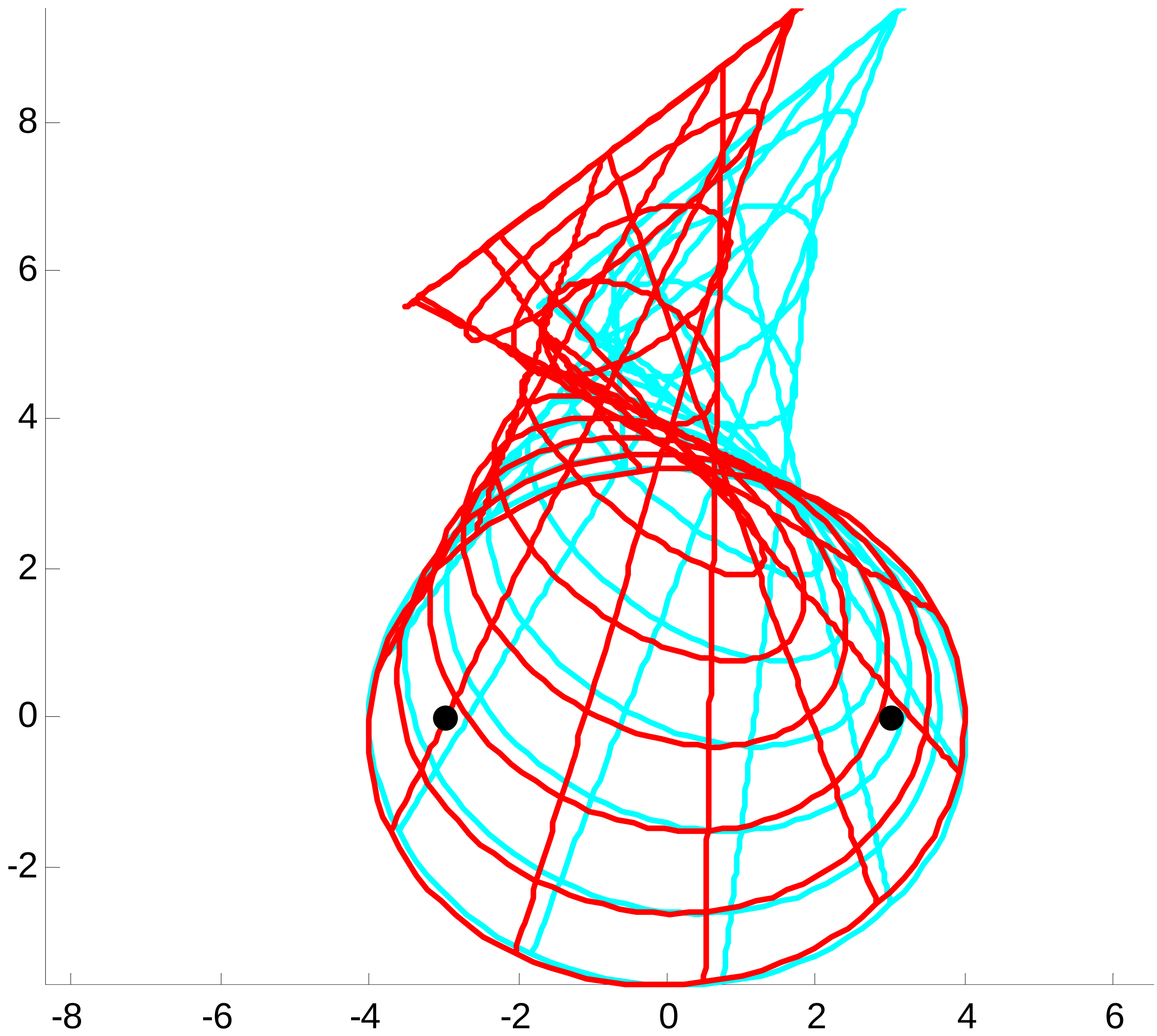
Obr. C.7: Anaglyf trojosého elipsoidu



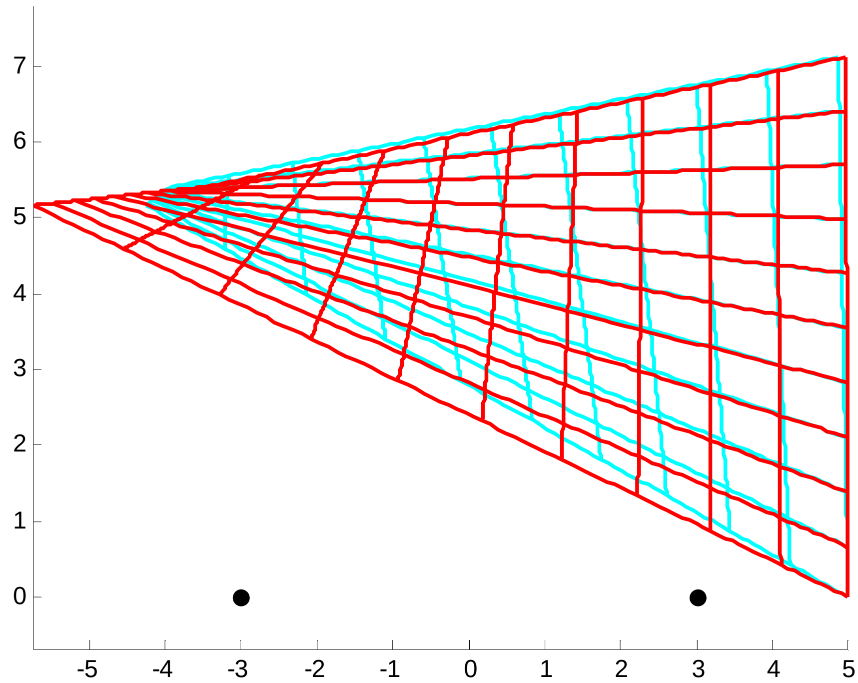
Obr. C.8: Anaglyf jednodílného rotačního hyperboloidu



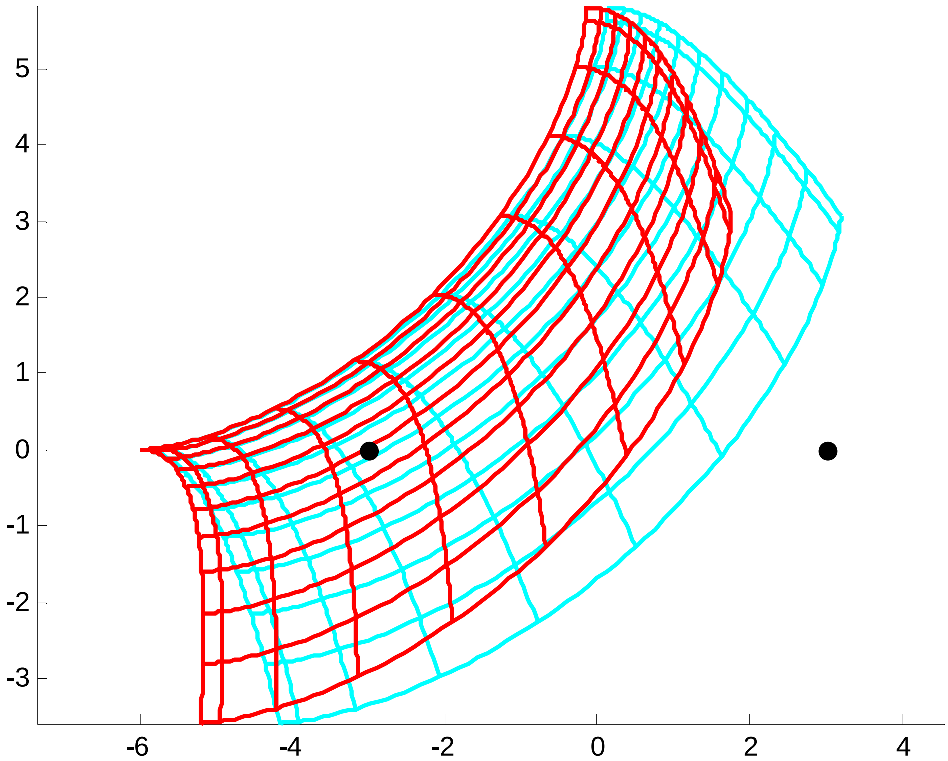
Obr. C.9: Anaglyf otevřené eliptické šroubové plochy



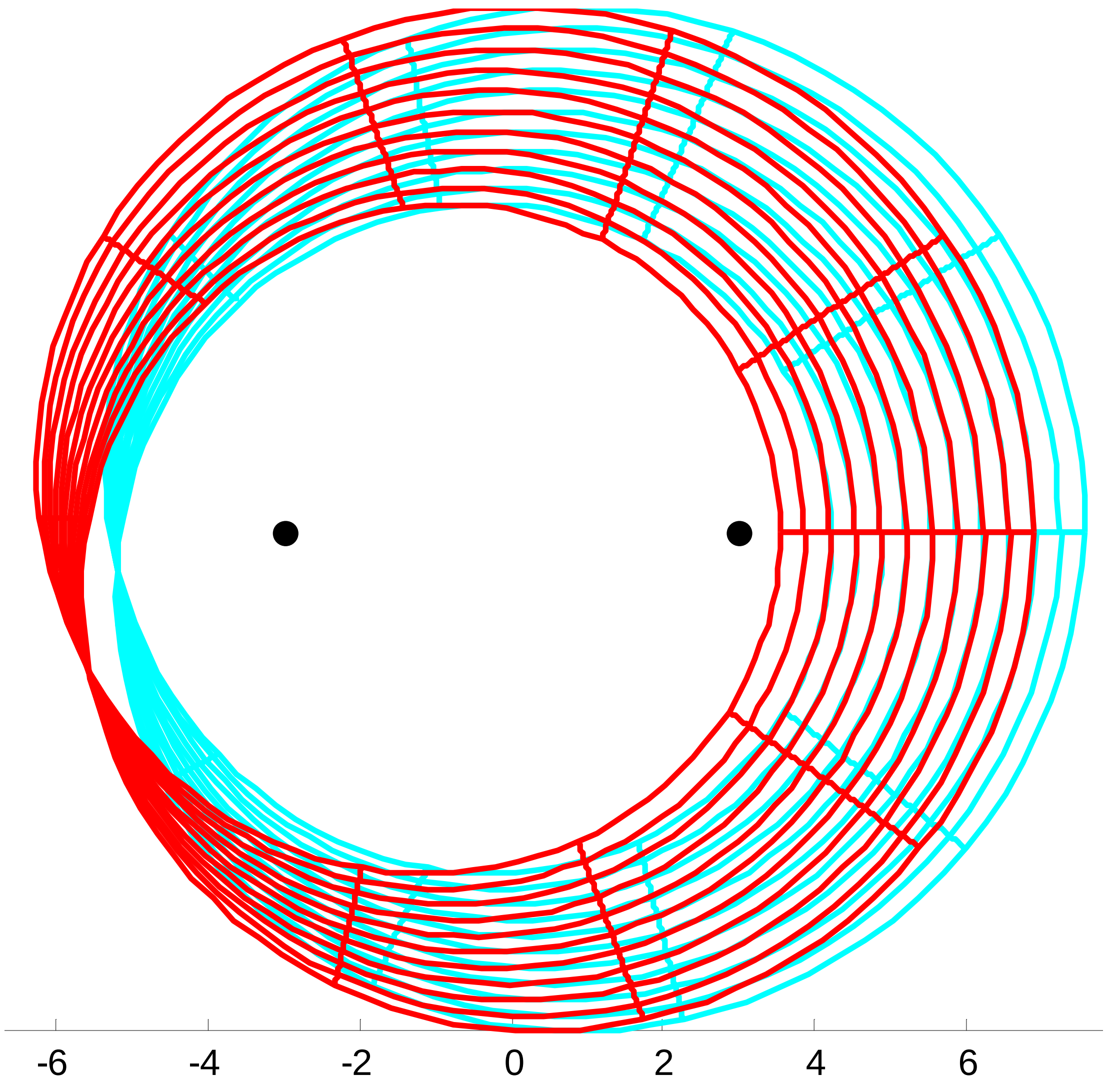
Obr. C.10: Anaglyf přímkové plochy – Štramberská trúba



Obr. C.11: Anaglyf hyperbolického paraboloidu



Obr. C.12: Anaglyf translační plochy (translace asteroidy po parabole)



Obr. C.13: Anaglyf Möbiovy pásky