Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Splítek

Model korupce v demokratické společnosti

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce:	Prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2014

Rád bych poděkoval profesorovi Prof. RNDr. Vladimíru Janovskému, DrSc. za vedení mé práce, za všechny rady a postřehy a hlavně za čas, který mi věnoval. Dále bych rád poděkoval své rodině za podporu a za to, jak mě neustále pobízeli k většímu pracovnímu nasazení.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 23.5.2014 Martin Splítek

Název práce: Model korupce v demokratické společnosti

Autor: Martin Splítek

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: Cílem této práce je zkoumat chování závažného společenského jevu – korupce, a to prostřednictvím matematického modelu korupce v demokratické společnosti publikovaného v [1]. Jedná se o dynamický systém zadaný soustavou tří obyčejných diferenciálních rovnic, které závisí na třech proměnných a deseti parametrech. Model je zkoumán prostředky numerické analýzy, konkrétně metodou numerické integrace soustav obyčejných diferenciálních rovnic a metodou numerické kontinuace. K tomu byl využit toolbox Matcont [2], který pracuje v prostředí programu MATLAB [3]. Výsledkem práce je komentovaná parametrická studie fenoménu korupce.

Klíčová slova: obyčejné diferenciální rovnice, dynamické systémy, bifurkační analýza

Title: On a model of corruption in a democratic society

Author: Martin Splítek

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: The aim of this work is to study the behavior of serious social phenomenon – corruption, and we do this through a mathematical model of corruption in a democratic society, published in [1]. The model is a dynamical system of three differential equations, specified by three variables and ten parameters. The model is studied by means of numerical analysis, namely, the method of numerical integration of ordinary differential equations and the method of numerical continuation. We used toolbox Matcont [2], which works in the environment of program MATLAB [3]. The result is commented parametric study of the phenomenon of corruption.

Keywords: ordinary diferential equations, dynamic systems, bifurcation analysis

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Korupce, definovaná jako zneužití svěřených pravomocí za účelem získání nezaslouženého osobního prospěchu [10], se ukazuje jako velký problém v dnešním světě. Zaměřuje se na ni mnoho vědeckých výzkumů a publikací. Tato bakalářská práce pojednává právě o jedné z nich a to o Modelu korupce v "demokratické" společnosti, publikovaném v roce 1998 v [1]. Naším cílem bude čtenáře nejprve seznámit se základy modelování evolučních forem pomocí soustav obyčejných diferenciálních rovnic a bifurkace. Následně pak budeme moci prezentovat již zmíněný Model korupce v demokratické společnosti simulovaný dynamickým systémem o třech obyčejných diferenciálních rovnicích se třemi proměnnými a deseti parametry. Pomocí programu MATLAB [3], respektive jeho toolboxu Matcont [2] hodláme tento model zkoumat a vyvozené závěry interpretovat jako následky pro demokratickou společnost. Zaměříme se hlavně na zkoumání chování systému při devíti pevných a jednom proměnném parametru.

Kapitola 2 - Teorie dynamických systémů. V této kapitole vysvětlíme teorii obyčejných diferenciálních rovnic, dynamických systémů a bifurkace. Také stručně přiblížíme metody numerické kontinuace.

Kapitola 3 - Model korupce v demokratické společnosti. Zde nastíníme myšlenkový proces tvorby a postupného vývoje tohoto modelu. Ukážeme, jak byly nejprve vytvořeny naše tři proměnné, několik jejich funkcí a jak se postupnými úpravami nakonec model dostal do konečného stavu tří obyčejných diferenciálních rovnic o třech proměnných a deseti parametrech. Dále zde vysvětlíme významy jednotlivých parametrů, které budeme potřebovat znát u následného vyvozování závěrů z našich pozorování.

Kapitola 4 - Analýza modelu V této kapitole nejprve nalezneme ekvilibria, neboli stacionární body, systému. Poté velice stručně popíšeme prostředí Matcontu [2], ve kterém se pak budeme věnovat vlastnímu výzkumu. Hodláme zkoumat chování modelu vždy pro jeden volný parametr. Ze získaných dat se pokusíme najít optimální intervaly pro jednotlivé parametry, ve kterých se společnost chová "zdravě" demokraticky a intervaly, které nakonec vyústí v extrémní případy uspořádání společnosti. Nakonec se tyto výsledky pokusíme sociologicky interpretovat a díky znalosti významu parametrů posoudíme, zda-li zjištěné chování odpovídá skutečnosti.

V závěru práce shrneme výhody a nevýhody programu Matcont [2]. Následně vyvodíme závěry z našich pozorování, a to hlavně závěry týkající se praktické aplikovatelnosti tohoto modelu. Posoudíme, zda-li výsledky odpovídají skutečnosti a dá-li se model použít v praxi. Pokud se ukáže, že model není možno prakticky využít, tak se pokusíme nastínit směr, kterým by se další vývoj mohl ubírat.

Kapitola 2

Teorie dynamických systémů

2.1 Modely evoluce

V této části bych rád nastínil všechny důležité teoretické pojmy související s tématem modelu korupce v demokratické společnosti, které budeme v pozdější fázi této práce potřebovat. Jelikož se jedná převážně o definice a vysvětlení teorie, tak použité materiály jsou z většiny citované z různých publikací či prací a to z [4], [6] a [7].

2.1.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Jak již bylo řečeno, náš model korupce v demokratické společnosti je definován soustavou obyčejných diferenciálních rovnic (zkr. ODE). Abychom ale tuto úlohu mohli řešit, je nejprve třeba pochopit význam pojmu diferenciální rovnice. Úplné základy bych proto rád demonstroval na příkladu:

Příklad. (Logistická rovnice) Diferenciální rovnice

$$x' = (a - bx)x - c \tag{2.1}$$

s počáteční podmínkou

$$x(t_0) = x_0 \tag{2.2}$$

a parametry $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, můžeme modelovat časový vývoj populace, kupříkladu nějakého hmyzího druhu.

Řešením úlohy se rozumí spojitě diferencovatelná funkce $t \mapsto u(t)$ taková, že

$$\frac{du(t)}{dt} = (a - bu(t))\, u(t) - c$$

pro všechna t, pro které $u(t_0) = x_0$. Definujme operátor $\varphi : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, který zadané počáteční podmínce přiřazuje řešení $u(t)$ úlohy v čase t. Tedy,

$$(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \longmapsto u(t) \equiv \varphi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^1 \tag{2.3}$$

Operátor φ definuje stav systému v čase t za předpokladu, že evoluce vychází z počáteční podmínky (t_0, x_0).

Z hlediska uvažovaného modelu se stavem rozumí hustota populace v jednotkovém objemu. Model předpovídá budoucnost ($t \geq t_0$) a rekonstruuje minulost ($t \leq t_0$).

Vzhledem k jednoduchosti modelu (2.1) & (2.2) je možné zkonstruovat operátor φ *explicitně* pomocí elementárních funkcí.

Technice řešení počáteční úlohy (t.j. konstrukci operátoru φ) se říká integrace diferenciální rovnice, v našem případě rovnice (2.1).

Numerickému (t.j. přibližnému) řešení se říká *numerická integrace (kvadratura)* diferenciální rovnice.

Pravou stranu obyčejné diferenciální rovnice (2.1) je možno chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$,

$$(t, x) \longmapsto f(t,x) \equiv (a - bx)x - c \tag{2.4}$$

Vidíme, že pravá strana nezávisí na t. Pokud pravá strana diferenciální rovnice nezávisí na čase t, pak takovéto rovnici říkáme autonomní diferenciální rovnice.

Definice 1. (autonomní rovnice) *Nechť pravá strana diferenciální rovnice nezávisí na čase t. Pak takovouto rovnici nazýváme autonomní diferenciální rovnice.*

Nyní příklad zobecníme. Zformulujeme *počáteční úlohu* pro *soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.*

Stavový prostor budeme identifikovat s lineárním prostorem $\mathbb{R}^n$. Dimenze stavového prostoru je tedy n. Stav systému je ztotožněn s prvkem stavového prostoru, tedy s aktuální hodnotou *stavové proměnné.* Čas je skalární parametr. Budeme jej standardně označovat jako t.

Data uvažované úlohy jsou

1. počáteční podmínka, t.j. zadaný stav $x_0 \in \mathbb{R}^n$ v čase t_0.

2. pravá strana soustavy, zadaná zobrazením

$$f : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

Budeme předpokládat, že definiční obor pravé strany je otevřená množina $J \times D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ a že J je interval. Předpokládáme, že $t_0 \in J$ a $x_0 \in D$, tedy počáteční podmínka $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$ patří do definičního oboru.

Počáteční úlohu zapisujeme, ve vektorové notaci, jako

$$x' = f(t,x)\,, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.6}$$

Jedná se o soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t,x_1,\ldots,x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t,x_1,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka. V pozdější části této práce se budeme setkávat se závislostí na parametrech. Počáteční úloha tedy bude ve tvaru(vektorová notace)

$$x' = f(t,x,a)\,, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.7}$$

Definujme, co znamená řešení problému (2.6). Za tím účelem budeme požadovat, aby pravá strana byla spojitá, t.j.

$$f \in C(J \times D, \mathbb{R}^n) \tag{2.8}$$

Definice 2. (řešení počáteční úlohy) *Předpokládejme, že $f \in C(J \times D, \mathbb{R}^n)$. Nechť existuje*

1. *$I \subset J$, interval obsahující t_0*
2. *vektorová funkce $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$ která má spojitou první derivaci na I, t.j. $u \in C^1(I, D)$.*

Nechť

$$u'(t) = f(t,u(t)) \tag{2.9}$$

pro všechna $t \in I$ a je splněna počáteční podmínka

$$u(t_0) = x_0 \tag{2.10}$$

Potom říkáme, že funkce u je řešením (2.6) na intervalu I.

Definice 3. *Nechť $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$, $f \in C(J \times D,\mathbb{R}^n)$. Říkáme, že f je Lipschitzovsky spojitá, jestliže existuje konstanta $L \geq 0$ tak, že*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\, \|x - y\| \tag{2.11}$$

pro každé $t \in J$ a každé $x,y \in D$.

Věta 1. (Lokální existence a jednoznačnost) *Nechť f je Lipschitzovsky spojitá na $J \times D$. Potom počáteční úloha (2.6) je lokálně jednoznačně řešitelná t.j. pro každou počáteční podmínku $(t_0,x_0) \in J \times D$ platí:*

Existuje otevřený interval $I \subset J$ obsahující $t_0 \in I$, a funkce $u \in C^1(I, D)$ tak, že vektorová funkce $t \mapsto u(t)$ je právě jediné řešení rovnice (2.9) na intervalu $t \in I$, které splňuje počáteční podmínku (2.10).

Definice 4. *Tok vektorového pole f definujeme jako*

$$u(t) = \varphi(t,t_0,x_0) \tag{2.12}$$

Poznámka. Pokud je diferenciální rovnice autonomní, pak je tok vektorového pole definován jako

$$u(t) = \varphi(t,x_0) \tag{2.13}$$

Systém Matlab obsahuje prostředky pro numerickou integraci soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Tyto prostředky budeme implicitně využívat v toolboxu Matcont a nebudeme je zde dále popisovat(viz [2]).

2.1.2 Dynamické systémy

Dynamický systém je matematická formulace obecného pojetí deterministického procesu. Budoucí a minulé stavy mnoha fyzických, chemických, biologických, ekologických, ekonomických a i sociálních systémů lze do určité míry určit tím, že známe jejich současný stav a zákony určující jeho vývoj. To znamená, že dynamický systém můžeme definovat pomocí množiny možných stavů (stavový prostor) a pomocí zákonů vývoje systému v čase t.

Budeme uvažovat dynamické systémy formulované jako počáteční úlohy pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, které jsou autonomní, t.j. pravá strana nezávisí na čase t.

Nyní tedy můžeme přejít k definici dynamického systému:

Definice 5. (Dynamický systém) *Dynamickým systémem rozumíme trojici (φ, T, Ω), kde Ω je stavový prostor $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, T je množina časů t a φ je evoluční operátor, φ: $\mathbb{R}^1 \times \Omega \longrightarrow \Omega$, který má tyto vlastnosti:*

1. $\varphi(0,x) = x \qquad \forall x \in \Omega$
2. $\varphi(s, \varphi(t,x)) = \varphi(s+t,x) \qquad \forall x \in \Omega$ *a pro* $\forall s,t \in \mathbb{R}^1$

Dále nás také budou zajímat nejdůležitější body celého dynamického systému – stacionární body, neboli ekvilibria. Jedná se o takové body, ve kterých dynamický systém už zůstane, jakmile se do něj jednou dostane. Definice vypadá následovně:

Definice 6. (Ekvilibrium) *Bod $x_0 \in \Omega$ se nazývá ekvilibrium, jestliže pro $\forall t \in \mathbb{R}^1$ platí:*

$$\varphi(t,x_0) = x_0 \tag{2.14}$$

Poznámka. Ekvilibrium je možné ekvivalentně definovat takto: Bod $x_0 \in \Omega$ se nazývá ekvilibrium, jestliže $f(x_0) = 0$, kde funkce f je pravá strana soustavy diferenciálních rovnic (2.6)

Další důležitý pojem, který budeme často používat, je orbita.

Definice 7. (Orbita) *Nechť $x_0 \in \Omega$. Orbitou bodu x_0 rozumíme množinu:*

$$\Theta(x_0) = \{x \in \Omega : \textit{Existuje-li } t \in \mathbb{R} \textit{ tak, že } x = \varphi(t,x_0)\}$$

Poznámka. Lze definovat i pojem pozitivní orbita, který vyjadřuje orbitu pouze pro budoucí vývoj systému, tedy pro časy $t > t_0$, kde t_0 je počáteční čas.

Pomocí pojmu orbita nyní můžeme definovat i fázový portrét:

Definice 8. (Fázový portrét) *Fázový portrét dynamického systému je rozdělení stavového prostoru do orbit.*

Poznámka. V praxi se do fázového portrétu vykresluje pouze několik klíčových orbit, aby bylo vůbec možno z obrázku něco rozeznat, viz obrázek 2.1

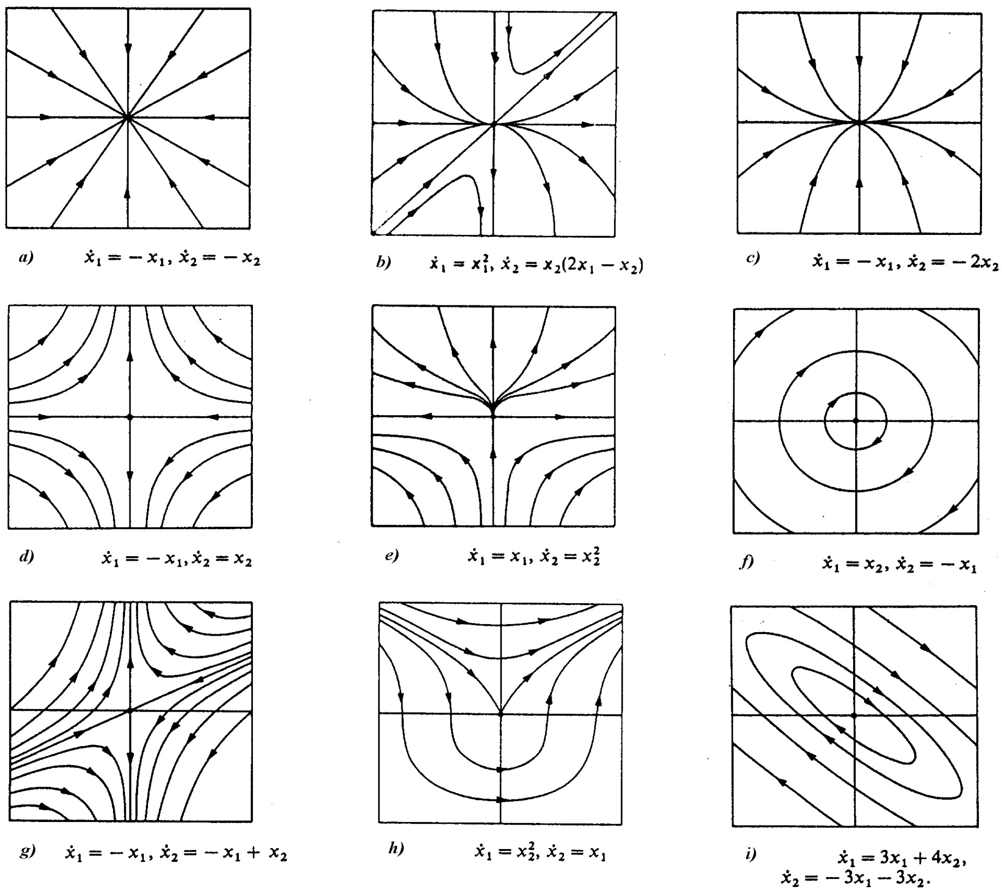
V následující analýze modelu korupce se také mnohokrát setkáme s pojmem limitní cyklus:

Definice 9. (cyklus) *Nechť $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) \neq 0$ (t.j. bod x_0 není ekvilibrium). Nechť existuje $P > 0$ tak, že $\varphi(0,x_0) = \varphi(P,x_0)$. Potom orbitu $\Theta(x_0)$ nazýváme cyklus*

Poznámka. Číslu P říkáme perioda cyklu. Zřejmě $\varphi(0,x_0) = \varphi(kP,x_0)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Limitní cyklus je cyklus, do kterého ústní minimálně jedna orbita.

Na obrázku 2.1 jsou příklady fázových portrétů dynamických systémů v $\mathbb{R}^2$ v okolí stacionárního bodu $0 \in \mathbb{R}^n$.



Obrázek 2.1: příklady fázových portrétů pro různé systémy

Definice 10. (Ekvivalence dynamických systémů) *Dvojice dynamických systémů je topologicky ekvivalentní, pokud existuje homeomorfismus $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ převádějící orbity prvního systému na orbity druhého systému a zachovávající tok času.*

Poznámka. Na obrázku 2.1 můžeme vidět několik topologicky ekvivalentních systémů. Například dvojice a),c) nebo f),i) či d),g).

2.1.3 Bifurkace

V této části nastíníme základy teorie bifurkace, se kterými se setkáme později v této práci. Většina použité teorie pochází z [4]. Z předchozí podkapitoly již víme, co znamená pojem topologické ekvivalence dynamických systémů a můžeme tedy definovat bifurkaci.

Definice 11. (Bifurkace) *Existence topologicky neekvivalentních fázových portrétů při změně parametru(viz.* (2.7)*)se nazývá bifurkace.*

Definice 12. *Ekvilibrium S nazveme stabilní, jestliže platí:*

1. *pro každé okolí $U \supset S$ existuje okolí $V \supset S$ takové, že $\varphi(t,x) \in U$ pro všechna $x \in V$ a všechna t*

2. *existuje okolí $U_0 \supset S$ takové, že $\varphi(t,x) \to S$ pro všechna $x \in U_0$ při $t \to \infty$*

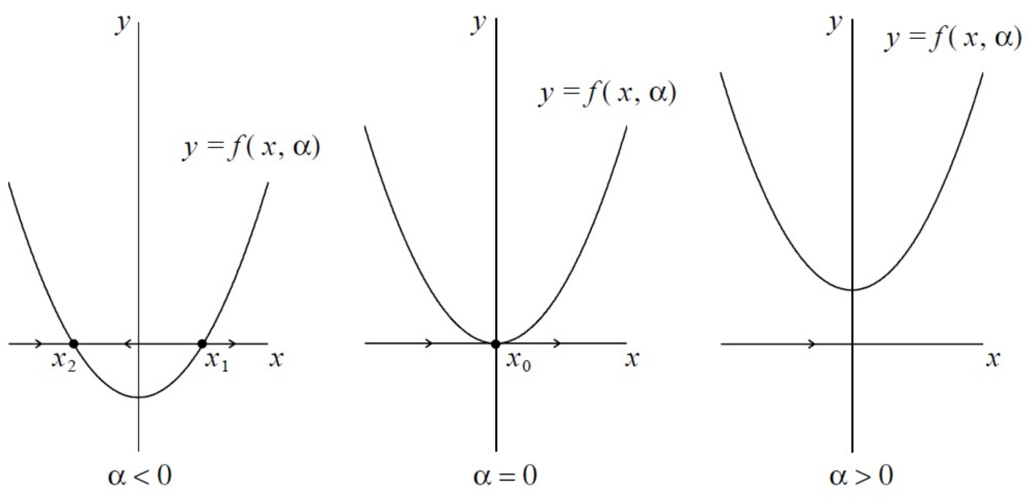
Bifurkace tedy nastává, když se topologie systému změní při překročení bifurkační hodnoty zkoumaného parametru. Existuje mnoho typů bifurkací, avšak pro naše účely se budeme zabývat pouze dvěma - bifurkací typu záhyb a Hopfovou bifurkací. Tyto jevy jsou definovány pomocí vlastních čísel Jakobiánu f, přesněji bifurkace typu záhyb jako výskyt $\lambda = 0$ a Hopfova bifurkace nastává při výskytu dvojice ryze imaginárních vlastních čísel. Proto si je raději vysvětlíme na příkladech a to těch úplně nejzákladnějších, tedy normálních formách, což jsou nejjednodušší možné systémy, ve kterých se daný jev vyskytuje.

Normální forma bifurkace typu záhyb

Mějme následující jednorozměrný dynamický systém závislý na jednom parametru

$$x' = \alpha + x^2 \equiv f(x,\alpha) \tag{2.15}$$

Pro $\alpha = 0$ má tento systém nehyperbolické ekvilibrium $x_0 = 0$ s vlastním číslem $\lambda = 0$. Chování systému pro všechny ostatní hodnoty parametru α je zřejmé. Pro $\alpha < 0$ se zde vyskytují dvě ekvilibria $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$ a pro $\alpha > 0$ neexistuje žádné ekvilibrium, viz obrázek 2.2 převzatý z [4] str. 81.



Obrázek 2.2: bifurkace typu záhyb

Když pohybujeme s parametrem α a překročíme nulu ze záporných do kladných čísel, tak již zmiňovaná dvě ekvilibria se "střetnou"a vznikne jediné ekvilibrium v $\alpha = 0$, které pak zmizí. Tento jev nazýváme bifurkací typu záhyb.

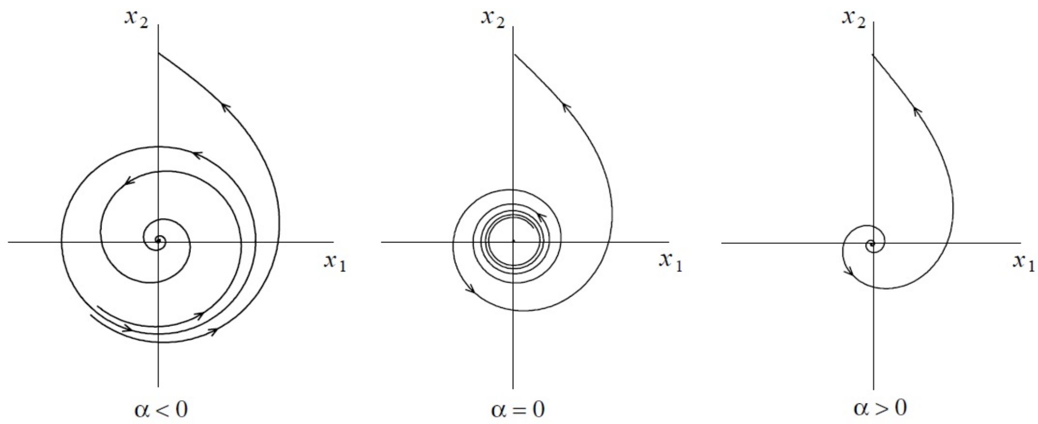
Normální forma Hopfovy bifurkace

Předpokládejme následující systém dvou diferenciálních rovnic závisejících na jednom parametru

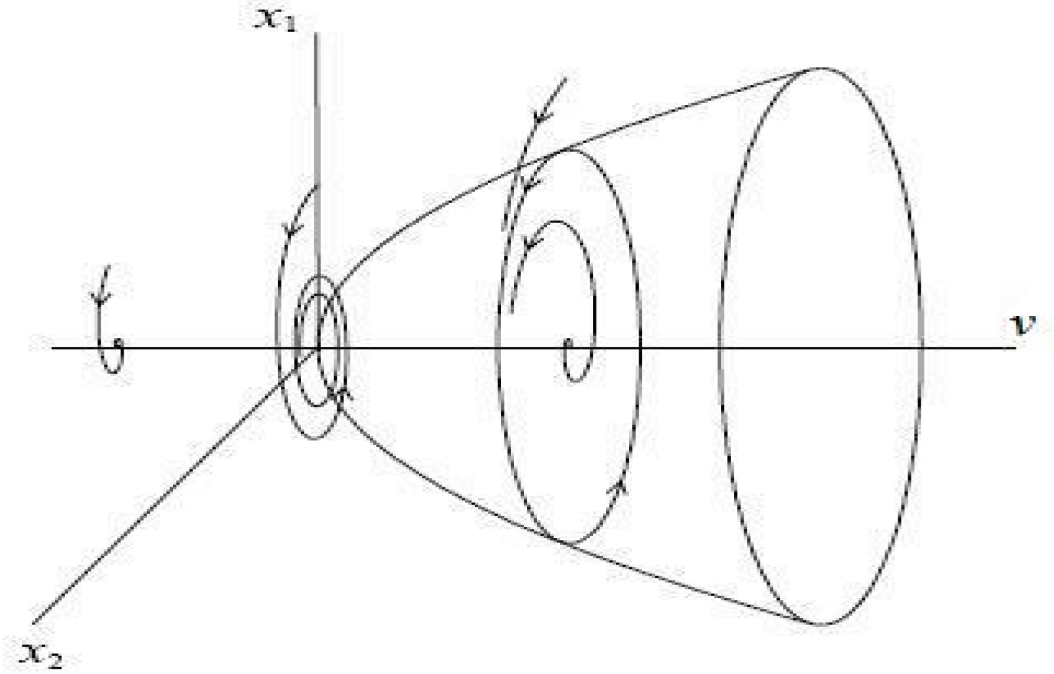
$$x_1' = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.16}$$

$$x_2' = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \tag{2.17}$$

Systém má jediné ekvilibrium v bodě $x_1 = x_2 = 0$ a to pro všechny α. Pro $\alpha < 0$ je ekvilibrium stabilní, pro $\alpha > 0$ nestabilní a pro $\alpha = 0$ se zde vyskytne limitní cyklus, viz obrázek 2.3 z [4], str. 87 a obrázek 2.4, znázorňující ten samý jev, ale v grafu závislosti na parametru α, taktéž z [4], str. 88.



Obrázek 2.3: Hopfova bifurkace



Obrázek 2.4: Hopfova bifurkace v závislosti na parametru α

2.2 Numerická kontinuace

Většinu analýzy Modelu korupce v demokratické společnosti budeme provádět v prostředí Matcontu, který využívá metody numerické kontinuace. Proto tyto metody v této podkapitole alespoň trochu nastíníme.

2.2.1 Křivka v $\mathbb{R}^{n+1}$

Definice 13 (Křivka v $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je otevřený interval. Zobrazení $c : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ třídy $\mathcal{C}^1$ nazveme (parametrizovanou) křivkou v $\mathbb{R}^{n+1}$. Množinu $c(I)$ nazveme obrazem křivky.*

Věta 2. *Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení a existuje bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ takový, že platí*

$$F(\bar{x}) = 0 \tag{2.18}$$

$$F'(\bar{x}) \textit{ má plnou hodnost } n. \tag{2.19}$$

Potom existuje index i a interval I obsahující bod $\bar{x}_i$ a křivka $c(\alpha) : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ taková, že

$$c(0) \;=\; \bar{x} \tag{2.20}$$

$$F(c(\alpha)) \;=\; 0 \tag{2.21}$$

$$rank(F'(c(\alpha)) \;=\; n \tag{2.22}$$

$$c'(\alpha) \;\neq\; 0 \tag{2.23}$$

Definice 14 (regulární bod)**.** *Nechť $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení a existuje regulární bod $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, t.j. platí (2.18) a (2.19). Vektor $t \in \mathbb{R}^{n+1}$ nazveme tečným vektorem ke křivce z Věty 2 implicitně zadané rovnicí $F(x) = 0$ v bodě $\bar{x}$, pokud*

$$F'(\bar{x})^T t \;=\; 0 \tag{2.24}$$

$$\|t\| \;=\; 1 \tag{2.25}$$

Definice 15. *Nechť A je matice typu $n \times (n+1)$, která má plnou hodnost, potom jednoznačně určený vektor $t(A) \in \mathbb{R}^{n+1}$ splňující*

$$At \;=\; 0 \tag{2.26}$$

$$\|t\| \;=\; 1 \tag{2.27}$$

$$\det \begin{pmatrix} A \\ t^T \end{pmatrix} \;>\; 0 \tag{2.28}$$

nazveme tečným vektorem indukovaným A.

2.2.2 Metody typu prediktor-korektor

Cílem je numerická metoda, která umožní sledování (tzv. kontinuaci) křivky. Nechť máme bod $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ takový, že $H(x_0) = 0$ a H splňuje předpoklady Věty

2. Víme tedy, že zobrazení H lokálně definuje křivku $c(s) \in H^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Budeme konstruovat posloupnost bodů

$$x_i, \quad i = 1{,}2, \ldots$$

aproximujících tuto křivku, které splňují $\|H(x_i)\| < \varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$ dostatečně malé. Předpokládejme, že jsme již našli bod x_i splňující příslušné konvergenční kritérium a bod x_i je regulární. Dále mějme tečný vektor $t_i = t(H'(x_i))$. Uvažujme tzv. Eulerův prediktor

$$\tilde{x}_{i+1} = x_i + ht_i, \tag{2.29}$$

kde $h > 0$ je délka kroku metody. Jak volit optimální délku kroku zmíníme později. Nyní přistoupíme ke korekčnímu kroku, při kterém hledáme aproximaci bodu $x_{i+1}, H(x_{i+1}) = 0$. K řešení této úlohy můžeme použít metodu Newtonova typu s počátečním přiblížením $X^0 := \tilde{x}_{i+1}$ a iterovat, dokud nezískáme bod x_{i+1}, splňující $H(x_{i+1}) < \varepsilon$, který bude novým bodem aproximujícím křivku $c(s)$. Protože ale matice $H'(x)$ není čtvercová, nelze použít standardní vzorec

$$X^{k+1} = X^k - (H'(X^k))^{-1} H(X^k) \tag{2.30}$$

a musíme přidat další podmínku $g(x) = 0$. Dohromady tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} H'(x) &= 0 && (2.31)\\ g(x) &= 0. && (2.32) \end{aligned}$$

Dále uvedeme dva kontinuační algoritmy, které používá Matcont.

2.2.3 Kontinuace podle délky křivky

Jednou z možností je hledat nový bod X^{k+1} v nadrovině kolmé na tečný vektor. Volíme tedy

$$g(x) = \langle x - X^0, t_i \rangle. \tag{2.33}$$

Zapíšeme-li navíc vzorec pro Newtonovu metodu v jiném tvaru

$$F'(X^k)(X^{k+1} - X^k) = -F(X^k), \tag{2.34}$$

kde

$$\begin{aligned} F(X) &= \begin{pmatrix} H(X) \\ \langle X - X^0, t_i \rangle \end{pmatrix} && (2.35)\\ F'(X) &= \begin{pmatrix} H'(X) \\ t_i^T \end{pmatrix} && (2.36) \end{aligned}$$

Označíme-li $\delta = X^{k+1} - X^k$ a předpokládáme-li, že X^k splňuje $\langle X^k - X^0, t_i \rangle = 0$, získáme soustavu $n + 1$ rovnic o $n + 1$ neznámých

$$\begin{pmatrix} H'(X^k) \\ t_i^T \end{pmatrix} \delta = - \begin{pmatrix} H(X^k) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.37}$$

Její maticí je rozšířená Jacobiho matice, která je jistě regulární (viz: (2.27)). Po jejím vyřešení stačí zvolit $X^{k+1} := X^k + \delta$. Korekční krok provádíme, dokud není splněno konvergenční kritérium

$$\begin{aligned} \|H(X^{k+1})\| &< \varepsilon_1 && (2.38)\\ \|X^{k+1} - X^k\| &< \varepsilon_2 && (2.39) \end{aligned}$$

V tom případě volíme $x_{i+1} := X^{k+1}$. V případě, že metoda nekonverguje po nějakém předem zvoleném počtu kroků, je třeba snížit délku kroku a vrátit se o krok zpět. Zbývá určit nový tečný vektor $t_{i+1} = t(H'(x_{i+1}))$. Ten musí být jednak kolmý na řádky matice $H'(x_{i+1})$, jednak musí zachovávat orientaci. Řešíme tedy opět soustavu $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých

$$\begin{pmatrix} H(x_{i+1}) \\ t_i^T \end{pmatrix} t_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Abychom vyhověli i podmínce (2.27), musíme ještě vektor znormalizovat

$$t_{i+1} := \frac{t_{i+1}}{\|t_{i+1}\|}. \tag{2.41}$$

Další možností je korekce v nadrovině určené jednou ze souřadnic $x_j, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dodatečné podmínka pak má tvar

$$e_j^T(x - X^0) = 0. \tag{2.42}$$

Řešená rovnice pak vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} H'(X^k) \\ e_j^T \end{pmatrix} \delta = -\begin{pmatrix} H(X^k) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Matice na levé straně je regulární, právě když j-tá složka tečného vektoru t_j je nenulová. Pro zlepšení stability tedy volíme takové j, že $\frac{t_{i_j}}{\|t_i\|}$ je maximální.

2.2.4 Mooreova-Penroseova kontinuace

Mooreova-Penroseova kontinuace volí jako korektor bod na křivce nejbližší k predikovanému bodu X^0 :

$$x_{i+1} := \min_{H(x)=0} \|x - X^0\|. \tag{2.44}$$

Nejbližší bod se vždy nachází ve směru kolmém na křivku. Dodatečná podmínka $g(x) = 0$ má tedy nyní tvar

$$t(H'(x))^T(x - X^0) = 0. \tag{2.45}$$

Podívejme se nyní na to, jak modifikovat Newtonovu metodu pro řešení našeho problému pomocí Mooreovy-Penroseovy pseudoinverze.

Definice 16 (Mooreova-Penroseova pseudoinverze)**.** *Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n,n+1}$ má plnou hodnost n. Definujeme Mooreovu-Penroseovu pseudoinverzi matice A jako $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.*

Věta 3. *Nechť matice $A \in \mathbb{R}^{n,n+1}$ má plnou hodnost n, $t(A)$ je tečný vektor generovaný A a $b \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^{n+1}$ jsou libovolné vektory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *$Ax = b$ a $t(A)x = 0$;*

2. $x = A^+b$*;*

3. x *je řešení úlohy* $\min_{y\in\mathbf{R}^{n+1}}\{\|y\| | Ay = b\}$*.*

Předchozí věta nám mimo jiné říká, že je-li F afinní zobrazení, tj.

$$F(x) = Ax - b,$$

pak $x = A^+b$ je řešením úlohy $F(x) = 0$ ve smyslu nejmenších čtverců a je kolmý na $t(A)$.

Aplikujeme nyní naše úvahy na naše zobrazení H, které je obecně nelineární. Standardním způsobem podle Taylorova rozvoje aproximujeme H a tečný vektor $t(H'(x))$:

$$H(x) = H(X^0) + H'(X^0)(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) \tag{2.46}$$
$$t(H'(x))^T(x - X^0) = t(H'(X^0))^T(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) \tag{2.47}$$

Členy druhého a vyššího řádu zanedbáme a pak nám dává soustavu

$$H'(X^0)(x - X^0) = -H(X^0) \tag{2.48}$$
$$t(H'(X^0))^T(x - X^0) = 0. \tag{2.49}$$

Označíme ještě $\delta := X^1 - X^0$ a zapíšeme soustavu maticově:

$$\begin{pmatrix} H'(X^0) \\ t(H'(X^0))^T \end{pmatrix} \delta = -\begin{pmatrix} H(X^0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

Nyní již máme situaci připravenu pro aplikaci věty . Řešení δ soustavy (2.50) mající minimální normu je právě $-(H'(X^0))^+H(X^0)$. Klademe proto

$$X^1 := X^0 - (H'(X^0))^+H(X^0) \tag{2.51}$$
$$\vdots$$
$$X^{k+1} := X^k - (H'(X^k))^+H(X^k). \tag{2.52}$$

Je vidět, že krok modifikované Newtonovy metody se od klasické liší pouze tím, že místo klasické inverze je použita Mooreova-Penroseova pseudoinverze. Ukážeme si, jak je možné vyhnout se počítání pseudoinverze v každém iteračním kroku. Podívejme se ještě jednou na soustavu (2.50). Protože tečný vektor v bodě X^0 není znám, aproximujeme ho vektorem $V^0 := t_i$, tj. tečným vektorem v předchozím bodě na křivce. Obecně v k-tém kroku použijeme tečný vektor z předchozího kroku, tj. $V^{k+1} := t(H'(X^k)$. Geometricky to znamená, že se budeme v každé iteraci pohybovat v nadrovině kolmé k předchozímu tečnému vektoru. Dodatečná podmínka se bude v každém kroku měnit a bude mít tvar

$$g_k = \langle x - X^k, V^k)\rangle. \tag{2.53}$$

Rovnice, kterou budeme řešit v k-tém kroku bude mít tvar

$$\begin{pmatrix} H'(X^k) \\ (V^k)^T \end{pmatrix} \delta_k = -\begin{pmatrix} H(X^k) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Zbývá určit nový tečný vektor V^{k+1}. Již jsme naznačili, že ho budeme aproximovat tečným vektorem v předchozím bodě X^k. Tedy musí splňovat soustavu

$$H'(X^k)V^{k+1} = 0 \tag{2.55}$$

$$(V^k)^T V^{k+1} = 1 \tag{2.56}$$

Výsledný vektor musíme ještě znormalizovat.

Při použití této metody nemusíme po nalezení nového bodu x_{i+1} aproximujícího křivku hledat jeho tečný vektor $t(H'x_{i+1})$, neboť stačí použít vektor V^k z poslední iterace.

Kapitola 3

Model korupce v demokratické společnosti

3.1 Odvození modelu

Při modelování reálných jevů je třeba znatelně snížit složitost problému, aby následné výpočty bylo možno provést, respektive provést je v nějakém relativně nízkém čase. Proto ač korupci nepochybně ovlivňují stovky, ne-li tisíce faktorů, v našem Modelu korupce v demokratické společnosti se objevují pouze tři proměnné a deset parametrů. V této kapitole bychom rádi nastínili tvorbu tohoto modelu. Autoři začali od úplných základů a postupně celý model vypracovali do současné podoby. Hlavní pilíř modelu tvoří tři základní jevy, které model sleduje a které zde máme ve formě proměnných:

- $x(t)$ – veřejná podpora politiků v čase t
- $y(t)$ – skrytá aktiva zkorumpovaných politiků v čase t
- $z(t)$ – vyšetřovací schopnosti populace v čase t

Dále se vytvoří pět základních funkcí těchto proměnných, mapující nejdůležitější sociologické děje vztahující se ke korupci a ty jsou následující:

1. Většina politiků usiluje o setrvání ve své funkci, tedy o znovuzvolení. K tomu je zapotřebí podnikat akce, které zvýší jejich popularitu a tím jim zajistí potřebný náskok před oponenty. Velikost těchto akcí závisí na současné politikově popularitě, která určuje jeho moc. Zavedeme tedy funkci A závislou na proměnné $x \to A(x)$, vyjadřující kroky, které politici podnikají pro zvýšení své popularity. Pohled na tyto akce je ale subjektivní – politici vidí tyto kroky jinak než voliči a proto se navíc zavede funkce $A^*(x)$, taktéž závislá na proměnné x. Funkce $A^*(x)$ vyjadřuje očekávání veřejnosti od těchto kroků. S rostoucí popularitou si politici mohou dovolit dělat odvážnější kroky a zároveň i veřejnost od nich očekává lepší výsledky, tudíž obě tyto funkce jsou neklesající. Pozitivní akce politiků ovšem nemohou stoupat do nekonečna a proto musí být shora omezené, tudíž funkce $A(x)$ je konkávní.

2. Další závažný jev je přijímání úplatků. Množství přijatých úplatků logicky závisí na popularitě daného politika a na celkové velikosti skrytých aktiv v daném státě, tedy na proměnných x a y, takže dostáváme funkci $B(x,y)$. Čím vyšší popularitu politik má, tím vyššími pravomocemi disponuje a o to větší úplatky může získat.

3. Dále bychom rádi deklarovali osobní spotřebu politiků. Ta musí záviset na množství přijatých úplatků vyjádřených v předchozí funkci a na skrytých aktivech, takže dostáváme funkci $C(B,y)$. S většími úplatky a vyššími skrytými aktivy roste i spotřeba, funkce C je neklesající.

4. Neméně důležité je i odhalování korupce, vyjádřené v množství peněz zabavených soudy a policií. Toto množství závisí na skrytých aktivech y a vyšetřovací schopnosti populace z, takže dostáváme funkci $D(y,z)$. Větší skrytá aktiva a vyšší vyšetřovací schopnost populace opět implikují vyšší odhalování korupce, tedy první derivace funkce D podle y,z je vždy kladná.

Nyní tedy máme vytvořené naše tři hlavní proměnné a pět funkcí těchto proměnných. Přidáme několik parametrů a dostáváme prvotní verzi modelu korupce v demokratické společnosti, která vypadá následovně:

$$\begin{aligned} x' &= \mu^+(A(x) - A^*(x)) - \mu^- x D(y,z). \\ y' &= ry + B(x,y) - C(B(x,y),y) - D(y,z), \\ z' &= \sigma D(y,z) - \delta z. \end{aligned} \tag{3.1}$$

V poslední fázi definujeme našich pět funkcí pomocí proměnných a parametrů(viz. [1]) a po dosazení do předchozí soustavy dostaneme konečnou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic specifikující model korupce v demokratické společnosti.

$$\begin{aligned} x' &= x\mu^+(\frac{\alpha}{\beta + x} - k) - \mu^- \gamma xyz. \\ y' &= y(\varepsilon x - \gamma z - \rho), \\ z' &= z(\sigma\gamma y - \delta). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Takto tedy vypadá finální verze. Model korupce v demokratické společnosti je tím pádem definován třemi obyčejnými diferenciálními rovnicemi o třech proměnných a deseti parametrech.

3.2 Parametry

Nyní je třeba vysvětlit význam našich deseti parametrů. V budoucích kapitolách se budeme zabývat analýzou systému a pro vyvození závěrů z těchto pozorování je třeba vědět, co vlastně znamenají. Také nezapomeňme dodat, že všechny parametry jsou nezáporná reálná čísla a jejich význam je následující:

- α – maximální možná uskutečnitelná akce s velmi vysokou podporou
- β – popularita, při které mají pozitivní akce účinnost poloviny maxima
- k – veřejná očekávání od pozitivních akcí
- $\rho = \Theta$ – r
  - Θ – tendence k užití přijatých úplatků pro osobní spotřebu
  - r – výnos z kapitálových aktiv
- μ^+ – reakce veřejnosti na politické inovace
- μ^- – reakce veřejnosti na odhalení korupce
- γ – množství zabavených peněz
- σ – nezávislost tisku a soudního systému
- δ – vytrvalost a odhodlání vyšetřovatelů
- ε = (1-ω)ψ
  - ω – příjem úplatků
  - ψ – jak daleko může politik zajít při přijímání úplatků

Kapitola 4

Analýza modelu

4.1 Ekvilibria

Zpočátku musíme zjistit polohu nejdůležitějších bodů celého systému – ekvilibrií. Pokud je bod (x*,y*,z*) ekvilibriem, pak jsou všechny tři pravé strany diferenciálních rovnic v tomto bodě rovny nule, tedy:

$$\begin{aligned} & x\mu^+(\frac{\alpha}{\beta + x} - k) - \mu^-\gamma xyz = 0 \\ & y(\varepsilon x - \gamma z - \rho) = 0 \\ & z(\sigma\gamma y - \delta) = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

- První ekvilibrium je zřejmé již na první pohled - pokud za všechny tři proměnné dosadíme nuly, pak soustava vychází, tedy získáváme bod (0,0,0). Tento bod představuje anarchii, tedy společnost bez vlády, bez korupce a bez vyšetřovacích schopností populace.

- Druhé ekvilibrium se najde také poměrně snadno – položme si z = 0. Tím pádem musí být x rovno $\frac{\alpha - \beta k}{k}$ a po dosazení do druhé rovnice získáme i y = 0, tedy máme bod ($\frac{\alpha - \beta k}{k}$,0,0). Tato situace značí jakousi utopistickou společnost, tedy společnost zcela bez korupce a tím pádem i bez vyšetřovacích schopností populace a s nějakou kladnou popularitou politických činitelů.

- Třetí a zároveň i poslední ekvilibrium je ovšem již podstatně složitější na výpočet. Uvažujme všechny tři proměnné nezáporné. Tím pádem dostáváme následující soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
&\mu^+(\frac{\alpha}{\beta + x} - k) - \mu^-\gamma yz = 0. \\
&\varepsilon x - \gamma z - \rho = 0, \\
&\sigma\gamma y - \delta = 0.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Z třetí rovnice získáme y a z první si vytkneme z, které pak dosadíme do druhé rovnice, čímž nám zbude pouze neznámá x. Po úpravě nám vznikne kvadratická rovnice, kterou zde však pro její délku a složitost nebudeme rozepisovat. V praxi pro nějaké výpočty stejně musí být zadány parametry. Z této kvadratické rovnice nám pak vyjdou dva kořeny, z nichž je ovšem jeden záporný, tudíž pro náš případ nepoužitelný, jelikož parametry i proměnné jsou nezáporná reálná čísla. Ve výsledku tedy dostáváme naše třetí ekvilibrium. Právě toto ekvilibrium nás v pozdější analýze modelu bude zajímat nejvíce, jelikož vyjadřuje hodnotu našich třech proměnných, kam by se typická demokratická společnost při daných parametrech měla dostat, na rozdíl od prvních dvou ekvilibrií, které vyjadřují extrémní situace – anarchii a utopii.

4.2 Software

Jak jsme již dříve zmiňovali, ke zkoumání vlastností systému používáme program MATLAB [3] a jeho toolbox Matcont [2]. Dále budeme zkoumat systém vždy pouze pouze pro jeden volný parametr a zbylých devět fixních. Nejprve bychom však rádi trochu přiblížili již zmiňovaný Matcont. Celý interface se skládá z pěti oken. V okně „Matcont“ se specifikuje celý model, vybírá se typ výpočtů, grafická realizace a spouští se zde proces numerické kontinuace. „Starter“ slouží k zadání počátečního bodu a parametrů, „Integrator“ ke specifikaci výpočtů, kupříkladu délka intervalu či velikost kroku. „Plot“ slouží k vykreslení výsledků do grafu a „Numeric“ k zobrazení výsledků v numerické podobě. Celý program dále obsahuje velké množství funkcí, avšak ty zde nebudeme všechny popisovat, pouze v dalších kapitolách zmíníme ty, které jsme použili pro zkoumání vlastností systému.

4.3 Numerická analýza

Systém se skládá ze třech proměnných a deseti parametrů, takže je zřejmé, že ho nemůžeme analyzovat bez výpočetní síly počítače. K tomuto účelu budeme používat numerickou integraci obyčejných diferenciálních rovnic implementovanou v MATLABu [3] a hlavně metodu numerické kontinuace v Matcontu [2]. I tento způsob výpočtu má ovšem své meze – je třeba většinu parametrů dosadit, aby vůbec bylo možné s Matcontem pracovat. V této kapitole tedy nejprve zvolíme hodnotu všech deseti parametrů a následně vždy jeden z nich uvolníme a budeme pozorovat, jaký vliv má změna tohoto parametru na chování systému. Pevné hodnoty parametrů jsme zvolili následovně:

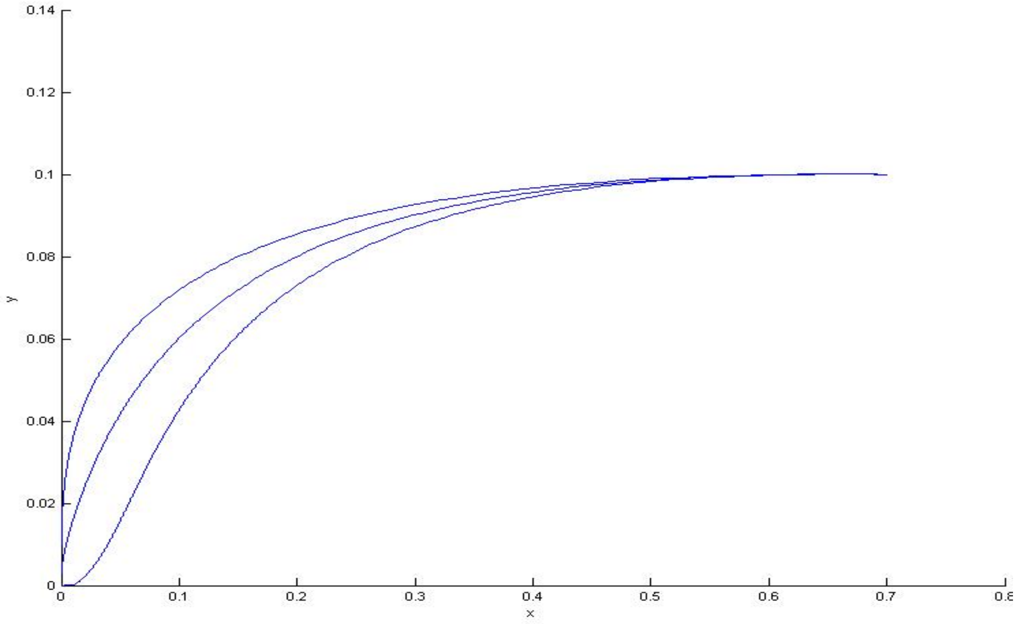
$$\begin{array}{ccccc} \alpha = 1{,}5 & \beta = 0{,}5 & k = 1 & \rho = 0{,}1 & \mu_+ = 1 \\ \mu^- = 10 & \gamma = 1 & \sigma = 2 & \delta = 0{,}2 & \epsilon = 0{,}6 \end{array} \tag{4.3}$$

Později se ukáže, že výběr právě těchto hodnot není náhodný, ba právě naopak. Pro tento výběr dosahuje systém velmi vysoké stability, tedy z původního bodu velice rychle konverguje do ekvilibria. Poslední ekvilibrium z Kapitoly 4.1, které jsme kvůli jeho délce raději nevyjadřovali, dosahuje pro tyto parametry hodnoty (0.6583124 , 0.1 , 0.2949874). Pusťme se tedy do samotné analýzy z matematického hlediska a následného vyvození sociologických závěrů z daných pozorování.

4.3.1 Chování modelu pro volný parametr α

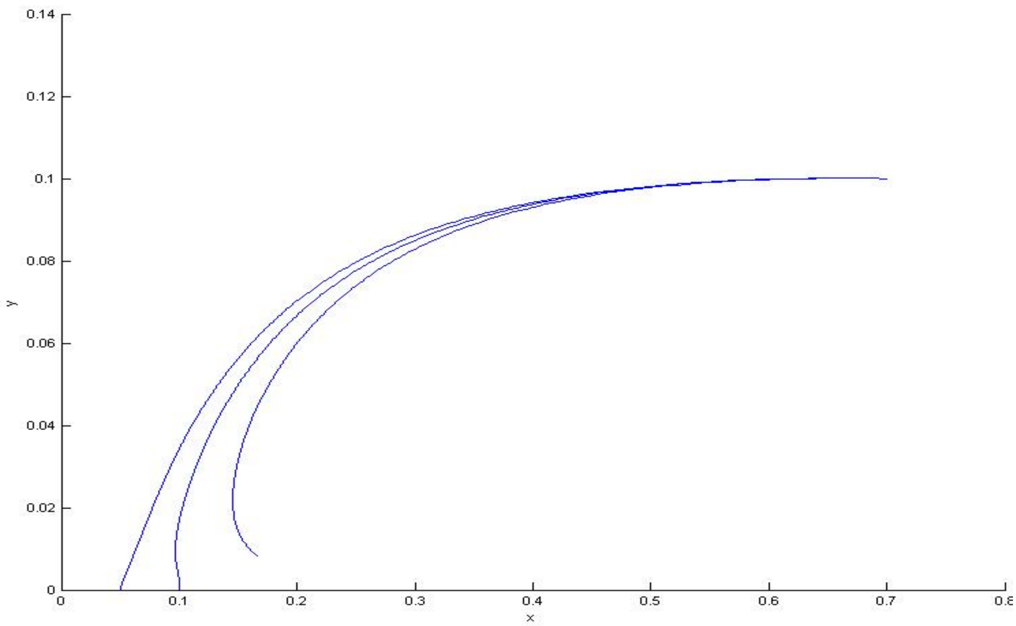
Jako výchozí bod si zvolíme kupříkladu bod (0.7 , 0.1 , 0.3). V Matcontu budeme počítat typ „Point → Orbit“, který nám ukáže časový vývoj systému z tohoto výchozího bodu, tedy orbitu, která v tomto případě dokonverguje do již zmiňovaného třetího ekvilibria, čímž jsme získali jeho hodnotu - (0.6583124 , 0.1 , 0.2949874). Dále přepneme na typ „Equilibrium → Equilibrium“, jako výchozí bod zvolíme ekvilibrium které nám v předchozím kroku vyšlo a jako proměnlivý parametr zvolíme právě α. Tato funkce nám kontinuuje ekvilibria a ukazuje stabilitu se změnou parametru. Po skončení dostáváme jeden zajímavý bod – „Branch Point“ při $\alpha = 0.666667$. Nyní tedy opět přepneme na typ „Point → Orbit“ a budeme zkoumat chování orbity pro různé α.

- $\alpha \in (0 \ , \ 0.5)$ - v tomto úseku orbita konverguje do bodu (0,0,0), tedy k anarchii. S rostoucím parametrem α se tato konvergence zpomaluje, tedy do výsledného ekvilibria se dostaneme až při větším čase t. Pokud tedy chceme převést toto pozorování do praxe, tak se ukazuje, že když i politici s velmi vysokou podporou mají málo pravomocí, tak systém demokracie přestává fungovat a spěje k anarchii.



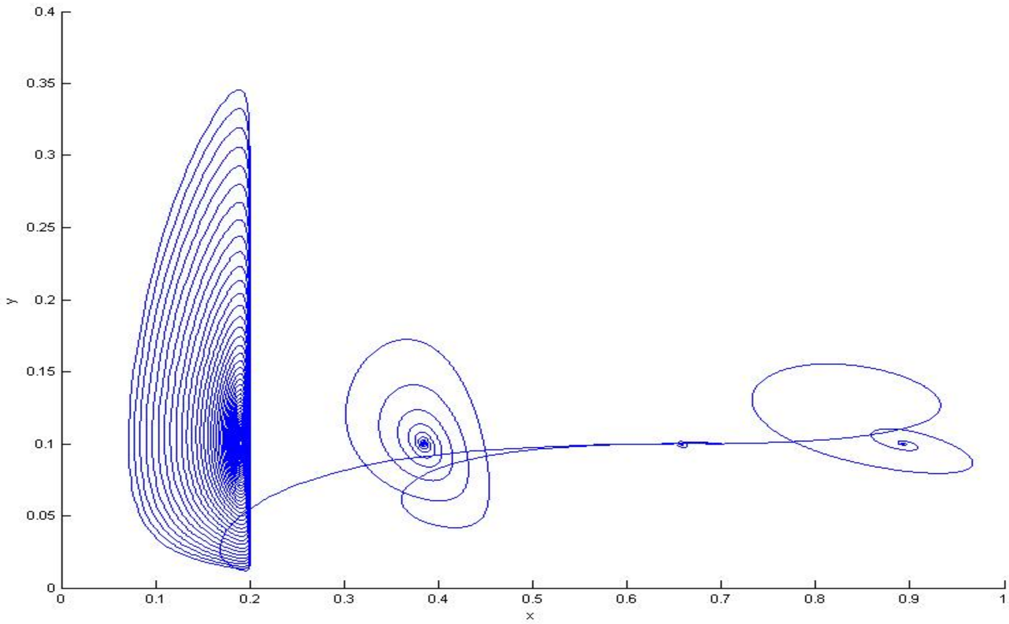
Obrázek 4.1: Chování orbity zleva pro α=0, α=0.3 a α=0.5

- $\alpha \in (0.5\ ,\ 0.666667)$ – ze začátku se konverguje přímo do bodu (x^*,0,0), tedy x,y i z jsou na celé orbitě pouze klesající. Dále se x^* s přibývající α zvětšuje, avšak postupně se těsně před dokonvergováním do daného ekvilibria x na konci nepatrně zvětšuje a zároveň se parametr y postupně v ekvilibriu stává nenulovým a mírně narůstá s přibývající α. Jak ale vysvětlit tento fenomén. Zřejmě se jedná o jakousi snahu na poslední chvíli vyhnout se blížícímu se sestupu do anarchie.



Obrázek 4.2: Orbita zleva pro α=0.55, α=0.6 a α=0.666667

- $\alpha \in (0.666667 , 1.5)$ – v tomto intervalu orbita cyklicky konverguje do ekvilibria. Se zvětšující se α se tyto cykly postupně zmenšují a pro souřadnice konečného bodu platí, že s rostoucí α se zvětšuje i x a z. Ypsilonová souřadnice konečného bodu se pro všechny α ustálí kolem hodnoty 0.1. Vždy tedy nejprve dochází k nárůstu popularity politických činitelů, což zapříčiní následný růst korupce. Pak dojde k odhalení a korupce i popularita rapidně klesají a celý cyklus začíná znovu a znovu, avšak v menším a menším měřítku, než se situace nakonec konečně ustálí v daném ekvilibriu.
- $\alpha > 1.5$ – zde pokračuje stejný trend jako v předchozím intervalu, avšak s přibývajícím α se cykly zvětšují. Tedy čím více pravomocí politici mají, tím vyšší popularity mohou dosáhnout a pak dostávají i vyšší úplatky, jelikož mají, ekonomicky řečeno, vyšší nabídku.

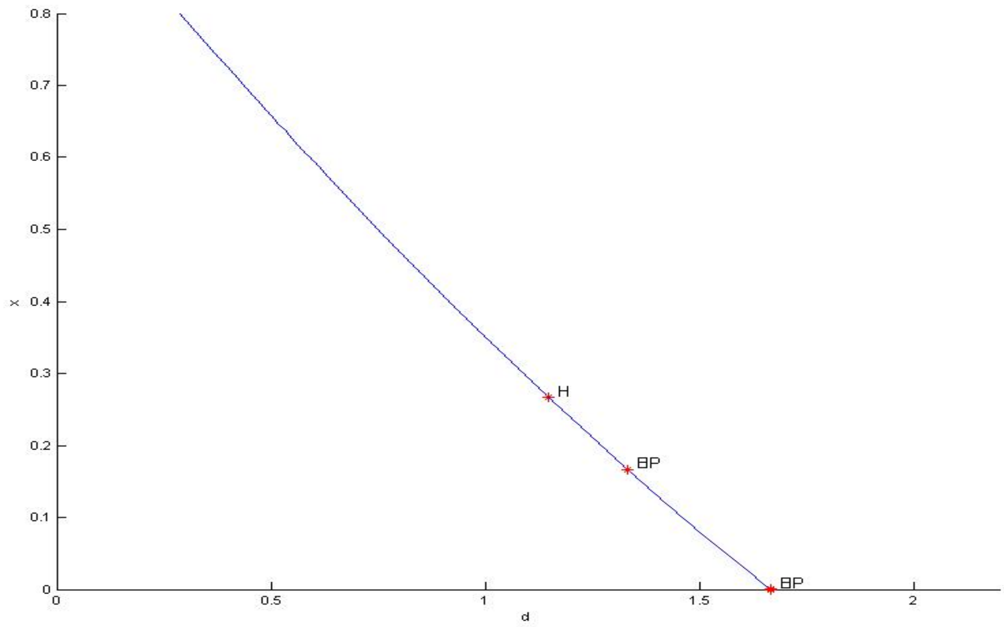


Obrázek 4.3: Orbita zleva pro α=0.7, α=1, α=1.5(malý cyklus na x=0.658) a α=2

Jaké závěry tedy z těchto pozorování můžeme vyvodit? Je zřejmé, že by parametr α neměl nabývat hodnot z intervalu (0 , 0.666667), jelikož pak situace nakonec vyústí v konec demokratické společnosti a nástup anarchie, což se zdá být vcelku logické, když víme, že malá hodnota tohoto parametru reprezentuje malé pravomoci politických činitelů, tedy velmi omezenou kontrolu vývoje společnosti. Optimálně by se tedy parametr α měl pohybovat mezi hodnotou 0.666667 a nějakým horním omezením vyšším než 1.5. V takovémto intervalu systém konverguje do rozumného ekvilibria. Pro α výrazně vyšší než 1,5 sice systém taktéž konverguje, avšak až po dlouhém čase a s velkými oscilacemi v průběhu, což není příliš žádoucí.

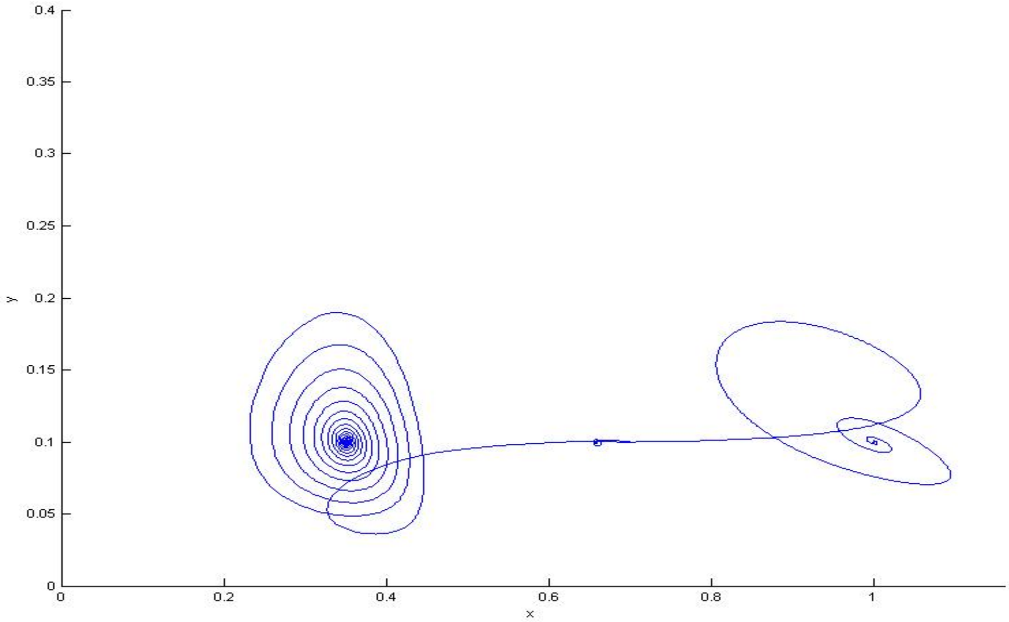
4.3.2 Chování modelu pro volný parametr β

Výchozí bod necháme stejný, tedy (0.7 , 0.1 , 0.3) a budeme postupovat stejně jako v předchozí podkapitole. Funkce „Equilibium $\rightarrow$ Equilibrium“ nám nalezla tři bifurkační body - „Hopf“ při $\beta = 1.148$ a dva „Branch Pointy“ na $\beta = 1.333$ a $\beta = 1.666$.



Obrázek 4.4: Bifurkace parametru β

- $\beta \in (0 , 0.5)$ - v tomto intervalu orbita cyklicky konverguje do ekvilibria. S rostoucí β se oscilace stále zmenšují. Souřadnice výsledného ekvilibria mají s rostoucí β následující tendence – x i z se zmenšují a y se vždy zastaví na hodnotě 0.1. Pro $\beta = 0$ orbita dokonverguje do bodu (1 , 0.1 , 0.5), což je velice zajímavé. V praxi totiž nulový parametr β znamená, že i nepopulární politici mají vysoké pravomoci. Proč je tedy výsledná korupce tak nízká? Jelikož všichni politici mají vyrovnané šance na zvýšení své popularity, pak si zřejmě nemohou dovolit takový „handicap“ jako přijímání úplatků, neboť pak by již své soupeře neměli šanci dohnat a proto většina omezuje či odmítá nabízené úplatky a naopak se snaží o navýšení vyšetřovacích schopností populace, tedy odhalovaní svých zkorumpovaných soupeřů, což vede k jejich eliminaci z tohoto politického boje o popularitu. Ve výsledku tedy máme většinu politiků nezkorumpovaných a velice populárních, vyšetřovací schopnosti populace dosahují vcelku dobrých výsledků a korupce se vyskytuje pouze zřídka. V praxi je však otázkou, jak dosáhnout stavu, kdy mají všichni politici takto relativně vyrovnané pravomoci bez toho, aby si vzájemně svými rozhodnutími neodporovali.
- $\beta \in (0.5 , 1.148)$ – zde se orbita chová naprosto stejně jako v předchozím intervalu, až na ten rozdíl, že s přibývajícím β se cykly zvětšují.

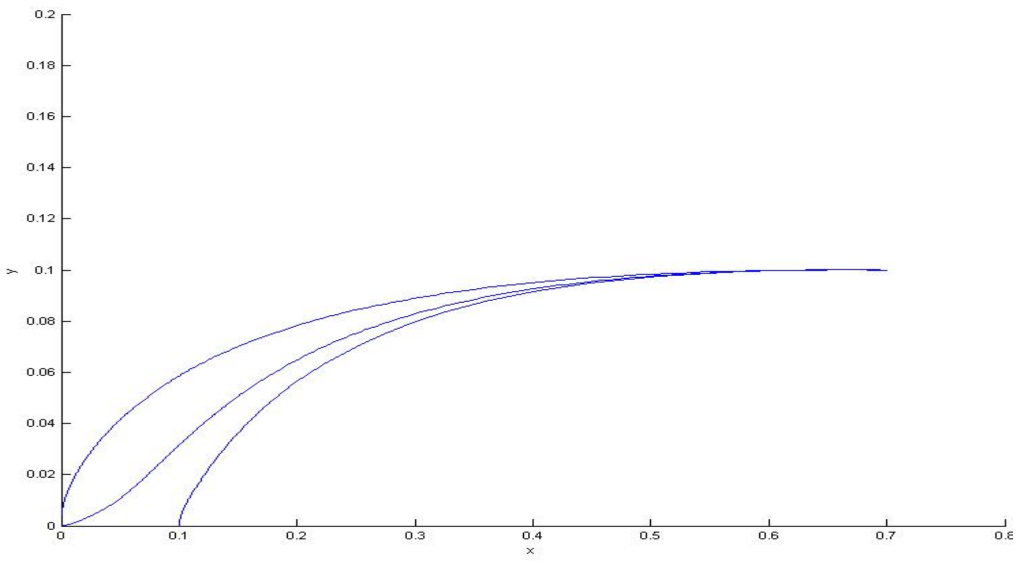


Obrázek 4.5: Orbita zprava pro β=0, β=0.5 a β=1

- $\beta \in (1.148\ ,\ 1.333)$ – tady se razantně mění vlastnosti systému, jelikož v β = 1.148 nastává Hopfova bifurkace. V tomto intervalu orbita již nekonverguje do ekvilibria, ale postupně směřuje do limitního cyklu. Pro rostoucí β se „rychlost“ orbity zmenšuje, tedy za stejný čas t se pozice změní méně než u orbity s menší β. Tato oscilace se odehrává hlavně pro parametr y, tedy změna x a z probíhá relativně rychle a na stejných intervalech oproti dlouhotrvajícím nárůstům a poklesům proměnné y, která navíc s každým cyklem dosahuje větších hodnot. V praxi tedy situace pro tento interval parametru β spěje k nekonečným výkyvům a postupnému lokálnímu nárůstu korupce.

- $\beta \in (1.333\ ,\ 1.666)$ – orbity pro tento interval opět konvergují. Tentokrát se zde ale již nevyskytují žádné cykly, ale přímé směřování do ekvilibria (x^*,0,0), kde se pro větší β hodnota x^* blíží stále více k 0, tedy zde máme společnost bez korupce, bez vyšetřovacích schopností populace a s velmi malou popularitou politických činitelů. Malé pravomoci politiků evidentně nestačí k zvýšení popularity, proto jsou nuceni vyhýbat se úplatkům aby se v politické sféře vůbec udrželi.

- $\beta > 1.666$ – pro β větší než 1.666 orbity spějí rovnou k ekvilibriu (0,0,0). To tedy v praxi znamená, že pokud politici potřebují vysokou popularitu aby měli aspoň nějaké pravomoci, pak celý systém selže a dospěje do anarchie, jelikož vysokou popularitu je třeba si zasloužit politickými činy, které není možné vykonávat při malé popularitě, což nás dostává do začarovaného kruhu, kdy k získání popularity je třeba popularitou již disponovat.



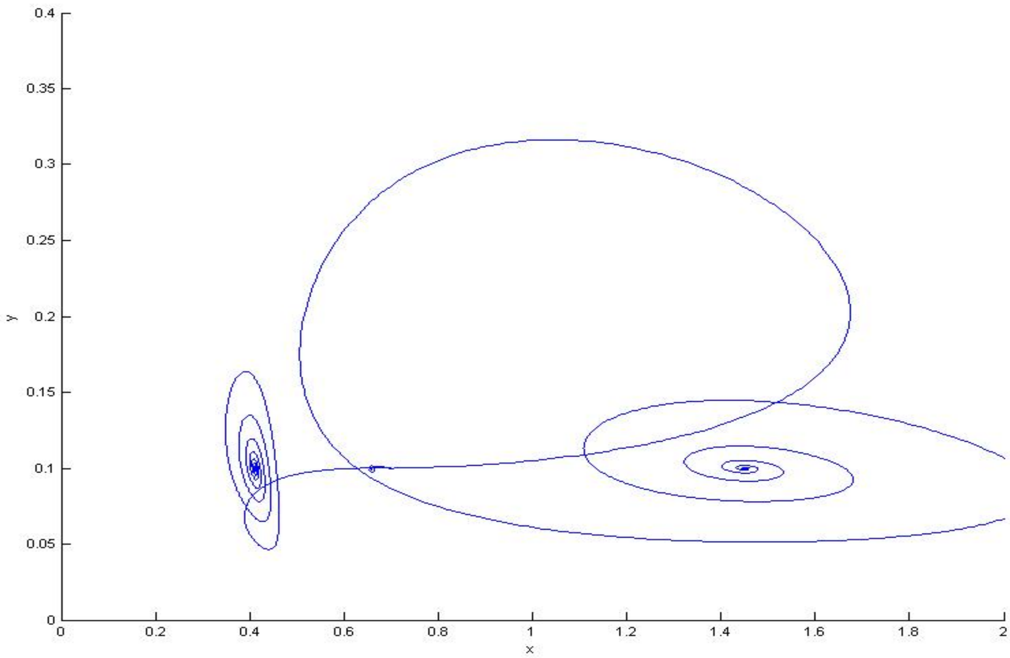
Obrázek 4.6: Orbita zprava pro β=1.4, β=1.666 a β=3

Po pozorování tohoto parametru tedy vyvozujeme následující závěry – společnost funguje, když se parametr β vyskytuje mezi 0 a 1.148, pro větší pak nastávají opakující se cykly se stále větší korupcí nebo anarchie. Naprosto optimální situace nastává pro parametr $\beta = 0$, populární politici, téměř žádná korupce a vcelku vysoké vyšetřovací schopnosti populace, avšak to by bylo třeba vyřešit rovnoměrné rozdělení pravomocí mezi všechny politiky, což by ve výsledku sice minimalizovalo problém korupce, ale s největší pravděpodobností nastolilo bezpočet nových, takže pochybuji, že někdy takováto situace nastane, nicméně čistě teoreticky je velice zajímavá.

4.3.3 Chování modelu pro volný parametr k

Při zkoumání chování systému v závislosti na tomto parametru postupujeme opět úplně stejně jako u předchozích dvou zkoumaných parametrů. Tím získáme následující bifurkační body – BP (=Branch Point) při k = 2.25, H(=Hopf) pro k = 2.8613 a BP v k = 3.1.

- k $\in$ (0 , 1) – pro k = 0 orbita cyklicky konverguje do bodu (1.45 , 0.1 , 0.77). Když tedy společnost od politiků nic neočekává, pak i sebemenší kladná akce vzbudí pozitivní ohlasy a zvýší popularitu. Zvláštní ale je, že se situace ustálí na tak malé korupci. Pokud si politici mohou tak snadno opět získat přízeň voličstva, pak mi přijde trošku nelogické, že by tak málo podléhali korupci. Možná však nízká obtížnost získání vysoké popularity a omezení jejího maxima implikují tvrdý politický boj. Politici musí odmítat úplatky kvůli hrozbě rychlého sesazení. Pro zbylé orbity v tomto intervalu obecně platí, že pro rostoucí k konvergenční cykly oscilují stále méně a konečný bod má menší souřadnice x a z. Proměnná y se opět ustálí vždy kolem hodnoty 0,1.

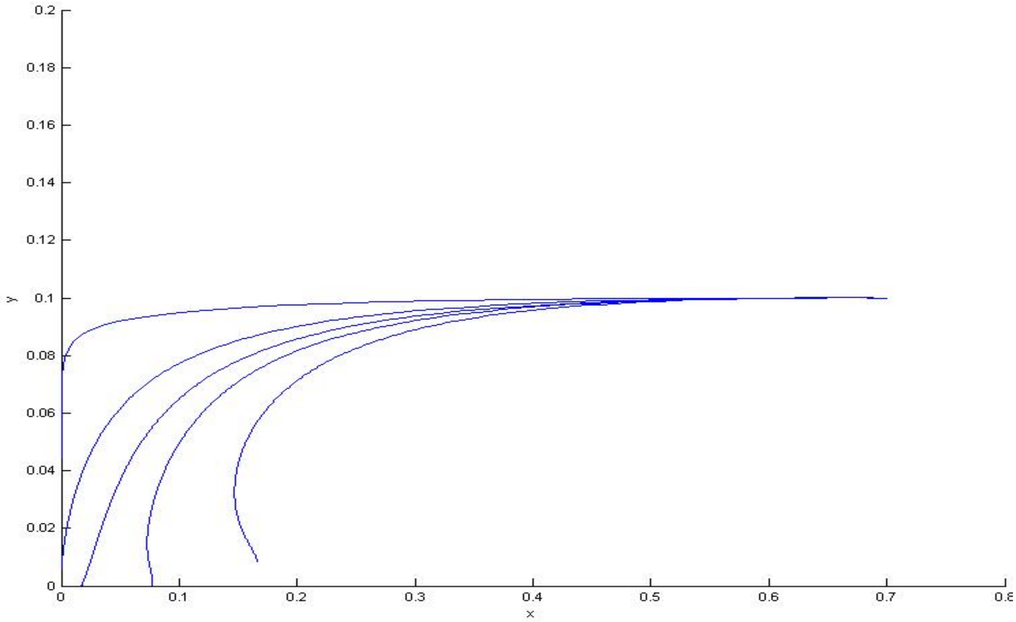


Obrázek 4.7: Orbita zprava pro k=0, k=1 a k=1.5

- k ∈ (1 , 2.25) – zde se systém chová úplně stejně jako v předchozím intervalu, až na ten rozdíl, že s přibývajícím k se oscilace zvětšují.

- k ∈ (2.25 , 2.8613) – ze začátku orbita konverguje do bodu (x^*,y^*,0). Nejprve všechny souřadnice pouze klesají avšak na konci nastává mírný nárůst x a y. Pro vyšší k se tento fenomén téměř zcela vytrácí a orbity konvergují do (x^*,0,0) kde se x^* blíží k nule. Je tedy vidět, že tyto hodnoty parametrů společnosti vůbec neprospívají, jelikož se dostáváme do situací velmi blízkých k anarchii.

- k ∈ (2.8613 , 3.1) – tady orbita konverguje přímo k (x^*,0,0), všechny souřadnice jsou vzhledem k průběhu času klesající. V našich pozorováních jsme se již několikrát setkali se situacemi, kdy systém dospěl do stavu nulové korupce, nulového vyšetřování a jakési malé politické popularity. Co však tato situace značí ze sociologického hlediska? Řekl bych, že v takovéto situaci stojí společnost na pokraji anarchie, politici se ocitají pouze krůček od defenestrace a proto si již nemohou dovolit riskovat a přijímat úplatky. Vyšetřovací schopnosti populace již kvůli kritické situaci ani neexistují. Společnost tedy stojí krůček před katastrofou. Náš model se zabývá pouze korupcí a proto se nakonec ustálí těsně před anarchií, avšak ve skutečnosti existuje ještě mnoho dalších sociologických faktorů nesouvisejících s korupcí, které dle mého názoru zaviní kolaps tohoto stavu do anarchie. V našem modelu tedy sice říkáme, že se situace ustálí na (x^*,0,0), avšak v praxi se to vlastně s velkou pravděpodobností nijak neliší od anarchistického ekvilibria (0,0,0).



Obrázek 4.8: Orbita zprava pro k=2.25, k=2.6, k=2.9, k=3.5 a k=10

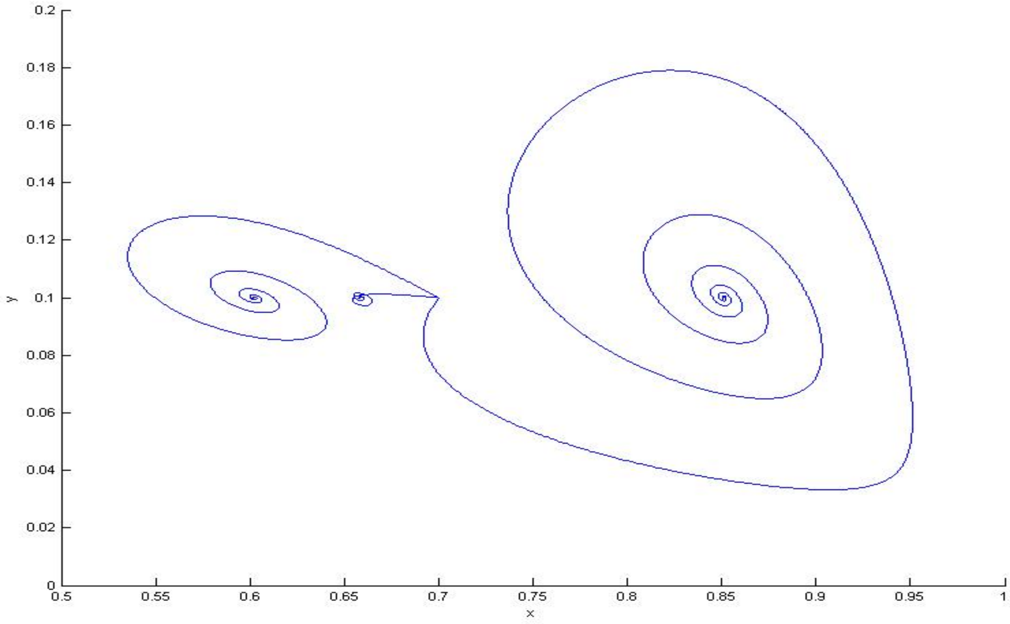
- $k > 3.1$ – zde situace směřuje rovnou k anarchii. S větším k se orbita narovnává, tedy nejprve klesá pouze v souřadnici x a když dosáhne 0 tak začne klesat i y. V praxi tedy vypadá situace následovně – Pokud mají lidé příliš vysoké nároky na politické činitele, tak ti pak bez extrémně vysokých pravomocí nejsou schopni těmto očekáváním dostát a proto jakákoliv jejich akce, ať už sebelepší, nedokáže dostát očekáváním a proto politici nejsou schopni zvýšit svoji popularitu, což vyústí v rapidní pokles jejich preferencí a následnou anarchii.

Závěrem tedy stanovme optimální hodnotu parametru do intervalu (0 , 2.25). Pro k vyšší se již dostáváme k prahu anarchie, respektive přímo do anarchie, o což jistě většina populace demokratické společnosti nestojí.

4.3.4 Chování modelu pro volný parametr ρ

Postupujeme stále stejně a dostáváme pouze jeden bifurkační bod – BP pro hodnotu $\rho = 0.6$.

- $\rho \in (0 , 0.1)$ – zde orbita cyklicky konverguje. Se zvětšujícím se ρ se oscilace zmenšují a zároveň pro konečné souřadnice ekvilibria platí, že x se zvětšuje, z zmenšuje a y se stále drží na hodnotě kolem 0.1. Chování systému pro tento parametr je poněkud zvláštní. Se zvětšujícím se ρ, tedy utrácením peněz z úplatků, se zvětšuje i popularita. Pokud se tedy tyto výdělky téměř neutrácejí, pak mají politici nejnižší popularitu, což mi přijde dost nelogické. Taktéž bych očekával, že se systém při ρ=0 dostane do nějaké extrémní situace, kupříkladu selhání vyšetřovacích schopností populace.



Obrázek 4.9: Orbita zleva pro ρ=0, ρ=0.1 a ρ=0.4

- $\rho \in (0.1\ ,\ 0.6)$ – v tomto intervalu se systém chová stejně jako v předchozím, ale s rostoucím ρ se oscilace cyklů zvětšují.

- $\rho > 0.6$ – tady orbita míří rovnou do bodu (1,0,0), tedy nezkorumpované společnosti a vysokou popularitou politických činitelů. Pokud tedy politici mají vysokou tendenci utrácet peníze získané z úplatků, pak by se dalo předpokládat, že politici, kteří úplatky přijímají, budou snadno odhaleni kvůli svým podezřele vysokým majetkovým poměrům, což povede k jejich eliminaci z politického spektra, takže časem přežijí pouze ti, kteří úplatky zásadně nepřijímají. Tím pádem zbylí politici budou mít vysokou popularitu a budou bez korupce, díky čemuž nebudou zapotřebí vyšetřovacích schopností populace.

Optimálně bychom tedy parametr ρ měli umístit do intervalu $(0\ ,\ 0.6)$. Pro větší hodnoty sice model teoreticky směřuje k utopistické společnosti, avšak pochybuji že v tomto ohledu odpovídá skutečnosti, jinak bychom již v utopii dávno žili. Avšak jak už jsem zmínil v první sekci, chování modelu při změně tohoto parametru příliš neodpovídá skutečnosti. Parametr ρ vyjadřuje rozdíl tendence k utrácení peněz z korupce a výnosu z kapitálových aktiv, tedy úroků. Jelikož parametry nemohou být záporné, pak ani utrácení nemůže být nulové, což je škoda, jelikož díky takovýmto extrémním situacím je možné model lépe nakonfigurovat, aby více odpovídal realitě. Taktéž vyšší utrácení značí vyšší popularitu? Od nějakého bodu, kde dojde ke zlomu a zkorumpovaní jedinci jsou díky vysokým výdajům rychle odhaleni, bychom to mohli očekávat, ale do té doby by měla být proměnná x klesající. Význam tohoto parametru je definován rozdílem dvou podparametrů, což celou interpretaci a chování systému při změně poněkud komplikuje, avšak i tak by se podle mého názoru měl systém v tomto případě chovat poněkud odlišně.

4.3.5 Chování modelu pro volný parametr μ^+

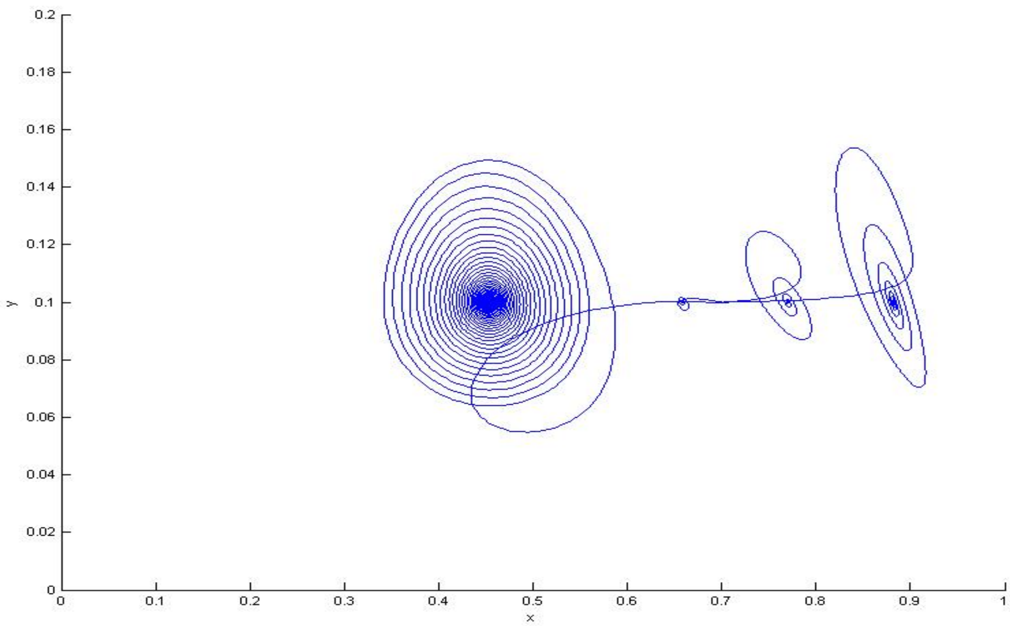
Zde dostáváme dva bifurkační body – H pro $\mu^+ = 0.268$ a BP pro $\mu^+ = 0$, ale ten nás již příliš nezajímá vzhledem k tomu, že parametry jsou pouze kladné.

- $\mu^+ \in (0\ ,\ 0.268)$ – pro $\mu^+ = 0$ orbita konverguje do bodu (0.155, 0,0), pro zbylé μ^+ z tohoto intervalu orbita končí v limitním cyklu, přičemž postupně se velikost těchto cyklů zmenšuje, tedy každým cyklem se orbita posouvá stále méně.

- $\mu^+ = 0.268$ - v tomto bodě nastává limitní cyklus, tedy orbita se ustálí na určité dráze kterou po které se již systém pohybuje donekonečna.

- $\mu^+ \in (0.268\ ,\ 1)$ – v tomto intervalu orbita již konverguje, přičemž s rostoucím μ^+ se oscilace zmenšují a zároveň v souřadnicích konečného ekvilibria se s nárůstem μ^+ hodnota x a z zvětšuje a y vždy skončí kolem hodnoty $y = 0.1$.

- $\mu^+ > 1$ – zde se s rostoucím μ^+ oscilace zvětšují a pro skutečně velká μ^+ se na konci orbita ustálí na $x = 1$ a oscilují pouze y a z, tedy popularita zůstává stále stejná, akorát vždy roste korupce a pak se odhalí, takže roste vyšetřování a klesá korupce a pak opět začne klesat vyšetřování a narůstat korupce.



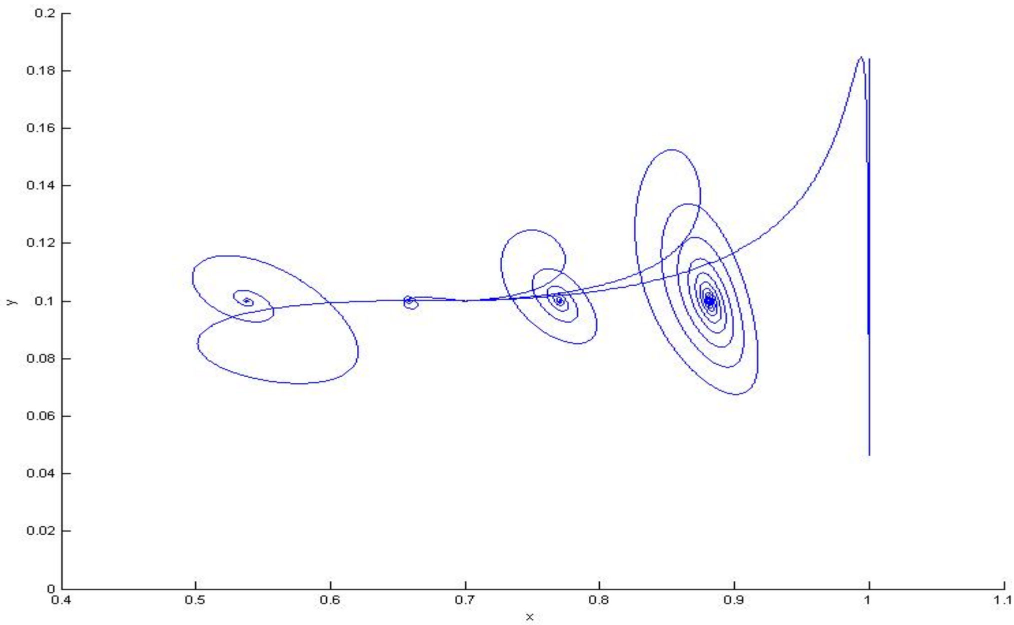
Obrázek 4.10: Orbita zleva pro μ^+=0.3, μ^+=1, μ^+=2 a μ^+=5

Optimálně tedy chceme mít parametr μ^+ větší než 0.268. Nulová reakce veřejnosti na politické inovace nastolí anarchii a příliš velké reakce značí snadné získání popularity, což také není zcela zdravé pro společnost.

4.3.6 Chování modelu pro volný parametr μ^-

U tohoto parametru jsme nalezli pouze jeden bifurkační bod – H pro $\mu^- = 0$, tedy ještě k tomu značně nezajímavý bod, vzhledem k tomu, že parametry mohou nabývat pouze kladných hodnot.

- $\mu^- = 0$ – zde dostáváme limitní cyklus. Orbita se ustálí na $x = 1$ a tam osciluje na souřadnicích y a z. Pokud je tedy reakce společnosti na odhalení korupce nulová, tak se popularita politiků odhalením nemění, pouze vyšetřovací schopnosti populace rostou a klesají a tím zapříčiňují pokles a opětovný nárůst korupce.
- $\mu^- \in (0\ ,\ 10)$ – v tomto intervalu se děje několik věcí. S rostoucí μ^- se oscilace na osách y a z postupně zmenšují. Dále se oscilace na ose x ze začátku zvětšuje do určitého bodu a pak se zmenšuje. Zároveň pro souřadnice konečného ekvilibria platí následující – x i z se zmenšují s rostoucí μ^- a y se drží u hodnoty 0.1.
- $\mu^- > 10$ – tady platí úplně to stejné jako v předchozím intervalu až na to, že se oscilace se stoupající μ^- zvětšují.



Obrázek 4.11: Orbita zprava pro μ^-=0, μ^-=2, μ^-=5, μ^-=10 a μ^-=20

Kromě limitního cyklu pro $\mu^- = 0$ není na chování systému v závislosti na změně tohoto parametru nic moc zajímavého, až na to, že je zde dobře vidět, jak větší reakce veřejnosti na odhalení korupce snižuje popularitu politických činitelů. Zároveň chování systému pro nulovou reakci na korupci krásně ukazuje zdravou demokracii, kdy se střídají cykly vzrůstu korupce a éry potírání této nezákonné aktivity.

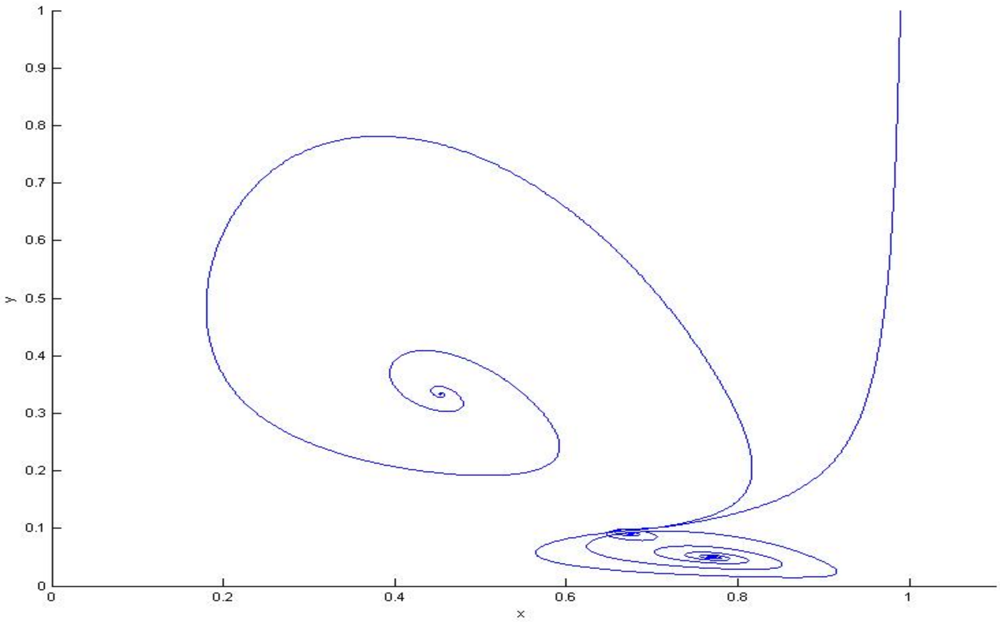
4.3.7 Chování modelu pro volný parametr γ

Pro tento parametr se v systému nevyskytuje žádná bifurkace, tedy systém nijak zásadně nemění své vlastnosti při změně hodnoty tohoto parametru.

- $\gamma = 0$ – pro tuto hodnotu orbita míří do bodu $(1 , \infty , 0)$. Ve skutečnosti to není tak úplně nekonečno, ale pouze 10^{30}, což se však jistě dá považovat za absolutní korupci. Parametr γ značí množství zabavených peněz získaných korupcí, tudíž pokud systém není schopen zabavit žádné peníze, pak logicky korupce stoupá až k nekonečnu, jelikož nehrozí žádné nebezpečí pro úplatné politiky.

- $\gamma \in (0,1)$ – v tomto intervalu orbita již cyklicky konverguje, přičemž zpočátku zde máme velké oscilace, které se postupně zmenšují. Dále se ukazuje tendence pro konečné ekvilibrium a to že se souřadnice konečného bodu pro rostoucí γ chovají následovně – x stoupá a y,z klesají.

- $\gamma > 1$ – zde platí zcela to samé jako pro předchozí interval až na to, že oscilace se tady postupně zvětšují s rostoucí γ a ekvilibrium se stále více blíží k utopii, tedy bodu (1,0,0).



Obrázek 4.12: Orbita zprava pro γ=0, γ=0.3, γ=1.1 a γ=2

Tento parametr symbolizuje množství zabavených peněz, tedy více zabavených ilegálně získaných peněz znamená snižování korupce, snižování vyšetřovacích schopností populace právě kvůli snižování korupce a vyšší efektivitě jejího potírání. Popularita politiků se naopak zvyšuje, jelikož tito politici již tolik nepřijímají úplatky a se sníženou korupcí funguje státní aparát mnohem lépe. Prakticky tedy čím větší hodnota tohoto parametru, tím lépe.

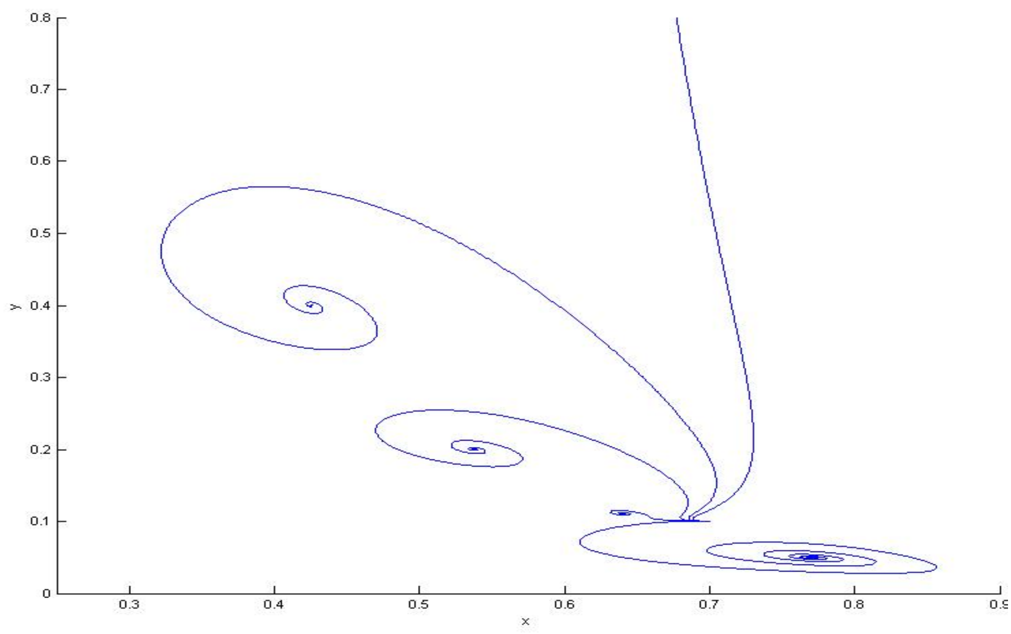
4.3.8 Chování modelu pro volný parametr σ

Tento parametr opět nevykazuje na svém definičním oboru žádnou bifurkaci.

- $\sigma = 0$ – v tomto bodě orbita míří k (0.5 , ∞ , 0). Parametr σ má význam míry nezávislosti tisku a soudního systému. Pokud tedy systém není vůbec nezávislý, tedy je absolutně závislý na vládě, pak se zkorumpovaní politici opět nemají čeho obávat. Pokud by snad byla korupce odhalena, pak mohou jednoduše zařídit, aby tento jejich čin nebyl zveřejněn a ani souzen, tudíž jim nic nebrání pobírat stále větší a větší úplatky. V praxi se samozřejmě nemohou dostat k nekonečné korupci, ta musí být shora omezena majetkem daného státu, avšak všichni si jistě dovedeme představit hrozivost takovéhoto scénáře.

- $\sigma \in (0,2)$ – zde již orbita opět konverguje a to cyklicky. S rostoucí σ se oscilace těchto cyklů postupně zmenšují. Pro souřadnice konečného ekvilibria zde opět nastává tendence a to – x a z stoupají pro rostoucí σ a y naopak klesá.

- $\sigma > 2$ – v tomto intervalu platí to samé jako v předchozím až na postupně se zvětšující oscilace.



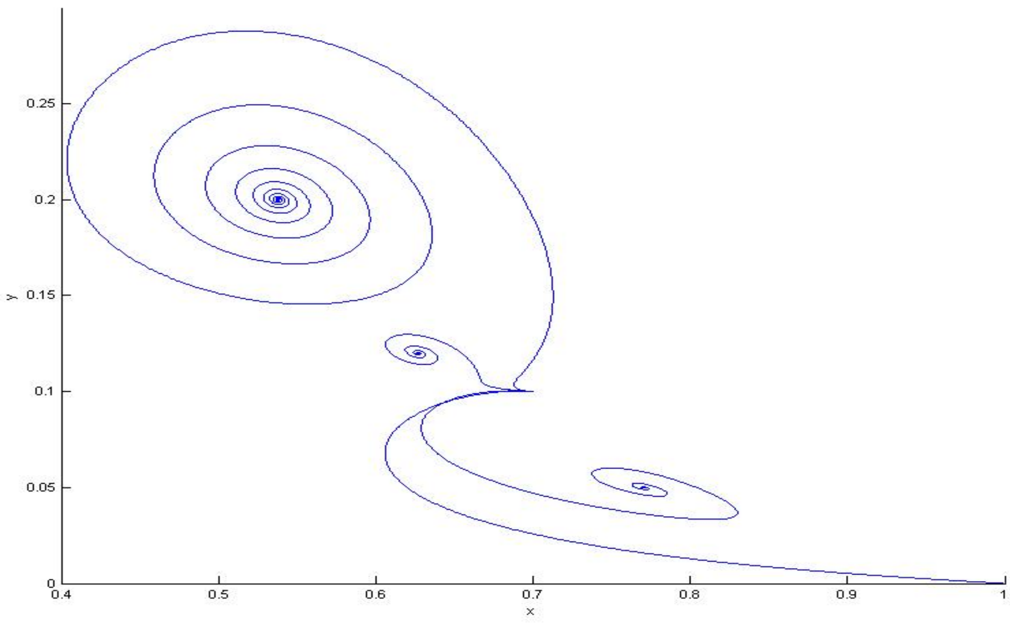
Obrázek 4.13: Orbita seshora pro σ=0, σ=0.5, σ=1, σ=1.8 a σ=4

Parametr symbolizuje nezávislost tisku a soudního systému. S růstem této nezávislosti tedy nastává zlepšení vyšetřovacích schopností populace, což nám snižuje korupci a zvyšuje popularitu zbylých téměř nezkorumpovaných politiků. Optimální hodnota tohoto parametru tedy může být kdekoliv kromě 0, i když v praxi bychom rádi aby byla co největší.

4.3.9 Chování modelu pro volný parametr δ

Pro tento parametr jsme nalezli dva bifurkační body – H pro $\delta = 0.746476$ a nezajímavý BP pro $\delta = 0$. Dále je třeba nejprve vysvětlit význam tohoto parametru, jelikož se od zbylých devíti poněkud liší. Parametr δ značí vytrvalost a odhodlání vyšetřovatelů, avšak obráceně než by jsme považovali za logické. Jelikož se v obyčejných diferenciálních rovnicích, které nám zadávají náš systém vyskytuje se znaménkem mínus, tak nulová hodnota tohoto parametru značí absolutní vytrvalost a vysoká hodnota naopak vytrvalost nízkou.

- $\delta = 0$ – v tomto bodě nám orbita míří k (1 , 0 , 0.793). Absolutní vytrvalost a odhodlání vyšetřovatelů tedy způsobí vymýcení korupce, relativně vysokou vyšetřovací schopnost populace a vysokou popularitu nezkorumpovaných politických činitelů.
- $\delta \in (0\ ,\ 0.2)$ – tady orbita cyklicky konverguje, přičemž s rostoucí δ se oscilace těchto cyklů zmenšují. Zároveň pro zvětšující se δ se souřadnice konečného ekvilibria chovají následovně – x a z klesají a y roste.
- $\delta \in (0.2\ ,\ 0.746476)$ – zde platí skoro to samé jako pro předchozí interval, ale oscilace se zvětšují.



Obrázek 4.14: Orbita zprava pro δ=0, δ=0.1 , δ=0.24 a δ=0.4

- $\delta > 0.746476$ – v tomto intervalu již orbita nekonverguje do ekvilibria, ale směřuje do limitního cyklu, přičemž vždy nejprve stoupá popularita (maximálně k x=1), pak stoupá korupce (stále více k nekonečnu), klesne popularita a klesne i korupce a takto stále znovu a znovu, avšak s většími oscilacemi, dokud se nedostaneme do konečného limitního cyklu.

Optimálně by se tedy hodnota tohoto parametru měla pohybovat v intervalu (0 , 0.746476), přičemž nejlepší případ nastává pro $\delta = 0$. Jakmile se parametr δ dostane nad hodnotu 0.746476 tak se dostáváme do situace ústící v katastrofu. Matematický model si sice může dovolit jít k nekonečnu, avšak skutečná společnost ne, tudíž je vcelku namístě předpokládat, že by tento vývoj vyústil ve svrhnutí vlády nebo v extrémním případě i revoluci.

4.3.10 Chování modelu pro volný parametr ε

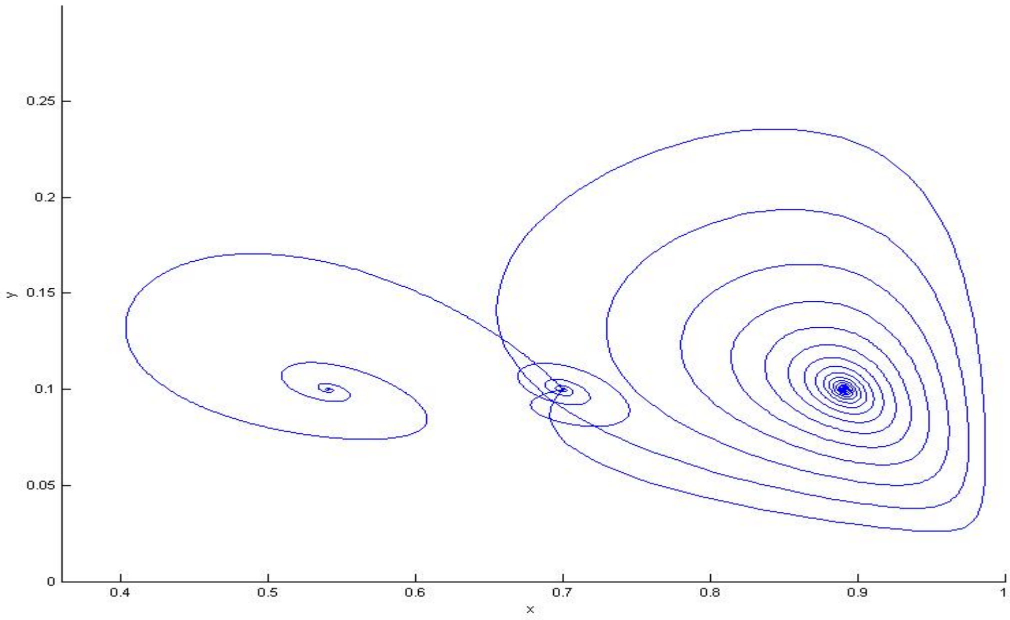
Pro tento parametr jsme nalezli dva bifurkační body – nezajímavý BP při $\varepsilon = 0$ a pak H pro $\varepsilon = 0.1$

- $\varepsilon \in (0\ ,\ 0.1)$ – v tomto intervalu orbita skončí v bodě (1,0,0), tedy jakési utopii. Pochopit význam tohoto parametru bude poněkud složitější, jelikož z podkapitoly 2.2 víme, že tento parametr je definován dvěma podparametry, takže sám o sobě nemá vlastní význam.

- $\varepsilon = (1\text{-}\omega) * \psi$ kde ω je příjem úplatků a ψ vyjadřuje jak daleko může politik zajít při přijímání úplatků. Pokud je tedy ε blízko nule, pak je buď příjem úplatků již velmi vysoký nebo politici nepodléhají nutkání ke korupci. Pokud politici nestojí o úplatky, pak je zřejmé proč se dostáváme do společnosti bez úplatků, vyšetřovacích schopností populace a s vysokou popularitou politických činitelů. Pokud je však příjem úplatků na svém maximu, pak konvergence k této formě společnosti rozhodně logická není. Příjem úplatků zde je zřejmě míněn jako jisté procentuální vyjádření možného maxima. Řekněme že každý politik má nějakou horní mez výše přijatých úplatků a pokud ji dosáhne tak již dále nepřijímá. Příjem úplatků ω tedy vyjadřuje část tohoto maxima které politik již přijímá. Pokud se tedy politik dostane na toto své maximum, pak již dále nepřijímá úplatky a společnost může konvergovat k utopii. Aby to však mohlo platit, pak toto maximum přijatých úplatků musí být ve významu celkové částky, nikoliv příjmů za nějaký čas. V praxi se avšak bohužel ukazuje, že hodnota tohoto maxima přijatých peněz nebývá příliš často shora omezena.

- $\varepsilon \in (0.1\ ,\ 0.6)$ – zde orbita přestává jít přímo do bodu (1,0,0) a naopak začíná cyklicky konvergovat do jiného ekvilibria. S rostoucím ε se tato konvergence zrychluje a oscilace zmenšují. Souřadnice konečného ekvilibria mají pro rostoucí ε následující tendenci – x klesá, z roste a y zůstává na hodnotě 0.1.

- $\varepsilon > 0.6$ – tady platí to samé jako pro předchozí interval, až na to, že oscilace se zde zvětšují.



Obrázek 4.15: Orbita zprava pro ε=0.2, ε=0.5 a ε=1

V praxi se podparametr ω bohužel vyskytuje blízko k nule, tudíž pokud se budeme bavit o tom, jakou optimální hodnotu parametru ε bychom si představovali, pak budeme mluvit převážně o vlivu druhého podparametru ψ, tedy jak daleko mohou politici zajít při přijímání úplatků. Optimum by se tedy v praxi mělo pohybovat v intervalu (0 , 0.1) kdy se společnost příznivě vyvine. V modelu do utopie, v praxi nejspíše pouze do velice málo zkorumpované společnosti.

Kapitola 5

Závěr

5.1 Matcont

Analýzu Modelu korupce demokratické společnosti jsme prováděli výhradně v programu Matcont [2], který se ukázal být jak velice sofistikovaný a prakticky použitelný, tak ze softwarového hlediska značně nevyladěný a nedokončený. Vývoj Matcontu se bohužel před několika lety téměř zastavil, což způsobuje několik problémů. Jelikož se MATLAB [3] neustále vyvíjí a Matcont již příliš ne, vznikají problémy s jejich kompatibilitou. Novější verze MATLABu kupříkladu nemají implementovaný C++ kompilátor, který je potřebný pro instalaci Matcontu. Ze softwarového hlediska si tedy myslím, že je třeba na Matcontu nadále pracovat a zdokonalovat jej.

Na druhou stranu si ale Matcont z pohledu funkčnosti již vedl velice dobře. S nabídkou funkcí, ovládáním a celkovým interfacem jsem byl velice spokojen. Myslím si, že tento software se dá považovat za optimální nástroj pro analýzu dynamických systémů.

5.2 Analýza

V analytické části jsme zkoumali data, která nás, dle mého názoru, pro praktické užití Modelu korupce v demokratické společnosti budou zajímat nejvíce – chování systému pro změnu parametrů. Nejprve jsme si stanovili výchozí bod a hodnoty všech parametrů. Následně jsme vždy jeden z těchto parametrů uvolnili a zkoumali, co se bude se systémem dít. Jak již bylo dříve řečeno, náš model je zadán soustavou tří obyčejných diferenciálních rovnic se třemi proměnnými a deseti parametry. Je tedy zřejmé, že existuje nekonečné množství situací a není tudíž možné prozkoumat celý tento model, ale pouze některé důležité vzory, na které se zaměříme. Naše analýza samozřejmě pokryla pouze malou část dat, která se dají z modelu získat, avšak myslím si, že ta, která jsme získali, jsou pro zkoumání modelu strategicky důležitá a prakticky využitelná.

5.3 Model

Podstatou tvorby matematických modelů je převést složitý problém z reálného světa na jednodušší teoretický model, díky kterému pak bude možné daný problém analyzovat a vyvozené závěry zpětně převést na reálné předpovědi, které pak budeme schopni prakticky využít. Pracujeme s matematickým modelem korupce. Ten nám zcela bez debat problém korupce značně zjednodušuje. Můžeme ho tudíž analyzovat a vyvozovat z něj závěry. Jsou však tyto závěry skutečně prakticky použitelné? Jsme schopni pomocí tohoto modelu odhadnout kupříkladu situaci v České Republice za deset let? Obávám se, že odpověď zní pravděpodobně ne.

Tento model je dozajista dobrý začátek, ale řekl bych, že je potřeba ho více rozpracovat, pokud má sloužit svému účelu – předpovídat budoucí chování reálné demokratické společnosti. Za prvé musíme stanovit intervaly pro hodnoty proměnných a parametrů. Všechno jsou to reálná čísla, tudíž mohou nabývat hodnot od nuly do nekonečna, a proto je třeba stanovit jejich horní meze. Nekonečno je sice matematicky obvyklý jev, avšak musíme počítat s tím, že tyto parametry převádějí sociologické jevy na číselnou hodnotu a v sociologii se určitě nesetkáme s nekonečnou korupcí či jakýmikoliv jinými nekonečnými jevy. Jako první krok budoucího vývoje je tedy třeba přesně stanovit meze proměnných a parametrů. Poté musíme vytvořit převodní funkce, které nám ze sociologických dat vygenerují hodnoty parametrů. Tím bychom mohli začít využívat reálná sociologická data pro zjišťování toho, zda-li předpovědi našeho systému odpovídají skutečnosti, respektive budou odpovídat. V této fázi by jsme otestovali chování systému při dosazení krajních mezí, tedy již stanovených mezí intervalů hodnot parametrů. Tyto hodnoty značí sociologické extrémy, a proto jsou relativně snadno interpretovatelné, čímž jednoduše ověříme, zda-li v hraničních situacích model odpovídá skutečnosti. Pravděpodobně bude třeba několik úprav, jako kupříkladu přidání parametrů či změna mezí, aby model v těchto situacích odpovídal skutečnosti. Předpokládám však, že je to možné. Tím získáme jakousi betaverzi modelu fungující pro mezní případy spolu se schopností převést sociologické údaje na hodnoty parametrů, čímž se budeme moci pustit do testování historické pravdivosti modelu. Se znalostí historického vývoje sociologických dat můžeme zvolit počáteční stav jako některou situaci, která již nastala, a pak zkoumat vývoj systému, přičemž výsledky budeme moci porovnat se skutečnými daty. Tento proces by pak měl vyústit ve vytvoření konečného modelu, který bude schopen předpovídat budoucí vývoj. Samozřejmě to, co jsem zde popsal, by si vyžádalo práci v rozmezí několika let, avšak pokud chceme skutečně prakticky použitelný model korupce, pak věřím, že je to nezbytné. Otázkou ale zůstává, zda-li by všechna tato práce nevyústila pouze v závěr, že problém korupce je příliš složitý a výsledná složitost by byla pro analýzu neúnosná.

Literatura

[1] S. Rinaldi F. Wirl, G. Feichtinger. Corruption Dynamics in Democratic Societies. *Complexity, Vol. 3 (1998)*, pages 53–64.

[2] Yu.A. Kuznetsov A. Dhooge, W. Govaerts. MATCONT: A Matlab package for numerical bifurcation analysis of ODEs. *ACM Trans. Math. Softw. (2003)*, pages 141–164.

[3] MathWorks. MATLAB. `http://www.mathworks.com/products/matlab/`.

[4] Yu.A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Second Edition. Springer Verlag, New York, 1998.

[5] R. Franěk V. Janovský. Korupce v demokratické společnosti. *MIS 2003, Sborník semináře, Matfyzpress, Praha 2003*, pages 25–40.

[6] V. Janovský. Skripta k předmětu Základy Numerické Matematiky. MFF UK.

[7] D. Nádhera. Kontinuace implicitně zadané křivky. Bakalářská práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007.

[8] H. Meijer. Matcont tutorial: ODE GUI version. `wwwhome.math.utwente.nl/~meijerhge/MT_instructions.pdf`.

[9] E.L.Allgower K.Georg. *Numerical Path Following.* Elsevier Science B.V., 1997.

[10] P. Vymětal. Definice a podoby korupce. `www.europeanmovement.cz/img/sprava-obsahu/korupce/Vym%C4%9Btal%20-Definice%20a%20podoby%20korupce.pdf`.