Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta
Katedra logiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lenka Jankovská

Russellova analýza Peanovy aritmetiky

Russell's analysis of Peano Arithmetic

Praha 2014 Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Holeček, Ph.D.

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce dr. Tomáši Holečkovi za cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně, že jsem řádně citovala všechny použité prameny a literaturu a že práce nebyla využita v rámci jiného vysokoškolského studia či k získání jiného nebo stejného titulu.

V *dne* *podpis*

Abstrakt

Diplomová práce se věnuje Russellově analýze Peanovy aritmetiky tak, jak ji Russell podal spolu s A. N. Whiteheadem v knize *Principia Mathematica* a později v poněkud přístupnější knize *Introduction to Mathematical Philosophy*. Je podrobně zpracována Russellova kritika Peanových axiomů a způsob, jakým se pokusil tyto axiomy nahradit logickými definicemi. Práce se dále věnuje Russellově teorii tříd a nahrazením tříd výrokovými funkcemi, které je definují. Je vysvětlena teorie typů pro výrokové funkce. Všechny Russellovy definice a tvrzení jsou převedeny do současné notace logiky a matematiky. Poté je jeho teorie přirozených čísel analyzována z hlediska nestandardních modelů tak, jak je pojímáme dnes. Na závěr práce jsou uvedeny dva konkrétní příklady, v nichž jsou využity v práci zavedené definice.

Klíčová slova

Bertrand Russell, Peanova aritmetika, třídy, výroková funkce

Abstract

The aim of this thesis is Russell's analysis of Peano arithmetic. This analysis was presented by Russell and A. N. Whitehead in the book *Principia Mathematica* and then in Russell's book *Introduction to Mathematical Philosophy* which provided this approach in a more accessible form. The thesis focuses on Russell's critique of original Peano axioms and his effort to use only logical definitions instead of axioms. Another goal of the thesis is Russell's theory of classes and substitution of classes by propositional functions. Furthermore, the type theory for propositional functions is introduced and explained. All is converted into present-day logical notation. Moreover, the non-standard models of Russell's Peano arithmetic are studied. Finally, there are two particular arithmetic examples illustrating the purposes of the thesis.

Key words

Bertrand Russell, Peano Arithmetic, classes, propositional funkction

Obsah

1 Úvod

Ve své práci se věnuji analýze Peanových axiomů podle Bertranda Russella. Peanovy axiomy se pokouší axiomatizovat aritmetiku. Russell však ukazuje, že tyto axiomy dovolují, co se přirozených pojmů týče, nekonečně mnoho interpretací. Klade důraz na to, že základní pojmy, kterými jsou *nula*, *číslo* a *následník*, musí být přesně definované, nikoli ponechány na intuici. Intuice je to, co stojí na začátku, pak už přichází pouze striktní definice. V hlavní části práce si uvedeme všechny tyto Russellovy definice základních pojmů, které však převedeme do současné matematické (logické) notace. Ukážeme si například, že číslo je jakousi třídou všech tříd, které mají stejný počet prvků a také, že přirozená čísla jsou v určitém smyslu *potomky* nuly. Dále si ukážeme, co je potřeba, aby tyto definice byly čistě logické. Budeme se muset zbavit pojmu *třída* ze všech aritmetických výroků. Ukážeme si, jak každý výrok o třídě nahradit výrokem o výrokové funkci. K tomu si budeme muset zavést složitou hierarchii typů a řádů výrokových funkcí. V neposlední řadě se budeme věnovat nestandardním modelům takto analyzované Peanovy aritmetiky. Uvidíme, jak volná (nebo těsná) je Russellova definice přirozených čísel, jaká čísla skutečně zahrnuje.

Ve *druhé kapitole* si ukážeme Russellův rozbor Peanových axiomů a všechny jeho definice základních pojmů. Na závěr této části si ukážeme, zda tyto definice skutečně nahrazují Peanovy axiomy, zda v teorii předložené Russellem tyto axiomy umíme dokázat.

Ve *třetí kapitole* si ukážeme Russellovu teorii tříd. Řekneme si, co od tříd požaduje a co je potřeba pro nahrazení tříd výrokovými funkcemi, které je definují. Ukážeme si postup, jak převést výrok o třídě na výrok o výrokové funkci a trochu si ho ztížíme teorií typů.

Čtvrtá kapitola se věnuje některým dalším vlastnostem čísel a jejich definicím. Důležité je v aritmetice samozřejmě sčítání, které si nadefinujeme hned na začátku. Také si řekneme pár slov o nekonečných číslech, o uspořádání čísel a o tom, jak lze případně definovat další čísla.

Nestandardním modelům se věnujeme v *páté kapitole*. Ukážeme, jakou podobu má Peanova aritmetika dnes a jak vypadají její nestandardní modely. Připomeneme si definici přirozených čísel a pokusíme se ukázat, že ji splňují pouze (všechna) konečná čísla.

Na závěr si v *šesté kapitole* ukážeme dva konkrétní příklady, na kterých předvedeme zavedené definice. Dané příklady nejdříve uvedeme v původní Peanově aritmetice. Poté si je, s využitím všech definic, přepíšeme do Russellovy teorie, jak je uvedena ve druhé kapitole. Nakonec si ukážeme nejtěžší krok - převedení příkladu do beztřídové teorie uvedené ve třetí kapitole.

2 Analýza Peanových axiomů

V této kapitole si nejprve uvedeme původní Peanovy axiomy ve formě, v jaké je publikoval roku 1889. Poté předvedeme Russellovu analýzu těchto axiomů a jeho pokus o převedení na pouhé definice, které vychází pouze z pojmu třídy a z jazykových pojmů. To znamená, že Russellovým cílem je v podstatě předvedení logicismu (po tom, co se zbaví i pojmu třídy). Tomuto tématu se věnuje, spolu s Alfredem Whiteheadem, ve své zřejmě nejznámější knize *Principia Mathematica*. V této kapitole se však budeme držet spíše pozdější a přístupnější knihy: *Introduction to Mathematical Philosophy*. Na konci kapitoly si ukážeme, zda pomocí Russellových definic skutečně dokážeme všechny Peanovy axiomy. Ze všeho nejdříve si však pojďme říci pár slov o Russellovi a samotných *Principiích*.

2.1 Bertrand Russell

Bertrand Arthur William Russell, narozený roku 1872 v anglické aristokratické rodině, byl významný matematik, filosof a logik, který se za svých krásných 98 let života stihl věnovat mnoha dalším odvětvím jako například ekonomii, sociologii, psychologii, náboženství, politice a etice. Napsal přes 50 knih a přes 4000 článků a dílčích kapitol. Roku 1950 dokonce získal Nobelovu cenu za literaturu. Původně vystudoval matematiku a etiku na Cambridgeské universitě, kde také později určitou dobu působil jako kantor.

Russell si klade za svůj životní cíl postavit matematiku na pevné základy. Prvním takovým pokusem a zároveň první knihou o logice jsou *Principles of Mathematics*, které vyšly roku 1903. Jak píše sám Russell ve své autobiografii, obrovským zlomem v jeho práci se stalo setkání s Giuseppem Peanem roku 1900, kdy se nadchl pro Peanovu formální notaci, která poskytovala nástroj pro logickou analýzu, což byla věc, kterou Russell již dlouho hledal. Roku 1901 však Russellovo nadšení z jeho práce poněkud kazí objev tzv. Russellova paradoxu, který se nakonec pokouší řešit *teorií typů*, jejíž první náčrt vychází právě v *Principles of Mathematics*. Teorii typů dále rozvíjí také v článku z roku 1908: *Logic as based on the Theory of Types*.

Nejznámějším Russellovým dílem v oblasti logiky a matematiky je zcela jistě jeho vrcholné dílo *Principia Mathematica*, které napsal spolu se svým učitelem a přítelem Alfredem Northem Whiteheadem. Tři svazky vyšly postupně v letech 1910, 1912 a 1913. Původně mělo dílo mít ještě čtvrtý díl věnující se geometrii, ale nebylo nikdy dokončeno.

Russell s Whiteheadem na *Principiích* pracovali dohromady více než deset let. Hlavním Russellovým motivem bylo postavení matematiky na pevné základy, které nakonec našel v logice.

Jejich spolupráce začala již roku 1902, kdy shledali, že mají společné cíle a chtějí jich dosáhnout podobnými prostředky. Russell měl na starosti filosofičtější části *Principií*, jako je rozsáhlý *úvod*, teorie deskripcí a ta část teorie, která říká, že třídy jsou pouhé logické fikce či neúplné symboly a je třeba je převést na výrokové funkce. Whitehead měl větší podíl na zavedení symbolické notace, která je z velké části převzata od Giuseppeho Peana.

Při pátrání po pevných základech skončili u snahy vystačit si s několika logickými axiomy a pravidly, ze kterých odvodí veškeré matematické pravdy. Velkou inspiraci čerpali z prací Gottloba Frega, který se též pokouší o logicismus a o logickou axiomatiku, jež se však ukázala být nedokonalou ze stejného důvodu, z jakého Russell musel pozměnit své původní úvahy, totiž Russellova paradoxu.

Russell se stal takřka posedlým. Pokaždé byl s prací nespokojený. Vždy, když už měli velkou část hotovou, Russell našel nějaké nejasnosti či nepřesnosti. Stále nebyl dostatečně spokojen se samotnými základy, stále se mu nezdály dost pevné.

Po takřka deseti letech práce mělo konečně dojít k vydání prvního dílu. Autoři však byli vystaveni dalšímu strašnému zjištění, že nakladatelství odmítá jejich knihu vydat, jelikož jim při kalkulaci a odhadu prodeje vyšla záporná čísla. Autoři nakonec přislíbili zaplacení části nákladů a tak první díl roku 1910 spatřil světlo světa.

Nakonec se *Principia* stala, spolu s Fregovým dílem, základem moderní matematické logiky, stejně jako její symboliky, za kterou však vděčí též Peanovi.

Přestože se Russell pokoušel o co nejpřesnější dílo, *Principia* jsou vystavena mnoha nejasnostem a přes rozsáhlý počet stran bohužel nedošlo k přesnému vyjasnění a dodržování jednotlivých termínů. Dodnes jsou v *Principiích* místa, na jejichž interpretaci se nemohou filosofové a logici shodnout.

Aby Russell obsah *Principií* učinil přístupnější větší čtenářské obci, vychází v roce 1919 kniha *Introduction to Mathematical Philosophy*, která oproti rozsáhlým *Principiím* (majících přes 1900 stran) má pouhých 200 stran. Kniha obsahuje hlavní linii *Principií* popsanou bez složitého formalismu.

2.2 Logicismus

Logicismus je názor rozvíjející se na přelomu 19. a 20. století, který tvrdí, že matematika je pouhým rozšířením logiky. Abychom vybudovali matematiku, vystačíme si pouze s objekty logiky, s logickými zákony a přirozeným jazykem. Hlavními představiteli logicismu byli Richard Dedekind, Gottlob Frege, Bertrand Russell a Alfred North Whitehead.

Logicismus můžeme rozdělit na silnější a slabší [Ten13]:

- *silnější verze* – veškeré matematické pravdy (nějakého konkrétního matematického oboru) dostaneme z logických pravd
- *slabší verze* – veškeré teorémy matematiky (dokazatelná tvrzení) dostaneme z těch logických

2.3 Poznámka o notaci

Russell ve své době používá pochopitelně trochu jiný symbolický zápis než my dnes. Víceméně se drží zápisu, který začal ve svých dílech používat Giuseppe Peano a případně jím se inspirující Gottlob Frege.

Ukažme si pár příkladů:

Russell	Současnost
$(x).\varphi(x)$	$(\forall x)\varphi(x)$
$(\exists x).\varphi(x)$	$(\exists x)\varphi(x)$
$(x){:}(\exists y).\varphi(x,y)$	$(\forall x)(\exists y)\varphi(x,y)$
$\vdash{:}\ (\exists\psi) : \varphi x. \equiv_x .\psi!x.$	$\vdash (\exists\psi)(\forall x)(\varphi(x) \equiv \psi!(x))$

Kde tečky a dvojtečky po vzoru Peana v podstatě znamenají závorky a smysl vykřičníku si vysvětlíme později při zavedení predikativních funkcí. Jinak vidíme, že se zápis v hlavních liniích neliší.

V této práci budeme používat moderní notaci i na místech, kde se jedná o původní Russellovy příklady.

2.4 Peanova Aritmetika

Giuseppe Peano, slavný italský matematik a jeden ze zakladatelů matematické logiky, byl přesvědčen, že všechna tvrzení o přirozených číslech mohou být odvozena ze tří základních idejí a devíti axiomů, samozřejmě spolu s čistou logikou. Zároveň se v té době rozmohl názor, zastávaný i Peanem, že veškerá matematika je redukovatelná na aritmetiku. Po několik desetiletí se tedy matematici pokoušeli axiomatizovat aritmetiku s cílem axiomatizovat veškerou matematiku.

Peano své axiomy poprvé uvádí v roce 1889 v 36stránkovém spise *Arithmetices principia, nova methodo exposita*. Uveďme si původních 9 axiomů podle knihy [Pea67, str. 94], převedených do modernější notace:

1. $1 \in N$
2. $a \in N \Rightarrow a = a$
3. $a, b \in N \Rightarrow (a = b) = (b = a)$
4. $a, b, c \in N \Rightarrow (a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c$
5. $(a = b \wedge b \in N) \Rightarrow a \in N$
6. $a \in N \Rightarrow (a + 1) \in N$
7. $a, b \in N \Rightarrow (a = b) = (a + 1 = b + 1)$
8. $a \in N \Rightarrow \neg(a + 1 = 1)$
9. $(k \in K \wedge 1 \in k \wedge x \in N \wedge (x \in k \Rightarrow_x x+1 \in k)) \Rightarrow (a \in N \Rightarrow a \in k)$

Devátý axiom je axiom indukce, který lze přeříkat následovně: *Když k je neprázdná třída, která obsahuje prvek* 1 *a s každým prvkem do k patří i jeho následník, pak je v třídě obsaženo každé číslo.* Symbol K nám značí třídu neprázdných tříd.

Jak vidíme, prvním číslem byla jednička, brzy však přešel na dnes obecné pojetí přirozených čísel začínajících nulou. Axiomy 2-5 odkazují k symbolu identity, který Peano bere, spolu s 1, N (přirozenými čísly), $a+1$ (následníkem), jako nedefinovaný.

Dále zavádí definice pro sčítání, odčítání a být menší než:

- $a, b \in N \Rightarrow a + (b+1) = (a+b)+1$
- $a, b \in N \Rightarrow (b - a = x \Leftrightarrow (x \in N \wedge x + a = b))$
- $a, b \in N \Rightarrow a < b = (b - a \neq \Lambda)$[1]

2.5 Interpretace Peanových axiomů

Postupem času Peano mírně upravuje notaci, způsob dokazování a nakonec se i přestávají uvádět axiomy identity, jakožto axiomy logiky, která stojí v pozadí. Pojďme se nyní podívat, jak si pro své potřeby definuje Peanovu aritmetiku Russell ve své knize [Rus93a]. Uvádí ji jako pět axiomů – základních tvrzení, které hovoří o třech nedefinovaných symbolech – základních idejích:

Základní ideje: *0*, *číslo*, *následník*

Základní tvrzení:

1. *0 je číslo.*
2. *Následník jakéhokoliv čísla je číslo.*
3. *Žádná dvě čísla nemají stejného následníka.*
4. *0 není následník žádného čísla.*
5. *Jakákoliv vlastnost náležící 0 a také následníku každého čísla, který má danou vlastnost, náleží všem číslům.* (princip matematické indukce)

[1] Peano zavádí formální znak Λ pro nepravdu či nesmysl. [Pea67, str. 87]

Na začátku si nadefinujeme, že *následník 0* je 1, *následník 1* je 2, a tak dále. Není těžké ukázat, že Peanovy axiomy nám zaručují, že můžeme v definici čísel takto pokračovat, jak dlouho chceme, a nedojdeme ani k číslu, které jsme již definovali (3. axiom), ani k 0 (4. axiom), a že každé číslo náleží do této řady (2. axiom).

Tento přístup však není dostačující. Russell ukazuje, že Peanovy tři základní ideje, ponechané bez další analýzy, umožňují mnoho různých interpretací [Rus93a, str. 7]. Například:

- Můžeme za 0 vzít 100 a čísla pak budou 100, 101, 102, ... Dodrželi jsme všechna Peanova tvrzení.

- Můžeme ponechat nulu nulou, ale říci, že čísla jsou pouze sudá čísla a následník znamená přičtení dvojky: 0, 2, 4, ... Opět jsme dodrželi všechna Peanova tvrzení.

Máme samozřejmě pocit, že tu není něco v pořádku. Vždyť my přece víme, že takto čísla nefungují, víme, co jsou čísla. Můžeme si tím však bez přesné definice být jisti? Můžeme si být jisti, že všichni vnímáme čísla stejně? Hlavním cílem matematické filosofie je vyjasnit co nejpřesněji všechny termíny, které používáme, a co nejdále oddalovat věty typu: „Všichni víme, co myslíme nulou.“

To si přesně bere za svůj úkol Russell. Pokouší se pouze logickými pojmy a pojmy přirozeného jazyka striktně definovat pojmy jako je *číslo, následník* a několik dalších. Z těchto přirozených definic se poté snaží logicky odvodit všechny Peanovy axiomy a pokusit se tak o předvedení logicismu.

2.6 Definice základních pojmů

Jak jsme zmínili, Russell kritizuje Peana, že se podrobněji nezabývá základními pojmy jako je *číslo*, *nula* a *následník*. Proto Russell nejprve věnuje své úsilí bezchybné definici čísla. Snaží se o takovou definici, která by přesně kopírovala intuici. V kapitole 2 [Rus93a] rozvíjí své myšlenky a uvádí příklady, co by číslo mohlo a nemohlo být. Například říká, že číslo 3 pochopitelně není identické se souborem (tří) termů, ale je to něco, co mají všechny trojice společné, a co je odlišuje od jiných souborů.

Tohoto názoru se poté drží ve svých přesných definicích, které uvádíme dále.

Někde však přeci jen potřebujeme začít, musíme přijmout nějaké pojmy, které nejdou dále analyzovat. Russell je přesvědčen, že *soubor* je něco zcela intuitivního, o čem si můžeme dovolit mluvit a vzít to jako základní kámen bez dodatečných vysvětlení. Všichni máme zcela jasnou představu o tom, co je soubor nějakých věcí (soubor libovolných objektů). Takové pojetí souboru můžeme použít v základech matematiky.

Místo *souboru termů* bude Russell později používat pojem *třídy*[2]. Pojem tříd je však už velmi problematický, jak si ukážeme později v kapitole 3. Musíme s ním proto zacházet opatrně.

Než přistoupíme k samotným Russellovým definicím, připomeňme si pár pojmů, které budeme používat:

- *Výrok* je tvrzení, u kterého je smysluplné uvažovat, zda je pravdivé nebo nepravdivé.
- *Výroková funkce* je tvrzení s (minimálně jednou) volnou proměnnou, za kterou když dosadíme nějaký term, vznikne výrok. Tedy je to funkce, jejímiž hodnotami jsou výroky.[3]
- *Charakteristická funkce* třídy je taková funkce, která pro prvky spadající do třídy dává pravdu a pro ostatní nepravdu.

Nyní již můžeme přistoupit k samotnému Russellovu pokusu o analýzu Peanových axiomů, respektive o nahrazení axiomů pouhými přirozenými či logickými definicemi. Základem jsou pro Russella *termy* a *vlastnosti*:

Termy Co je pro Russella term, onen základní prvek, ze kterého pak skládá třídy?[4] V podstatě cokoliv, o čem můžeme mluvit, tedy buď věci (označované vlastními jmény), nebo pojmy (označované ostatními slovy). Přesně to píše v [Rus10, str. 44]:

[2]Vzhledem k tomu, že Russellův pojem *třída* vychází z pojmu *soubor objektů*, předpokládám, že třídy nemohou obsahovat nějaký prvek vícekrát.

[3]Russell pokud hovoří o funkcích, tak má na mysli výrokové funkce (*propositional funkction*). Stejně tak tomu bude většinou i v této práci.

[4]V originále používané slovo *terms* překládám do češtiny slovem *termy*, mimo jiné kvůli podobnosti se současným pojetím termů v logice.

> „Cokoli může být předmětem myšlení, nebo se může vyskytovat v nějakém pravdivém nebo nepravdivém tvrzení, nebo může být počítáno jako jedno, nazývám term. Je to nejširší slovo ve filosofickém slovníku. (…) Člověk, okamžik, číslo, třída, relace, chiméra nebo cokoli jiného, co může být zmíněno, je určitě term. A popřít, že taková a taková věc je term, musí být vždy nepravdivé.“[5]

Russellovy termy jsou tedy základními prvky našeho systému. V současné logice se udává přesná definice termu (jsou to objektové proměnné, konstanty a funkční symboly aplikované na termy), která do určité míry Russellovu pojetí odpovídá. Term je základním kamenem, není formulí, ale udává, o čem se v logice může mluvit.

Vlastnosti Vlastnosti přiřazujeme termům. Vlastností je například: „být červený“. Z dnešního hlediska bychom řekli, že vlastnosti jsou predikáty nebo i spojení predikátů, v určitém smyslu vlastně formule. Jakmile má vlastnost volnou proměnnou, tak nám vzniká výroková funkce: „t je červené“, formálně pak $\alpha(t)$.

Jazyk Ještě než začneme se samotnými definicemi, uveďme si, co bude náš jazyk a jaké symboly budeme používat. Jak jsme si již uvedli, budeme používat notaci moderní predikátové logiky a pokusíme se udržet rozlišení proměnných:

- proměnné pro termy: $t, t_1, t_2, \ldots$
- proměnné pro vlastnosti: $\alpha, \beta, \ldots$
- proměnné pro třídy: $\Gamma, \Delta, \ldots$
- proměnné pro relace: $R, L, S, \ldots$
- proměnné pro funkce: $f, \mathsf{c}, \ldots$
- logické konstanty: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \leftrightarrow$
- kvantifikátory: $\forall$, $\exists$

[5]Tento i všechny ostatní překlady citací a definic jsou mé vlastní.

- symbol pro relaci náležení: $\in$
- symbol pro relaci rovnosti: $=$
- metasymboly: $\Leftrightarrow, \Rightarrow$

Třídy $\Gamma, \Delta, \ldots$

$$\Gamma = \{t \mid \alpha(t) \text{ pro určité } \alpha\}$$

Třída je soubor termů, který je definovaný určitou vlastností (α). Zdálo by se tedy, že libovolná vlastnost vyděluje třídu. To bychom se však vystavovali Russellovu paradoxu – třídě tříd, které nenáleží samy sobě. S vlastnostmi a obecně s funkcemi musíme proto zacházet opatrně. Větší podrobnosti uvidíme v kapitole o třídách, kde řekneme, že třídu vydělují predikativní vlastnosti, které jsou rozděleny do složité hierarchie.

Podobnost tříd L

$$L(\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow (\exists R)(\Gamma R \Delta), \text{ kde } R \text{ je relace, která je 1-1}$$

Jedna třída je podobná druhé, když existuje 1-1 relace, pro kterou první třída (Γ) je její definiční obor a druhá třída (Δ) je její obor hodnot [Rus93a, str. 17].[6]

Russell ve své definici podobnosti uvádí, že relace R musí být 1-1. Přičemž relace je 1-1 právě tehdy, když pro libovolné prvky x, y splňuje následující: pokud platí xRy, pak neexistuje x' takové, že $x' \neq x$ a $x'Ry$ a naopak pokud platí xRy, pak neexistuje y' takové, že $y' \neq y$ a xRy'. Jinak řečeno, pro každý prvek z Γ existuje maximálně jeden prvek z Δ, se kterým je v relaci R, a zároveň pro každý prvek z Δ existuje maximálně jeden prvek z Γ, se kterým je v relaci R.

K tomu, abychom řekli, že pro každý prvek z Γ existuje *právě* jeden prvek z Δ a naopak, však potřebujeme, aby mezi Γ a Δ existovala *bijekce*. To znamená funkce, která je nejen *prostá* (tedy 1-1), ale i *na*. Funkce je *na*, pokud každý prvek z cílové třídy (Δ) má svůj vzor. S tím ale zřejmě Russell při své definici 1-1 relace počítá.

[6] Pokusím se v následujícím textu vyvarovat jiného použití slova *podobnost*, než jsme uvedli v této definici, vždy to však bude jasné z kontextu.

Podívejme se na to, jaké vlastnosti má L. Každá třída je samozřejmě podobná sama sobě – pro libovolnou Γ platí $L(\Gamma, \Gamma)$. Zároveň platí-li $L(\Gamma, \Delta)$ a $L(\Delta, \Omega)$, pak $L(\Gamma, \Omega)$. A nakonec platí-li $L(\Gamma, \Delta)$, pak platí $L(\Delta, \Gamma)$. Jinak řečeno podobnost tříd je reflexivní, tranzitivní a symetrická relace.

Evidentně platí, že jsou-li dvě třídy podobné, potom mají stejný počet termů. To nám zajišťuje to, že relace R musí být 1-1. Dnešní terminologií bychom řekli, že dvě třídy, které jsou si podobné, mají stejnou mohutnost.

Číslo třídy $\mathsf{c}(\Gamma)$

$$\mathsf{c}(\Gamma) = \{\Delta \mid L(\Gamma, \Delta)\}$$

Číslo třídy Γ je třída všech těch tříd, které jsou jí podobné [Rus93a, str. 18].

Nadefinovali jsme si $\mathsf{c}(\Gamma)$ tak, že je to pro nás funkce, která třídě Γ přiřadí třídu tříd. Vezmeme-li si například třídu Γ obsahující dvojici prvků: $\{t_1, t_2\}$, pak číslo třídy Γ bude třída všech dvojic, tedy třída obsahující právě všechny takové třídy, které obsahují dvojici prvků:

$$\{\{t_1, t_2\}, \{t_3, t_4\}, \{t_5, t_6\}, \ldots\}$$

Neformálně takovéto třídě tříd budeme říkat číslo 2. To nám usnadní používání pojmu čísla třídy ve větách. Vždy si ale u zápisu 2 a dalších čísel musíme uvědomit, že mluvíme o třídě tříd.

Číslo c

$$(\exists \Gamma)(c = \mathsf{c}(\Gamma))$$

Číslo (obecně) je cokoli, co je číslem nějaké třídy [Rus93a, str. 19]. Jinak řečeno, čísla jsou prvky oboru hodnot funkce c (číslo třídy).

Možná to není zcela nejintuitivnější představa čísla, ale je důležité, že jsme se zde vyhnuli definování v kruhu, což je Russellův cíl. Nejdříve jsme nadefinovali *číslo třídy*, bez použití pojmu čísla a až poté jsme definovali *číslo*.

Musíme však dát pozor na to, že naše definice slouží pouze k definování (libovolně velkých, ale) konečných čísel. Relace podobnosti, která je založena na 1-1 relaci, totiž na nekonečných souborech termů nefunguje přesně tak, jak bychom pro naše účely potřebovali. Lze totiž dokázat, že například mezi třídou všech přirozených čísel a třídou všech celých čísel existuje relace 1-1 (viz např. kapitola 6 [BŠ86]).

Důležitý je také posun, který dělá Russell oproti Fregově třídové definici čísel. Ač jsou tyto dvě teorie zpočátku velmi podobné (Russell se nechává Fregem inspirovat), v několika důležitých bodech se liší. Jeden z nich je Russellův pohled na třídy. Jak jsme již zmínili a jak ještě podrobně rozebereme, třídy jsou pro Russella pouhé logické fikce, zástupné znaky, které nemají existenci samy o sobě. Proto Russell nepřipouští, že by třída obsahující všechny jednoprvkové třídy mohla také obsahovat třídu obsahující tuto třídu. Jinak řečeno, nazveme-li třídu všech jednoprvkových tříd

$$\mathbf{1} = \{\{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \ldots\}$$

potom se u Russella nemůže stát:

$$1 = \{\{\mathbf{1}\}, \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}, \ldots\}$$

Tomuto Russell říká *zmatení typů*. Ve své teorii typů rozděluje do různých typů termy, třídy termů, třídy tříd, atd. Oproti tomu ve Fregově teorii se tomuto problému nevyhneme.

Nyní již můžeme přistoupit k definicím pojmů *nula* a *následník*, ze kterých poté nadefinujeme pojem *přirozeného čísla*. Abychom však mohli postoupit tak daleko, musíme si uvést, že Russell přijímá Peanův pátý axiom, matematickou indukci, ne jako princip, ale jako definici. Říká, že na některá čísla tuto definici můžeme aplikovat a na některá ne. Nadefinujeme si přirozená čísla tak, že to budou právě ta čísla, na které lze matematickou indukci aplikovat. Princip matematické indukce můžeme totiž dle Russella přeformulovat jako: *co může být odvozeno z dalšího na další, může být odvozeno z prvního na poslední* [Rus93a, str. 27]. Přičemž to pochopitelně může nastat pouze tehdy, je-li počet prostředníků (počet kroků mezi prvním a posledním) konečný, což znamená, že matematická indukce bude platit právě pro ta čísla, která jsou konečná. Nesmíme však zapomínat, že mluvíme o původní druhořádové matematické indukci, ne o indukci jak ji používáme dnes. Podrobně se tomuto tématu budeme věnovat v kapitole 5. Nyní pokračujme v definicích základních pojmů:

Nula 0

$$0 = \{\emptyset\}$$

Nula je třída, jejíž jediný člen je prázdná třída[7], přičemž prázdná třída je třída neobsahující žádný term [Rus93a, str. 23].

Lze to zapsat také jako $0 = \{\{\}\}$, ale budeme se držet prvního způsobu, protože se zdá být o něco přehlednější a v teorii množin dnes používáme symbol $\emptyset$ pro prázdnou množinu.

O prázdné třídě lze říci, že ji vydělují všechny sporné vlastnosti, či jakékoli jiné nesmyslné vlastnosti, pro které neexistuje žádný prvek, který by je splňoval.

Musíme si dát velký pozor u této definice a nikdy nezaměňovat prázdnou třídu s nulou. Nula je speciální druh třídy tříd, je to třída obsahující právě jednu třídu. Prázdná třída je třída neobsahující žádný prvek.

Podívejme se na to, zda nula je skutečně číslem (což je vlastnost, kterou bychom chtěli, aby nula splňovala). Použijeme-li naší definici podobnosti, pak $\mathsf{c}(\emptyset) = \{\Delta \mid L(\emptyset, \Delta)\}$. K třídě neobsahující žádný prvek můžeme libovolnou 1-1 relací přiřadit opět pouze třídu neobsahující žádný prvek, dostaneme proto $\mathsf{c}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Nula je tedy zároveň číslem třídy a z definice čísla obecně i číslem.

Následník S

$$S(\mathsf{c}(\Gamma)) = \mathsf{c}(\Gamma \cup \{t\}), \text{ kde } t \notin \Gamma.$$

Následník počtu termů ve třídě Γ je počet termů ve třídě obsahující Γ spolu s t, kde t je term nenáležící do třídy Γ [Rus93a, str. 23]. (Russell píše *počet termů ve třídě*, což není definovaný pojem, proto budeme používat v definici *číslo třídy*, což je zároveň i číslo.)

Následník v Russellově pojetí je funkce mezi čísly, která nejprve pro danou Γ vytvoří několik tříd (pro libovolný term, který Γ ještě neobsahuje: $\Gamma \cup \{t_1\}$, $\Gamma \cup \{t_2\}, \ldots$), které jsou si ale všechny podobné, existují mezi nimi 1-1 relace, takže mají stejné číslo třídy.

Neformálně vidíme, že následník čísla třídy Γ by měl mít právě o jedno větší mohutnost než číslo třídy Γ, protože jsme přidali právě jeden term ($S(\mathsf{c}(\Gamma)) = \mathsf{c}(\Gamma) + 1$, jak to původně definuje Peano).

[7] Anglicky *null-class*.

Dědičná vlastnost DV

$$\alpha \in DV \Leftrightarrow (\forall c)(\alpha(c) \rightarrow \alpha(S(c)))$$

Vlastnost je dědičná v sérii (přirozených) čísel, když náleží-li c, pak náleží také následníku c [Rus93a, str. 21].

Neformálně řečeno, bude-li číslo c mající vlastnost α například 100, pak je to dědičná vlastnost, pokud ji má i následník čísla c, tedy 101. Jakmile však vlastnost α má 101, pak ji musí mít i následník čísla 101, číslo 102. Takto musíme postupovat dále a dále, lze tedy použít matematickou indukci a vidíme, že vlastnost je dědičná právě tehdy, když ji mají i všechna čísla větší než 100.

To nám nabízí triviální příklad dědičné vlastnosti: *být větší než 100.* Pro každé číslo, které je větší než 100 platí, že i následník tohoto čísla je větší než 100. Později si ukážeme, že důležitým příkladem dědičné vlastnosti je *být konečné číslo.*

Všimněme si, že dědičná vlastnost, stejně jako většina ostatních vlastností, pěkně koresponduje přirozenému pojetí této vlastnosti. Vlastnost je dědičná, když ji mají mé děti, jejich děti, děti jejich dětí, atd. To znamená, že ji mají mí následníci.

Dědičná třída DT

$$\Gamma \in DT \Leftrightarrow (\forall c)(c \in \Gamma \rightarrow S(c) \in \Gamma)$$

Třída je dědičná, jestliže je-li číslo c členem třídy, pak následník c také [Rus93a, str. 22].

Dědičná třída má velmi podobné vlastnosti jako dědičná vlastnost: je-li dané číslo c například 100, pak třída obsahující 100 je dědičná, pokud obsahuje i následníka čísla 100, číslo 101. Jakmile však obsahuje číslo 101, musí obsahovat i 102, tedy i 103 a takto můžeme pokračovat. Třída obsahuje spolu s $c = 100$ i $S(c)$, $S(S(c))$, atd. Vypadá tedy následovně: $\{100, 101, 102, 103, \ldots\}$, obsahuje všechna čísla větší než c. Zároveň dědičná třída obsahující $c = 100$ může vypadat i následovně:

$$\{98, 99, 100, 101, 102, \ldots\}$$

$$\{0, 1, 2, \ldots, 100, 101, 102, \ldots\}$$

Z našich definic plyne, že každá dědičná vlastnost určuje dědičnou třídu. Platí-li vlastnost α o c, pak platí i o $S(c)$, atd. Vlastnost α tedy vyděluje třídu obsahující c, $S(c)$, atd. Viditelné je to na příkladě dědičné vlastnosti: *být větší než* c, ta určuje právě třídu obsahující c a všechna větší čísla.

Induktivní vlastnost IV

$$\alpha \in IV \Leftrightarrow (\alpha \in DV \wedge \alpha(0))$$

Vlastnost je induktivní, když je to dědičná vlastnost patřící nule [Rus93a, str. 21].

Uvidíme, že vlastnost je induktivní, pokud náleží každému přirozenému číslu. Díky tomu také Russell pro přirozená čísla někdy používá termín *induktivní čísla*. Induktivní vlastnost splňuje první část matematické indukce.

Induktivní třída IT

$$\Gamma \in IT \Leftrightarrow (\Gamma \in DT \wedge 0 \in \Gamma)$$

Třída je induktivní, když je to dědičná třída, jejímž členem je nula [Rus93a, str. 21].

Pro přirozená čísla, jak hned uvidíme, si zvolíme takovou definici, že budou tvořit induktivní třídu.

Potomci čísla P

$$P(c) = \bigcap\{\Gamma \mid \Gamma \in DT \text{ a } c \in \Gamma\}$$

Potomci daného (přirozeného) čísla c (s ohledem na relaci *bezprostřední předchůdce*) jsou všechny termy patřící každé dědičné třídě, do které dané číslo náleží. Kde relace *bezprostřední předchůdce* je opačná k relaci (funkci) následník. [Rus93a, str. 22]

Jinak řečeno, je to vlastně nejmenší třída, která splňuje požadované vlastnosti, totiž že obsahuje dané číslo c a že je to dědičná třída. Ukažme si, opět ne zcela formálně, konkrétní příklad: vezměme si $c = 5$, potom například $c \in \{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$, $c \in \{4, 5, 6, 7, \ldots\}$ a $c \in \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Potomci c jsou nadefinováni jako průnik všech těchto tříd: $\{5, 6, 7, \ldots\}$. Tuto definici splňuje vždy právě jedna třída.

Je jasné, že potomci libovolného čísla musí být opět čísla, protože relace následníka je definována tak, že každému číslu přiřadí vždy (právě jedno) číslo, a dědičná třída je definována právě z relace následníka.

Díky našim definicím potomek nějakého čísla je vždy neprázdná třída, protože existuje vždy minimálně jedna třída, která je dědičná a obsahuje dané číslo, a zároveň, je-li více tříd, které jsou dědičné a obsahují dané číslo, pak v průniku těchto tříd bude minimálně dané číslo.

Kvůli technickým formalitám děláme malý ústupek od intuitivního pohledu na potomky v přirozeném jazyce, který nám říká, že nejsem potomkem sám sebe. Pro potřeby definice přirozených čísel, která bude nyní následovat, právě z definice potomků přijímáme, že každé číslo je potomkem sebe sama. Kdo má ostatně více dědičných vlastností než právě on sám.

Přirozená čísla n

$$c \in \mathbf{N} \Leftrightarrow c \in P(0)$$

Přirozená čísla jsou potomci 0 s ohledem na relaci bezprostředního předchůdce [Rus93a, str. 22].

Z předchozí definice potomků to znamená, že jsou to taková čísla, která náleží do všech dědičných tříd, které obsahují nulu (náleží do všech induktivních tříd). Přirozená čísla jsou třídou termů, kde termy jsou čísla (třídy tříd). To splňuje právě třída: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, přesně taková třída, kterou bychom chtěli. Dnes se pro tuto třídu používá označení $\mathbf{N}$.

Přirozená čísla jsou právě ta čísla, která splňují matematickou indukci. Ke každému přirozenému číslu umíme dojít z nuly krok za krokem pomocí funkce následníka. Každé přirozené číslo je proto konečným číslem. Russell to nerozebírá tak podrobně, jak by bylo třeba, my se na toto téma zaměříme velmi podrobně v kapitole 5.

Russell z důvodu, že přirozená čísla jsou pro něj přesně ta čísla, která splňují matematickou indukci, hovoří o přirozených číslech ve stejném kontextu jako o *induktivních číslech.* Dále mluví-li o *kardinálních číslech,* pak má na mysli čísla tříd, což jsou pro něj celá čísla tak, jak je běžně užíváme, a některá nekonečná čísla. Mluví-li o číslech bez přívlastku, pak mluví o kardinálních číslech. My si definice dalších čísel (celých, racionálních, atd.) necháme do kapitoly 4.

Uveďme si jen na okraj poměrně překvapivé pozorování ohledně Russellovy práce. Ve svých definicích základních pojmů, které jsme se nyní pokusili uvést, striktně nerozlišuje termíny *číslo* (c) a *přirozené číslo* (n). Už u definice dědičné vlastnosti a dědičné třídy, kterou pak používá pro přesnou definici přirozených čísel, používá pojem přirozeného čísla. My uvádíme definici pomocí čísla (obecně), jinak to ani není možné, pokud nechceme definovat kruhem, což je přesně to, proti čemu Russell bojuje. Nutno však podotknout, že se dá nahlédnout, že přirozená čísla (n) jsou třídou čísel (c), která jsou potomkem nuly, a proto se nedopouští velké chyby. Je to však trochu překvapivé u Russella, který hlásá, že chce ve své práci dosáhnou naprosté přesnosti a jednoznačnosti.

2.7 Nepotřebnost axiomů

V předchozí sekci jsme si nadefinovali Peanovy základní ideje pouze pomocí tříd a idejí logiky, přičemž pojem přirozeného čísla jsme definovali pomocí zbylých dvou idejí (nula a následník). V kapitole 3 ukážeme, že třídy umíme v podstatě převést na výrokové funkce, které je definují, a díky tomu budeme umět Peanovy základní ideje nadefinovat pouze pomocí idejí logiky.

Teď si ještě ukážeme, že se nám podařilo definovat základní pojmy tak, že již není zapotřebí explicitních Peanových axiomů, ale že všechny axiomy z těchto definic vyplývají.

Proberme si postupně pět Peanových základních tvrzení a ukažme si, že je umíme z našich definic logicky odvodit:

1. *0 je přirozené číslo*

   U definice nuly jsme si ukázali, že nula je číslo. Přirozená čísla jsou všechna čísla, která jsou potomkem nuly. Přesně z toho důvodu jsme si nadefinovali potomky tak, že libovolné číslo je potomkem sebe sama – nula je potomkem nuly, tedy je to přirozené číslo.

2. *Následník jakéhokoliv přirozeného čísla je přirozené číslo*

   Následník je funkce, která přiřadí číslu třídy jiné číslo třídy. Číslo třídy je vždy zároveň i číslem (obecně). Je-li dané číslo přirozené číslo, to znamená, že je to číslo, které náleží do potomků nuly, pak i následník takového čísla je potomkem nuly (z definice potomků vycházející z dědičné třídy), a proto přirozeným číslem.

3. *Žádná dvě přirozená čísla nemají stejného následníka*

   Zde může nastat problém, pokud by universum bylo konečné. Předpokládejme, že by byl počet individuí v universu 10. Následníkem 10 je 11, což by ale byla prázdná třída (neměla by žádný člen, ničeho by nebylo 11). Následníkem 11 je 12, což by ale opět byla prázdná třída, takže 10 a 11 by měly stejného následníka. My však (právě i z těchto důvodů) budeme předpokládat, že počet individuí v universu není konečný. Přirozená čísla jsou čísla a z definice následníka vidíme, že následník vznikne přidáním přesně jednoho termu a tak není možné, aby dvě různá čísla měla stejného následníka. Budeme-li postupovat obměnou: máme-li dva následníky $S(c_1)$ a $S(c_2)$, kteří se rovnají (existuje 1-1 relace R mezi jejich termy), pak i čísla c_1 a c_2, která vzniknou odebráním jednoho termu, musí být stejná, můžeme totiž z první třídy odebrat libovolný term t a z druhé třídy odebrat term, který byl původně s t spojen 1-1 relací R a na ostatních termech nám zůstane zachována relace R, takže třídy budou opět podobné.

4. *0 není následník žádného přirozeného čísla*

   Přirozená čísla jsou definována jako potomci nuly a tedy nemáme žádné přirozené číslo, ke kterému bychom mohli něco přidat a dojít k nule. Před nulou nic není.

5. *Jakákoliv vlastnost náležící 0 a také následníku každého přirozeného čísla, který má danou vlastnost, náleží všem přirozeným číslům*

   Russell si z tohoto principu (principu matematické indukce) vytvořil definici, kterou prostě přijal do svého systému. Zdá se nám divné, udělat si jen tak z axiomu pouhou definici, Russell si to však může dovolit, protože přirozená čísla jsou definována na základě pojmu následník. Začínáme nulou a přidáme následníka 0, pak přidáme následníka následníka nuly atd. Tedy vlastnost, která patří nule a také následníku každého přirozeného čísla, musí patřit všem přirozeným číslům. Princip matematické indukce odpovídá definici induktivní vlastnosti a naše definice přirozených čísel nám v podstatě říká, že to jsou ta čísla, která splňují všechny induktivní vlastnosti. Ještě podrobněji se matematické indukci a rozboru přirozených čísel budeme věnovat v kapitole 5.

3 Teorie tříd

V této kapitole se podrobně podíváme na to, co jsou *třídy.* V předchozí kapitole jsme ukázali Russellovu analýzu Peanovy aritmetiky, která kromě logických a jazykových pojmů vychází z pojmu tříd. Je proto načase podrobně si rozebrat, co jsou třídy. Ukážeme si, co od tříd očekáváme, jak je můžeme nahradit výrokovými funkcemi a rozdělíme si funkce do hierarchie typů a řádů.

3.1 Třídy

Stojíme tedy před zásadní otázkou, co jsou *třídy.* Musíme se pochopitelně vyvarovat definici kruhem, a proto hledáme definici, která bude prosta jakékoliv zmínky o třídách. Dle Russella potom budeme schopni říci, že symboly pro třídy jsou pouhé konvence, které nereprezentují objekty nazývané třídy. Ve skutečnosti jsou totiž třídy pouhé logické fikce, či neúplné symboly. (Definici neúplných symbolů se věnujeme níže.)

Ukážeme si, že třídy nemohou být nějakým druhem individuí. Nejdříve však poznamenejme, že Russell chápe *individua* jiným způsobem, než jak se na ně někdy nahlíží. Podle Russella je to takový objekt, který může být pojmenovaný vlastním jménem, přičemž *vlastní jména* jsou ty termy (zástupné znaky), které se v tvrzení mohou vyskytovat pouze jako předměty. Například ve větě: „Brutus zabil Caesara“ mámě dvě individua, Bruta a Caesara. [Rus93a, str. 142] V jazyce moderní logiky bychom použili termín (individuová) *konstanta.*

Proč tedy nemohou být třídy takovýmto druhem individuí? Kdyby byly druhem individuí, pak bychom mohli chtít vzít třídu (Γ), která obsahuje všechna individua. Jenže pokud třída je také druh individua, potom do dané třídy všech individuí musíme zařadit i naši třídu Γ. Což nás ale vede do bludného kruhu. A co teprve, kdybychom chtěli třídu všech tříd, které nejsou svým vlastním prvkem. Navíc platí, že počet podmnožin je vždy větší než původní množina, takže počet tříd je větší než počet individuí. Ze všech těchto důvodů nemohou být třídy druhem individuí.

Zároveň třídu nemůžeme chápat ani jako určitou *hromadu.* Potom by to totiž bylo v rozporu s tím, že můžeme mít prázdnou třídu, což evidentně není žádná hromada. Také si musíme uvědomit, že třída obsahující jeden prvek není totožná s tímto prvkem.

Co nakonec ale třídy jsou? V kapitole 2 [Rus93a] Russell píše, že třída a její charakteristická funkce (tzn. funkce, která tuto třídu definuje) jsou prakticky zaměnitelné. Není to však tak jednoduché, protože jedné třídě může náležet více charakteristických funkcí. Z tohoto důvodu nemůžeme tuto výrokovou funkci s danou třídou ztotožnit.

Nadefinujme si dvě výrokové funkce jako *formálně ekvivalentní*, pokud platí:

$$(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$$

Chtěli bychom, aby žádné dvě odlišné třídy neměly stejné členy, a tedy aby dvě formálně ekvivalentní funkce označovaly stejnou třídu.

V kapitole 17 [Rus93a] definuje Russell podmínky, které jsou pro třídy nutné a zároveň postačující:

1. Každá výroková funkce musí vymezovat třídu obsahující ty argumenty, pro které je funkce pravdivá.

2. Dvě formálně ekvivalentní výrokové funkce musí vymezovat stejnou třídu a dvě výrokové funkce, které nejsou formálně ekvivalentní, musí vymezovat různé třídy.

3. Potřebujeme způsob, jak definovat třídy tříd (k definici kardinálních čísel). Běžná matematická definice: „Kombinace n věcí *m-krát*“ představuje třídu tříd.

4. Za všech okolností musí být nesmyslné (ne nepravdivé) předpokládat, že by třída byla členem sama sebe nebo nebyla členem sama sebe.

5. Musí být možné tvořit výroky o *všech* třídách, které se skládají z individuí nebo objektů nějakého logického *typu*. To je však velmi obtížné, protože může být dokázáno, že je nemožné mluvit o všech výrokových funkcích, které mohou mít argumenty nějakého daného typu.

Třetí podmínka nám udává, jak je možné hovořit o třídě obsahující třídy. V kapitole o definici pojmů jsme si ukázali, že číslo je určitým druhem třídy tříd. Je to tedy nutná podmínka. Russell si volí kombinatorickou definici: „vezměme n věcí *m-krát*“. Pro nás to znamená: vezměme si n termů, udělejme z nich třídu a to proveďme *m-krát*. Máme m tříd o n prvcích, což nám definuje číslo n.

První dvě podmínky nám dohromady dávají, že máme vždy právě jednu třídu pro každou skupinu formálně ekvivalentních výrokových funkcí. Například máme právě jednu třídu jak pro výrokovou funkci „x je člověk“, tak pro výrokovou funkci „x je neopeřený dvounožec“.

Jestli však budeme chtít tvrdit, že každý výrok o třídách lze nahradit výrokem o výrokových funkcích, musíme být obezřetnější. Uvažujeme-li o výrocích o funkcích, neboli funkcích funkcí, je nutné rozdělit si je na *extenzionální* a *intenzionální*. Nadefinujeme si výrok hovořící o funkci $\varphi(x)$ jako *extenzionální funkci funkce* $\varphi(x)$, pokud při substituci formálně ekvivalentní funkce zůstane výrok pravdivý. V opačném případě nazveme funkci *intenzionální*. Příkladem intenzionální funkce funkcí může být: „Věřím, že všichni lidé jsou smrtelní“. Dosadím-li za „všichni lidé“, „všichni rozumní živočichové“, může dojít ke změně pravdivostní hodnoty, pokud si například myslím, že Fénix je nesmrtelný rozumný živočich.

Za funkce vymezující třídu budeme proto považovat pouze extenzionální funkce funkcí. Jenom ty nám budou moci vymezovat třídu. Kdybychom totiž dovolili i intenzionální funkce funkcí, pak by se mohlo stát, že výrok o třídě by mohl být pravdivý, zatímco výrok o funkci vymezující tuto třídu by mohl být nepravdivý. Abychom však neměli pocit, že jsme se museli nějak omezit, ukažme si, že pro každou funkci funkce (extenzionální či intenzionální) můžeme odvodit extenzionální funkci funkce, kterou si nazveme *odvozená extenzionální funkce*. Mějme například funkci, která přisuzuje funkci $\varphi(x)$ vlastnost f. Pak odvozená extenzionální funkce bude: „Existuje funkce mající vlastnost f a je formálně ekvivalentní $\varphi(x)$.“ Ukažme si to na na našem předchozím příkladě intenzionální funkce funkce: „věřím, že všichni lidé jsou smrtelní“, což je funkce funkce „x je člověk“. Odvozená extenzionální funkce pak bude: „existuje nějaká funkce, která je formálně ekvivalentní s x *je člověk* a je taková, že věřím, že vše, co ji splňuje, je smrtelné“. [Rus93a, str. 187]

Abychom se tedy dobrali závěru, že každý výrok o třídách umíme nahradit výrokem o výrokových funkcích, nadefinujme si následující:

> Tvrdit, že *třída vymezená funkcí* $\varphi(x)$ *má vlastnost* f znamená tvrdit, že $\varphi(x)$ splňuje extenzionální funkci odvozenou z f.

Takto vymezené třídy splňují první čtyři podmínky. (Podrobněji viz kapitola 2 [RW27].) Jediná podmínka, která je obtížnější a zatím nevyřešená, je pátá podmínka. Obtížnost této podmínky je spojena s teorií typů, kterou si rozebereme v následující sekci.

3.2 Teorie typů

Russell ve své (rozvětvené) teorii typů rozděluje na typy nejen výrokové funkce, ale i výroky. Každá výroková funkce, jako součást svého významu, určuje nějakou *totalitu*[8], přesněji totalitu svých možných argumentů. Totalita je určitý celek. V našem případě je to soubor všech možných argumentů pro danou výrokovou funkci. Dnes bychom řekli, že *totalita* znamená *universum diskursu.* Jestliže daná výroková funkce může mít za argumenty pouze individua, pak tato funkce předpokládá jen totalitu individuí. Jakmile však výroková funkce může mít jako argumenty i funkce, potom jako součást svého významu předpokládá totalitu funkcí. Totalita funkcí je velmi problematická. Funkce nemůže obsahovat jako argument sama sebe, protože potom by se prvek totality odkazoval k celé totalitě a to by vedlo k bludnému kruhu. Jednalo by se o tzv. nelegitimní totalitu. Princip bludného kruhu Russell definuje v [RW27, str. 37] následovně:

> „Cokoli obsahuje všechny prvky nějakého souboru, nesmí být jedním z těchto prvků.“

Řešením bude teorie typů. Potřebujeme rozdělit výrokové funkce do hierarchie *typů*, kde žádný typ nebude referovat ke všem těmto typům.

3.2.1 Druhy pravdivosti funkce

Úvahám o typech a řádech výrokových funkcí předchází úvahy o rozdělení různých významů *pravdy* a *nepravdy* v souvislosti s pravdivostí či nepravdivostí nějaké výrokové funkce.

[8] Anglicky *totality.*

Vezměme si výrokovou funkci $\varphi(x)$ a dosaďme si za proměnnou x konkrétní objekt a. Potom, chceme-li mluvit o pravdivosti funkce $\varphi(a)$, budeme mluvit o *první pravdivosti*. Přičemž *první pravdivost* je relativní, to znamená, že je prvním druhem pravdivosti v tomto konkrétním kontextu. Vezměme nyní výrok $(\forall x)\varphi(x)$. Chceme-li tvrdit, že tento výrok je pravdivý, pak to znamená tvrdit, že pro každý argument a, $\varphi(a)$ má *první pravdivost*. Říkáme, že $(\forall x)\varphi(x)$ má *druhou pravdivost*. Pro $(\exists x)\varphi(x)$ říkáme, že má *druhou pravdivost*, pokud existuje a, pro které $\varphi(a)$ má *první pravdivost*. Podobně můžeme definovat druhy nepravdivosti. [RW27, str. 42]

Druhy pravdivosti (nepravdivosti) jsou rekurzivní definice, které v podstatě předcházejí rozdělení funkcí do řádů. Řády budou zavedeny jako součást rozvětvené hierarchie typů.

3.2.2 Teorie typů – první pokus

Pokusme se nyní o první náčrt naší hierarchie typů. Začneme s a, spolu s dalšími termy, které mohou být argumenty daných funkcí, kterým je a argumentem. Dále bychom chtěli pokračovat funkcemi, pro které je a možným argumentem, a dále funkcemi, kterým takové funkce mohou být argumentem:

1. $\varphi(x)$, $\psi(x, y)$ (kde x je proměnná, která může nabývat hodnoty a) jsou *funkce prvního typu*

2. $\alpha(\varphi(x))$, $\beta(\psi(x, y), \varphi(x))$, $\gamma(\varphi(x), y)$ jsou *funkce druhého typu*

3. ...

Bohužel však tato hierarchie je příliš jednoduchá na to, abychom s ní vystačili. Zjišťujeme totiž, že funkce, které mohou mít a jako argument (jsou pro a signifikantní, smysluplné), formují nelegitimní totalitu (spadají do bludného kruhu) a samy vyžadují rozdělení do hierarchie funkcí:

Definujme jako a-*funkce* takové funkce, které mohou mít a jako argument. Vezměme si dále soubor všech a-funkcí a formulujme tvrzení „a splňuje všechny funkce náležející do daného souboru“. Pokud v tomto tvrzení nahradíme a libovolnou proměnnou, získáme a-funkci. Tato nová funkce však nemůže být členem definovaného souboru, protože referuje k celému souboru, a to je z principu bludného kruhu nemožné. [RW27, str. 49] Přehlednější se to může zdát na příkladu paradoxu lháře. Lhář říká: „Vše, co tvrdím, je nepravdivé.“ Ve svém výroku se lhář snaží zahrnout do totality možných argumentů výroku samotný výrok (ve *vše, co tvrdím* se skrývá i právě tvrzená věta) a tím vzniká bludný kruh. [Rus93b, str. 26]

Zdá se, že ať máme jakýkoliv soubor a-funkcí, vždy tu bude jiná a-funkce, která leží mimo náš soubor. Vidíme, že problém vzniká, když chceme kvantifikovat. To znamená, jakmile chceme vypovídat něco o *všech* možných hodnotách nebo o *nějaké* možné hodnotě. Takové proměnné nazývá Russell *zdánlivé proměnné.* Dnes těmto proměnným říkáme *vázané.*

Stojíme před nutností zavést rozvětvenou teorii typů.

3.2.3 Rozvětvená teorie typů

Rozvětvená teorie typů znamená, že si zavedeme nejen hierarchii typů, ale i hierarchii řádů, kterou budeme definovat podle zdánlivých (tj. kvantifikovaných) proměnných. Nejprve si však musíme uvést dvě základní definice:

Elementární výroky jsou výroky, které neobsahují funkce ani žádné zdánlivé proměnné. Například výrok „Sokrates je člověk.“

Elementární funkce je prostá aplikace predikátu na proměnnou: $P(x)$.

Russell v *Principiích* nedefinuje, co přesně znamená být prvního nebo druhého typu. Hlavní definicí je *být stejného typu* [RW27, str. 133]:

Použijeme rekurzivní definici, kdy vyšší typy předpokládají definici nižších typů. Říkáme, že u *a* v *jsou stejného typu, pokud:*

1. u *a* v *jsou individua*
2. u *a* v *jsou elementární funkce, které mají argumenty stejného typu*
3. u *je funkce a* v *je její negace*

4. u *je* $\varphi(x)$ *nebo* $\psi(x)$, *a* v *je* $\varphi(x) \vee \psi(x)$, *kde* $\varphi(x)$ *a* $\psi(x)$ *jsou elementární funkce*

5. u *je* $(\forall y)\varphi(x, y)$ *a* v *je* $(\forall z)\psi(x, z)$, *kde* $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ *jsou stejného typu*

6. u *a* v *jsou elementární tvrzení*

7. u *je výrok a* v *je* $\neg u$

8. u *je* $(\forall x)\varphi(x)$ *a* v *je* $(\forall y)\psi(y)$, *kde* $\varphi(x), \psi(x)$ *jsou stejného typu*

Definice nám tedy například říká, že funkce s různým počtem argumentů jsou různého typu, nebo že funkce s argumenty různého typu musí být různého typu.

Dále Russell rozděluje podle zdánlivých proměnných funkce do řádů:
Funkci, která neobsahuje žádnou zdánlivou proměnnou, nazveme *maticí* našeho původního výroku. Jakékoliv další výroky můžeme dostat přeměnou nějakých argumentů na funkci na zdánlivých proměnných. (Dnes bychom řekli, že některé proměnné kvantifikujeme.)

Nejdříve budeme definovat matice prvního řádu a z nich funkce prvního řádu. Pak lze postoupit k maticím druhého řádu a funkcím druhého řádu a dále k vyšším řádům:

1. (a) *Prvořádové matice* jsou matice, které mají například tyto formy:

$$\varphi(x), \psi(x, y), \chi(x, y, z, \ldots), \ldots$$

   Všechny argumenty vyskytující se v těchto maticích jsou individua a tedy nepředpokládají žádnou totalitu funkcí.[9]

   (b) *Prvořádové funkce* jsou funkce argumentu x, jejichž jediné proměnné jsou individua. V našem příkladu jsme je získali z funkcí ψ a χ přeměnou nějakých argumentů ve zdánlivé proměnné:

$$(\exists y)\psi(x, y), (\forall y)(\forall z)\chi(x, y, z), (\forall y)(\exists z)\chi(x, y, z)$$

[9] Termín *totalita* je vysvětlen na str. 31.

Všechny tyto funkce nepředpokládají žádnou totalitu kromě totality individuí.

2. (a) *Druhořádové matice* jsou matice obsahující jako argumenty individua a prvořádové funkce (ale jako všechny matice neobsahují zdánlivé proměnné).

   (b) *Druhořádové funkce* jsou druhořádové matice nebo ty funkce, které jsou odvozené z takové matice přeměnou nějakých argumentů ve zdánlivé proměnné.

3. Stejným způsobem můžeme utvořit i *matice třetího řádu* a *funkce třetího řádu* a další vyšší řády.

Jestliže nejvyšší řád proměnné vyskytující se ve funkci (jako argument, nebo zdánlivá proměnná) je funkce řádu n, pak funkce, ve které se vyskytuje, je řádu minimálně $n + 1$. Nedojdeme však nikdy k funkcím nekonečného řádu, protože počet argumentů a zdánlivých proměnných ve funkci musí být konečný, to znamená, že každá funkce musí být konečného řádu. [RW27, str. 53]

Pro názornost si uveďme Russellův příklad o *velkém generálovi*:

> Velký generál je ten, jenž *má všechny vlastnosti, které dělají velkého generála velkým generálem.* Tedy aby x bylo velkým generálem, musí splňovat například prvořádovou vlastnost *x je statečné.* Jenže samotná vlastnost *mít všechny vlastnosti, které dělají velkého generála*, bude určitě také náležet velkému generálovi. Je to však vlastnost (funkce) vyšší řádu než argumenty této vlastnosti, přes kterou proto nesmíme kvantifikovat uvnitř vlastnosti (nespadá do oboru možných argumentů pro kvantifikátor *všechny vlastnosti*).

3.2.4 Predikativní funkce

Zavedeme si pro naše potřeby pojem *predikativní funkce*[10]. Funkce jedné proměnné je predikativní, když je přesně o jedna vyššího řádu než její argument. Funkce mající více argumentů je predikativní, pokud je řádu

[10] Anglicky *predicative function.*

o jedna vyšší než nejvyšší řád funkce vyskytující se mezi argumenty. Predikativní funkci budeme značit $\varphi!$.[11]

Russell uvádí, že všechny možné funkce v naší hierarchii funkcí mohou být získány pomocí predikativních funkcí a zdánlivých proměnných. Prvořádové funkce jsou vždy predikativní (obsahují jako argumenty pouze individua). Druhořádové funkce jsme si nadefinovali jako $(\forall\varphi)f!(\varphi!, x)$ nebo $(\exists\varphi)f!(\varphi!, x)$, kde $f!$ je druhořádová funkce a $\varphi!$ je prvořádová funkce. Obecně, ne-predikativní funkci n-tého řádu získáme z predikativní funkce n-tého řádu přeměnou všech argumentů n-1-tého řádu na zdánlivé proměnné. Tedy jako proměnné nám úplně stačí zavést predikativní funkce a žádné jiné. Navíc, k získání funkce jedné proměnné x, nepotřebujeme víc než predikativní funkci dvou proměnných. Jedna proměnná zůstane x a druhou proměnnou – funkcí – nahradíme zbytek původní funkce. Například funkci $(\forall\psi)f!(\varphi!, \psi!, x)$ převedeme na funkci $f!(\chi!, x)$, kde $\chi!$ je predikativní funkce obsahující $\varphi!$ a $\psi!$. [RW27, str. 54]

3.2.5 Řády pro výroky

Russell rozděluje do typů také výroky. Připomeňme si, že výroky mohou obsahovat pouze zdánlivé proměnné – ne skutečné, neomezené kvantifikátory.

Nejprve definuje *elementární výroky*: jak jsme již uvedli, jsou to výroky, které neobsahují funkce ani žádné zdánlivé proměnné.

Prvořádové výroky jsou výroky, které nejsou elementární, neobsahují žádné funkce a obsahují pouze ty zdánlivé proměnné, které mohou mít za argumenty individua. Jsou formy $(\forall x)\varphi!(x), (\exists x)\varphi!(x)$ (predikativní funkce mající za argumenty pouze individua).

Elementární ani prvořádové výroky nepředpokládají žádnou totalitu mimo totality individuí. Funkce obsahující elementární a prvořádové výroky, např. $f((\forall x)\varphi!(x))$ mohou být vždy redukovány na funkce nějaké prvořádové funkce. Tedy výrok zahrnující totalitu prvořádového výroku může být redukován na výrok zahrnující totalitu prvořádových funkcí.

Stejný postup můžeme aplikovat i na vyšší řády, což znamená, že hierarchie výroků může být odvozena z hierarchie funkcí. Můžeme defi-

[11] Ve značení predikativní funkce přejímám Russellovu notaci.

novat výrok n-tého řádu jako výrok, který zahrnuje zdánlivou proměnnou $n-1$-tého řádu v hierarchii funkcí. [RW27, str. 55]

3.2.6 Typická nejednoznačnost

Dovolme si pár poznámek o nejasnosti *Principií*. Na první pohled není zřejmé, zda Russell s Whiteheadem jasně dodržují oddělování jazyka-objektu a metajazyka. Respektive mnoha filosofům se zdá, že toto rozdělení nedodržují. Uvádí se to právě na příkladu definice *být stejného typu*, kterou jsme si uvedli výše. Při nedodržování rozdílu mezi formálním jazykem a metajazykem definice *být stejného typu* by sama porušovala typové omezení.

S tím úzce souvisí diskuse o povaze Russellových *výrokových funkcích*. Po vzoru Raclavského [Rac13] můžeme rozdělit tuto polemiku na dvě hlavní interpretace:

1. *Realistická interpretace* se přiklání k názoru, že výrokové funkce jsou abstraktní platónské entity, a že v *Principiích* není rozlišen jazyk-objekt a metajazyk.

2. *Nominalistická interpretace* se naopak přiklání k názoru, že nejsou žádné výrokové funkce v ontologickém smyslu. Použitím současných pojmů jsou výrokové funkce pouze správně utvořené otevřené formule (formule s volnou proměnnou čekající na doplnění).

Nominalistickou koncepci a spolu s ní názor, že *Principia* rozlišují mezi jazykem-objektem a metajazykem, zastává například Gregory Landini, který ve své knize [Lan98, kap. 10] argumentuje, že definice *být stejného typu*, a spolu s ní i další, jsou metajazykové a říkají nám, jaké mají vlastnosti správně utvořené výrazy formálního systému, který v *Principiích* budují Russell s Whiteheadem, a ne obecně všechny výrazy.

Tomu, co nás mate, se dnes říká *typická nejednoznačnost*[12] , kterou si Russell a Whitehead ve svých *Principiích* osvojili. Typická nejednoznačnost v jejich případě znamená, že opomíjí indexy typů a řádů u výroků.

[12] Anglicky *typical ambiguity*.

3.2.7 Různé interpretace hierarchie

Další nejasností v *Principiích* je, jak přesně hierarchie typů a řádů vypadá. Zda Russell s Whiteheadem nejdříve rozdělili funkce do typů a ty poté ještě do řádů, nebo naopak, zda nejdříve byly řády a ty pak byly rozděleny do typů. Z *Principií* to není zcela jasné. Dostává se nám pouze definice typů (být stejného typu) a v jiných místech definice řádů. Definice jsou samozřejmě doplněny upřesňujícími tvrzeními. Například že řád funkce musí být vždy kompatibilní s jejím typem. Nedává nám to však zcela jasnou představu.

Dnes se zřejmě již většina filosofů přiklání k názoru, že rozvětvená hierarchie typů má vypadat tak, že máme funkce rozděleny do typů a ty následně rozdělujeme do řádů. Landini [Lan98] uvádí několik důvodů, proč se přiklonit k této interpretaci. Jako hlavní důvod uvádí Russellův filosofický vývoj. Russell se před teorií typů a před celou myšlenkou *Principií* nejdříve pokouší vybudovat tzv. *substituční teorii*. Tu zavádí při uvažování o bludném kruhu, nad tím, že vzniká jakmile začneme mluvit o všech možných (signifikantních) proměnných, které může daná funkce nabývat. Přičemž funkce má určitý obor signifikace (tedy obor/rozsah možných proměnných), kterým mohou být individua, třídy, třídy tříd, atd. Jako řešení definuje substituční teorii, ve které zavádí různé druhy proměnných. Tuto teorii později opouští, protože neřeší některé paradoxy o výrocích, a nahrazuje ji právě rozvětvenou teorií typů popsanou v *Principiích*, která nejdříve rozdělí funkce do různých typů a poté do řádů. [Lan98, str. 272]

3.3 Paradoxy

Russell je se svou teorií typů víceméně spokojen. Minimálně je přesvědčen, že řeší většinu kontradikcí provázejících matematickou logiku. Russell nejdříve sbíral všechny možné jazykové a matematické paradoxy, a poté je analyzoval a hledal, zda nemají společné příčiny. Nakonec došel k závěru, že všechny tyto kontradikce se dají převést na omyl bludného kruhu a jsou řešitelné teorií typů. Všechny totiž mají společnou charakteristiku, která může být popsána jako self-reference nebo reflexivita, tedy odkazování sám k sobě. Zároveň hovoří o nelegitimní totalitě, která vede k principu bludného kruhu a kterou jsme si zakázali. [RW27, str. 60]

Uveďme si některé příklady paradoxů, které Russell řeší pomocí teorie typů:

1. Známý výrok pojmenovaný po krétském filosofovi Epimenidovi, někdy nazývaný jako *paradox lháře*, nejjednodušeji formulovaný jako „Já lžu.“ Nechť je výrok pravdivý, pak musím lhát, a tedy můj výrok nesmí být pravdivý. Nechť je výrok nepravdivý, pak to znamená, že není pravda, že lžu, takže říkám pravdu a můj výrok musí být pravdivý. V obou případech jsme došli ke sporu.

2. Paradox, který objevuje Russell ve své práci, stejně jako v právě dopsaném Fregově díle, dnes známý jako *Russellův paradox*: Třída, která má obsahovat všechny třídy, které nejsou svým vlastním prvkem. Formálně zapsáno:

$$\Gamma = \{\Delta \mid \Delta \notin \Delta\}$$

   Otázkou je, podobně jako v předchozím příkladu, zda je Γ svým prvkem.

3. *Paradox Burali-Fortiho:* Každá dobře uspořádaná série (posloupnost) čísel má jako velikost nějaké ordinální číslo. Série všech ordinálů je dobře uspořádaná. Tedy série všech ordinálů má ordinální číslo (nechť je to σ). Potom však série všech ordinálů musí obsahovat i σ a tedy velikost ordinálů je $\sigma + 1$, což musí být větší než σ.

Vidíme, že všechny tyto paradoxy, a samozřejmě spousta dalších, tkví v odkazování ke své vlastní totalitě. Teorie typů takovéto výroky a funkce zakazuje – výrok či funkce musí vždy mluvit pouze o výrocích či funkcích nižšího řádu:

1. *Paradox lháře:* vyslovuji-li větu „já lžu“, říkám, že výrok, který vyslovuji, je nepravdivý. Jinak řečeno: „Existuje výrok, který tvrdím a který je nepravdivý.“ Zapíšeme-li si výrok formálně, pak:

$$(\exists x)(\text{Tvrdím}(x) \wedge \text{Lež}(x))$$

   Je-li x výrok řádu n, potom celý výrok musí být řádu vyššího. Nemůže se stát, že bychom za x dosadili celý výrok, to bychom se dostali do kolize s řády a do bludného kruhu. Celý výrok může zahrnovat pouze výroky nižšího řádu, tedy není v ničem kontradiktorní.

2. *Russellův paradox:* V sekci o třídách jsme si ukázali, že každý výrok o třídě může být převeden na výrok o výrokové funkci. Označme si jako $\varphi(x)$ vlastnost: *nebýt svým vlastním prvkem.* Potom by třídu $\{\Gamma \mid \Gamma \notin \Gamma\}$ vydělovala vlastnost $\varphi(x)$. Naše teorie typů nám však opět zakazuje vzít celou funkci jako argument. Celá funkce je vyššího řádu, než mohou být argumenty x. Funkce $\varphi(\varphi(x))$ nedává žádný smysl.

3. *Paradox Burali-Fortiho:* tento paradox je poněkud obtížnější. Jak si ukážeme později (na str. 49), série je určitá relace a ordinální číslo je třída sérií. Série ordinálních čísel je relace mezi třídami relací. Z naší teorie typů je relace mezi třídami relací vyššího typu než relace, které ona třída obsahuje. Podstatou paradoxu je tvrzení „série všech ordinálů je ordinál (σ)“, formálně to přepíšeme jako:

   $\sigma = \{R \mid R(\Gamma, \Delta)$, kde Γ a Δ jsou třídy sérií (ord. č.) a R je série$\}$

   To nám říká, že třída σ obsahuje všechny ordinály, tzn. všechny sériové relace určitého řádu, který však z důvodu naší teorie typů musí být nižšího řádu než relace vydělující σ. Díky tomu ordinál σ je vyššího řádu než ordinály, které obsahuje, tedy, opět kvůli kolizi řádu, σ nemůže obsahovat sebe sama, a mluvíme-li o všech ordinálech, pak tvoříme výrok vyššího řádu, než jsou výroky o oněch konkrétních ordinálech.

Teorie typů je sice účinná, ale jak vidíme, tak velmi složitá, proto nebyla v matematice příliš přijímána. Ve stejné době, v jaké Russell uvažuje nad svými základy matematiky, vznikají také první základy *teorie množin*, která vylučuje Russellův paradox svým způsobem. Ernst Zermelo představuje axiomatický systém teorie množin, který, stejně jako Russell, zavádí jistá omezení na intuitivní pojmy. Výsledkem však je vyhnutí se všem výše uvedeným paradoxům.

Konkrétní axiom vylučující Russellův paradox je *schéma axiomů vydělení*, říkající pro každou formuli $\varphi(x)$, která neobsahuje volnou proměnnou z, že z každé množiny lze vydělit množinu všech prvků, které splňují danou formuli:

$$(\forall a)(\exists z)(\forall x)(x \in z \leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x)))$$

Důležité tady je, že nelze vydělit libovolnou množinu prvků. Chceme-li získat množinu, lze vydělit pouze prvky, které už v nějaké množině máme. Jakmile si dovolíme říci, že chceme soubor, který vydělujeme libovolnou funkcí z libovolných prvků, pak nemluvíme o množině, ale o *vlastní třídě*.

Co se týče paradoxu Burali-Fortiho, tak ten teorie množin nepřímo řeší stejným způsobem. Soubor všech ordinálů je něco příliš velkého a těžko uchopitelného, není to množina, ale vlastní třída. [BŠ86, str. 20 a 35]

3.4 Axiom reducibility

Z Russellovy hierarchie funkcí plyne, že nelze vypovídat něco o *všech* a-funkcích. Říkat tedy něco o *všech* vlastnostech a je nelegitimní. Můžeme však hovořit o všech predikativních vlastnostech a, o všech druhořádových vlastnostech a (není-li a individuum, ale objekt řádu n, pak to znamená „funkce řádu n+2 splněná a“), atd. [RW27, str. 55]

My však potřebujeme někdy mluvit o všech a-funkcích, nebo všech vlastnostech a. Chceme tvořit výroky o všech a-třídách (tj. třídách definovaných a-funkcemi). Je to nutné například u matematické indukce, kde chceme mluvit o *všech potomcích*, které jsme nadefinovali jako průnik všech dědičných tříd, jež obsahují nulu.

Problém také nastává u identity. Ukažme si to na Leibnizově *principu identity nerozlišitelného*. Naše teorie nám nebrání říci, že pokud x a y jsou identické a $\varphi(x)$ je pravda, pak $\varphi(y)$ je pravda. Nemůžeme ale naopak říci, že pokud se všemi hodnotami φ, $\varphi(x)$ implikuje $\varphi(y)$, pak x a y jsou identické, protože nemůžeme hovořit o *všech hodnotách* φ. K tomu potřebujeme axiom reducibility. Jinak bychom nemohli říci, že platí-li všechny predikáty o x, pak platí i o y, implikuje, že všechny druhořádové vlastnosti o x platí o y. Tedy bychom nebyli schopni definovat identitu, protože bychom si nemohli být jisti, že x a y jsou identické, když mají stejné predikáty. [RW27, str. 57]

Všechny tyto problémy jsou pro teorii, která chce být základem pro veškerou matematiku, velmi zásadní. Russellovým řešením se stává *axiom reducibility*[13]:

> Mějme libovolnou funkci $\varphi(x)$, pak k $\varphi(x)$ existuje formálně ekvivalentní predikativní funkce.

Jinak řečeno existuje predikativní funkce, která je pravdivá právě tehdy, když $\varphi(x)$ je pravdivá:

$$(\exists\psi)(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi!(x))$$

Tento axiom v podstatě tvrdí, že v případě potřeby jsme vždy schopni snížit řád na $(n+)1$ (kde n je řád argumentů). To je velmi silné tvrzení, proto se pojďme podívat, co to pro Russellovu teorii znamená.

Vraťme se k teorii tříd. Pokud předpokládáme existenci tříd jako takových (třídy by nebyly pouhé logické fikce, které se snažíme nahradit funkcemi), pak axiom reducibility je pouhým důsledkem, protože jakákoliv funkce $\varphi(x)$ vyděluje třídu Γ a tedy je ekvivalentní „x náleží Γ“, což je predikativní funkce.

Pokud chceme k teorii tříd dojít, pak je axiom reducibility nutnou podmínkou. Jak jsme již zmínili, jednou z vlastností, kterou chceme, aby třídy měly, je možnost tvořit výroky o všech třídách, které se skládají z individuí, nebo objektů nějakého typu. Nechť tento nejvyšší typ je n. Chceme vlastně mluvit o všech funkcích definujících dané třídy, což by obecně, díky naší teorii typů, nebylo možné. Axiom reducibility nám to však umožňuje. Říká nám totiž, že umíme všechny naše funkce převést na formálně ekvivalentní funkce typu $n + 1$ (na predikativní funkce). To nám také dovoluje definovat naše *odvozené extenzionální funkce*, o nichž jsme řekli, že vymezují třídu.

V takové teorii tříd, jakou nám předkládá Russell je axiom reducibility životně důležitý. Potřebujeme ho, jakmile chceme mluvit o všech třídách na objektech nějakého řádu, což chceme například kvůli matematické indukci. Také chceme-li mít možnost nahradit veškeré smysluplné

[13] Anglicky *axiom of reducibility*, do češtiny někdy též překládaný jako axiom redukovatelnosti.

výroky o třídách výroky o jejich charakteristických funkcích, což chceme, abychom mohli mluvit o logicismu, pak jsme nuceni axiom reducibility přijmout.

Axiom reducibility se zdá být intuitivně pravdivý. (Zdá se, že pro libovolnou vlastnost hovořící o argumentech řádu maximálně n, umíme najít ekvivalentní vyjádření, které bude řádu $n + 1$.) Russell však nevidí jediný důvod, proč by byl logicky nutný, proč by měl být pravdivý za všech možných okolností. Nezdá se být logický, ani nijak logicky odvoditelný a stojí proto v cestě logicismu. Russell se přiklání k názoru, že přijetí tohoto axiomu do systému logiky je chybné a teorie tříd nemůže být z těchto důvodů považována za úplnou teorii.

Jak však píše v kapitole 17 [Rus93a], je přesto rozumné považovat teorii tříd, tak jak jsme ji výše načrtli, jako správnou v jejích hlavních bodech, například v redukci výroků o třídách na výroky o jejich charakteristických funkcích a rozdělení funkcí do hierarchie typů a řádů.

Můžeme tedy uzavřít, že teorie tříd, jak jsme ji výše načrtli, se nám nyní zredukovala na jeden axiom a jednu definici:

Axiom (reducibility) *Každá funkce jedné proměnné je ekvivalentní, pro všechny své hodnoty, nějaké predikativní funkci stejného argumentu.*

$$(\forall\varphi)(\exists\psi)(\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi!(x))$$

Definice *Říci, že třída vymezená funkcí φ má vlastnost f, znamená totéž, co říci, že existuje predikativní funkce ψ, která je formálně ekvivalentní s φ a má vlastnost f.*

$$\Gamma = \{t \mid \varphi(t)\} \wedge f(\Gamma) \Leftrightarrow (\exists\psi)((\forall x)(\varphi(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \wedge f(\psi))$$

3.4.1 Kritika axiomu reducibility

Axiom reducibility, se kterým sám Russell, jak jsme ukázali, nebyl spokojen, byl přijat velmi kriticky. Hlavní námitkou je, že Russell buduje složitou hierarchii typů, aby ji pak jedním axiomem zase zredukoval.

Obecnou námitkou také je, jak píše Radek Schuster [Sch13], že pro základy matematiky nejsou sémantické paradoxy předmětem zájmu a že díky tomu rozvětvená hierarchie typů není nutná. Tento názor zastával jako jeden z prvních například britský matematik a analytický filosof Frank Ramsey.

Friedrich Waismann, jeden z členů Vídeňského kruhu, zase ve svých pracích, mimo jiné, udává důvod, proč axiom reducibility není logický, tedy pravdivý ve všech možných světech. Ukazuje příklad možného světa, ve kterém axiom reducibility neplatí. [Sch13]

3.5 Neúplné symboly

Popsali jsme přesné zacházení s třídami, uvedli jsme, že každý výrok o třídě lze nahradit výrokem o výrokové funkci, načrtli jsme teorii tříd. Hned na začátku jsme však řekli, že třídy samy o sobě jsou *neúplné symboly*. Co to přesně znamená?

Neúplné symboly, jak popisuje Russell v úvodu k *Principiím*, jsou takové symboly, které nemají význam samy o sobě, pouze v určitém kontextu. Můžeme nadefinovat, jak se používají, to ale neznamená, že jsme jim přidělili samostatný význam. Aby takovéto symboly vypovídaly něco konkrétního, musíme k nim něco přidat, zmínit je v konkrétním kontextu. Pro Russella jsou opakem *vlastních jmen*. Vlastním jménem je například Sokrates, u kterého je zcela zřejmé, že má význam sám o sobě, bez jakýchkoliv dalších dodatků.

V matematice máme neúplných symbolů spoustu: logaritmus, integrál, atd. Všechny mají význam až v určitém kontextu – třeba matematickém výpočtu. Neúplné symboly, kterým se věnuje Russell, jsou kromě tříd ještě deskripce a relace.

3.5.1 Deskripce

Russell během svého života rozvíjí úplnou teorii deskripcí. Deskripce rozděluje na *určité* a *neurčité*. Pro určité používá anglický určitý člen (*the*) a neurčité definuje neurčitým členem (*a*/*an*).

Neurčitá deskripce je například: „Potkal jsem nějakého muže.“ (I met *a man*.) Určitá deskripce je například: „Scott je autorem Waverly.“ (Scott is *the author of Waverly*.)

Určitým i neurčitým deskripcím můžeme, na rozdíl od vlastních jmen, připisovat neexistenci. Například tvrzení „současný Francouzský král neexistuje“, je smysluplné a pravdivé. U vlastních jmen to však nedává smysl. Vlastní jména zastupují konkrétní individua, a mluvíme-li o konkrétních individuích, pak jejich existenci předpokládáme.

Určité deskripce jsou pro Russella příkladem neúplných symbolů. Například „autor Waverly“ není jménem, nezastupuje Waltera Scotta. Tvrdit „Scott je autorem Waverly“ není to samé jako tvrdit „Scott je Scott“. Stejně tak Scott není to samé jako „autor Waverly“. Deskripce „autor Waverly“ je zřejmě neúplný symbol – potřebuje doplnění, aby měl význam. [RW27, str. 67]

3.5.2 Relace

Dalším zmíněným neúplným symbolem je relace, tzn. pro Russella funkce dvou proměnných

Pro relace máme zcela stejnou teorii jako pro třídy: funkce dvou proměnných rozdělujeme do stejné hierarchie typů a definujeme pro ně predikativní funkce, které značíme $\psi!(x, y)$. Navíc pro ně platí [RW27, str. 82]:

$$R = S \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(xRy \leftrightarrow xSy)$$

3.5.3 Třídy

Nakonec se podívejme na nejdůležitější neúplný symbol: třídy. Sice jsme nadefinovali, jak třídy používáme, ale samy o sobě nemají žádný význam. Dokud je nezasadíme do určitého kontextu, do určitého výroku nebo výrokové funkce, nic nám neříkají.

Tedy, jak jsme již uvedli, třídy samy o sobě jsou pouhé jazykové konvence. Mohou obsahovat konkrétní individua pojmenovaná vlastními jmény. Třídy však zůstanou neúplnými symboly. Zavedli jsme si je z důvodu zjednodušení a v průběhu celé této kapitoly jsme si postupně uvedli obecné definice, jak v případě potřeby nahradit každý výrok o třídě výrokem o výrokové funkci. Nyní si ukažme dva konkrétní případy, které se týkají matematiky:

1. Term t je prvkem třídy Γ ($t \in \Gamma$).

   Nechť χ je výroková funkce, která vymezuje třídu Γ. Pak původní výrok nahradíme výrokem (funkcí): t *splňuje* χ. Je to extenzionální funkce funkce, protože pokud $\chi \leftrightarrow \psi$, pak výrok *t splňuje* χ je pravdivý právě tehdy, když výrok *t splňuje* ψ je pravdivý. Díky tomu bychom se mohli s touto funkcí spokojit, ale na str. 31 jsme si zformulovali obecnou definici:

> *Tvrdit, že* třída vymezená funkcí φ má vlastnost f*, znamená tvrdit, že* φ *splňuje extenzionální funkci odvozenou z* f*.*

V našem případě to znamená, že místo tvrzení *třída vymezená funkcí* χ *má vlastnost, že t splňuje* χ budeme tvrdit, že χ splňuje funkci: *existuje funkce mající vlastnost, že t tuto funkci splňuje, a je formálně ekvivalentní s* χ. Jednodušeji řečeno:

> *Existuje funkce* ψ*, která je formálně ekvivalentní* χ*, a t splňuje* ψ*.*

Tím jsme však ještě neskončili. V sekci o Axiomu reducibility jsme si uvedli dobré důvody, proč ho přijmout do své teorie a díky tomu jsme si ještě trochu poupravili naši definici:

> *Říci, že třída vymezená funkcí* φ *má vlastnost f, znamená totéž, co říci, že existuje* predikativní *funkce* ψ*, která je formálně ekvivalentní s* φ *a má vlastnost f.*

Místo původního výroku o třídě $t \in \Gamma$ (term t je prvkem třídy Γ) nakonec dostáváme výrok o funkci:

> *Existuje predikativní funkce* ψ*, která je formálně ekvivalentní* χ*, a term t splňuje* ψ*.*

Formálně zapsáno:

$$t \in \Gamma \Leftrightarrow (\exists\psi)[(\forall x)(\chi(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \wedge \psi!(t)]$$

2. Třída Γ je podmnožinou třídy Δ ($\Gamma \subseteq \Delta$). Jinak řečeno, každý term z Γ náleží do Δ.

Tento výrok obsahuje dvě třídy, to nám však nebude dělat problém. Nechť α definuje třídu Γ a β definuje třídu Δ. Pak bychom mohli původní výrok nahradit výrokem: *každý term splňující* α *splňuje také* β. Abychom však opět dodrželi všechny uvedené definice, nahraďme původní výrok o třídě následujícím výrokem o funkci:

> *Existuje predikativní funkce* ψ*, která je formálně ekvivalentní* α*, a predikativní funkce* χ*, která je formálně ekvivalentní* β*, a každý term splňující* ψ *splňuje také* χ.

Formálně zapsáno:

$$\Gamma \subseteq \Delta \Leftrightarrow (\exists\psi)(\exists\chi)[(\forall x)((\alpha(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \wedge (\beta(x) \leftrightarrow \chi!(x)))\wedge \\ \wedge(\forall t)(\psi!(t) \to \chi!(t))]$$

4 Další vlastnosti čísel

Russell ve svém úsilí nezůstává pouze u základních definic, kterými nahrazuje Peanovu axiomatiku. V *Principiích* jde, spolu s Whiteheadem, mnohem dále. Zaujat prací Georga Cantora, který v té době publikuje své výsledky ohledně různě velkých nekonečen, zabývá se také nekonečnými čísly a jejich rozdělením a definicemi. Od definic přirozených čísel postupuje k definicím dalších čísel, jako jsou celá čísla, zlomky, reálná čísla, či dokonce komplexní čísla. Definuje pochopitelně také uspořádání na číslech. Zavádí pojmy jako *relace* a *série* a pokouší se také definovat limitu čísel. My se v této kapitole budeme zabývat pouze některými jejich definicemi.

4.1 Sčítání

Nejdůležitější definicí, kterou jsme doposud nezmínili, je samozřejmě sčítání. Bez něj bychom se v aritmetice neobešli. Kardinální aritmetice se Russell věnuje ve druhém díle *Principií*, konkrétně v části III. My použijme definici sčítání z knihy [Rus93a, kap. 12]:

Mějme třídu Γ, která má μ termů a mějme třídu Δ, která má ν termů. Chceme-li vypočítat součet tříd Γ a Δ, tedy součet $\mu + \nu$, vytvořme si nejdříve uspořádané dvojice z Γ tak, že první term dvojice je třída obsahující jeden prvek z Γ, a druhý term dvojice je prázdná třída. Pro Δ si utvořme uspořádané dvojice následovně: první term dvojice je prázdná třída a druhý term dvojice je třída obsahující jeden prvek z Δ. Dostaneme následující třídy:

$$\{\langle\{\gamma_1\},\emptyset\rangle, \langle\{\gamma_2\},\emptyset\rangle, \ldots \langle\{\gamma_\mu\},\emptyset\rangle\}$$

$$\{\langle\emptyset,\{\delta_1\}\rangle, \langle\emptyset,\{\delta_2\}\rangle, \ldots \langle\emptyset,\{\delta_\nu\}\rangle\}$$

Kde první třída (nazvěme si ji Γ') je podobná (je v relaci podobnosti) Γ a druhá třída (nazvěme si ji Δ') je podobná Δ. Tímto postupem jsme získali dvě třídy, které nemají žádný prvek stejný, díky tomu můžeme nadefinovat $\mu + \nu$ jako *logický součet*, který je v *Principiích* nadefinován následovně:

$$\Gamma \cup \Delta = \{x \mid x \in \Gamma \vee x \in \Delta\}$$

Z toho pro *sčítání* získáváme následující definici:

Sčítání $\Gamma + \Delta = \Gamma' \cup \Delta'$

Kde Γ' je podobná Γ a Δ' je podobná Δ a navíc Γ' s Δ' nemají žádný stejný prvek.

4.2 Uspořádání

Uspořádání čísel je v matematice velmi důležité. Když zacházíme s přirozenými čísly, tak předpokládáme jejich přesné uspořádání, uspořádání podle velikosti. V našem přepisu Peanovy aritmetiky vycházíme hlavně z vlastností následníka a také u něj při definování uspořádání zůstaneme.

Russell nejdříve v kapitole 4 [Rus93a] uvádí podmínky, které by relace uspořádání pro libovolná čísla x, y, z měla splňovat:

1. asymetrie: $xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
2. tranzitivita: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
3. spojitost: $xRy \vee yRx$

Každá relace, která splňuje tyto podmínky, definuje určitý druh uspořádání. Nadefinujme si nyní pojem *série*: Relace je série, když je asymetrická, tranzitivní a spojitá. Přičemž musíme dát pozor, že série není *pole sériové relace*, ale sériová relace sama. (*Pole relace* obsahuje společně obor hodnot a definiční obor.)

Nyní již můžeme nadefinovat relaci uspořádání na přirozených číslech:

Uspořádání $m < n \Leftrightarrow (\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(n))$

Přirozené číslo m je menší než jiné číslo n, pokud n má všechny dědičné vlastnosti, které má mít následník m [Rus93a, str. 35]. Říkáme *následník* m, abychom dosáhli ostrého uspořádání. Je zřejmé, že takováto relace je asymetrická, tranzitivní a spojitá. Uspořádává přirozená čísla v požadovaném smyslu. Samotná relace (bezprostředního) následníka nám k uspořádání nestačí. Je to sice relace asymetrická, ale není tranzitivní ani spojitá. Až dědičná vlastnost, vycházející z relace následníka a indukce, je dostačující.

Požadavek na tranzitivitu je velmi důležitý, pokud chceme porovnávat prvky, mezi kterými je nekonečně prostředníků. Zároveň relace *menší nebo rovno* je sice tranzitivní a spojitá, ale není asymetrická. Tedy nesplňuje Russellovy požadavky na uspořádání.

4.3 Nekonečnost

Ukázali jsme si definici přirozených čísel a to, že každé přirozené číslo (neboli induktivní číslo) je konečné. Co je ale potom počet všech přirozených čísel? Je to číslo? Takovýmito otázkami se Russell též zabýval a šel v přímých stopách Georga Cantora. Dochází ke stejnému názoru, že počet přirozených čísel je první nekonečné číslo, první číslo, které není induktivní a pro které neplatí, že by se po přičtení jedničky zvětšilo. Toto nekonečné číslo značí, stejně jako Cantor, $\aleph_0$.

Dle Russella nám však nic nezaručuje, že ve světě existují nějaké nekonečné soubory. Předpoklad, že nekonečné soubory existují, je potřeba si vynutit *axiomem nekonečna*:

> *Pokud n je libovolné kardinální číslo, pak existuje minimálně jedna třída individuí mající n termů.*

Počet všech individuí tedy není induktivní číslo. [Rus93a, str. 131]

Stejně jako pro axiom reducibility existují pro axiom nekonečna dobré důvody, proč ho do teorie přijmout, ale také důvody, proč ho nepřijmout. V kapitole 13 [Rus93a] Russell píše, že hlavním důvodem proč tento axiom přijmout je, že pokud bychom měli pouze konečný počet individuí, pak by se mohlo stát, že pro nějaké konečné číslo platí, že $n = n + 1$. To by se mohlo stát, kdyby například individuí bylo 10. Potom čísla 11 a 12 jsou prázdné třídy, nespadají do těchto tříd žádné třídy. Čísla 11 a 12 by se tedy rovnala a Peanova aritmetika by nefungovala.

Přesto Russell říká, že axiom nekonečna není ve všech možných případech pravdivý a není logický, takže bychom ho do svého systému neměli přijmout.

4.4 Definice dalších čísel

V první kapitole jsme si uvedli definici přirozených čísel jako všechny potomky nuly. Přirozená čísla v Russellově pojetí jsou třídy tříd. Nyní se podíváme na definici dalších druhů čísel, které nejsou zdaleka tak jednoduché, jak by se mohlo zdát. Russell píše, že velkou chybou, kterou matematici dělají, je obecné mínění, že každé rozšíření čísel zahrnuje předchozí druh jako nedílnou součást. [Rus93a, str. 63] Pojďme se tedy podívat, jak čísla definuje Russell.

Celá čísla U celých čísel bychom si mohli myslet, že jejich součástí jsou přirozená čísla. Tak tomu však není. Jak jsme uvedli, přirozená čísla jsou třídy tříd. Celá čísla jsou definována jako *relace*. Začněme s jedničkou. Čísla $+1$ a -1 jsou relace, které jsou navíc k sobě opačné. Číslo $+1$ je definováno jako relace mezi $n+1$ a n. Naopak číslo -1 je relace mezi n a $n+1$. Obecně pro přirozené číslo m platí, že $+m$ je relace mezi $n+m$ a n, a $-m$ je relace mezi n a $n+m$, kde ve všech případech n je libovolné (konečné i nekonečné) kardinální číslo. Celá čísla jsou relacemi mezi přirozenými čísly. [Rus93a, str. 64]

Zlomky Se zlomky je to velmi podobné. Opět nemůžeme říci, že číslo vyjádřené zlomkem $\frac{4}{1}$ je totožné s přirozeným číslem 4. Obecně zlomek $\frac{m}{n}$ je *relace* mezi dvěma přirozenými čísly x a y taková, že platí $xn{=}ym$. Pozitivní a negativní zlomky se vyjadřují podobně jako pozitivní a negativní celá čísla. Číslo $\frac{+p}{q}$ definujeme jako relaci mezi $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ a $\frac{m}{n}$, kde $\frac{m}{n}$ je libovolný zlomek a součet dvou zlomků $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ je definován jako $\frac{mq+pn}{nq}$. Číslo $\frac{-p}{q}$ je pak opačná relace. [Rus93a, str. 66]

Reálná čísla Racionální čísla odpovídají zlomkům ve stejném smyslu, v jakém zlomek $\frac{n}{1}$ odpovídá přirozenému číslu n. S iracionálními čísly je to již poněkud složitější a tedy i s reálnými čísly, které se jistým způsobem skládají z racionálních a iracionálních čísel. Bylo by nutno nadefinovat si další pojmy, které bychom nijak nevyužili. Postačí nám tedy vědět, že reálné číslo je určitá *série zlomků* s uspořádáním podle velikosti. [Rus93a, str. 72]

5 Nestandardní modely Peanovy aritmetiky

V současné době je Peanova aritmetika definována jako prvořádová teorie. Znamená to, že si dovolujeme kvantifikovat pouze přes objektové proměnné. Projevuje se to například u schématu indukce, kde ponecháváme pouze prvořádovou kvantifikaci s (meta)dodatkem, že toto schéma platí pro libovolnou prvořádovou formuli.

Prvořádové teorie mají určité výhody, kterými se zabývá klasická logika:

Věta o kompaktnosti *Pokud každá konečná podteorie teorie T má model, pak teorie T má model.*

Löwenheim-Skolemovy věty

1. *Nechť T je bezesporná teorie s jazykem L. Pak T má model, jehož mohutnost je nejvýše $\aleph_0 + |L|$.*

2. *Nechť T je teorie s jazykem L, nechť κ je nekonečný kardinál takový, že $|L| \leq \kappa$, a nechť T má nekonečné modely. Pak T má i modely mohutnosti κ.*

Löwenheim-Skolemovy věty jsou důsledkem věty o kompaktnosti a v podstatě vynucují nestandardní modely pro prvořádovou Peanovu aritmetiku.

5.1 Dnešní podoba Peanovy aritmetiky

Uveďme si Peanovu aritmetiku tak, jak ji definujeme dnes (citováno z [Šve02]):

Jazyk Aritmetický jazyk $\{+, *, 0, S, \leq, <\}$ a jazyk současné predikátové logiky.

Axiomy

1. $(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
2. $(\forall x)(S(x) \neq 0)$
3. $(\forall x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = S(y)))$
4. $(\forall x)(x + 0 = x)$
5. $(\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y))$
6. $(\forall x)(x * 0 = 0)$
7. $(\forall x)(\forall y)(x * S(y) = x * y + x)$
8. $(\forall x)(\forall y)(x \leq y \leftrightarrow (\exists v)(v + x = y))$
9. $(\forall x)(\forall y)(x < y \leftrightarrow (\exists v)(S(v) + x = y))$

Schéma indukce:

$$(\forall y_1)\ldots(\forall y_n)(\varphi(0, \vec{y}) \wedge (\forall x)(\varphi(x, \vec{y}) \rightarrow \varphi(S(x), \vec{y})) \rightarrow (\forall x)\varphi(x, \vec{y}))$$

pro libovolnou prvořádovou formuli φ aritmetického jazyka.

5.2 Modely Peanovy aritmetiky

Nyní se podíváme na standardní a nestandardní modely pro Peanovu aritmetiku definovanou v minulé sekci.

Standardní model pro Peanovu aritmetiku je lineárně uspořádaná struktura přirozených čísel $\mathbf{N} = \langle N, 0, < \rangle$. (Kde lineární uspořádání znamená asymetrii, tranzitivitu a trichotomii: $x < y \vee y < x \vee x = y$).

Na následujícím obrázku je znázorněna tato struktura, kde $\mathbf{0}$ reprezentuje 0 a $\longrightarrow$ reprezentuje uspořádání $<$.

$$\boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3} \longrightarrow \cdots}$$

Nestandardní model $\mathbf{M} = \left\langle M, 0^M, <^M \right\rangle$ vznikne z libovolné lineárně uspořádané množiny s nejmenším prvkem tak, že nejmenší prvek je nahrazen strukturou $\langle N, 0, < \rangle$ a všechny ostatní prvky jsou nahrazeny strukturou celých čísel $\mathbf{Z} = \langle Z, < \rangle$. Náš nestandardní model je tedy složen z prvků $\mathbf{N}$, což jsou standardní prvky, a prvků hustě uspořádaných kopií $\mathbf{Z}$, které jsou nestandardními prvky. Nestandardní prvky nejsou dosažitelné z 0^M konečně mnoha kroky S^M a ve smyslu uspořádání před nestandardním prvkem existuje nekonečně mnoho jiných prvků. V takovémto modelu však lze dokázat všechny Peanovy axiomy, tedy $\mathbf{M}$ je modelem Peanovy aritmetiky. [Šve02, str. 286]

Na následujícím obrázku je znázorněna struktura $\mathbf{M}$, kde $\mathbf{0}$ je 0 přirozených čísel, slouží jako minimální prvek celé struktury a je následována přirozenými čísly. Za nimi jsou hustě uspořádané kopie $\mathbf{Z}$. Šipky opět slouží jako uspořádání $<^M$.

$$\boxed{\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \cdots)(\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots) \quad \cdots \quad (\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots) \quad \cdots}$$

5.3 Russellova Peanova aritmetika

Původní Peanova aritmetika byla definována jako druhořádová teorie a stejně tak tomu bylo i s Russellovou teorií. Druhořádová teorie nám dovoluje kvantifikovat i přes predikátové a funkční proměnné. Russell kvantifikuje přes funkční proměnné a navíc si rozděluje funkce do typů, tedy pracuje v rozvětvené druhořádové teorii (přesněji pracuje ve víceřádové teorii, ale víceřádové teorie už se v žádných podstatných vlastnostech neliší od druhořádových teorií).

Druhořádové teorie nám poskytují jiné možnosti v jazyce. Oproti prvořádovým teoriím zde například neplatí Löwenheim-Skolemovy věty ani věta o kompaktnosti, která nám vynucovala nestandardní modely. Pojďme se tedy podívat na to, jak je to s nestandardními modely v Russellově teorii.

Russell definuje přirozená čísla jako potomky nuly:

$$c \in \mathbf{N} \Leftrightarrow c \in P(0)$$

Potomci nuly jsou nadefinováni jako průnik všech dedičných tříd, do které náleží nula:

$$P(0) = \bigcap\{\Gamma \mid \Gamma \in DT \text{ a } 0 \in \Gamma\}$$

Je to tedy nejmenší taková třída, která je podtřídou všech dědičných tříd.

Položme si otázku, co přesně jsou dědičné třídy a jak jsou definovatelné. Na straně 23 jsme si uvedli následující příklad dědičné třídy: $\{100, 101, 102, \ldots\}$. Tuto třídu zjevně vyděluje vlastnost *být větší než 99*, což je dědičná vlastnost. To nám ukazuje, že dědičná vlastnost definuje dědičnou třídu.

Abychom docílili toho, že přirozená čísla budou právě ta čísla, která očekáváme, musíme ověřit dvě věci:

1. Potřebujeme ukázat, že potomci 0 jsou neprázdnou třídou.

2. Chceme zajistit, aby se nám do přirozených čísel nedostala žádná čísla, která nechceme.

Nejprve se podívejme na naši první podmínku: potomci 0 jsou neprázdnou třídou. Pro potomky libovolného čísla jsme se to pokusili ukázat již na straně 24. Zkusme pro potomky 0 najít jednu dědičnou třídu Γ takovou, že $0 \in \Gamma$. Vezměme třídu Γ, která obsahuje 0. Aby to byla dědičná třída, pak s 0 musí obsahovat i $S(0)$. Takové číslo jsme si pojmenovali 1. Spolu s 1 však musí naše dědičná třída obsahovat i $S(1)$, to znamená 2. Budeme-li takto pokračovat nekonečně dlouho, dostaneme dědičnou třídu, která obsahuje 0. Nyní jsme našli a popsali alespoň jednu dědičnou třídu, do které náleží 0. Máme-li více dědičných tříd, které obsahují 0, pak v průniku těchto tříd bude minimálně 0. Z našich definic vyplývá, že průnik těchto tříd bude obsahovat i 1 a 2 a všechna další konečná čísla. Nevíme však, kde tato posloupnost končí.

Abychom ošetřili druhý případ, to znamená, aby se nám do přirozených čísel nedostala žádná čísla, která nechceme, stačí nám vymyslet nějakou dědičnou vlastnost, která toto zajistí. Ukázali jsme si totiž, že dědičná vlastnost definuje dědičnou třídu a že potomci 0 jsou průnikem dědičných tříd obsahujících 0, proto chceme najít onu nejmenší třídu, respektive vlastnost ji vydělující.

Takovou vlastností je *být konečným číslem* nebo přesněji, abychom se přiblížili jazyku Russellovy teorie: *x je získáno z nuly konečným počtem následníků*.

Russell se konečnosti věnuje v kapitole 3 [Rus93a]. Při definování přirozených čísel ukazuje, že ke každému přirozenému číslu chceme z nuly dojít krok po kroku, pomocí funkce následníka. To nám umožní matematická indukce, kterou, jak jsme již zmínili, Russell přijal jako definici, a která je v podstatě použita při definici přirozených čísel jako průniku všech induktivních tříd.

Podívejme se znovu na to, jak jsme si na str. 19 nadefinovali číslo, respektive číslo třídy:

$$\mathsf{c}(\Gamma) = \{\Delta \mid L(\Gamma, \Delta)\}$$

Relaci podobnosti (L) jsme si definovali následovně:

$$L(\Gamma, \Delta) \Leftrightarrow (\exists R)(\Gamma R \Delta), \text{ kde } R \text{ je relace, která je 1-1}$$

Zmínili jsme, že definice čísla správně funguje pouze pro konečná čísla. Jakmile tuto definici použijeme na nekonečná čísla, pak nám například vyjde, že třída přirozených čísel je podobná třídě celých čísel, takže mají stejné číslo. Přesně tuto vlastnost můžeme využít k definici konečného čísla. Obecně platí, a Russell tento názor též zastával, že nekonečná čísla jsou charakteristická tím, že existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení, pro Russella 1-1 relace) mezi daným nekonečným číslem a nějakým menším číslem. V Russellově jazyce to znamená, že daná třída a některá její vlastní část (ostrá podtřída) jsou si podobné. [Rus93a, str. 79]

Formálně můžeme vlastnost Γ *je nekonečnou třídou* zapsat například následovně:

$$(\exists \Delta)(\exists t)(t \notin \Delta \wedge ((\Delta \cup \{t\}) = \Gamma) \wedge L(\Gamma, \Delta))$$

Chceme-li nyní najít vlastnost, která říká, že Γ *je konečnou třídou*, stačí, když předchozí formuli znegujeme:

$$(\forall \Delta)(\forall t)[\neg(t \notin \Delta \wedge ((\Delta \cup \{t\}) = \Gamma)) \vee \neg L(\Gamma, \Delta)]$$

Ekvivalentně:

$$(\forall \Delta)(\forall t)[(t \notin \Delta \wedge ((\Delta \cup \{t\}) = \Gamma)) \rightarrow \neg L(\Gamma, \Delta)]$$

Číslo $\mathsf{c}(\Gamma)$ je pak konečné číslo právě tehdy, když Γ splňuje tuto podmínku.

Lze ověřit, že daná podmínka platí pro libovolná konečná čísla. Platí také pro nulu, protože prázdná třída nemá žádné vlastní podtřídy, proto nemůže existovat bijekce mezi prázdnou třídou a její vlastní podtřídou. Z toho důvodu prázdná třída je konečnou třídou, tedy nula (která je číslem prázdné třídy) je konečné číslo.

Získali jsme formální vlastnost, která říká, že číslo nějaké třídy je konečné, pokud daná třída splňuje podmínku φ:

$$\varphi = (\forall\Delta)(\forall t)((t \notin \Delta \wedge ((\Delta \cup \{t\}) = \Gamma)) \rightarrow \neg L(\Gamma, \Delta))$$ [14]

Nyní ověřme, že φ je dědičná vlastnost. To z definice znamená ověřit, že platí:

$$(\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))$$

Vezměme si libovolné číslo $\mathsf{c}(\Gamma)$, pro které platí, že je to konečné číslo. Ukažme si, že i následník $\mathsf{c}(\Gamma)$, kterým je $\mathsf{c}(\Gamma \cup \{t\})$, kde $t \notin \Gamma$, je konečné číslo. Nazvěme si $\Gamma \cup \{t\} = \Omega$. Pro Ω pak platí formule φ, protože antecedent implikace ve φ může být splněn pouze třídou Γ a takovým t, kde:

$$(t \notin \Gamma) \wedge ((\Gamma \cup \{t\}) = \Omega)$$

a pro to platí, že $\neg L(\Omega, \Gamma)$ (protože Γ je konečná, pak se přidáním jednoho termu změní). To nám dohromady dává, že $S(\mathsf{c}(\Gamma)) = \mathsf{c}(\Omega)$ je konečné číslo, čímž jsme ověřili, že φ je dědičná vlastnost.

Našli jsme dědičnou vlastnost (dokonce induktivní vlastnost), která o libovolném čísle c říká, že je konečné. Ukázali jsme si, že dědičná vlastnost definuje dědičnou třídu. Máme tedy dědičnou (induktivní) třídu, která obsahuje právě všechna konečná čísla. Jakmile jsou přirozená čísla definována jako potomci 0 a ty jsou definováni jako průnik všech dědičných tříd obsahujících 0 (průnik všech induktivních tříd), potom všechna přirozená čísla jsou konečná. Induktivní třída obsahující všechna konečná čísla je totiž nejmenší induktivní třída. Je to také přesně taková třída, která splňuje intuitivní představu přirozených čísel.

[14] Podobnou podmínku uvádí ve své práci [Pre10] Chris Preston. Píše: *třída A je konečná, pokud každé prosté zobrazení $f : A \longrightarrow A$ je také na.* Což znamená, že A je konečná, když neexistuje bijekce mezi A a její vlastní částí.

Pro zobecnění konečnosti na všechna přirozená čísla lze také použít matematickou indukci, která je definována pro všechna přirozená čísla. Pro naši konkrétní vlastnost φ platí:

$$(\varphi(0) \wedge (\forall n)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n)))) \rightarrow (\forall n)\varphi(n)$$

Výše jsme ověřili, že φ platí pro 0 a zároveň, že je to dědičná vlastnost, a proto platí $(\forall n)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n)))$. Můžeme tedy učinit závěr, že φ platí pro každé přirozené číslo, jinak řečeno, že každé přirozené číslo je konečné.

Dokázali jsme si, že přirozená čísla vypadají přesně, jak bychom chtěli. Začínají nulou a po jednotlivých krocích se dostaneme ke každému konečnému číslu a nemůže se nám stát, že bychom měli mezi nějakými čísly nekonečný počet prostředníků. Našli jsme právě jeden („přirozený“) model Russellovy teorie a vyloučili jsme možnost jakýchkoliv nestandardních modelů. Russellova definice přirozených čísel umožňuje jen jeden model (až na izomorfismus).

6 Russellova teorie v praxi

Na závěr práce si uvedeme dva příklady aritmetických formulí, na kterých si budeme demonstrovat, co jsme dosud definovali pouze teoreticky:

1. $5 + 3 = 8$
2. $(\forall n)(\exists m)(m < n \vee n = 0)$

Každý příklad si nejdříve vyjádříme pomocí původní Peanovy aritmetiky, kterou jsme definovali v sekci 2.4. Poté si každý příklad vyjádříme pomocí Russellových definic, které jsme uvedli v sekci 2.6. Nakonec si ukážeme nejtěžší krok, pokusíme se totiž předchozí výrok o třídách nahradit výrokem o výrokových funkcích tak, jak jsme si to již uvedli na jednoduchých příkladech v sekci 3.5.

Tyto příklady budou sloužit nejen jako praktická ukázka teoretických definic, ale také nám jasně ukáží důvod, proč Russell zavádí neúplné symboly (především třídy) jako zkratky. Zřetelně uvidíme, jak obtížné je zapsat výrok o třídách a o kolik obtížnější je zapsat výrok o výrokových funkcích.

6.1 První příklad

6.1.1 Peanova aritmetika

Příklad $5 + 3 = 8$ zapsaný v Peanově aritmetice vypadá stejně. Ukažme si, jak bychom tuto rovnici v Peanově aritmetice dokázali:

$$\begin{aligned} 5+3 &= 8 \\ 5+(2+1) &= 8 \\ (5+2)+1 &= 8 \\ (5+(1+1))+1 &= 8 \\ ((5+1)+1)+1 &= 8 \\ (6+1)+1 &= 8 \\ 7+1 &= 8 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

6.1.2 Russellova třídová definice

Mějme třídu Γ mající 5 termů $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5)$ a třídu Δ mající 3 termy $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Pak rovnice $5 + 3 = 8$ převedena na výrok o třídách zní následovně:

Počet termů v Γ *spolu s počtem termů v* Δ *je 8.*

K ověření použijme definici sčítání z kapitoly 4. Utvořme si třídu dvojic, která je podobná Γ a třídu dvojic, která je podobná Δ. Číslo třídy, která vznikne sjednocením těchto dvou tříd, je součtem čísla třídy Γ s číslem třídy Δ:

$$\{\langle\gamma_1,\emptyset\rangle, \langle\gamma_2,\emptyset\rangle, \langle\gamma_3,\emptyset\rangle, \langle\gamma_4,\emptyset\rangle, \langle\gamma_5,\emptyset\rangle\} \cup \{\langle\emptyset,\delta_1\rangle, \langle\emptyset,\delta_2\rangle, \langle\emptyset,\delta_3\rangle\} =$$

$$= \{\langle\gamma_1,\emptyset\rangle, \langle\gamma_2,\emptyset\rangle, \langle\gamma_3,\emptyset\rangle, \langle\gamma_4,\emptyset\rangle, \langle\gamma_5,\emptyset\rangle, \langle\emptyset,\delta_1\rangle, \langle\emptyset,\delta_2\rangle, \langle\emptyset,\delta_3\rangle\}$$

Nazveme-li si poslední zmíněnou třídu Ω a použijeme-li relaci podobnosti, pak platí:

$$\mathsf{c}(\Gamma) + \mathsf{c}(\Delta) = \mathsf{c}(\Omega) = 8$$

6.1.3 Russellova beztřídová definice

Nechť třídu Γ, mající 5 termů, definuje výroková funkce α a třídu Δ, mající 3 termy, definuje výroková funkce β. Pak výrok *počet termů v* Γ *spolu s počtem termů v* Δ *je 8* bez použití tříd definujme následovně:

$$\begin{gathered}(\exists\psi)(\exists\chi)[(\forall x)((\alpha(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \wedge (\beta(x) \leftrightarrow \chi!(x)))\wedge \\ \wedge(\exists F)(F(\psi \vee \chi, \sigma) \wedge \epsilon(\sigma))]\end{gathered}$$

Kde F znamená relaci podobnosti mezi funkcemi, tzn. F říká, že dané dvě funkce splňují stejný počet termů. ϵ je funkce, kterou splňují právě takové funkce σ, které splňují právě 8 termů, tzn. σ vyděluje 8-prvkovou třídu.

Tato formule nám vyjadřuje, že existuje relace podobnosti mezi počtem termů, které splňují ψ nebo χ, a počtem termů, které splňují funkci σ, která má takovou vlastnost, že ji splňuje právě 8 termů.

Pokusme se zapsat formálním jazykem relaci podobnosti F. Nazvěme si f relací podobnosti pro α a β, pokud f splňuje následující dvě podmínky:

$$(\forall x)\,[\alpha(x) \rightarrow (\exists y)(\beta(y) \wedge f(x,y) \wedge (\forall y')((\beta(y') \wedge f(x,y')) \rightarrow y = y'))]$$

$$(\forall y)\,[\beta(y) \rightarrow (\exists x)(\alpha(x) \wedge f(x,y) \wedge (\forall x')((\alpha(x') \wedge f(x',y)) \rightarrow x = x'))]$$

První podmínka tvrdí, že pro každé x existuje právě jedno y a druhá podmínka tvrdí, že pro každé y existuje právě jedno x. To znamená, že f je bijekce.

Funkci $\epsilon(\sigma)$ vyjadřující, že σ splňuje právě 8 termů vyjádříme:

$$\begin{gathered}(\exists t_1)\ldots(\exists t_8)[\sigma(t_1) \wedge \ldots \wedge \sigma(t_8) \wedge t_1 \neq t_2 \wedge t_1 \neq t_3 \wedge \ldots \wedge t_7 \neq t_8 \wedge \\ \wedge(\forall z)((z \neq t_1 \wedge \ldots \wedge z \neq t_8) \rightarrow \neg\sigma(z))]\end{gathered}$$

Nyní složme naše funkce dohromady:

$$\begin{aligned}&(\exists\psi)(\exists\chi)[(\forall x)[(\alpha(x) \leftrightarrow \psi!(x)) \wedge (\beta(x) \leftrightarrow \chi!(x))]\wedge\\ &\quad(\exists f)[(\forall x)[(\psi!(x) \vee \chi!(x)) \rightarrow (\exists y)(\sigma(y) \wedge f(x,y)\wedge\\ &\qquad\qquad(\forall y')((\sigma(y') \wedge f(x,y')) \rightarrow y = y'))]\wedge\\ &\qquad\quad(\forall y)[\sigma(y) \rightarrow (\exists x)((\psi!(x) \vee \chi!(x)) \wedge f(x,y)\wedge\\ &\qquad\qquad(\forall x')(((\psi!(x) \vee \chi!(x)) \wedge f(x',y)) \rightarrow x = x'))]\wedge\\ &\quad(\exists t_1)\ldots(\exists t_8)[\sigma(t_1) \wedge \ldots \wedge \sigma(t_8)\wedge\\ &\qquad\qquad t_1 \neq t_2 \wedge t_1 \neq t_3 \wedge \ldots \wedge t_7 \neq t_8\wedge\\ &\qquad\qquad(\forall z)((z \neq t_1 \wedge \ldots \wedge z \neq t_8) \rightarrow \neg\sigma(z))]]]\end{aligned}$$

Dostali jsme výrok o výrokových funkcích říkající: *počet termů v* Γ *spolu s počtem termů v* Δ *je 8.* Neboli $5 + 3 = 8$.

Podrobněji nám výroková funkce říká následující: pokud funkce α definuje třídu Γ mající 5 termů a funkce β definuje třídu Δ mající 3 termy, potom existuje relace podobnosti mezi funkcí σ a disjunkcí funkce α a β, a zároveň σ splňuje podmínku, že vyděluje třídu, která má 8 prvků.

6.2 Druhý příklad

6.2.1 Peanova aritmetika

Druhý příklad $(\forall n)(\exists m)(m < n \vee n = 0)$, vypadá v Peanově aritmetice takto:

$$(\forall n)(\exists m)(n - m \neq \Lambda \vee n = 0)$$

Což si můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$(\forall n)(\exists m)((\exists x)(x \neq 0 \wedge x + m = n) \vee n = 0)$$

Důkaz proveďme indukcí:

1. $n = 0$
   $(\exists m)((\exists x)(x \neq 0 \wedge x + m = 0) \vee 0 = 0)$
   to zjevně platí

2. $(\forall n)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(n+1))$
   Předpokládejme, že následující platí:
   $(\exists m)((\exists x)(x \neq 0 \wedge x + m = n) \vee n = 0)$
   Chceme ukázat, že platí také:
   $(\exists m')((\exists x')(x' \neq 0 \wedge x' + m' = n + 1) \vee n + 1 = 0)$
   To si ukažme rozborem případů podle toho, která disjunkce platila v předchozí formuli (indukčním předpokladu):

   (a) n=0
       Zvolme si $m' = 0$ a $x' = 1$, potom platí:
       $x' + m' = n + 1$
       $1 + 0 = 0 + 1$
       $1 = 0 + 1$
       $1 = 1$[15]

   (b) $(\exists x)(x \neq 0 \wedge x + m = n)$
       Zvolme si $m' = m + 1$ a $x' = x$, potom platí:
       $x' + m' = n + 1$
       $x + (m + 1) = n + 1$
       $(x + m) + 1 = n + 1$[16]
       Poslední rovnice platí díky 7. axiomu ($a = b \Leftrightarrow a + 1 = b + 1$).

Tím jsme si ukázali, že platí

$$(\forall n)(\exists m)((\exists x)(x \neq 0 \wedge x + m = n) \vee n = 0).$$

6.2.2 Russellova třídová definice

Formule $(\forall n)(\exists m)(m < n \vee n = 0)$, použijeme-li Russellův zápis pomocí tříd, bude vypadat takto:

$$(\forall n)(\exists m)((\forall \alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(n)) \vee n = 0)$$

Budeme opět dokazovat indukcí:

[15] V Peanově aritmetice lze dokázat, že $0 + 1 = 1 + 0$.
[16] V Peanově aritmetice lze též dokázat, že $x + (m + 1) = (x + m) + 1$.

1. $n = 0$
   $(\exists m)((\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(0)) \vee 0 = 0)$
   to zjevně platí

2. $(\forall n)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n)))$
   Předpokládejme, že následující platí:
   $(\exists m)((\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(n)) \vee n = 0)$
   Chceme ukázat, že platí také:
   $(\exists m')((\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m'))) \rightarrow \alpha(S(n))) \vee S(n) = 0)$
   To si ukažme rozborem případů podle toho, která disjunkce platila v předchozí formuli (indukčním předpokladu):

   (a) n=0
       Zvolme si $m' = 0$, potom platí:
       $(\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(0))) \rightarrow \alpha(S(0)))$
       $(\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(1)) \rightarrow \alpha(1))$
       což zjevně platí

   (b) $(\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(n))$
       Zvolme si $m' = S(m)$, potom platí:
       $(\forall\alpha)(\alpha \in DV \wedge \alpha(S(S(m)))) \rightarrow \alpha(S(n)))$
       Protože $\alpha \in DV$ platí následující dvě podmínky:
       $\alpha(S(m)) \rightarrow \alpha(S(S(m)))$
       $\alpha(n) \rightarrow \alpha(S((n)))$
       Díky tomu platí:
       $\alpha(S(S(m))) \rightarrow \alpha(S(n))$

Tím jsme dokázali, že platí

$$(\forall n)(\exists m)((\forall\alpha)((\alpha \in DV \wedge \alpha(S(m))) \rightarrow \alpha(n)) \vee n = 0).$$

6.2.3 Russellova beztřídová definice

Výrok *pro každou funkci α, která vyděluje třídu, která má* n *termů, existuje funkce β, která vyděluje třídu, která má* m *termů a platí, že $m < n$ nebo $n = 0$* nahradíme následující beztřídovou formulí:

$$
\begin{aligned}
(\forall\alpha)(\exists\beta)(\exists\varphi)(\exists\psi)[(\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow \varphi!(x) \wedge \beta(x) \leftrightarrow \psi!(x))\wedge \\
(\exists f)[(\forall x)(\varphi!(x) \rightarrow (\exists y)(\psi!(y) \wedge f(x,y)\wedge \\
\wedge(\forall y')((\psi!(y') \wedge f(x,y')) \rightarrow y = y')))\wedge \\
\neg(\forall y)(\psi!(y) \rightarrow (\exists x)(\varphi!(x) \wedge f(x,y)\wedge \\
\wedge(\forall x')((\varphi!(x') \wedge f(x',y)) \rightarrow x = x')))]\vee \\
(\exists f)[(\forall x)(\varphi!(x) \rightarrow (\exists y)(\eta(y) \wedge f(x,y)\wedge \\
\wedge(\forall y')((\eta(y') \wedge f(x,y')) \rightarrow y = y')))\wedge \\
((\forall y)(\eta(y) \rightarrow (\exists x)(\varphi!(x) \wedge f(x,y)\wedge \\
\wedge(\forall x')((\varphi!(x') \wedge f(x',y)) \rightarrow x = x')))\wedge \\
\neg(\exists t)(\eta(t)))]]
\end{aligned}
$$

Formule říká, že pro každou výrokovou funkci α existuje výroková funkce β taková, že k nim existují ekvivalentní predikativní funkce φ a ψ (řádek 1) pro které platí, že ψ splňuje ostře méně prvků než φ (řádek 2-5) nebo φ nesplňuje žádný prvek, což jsme vyjádřili pomocí bijekce mezi φ a výrokovou funkcí η, kterou nesplňuje žádný prvek (řádek 6-10).

7 Závěr

Pokusila jsem se v této práci ukázat, jakou analýzu Peanových axiomů nám nabízí Russell v jeho (a Whiteheadových) *Principia Mathematica*. Řekli jsme si, že se vlastně snaží o logicismus a uvedli jsme si definice *čísla*, *následníka* a dalších pojmů. Čistého logicismu (převedení matematiky na logiku) však Russell nakonec nedosáhl, protože při zavedení rozvětvené teorie typů příliš omezil jazyk a byl nucen zavést *axiom reducibility*, který není logický.

Teorie typů, a s ní axiom reducibility, byly vystaveny velké kritice pozdějších filosofů. Teorie typů je velmi složitá a navíc není z knihy jasné, jak je přesně rozvětvená. Dále není zcela jasné, zda Russell s Whiteheadem v *Principiích* dodržují rozlišení metajazyka a jazyka-objektu. Nedodržují ani pevně ustanovené termíny nebo je dokonce používají dříve, než je přesně definují. To vše je u Russella toužícího po naprosté přesnosti a jednoznačnosti v základech matematiky velmi překvapivé.

V kapitole o nestandardních modelech ukazuji, že Russellovy definice základních pojmů aritmetiky jsou matematicky přesné. Ukázali jsme si, že lze v jeho teorii nadefinovat vlastnost *x je konečné číslo*, a že přirozená čísla nadefinovaná jako čísla splňující všechny *induktivní vlastnosti* musí tuto vlastnost splňovat. To znamená, že Russellovu definici přirozených čísel splňují skutečně jen ta čísla, která bychom intuitivně chtěli.

Celou teoretickou práci dobře shrnuje poslední kapitola, která uvádí konkrétní příklady a ukazuje, jakým způsobem se dá s Russellovou teorií pracovat. Příklady nabízí také porovnání, jak jsou různé teorie (Peanova, Russellova třídová a Russellova beztřídová) složité. Konkrétně, jak složité je zapsat příklad bez použití tříd, což ukazuje důvod, proč Russell třídy jako zkratky zavádí.

Reference

[BŠ86] Bohuslav Balcar and Petr Štěpánek. *Teorie množin.* Academia, 1986.

[Irv09] Andrew D. Irvine. Bertrand Russell's logic. In Dov M. Gabbay and John Woods, editors, *Handbook of the History of Logic. Logic from Russell to Church*, volume 5, pages 1–28. North-Holland, 2009.

[Ken98] Hubert Collings Kennedy. *Peano: Life and Works of Giuseppe Peano.* Springer, 1998.

[KLN02] Fairouz Kamareddine, Twan Laan, and Rob Nederpelt. Types in logic and mathematics before 1940. *The Bulletin of Symbolic Logic*, 8:185–245, 2002.

[Lan98] Gregory Landini. *Russell's Hidden Substitutional Theory.* Oxford University Press, 1998.

[Lin04] Godehart Link, editor. *One Hundred Years of Russell's Paradox.* De Gruyter, 2004.

[Pea67] Giuseppe Peano. The principles of arithmetic, presented by a new method. In Jean van Heijenoort, editor, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879 - 1931*, pages 83–97. Harvard University Press, 1967.

[Pre10] Chris Preston. Finite sets and counting. Technical report, Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 2010. Staženo z Cornell University Library: http://arxiv.org/abs/0809.0105v2 (1.8.2014).

[Rac13] Jiří Raclavský. Co jsou Russellovy propoziční funkce. In Milan Soutor, Tomáš Marvan, and Ludmila Dostálová, editors, *Studie k filosofii Bertranda Russella*, pages 109–146. Filosofický časopis a Filosofia, 2013.

[Rus93a] Bertrand Russell. *Introduction to Mathematical Philosophy.* Dover Publications, Inc., 1993.

[Rus93b] Bertrand Russell. *Logika, věda, filozofie, společnost*. Svoboda-Libertas, 1993.

[Rus10] Bertrand Russell. *Principles of Mathematics*. Routledge, 2010.

[RW27] Bertrand Russell and Alfred North Whitehead. *Principia Mathematica*. Cambridge University Press, 1927.

[Sch13] Radek Schuster. Axiom redukovatelnosti: za zrcadlem paradoxu a co tam Russell našel. In Milan Soutor, Tomáš Marvan, and Ludmila Dostálová, editors, *Studie k filosofii Bertranda Russella*, pages 167–187. Filosofický časopis a Filosofia, 2013.

[Sha00] Stewart Shapiro. *Foundations without Foundationalism*. Clarendon Press, 2000.

[Ten13] Neil Tennant. Logicism and neologicism, 2013. http://plato.stanford.edu/entries/logicism/ (5.7.2014).

[Šve02] Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, 2002.

[Wiki] http://en.wikipedia.org/wiki/Logicism (15.5.2014).