Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Michal Kozák

Bifurkace v matematických modelech v biologii

Katedra matematické analýzy (32-KMA)

Vedoucí bakalářské práce:	Prof. RNDr. Milan Kučera, DrSc.
Studijní program:	matematika
Studijní obor:	matematická analýza (MA)

Praha 2013

Rád bych poděkoval všem, kteří mě podpořili při psaní této práce. Zvláštní poděkování patří vedoucí diplomové práce Prof. RNDr. Milanovi Kučerovi, DrSc. za trpělivé vedení, jakož i za množství cenných rad při konzultacích a poskytnutí mnoha studijních materiálů.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 3. dubna 2013

Název práce: Bifurkace v matematických modelech v biologii

Autor: Bc. Michal Kozák

Katedra: Katedra matematické analýzy (32-KMA)

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Milan Kučera, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v.v.i. (32-MUAV)

Abstrakt:

V této diplomové práci jsou zkoumána stacionární, prostorově nehomogenní řešení systémů reakce-difuze figurující v biologických modelech, založených na Turingově myšlence nestability způsobené difuzí (diffusion driven instability). V souvislosti s tím je zkoumáno globální chování bifurkačních větví takových stacionárních řešení. Práce se opírá o teorii diferenciálních rovnic a o (zejména topologické) metody nelineární analýzy. Je dokázána existence, v jedné prostorové dimenzi i nekompaktnost, bifurkační větve pro obecný systém reakce-difuze vykazující Turingův efekt. Dále jsou odvozeny apriorní odhady pro Thomasův model. Tyto výsledky vedou k tvrzení, které pro všechny difuzní koeficienty z předem zavedené množiny zaručuje existenci alespoň jednoho stacionárního, prostorově nenulového řešení Thomasova modelu.

Klíčová slova: Matematické modely v biologii, bifurkace, nestabilita vyvolaná difuzí, parciální diferenciální rovnice, Thomasův model.

Title: Bifurcation in mathematical models in biology

Author: Bc. Michal Kozák

Department: Department of Mathematical Analysis (32-KMA)

Supervisor: Prof. RNDr. Milan Kučera, DrSc., Institute of Mathematics of the ASCR, v. v. i.

Abstract:

Stationary, spatially inhomogenous solutions of reaction-diffusion systems are studied in this thesis. These systems appears in biological models based on a Turing's idea of a diffusion driven instability. In the connection, a global behaviour of bifurcation branches of these stationary solutions is analyzed. The thesis insists on theory of differential equations and on (particularly topological) methods of nonlinear analysis. The existence, as well as non-compatness in one-dimensional space, of a bifurcation branch of general reaction-diffusion system leading to Turing's efekt is proved. Further, a priori estimates of Thomas model are derived. The results tend to theorem, that forall diffusion coefficient from the preestablished set there exists at least one stacionary, spacially nontrivial solution of Thomas model.

Keywords: Mathematical models in biology, bifurcation, diffusion driven instability, partial differential equations, Thomas model.

Obsah

Úvod

Rovnice typu reakce-difuze (zkráceně RD) přirozeně vyvstávají v řadě modelů biologie, chemie a teoretické fyziky. Jako příklady uveďme vzájemné interakce morfogenů nebo populací rozprostřených v prostoru, pohyb bakterií pomocí chemotaxe, dynamiku nukleárního reaktoru, šíření nervového signálu, populační genetiku.[1] RD systémy mohou vyprodukovat řadu zajímavých fenoménů jako prostorové vzorky, vícenásobné stacionární stavy, pohybující se fronty nebo pulzy a oscilace.

My se budeme zabývat RD systémem o dvou rovnicích, tedy systémem dvou semi-lineárních parabolických rovnic s Neumannovou okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z) \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \tag{1}$$

kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$; w, z funkce reprezentující koncentraci daných látek; w_t, z_t parciální derivace podle času t; Δ Laplaceův operátor reprezentující difuzi; $\partial/\partial n$ derivace ve směru vnější normály; d_1, d_2 kladné difuzní koeficienty a f, g funkce reprezentující vzájemnou reakci obou látek.

Navíc budeme sledovat mechanismus vzniku prostorových struktur, jehož základ položil Turing ve svém článku [20] objevením principu nestability řízené difuzí (diffusion driven instability). Uvažoval zde dva druhy morfogenů (tedy chemických látek způsobující diferenciaci buňky), které v prostoru difundují a navzájem spolu interagují. Ukázal, že rozložení morfogenů by mohlo formovat prostorové vzorky.

Matematicky řečeno, předpokládejme existenci prostorově konstantního (jinými slovy homogenního), stacionárního řešení systému (1), které je navíc stabilní vzhledem k malým perturbacím bez přítomnosti difuze (tj. $d_1 = 0 = d_2$). Jak název vypovídá, po přidání difuze (tj. $d_1 > 0$, $d_2 > 0$) budeme požadovat, aby se toto řešení stalo nestabilním vzhledem k malým perturbacím. Tomuto fenoménu se také říká Turingův efekt nebo Turingova nestabilita.

Tato myšlenka je velmi blízká pozorování přírodních jevů, avšak Turing vycházel vesměs z matematické intuice. V roce 1972 Gierer a Meinhardt [6] pomocí počítače úspěšně vygenerovali prostorové vzorky anatomických struktur nezmara užitím modelu vykazujícím Turingův efekt. Ukázali, že je tento model konzistentní s výsledky experimentů na nezmarech.

Turingův model se od té doby hojně používá mimo jiné proto, že se jedná o mocný nástroj ke generování vzorů vyskytujících se kolem nás. Příkladem buď srst divokých koček [12], kůže korálových ryb [16], ulity plžů a mlžů [15], vaskularizace v tumorech [1].

Úkolem této práce je najít taková data úlohy (1), za kterých existuje alespoň jedno prostorově nekonstantní, stacionární řešení RD soustavy (1) splňující Turingovu nestabilitu. Nastiňme stručně postup, jak toho dosáhneme.

V první kapitole dle [11] odvodíme nutné podmínky platnosti Turingova efektu. V závislosti na koeficientech difuze dle [9] vyjádříme množiny kritických bodů,

[1] odkazy na literaturu viz [19]

tedy množiny dvojic $[d_1, d_2] \in \mathbb{R}^2_+$, pro které má linearizovaná úloha soustavy (1) nekonstatní stacionární řešení. Tyto množiny tvoří v prostoru $\mathbb{R}^2_+$ části hyperbol. Navíc vymezují tzv. oblast nestability, tedy množinu dvojic $[d_1, d_2] \in \mathbb{R}^2_+$, pro které je stacionární konstantní řešení úlohy (1) nestabilní.

Hlavním nástrojem k nalezení prostorově nekonstatních, stacionárních řešení bude teorie bifurkací. Za bifurkační parametr zvolíme první difuzní koeficient d_1, ostatní data úlohy budou pevná.

Druhá kapitola se bude zabývat existencí bifurkační větve. V první sekci této kapitoly na rovnici (1) aplikujeme obecnou verzi Rabinowitzovy globální věty a dostaneme určitou globalitu [2] bifurkační větve bifurkující z kritického bodu násobnosti jedna, tedy kritického bodu ležícího pouze na jedné hyperbole. Čerpáme z [9], kde je postup proveden vzhledem k bifurkačnímu parametru reprezentujícího velikost oblasti. V druhé sekci pak v jedné prostorové dimenzi vyšetříme případ kritického bodu násobnosti dva (tj. kritického bodu ležícího v průniku dvou hyperbol) a ukážeme, že i z něj vychází globální bifurkační větev. Vycházíme zde z [18].

Poslední dvě kapitoly se zabývají bližším popisem chování této bifurkační větve. Ve třetí kapitole ukážeme, že bifurkační větev musí být v jedné dimenzi nekompaktní, vycházíme zde z článku [8]. Ve čtvrté kapitole nejdříve ověříme, že v prostorové dimenzi menší rovné tři je každé slabé řešení Thomasova modelu klasické, a poté odvodíme apriorní odhady tohoto modelu. Postup je čerpán z článku [17], ve kterém jsou odvozeny apriorní odhady klasických řešení Lengyel-Epsteinova vzhledem k bifurkačnímu parametru d_2 - my v této práci za parametr bereme d_1.

V závěrečné kapitole všechno shrneme do věty, která za daných předpokladů zaručí existenci nekonstantního stacionárního řešení Thomasova modelu pro všechny difuzní koeficienty $[d_1, d_2]$ ležící v oblasti nestability.

[2] přesněji viz věta 2.2

1. Podmínky Turingovy nestability

V této kapitole odvodíme nutné podmínky pro Turingovu nestabilitu stacionárního řešení obecné rovnice reakce-difuze. Čerpám zde hlavně z [11] a [9].

Jak bylo řečeno v úvodu, uvažujme tedy následující soustavu dvou semilineárních parabolických rovnic s Neumannovou okrajovou podmínkou a dvojicí počátečních podmínek:

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + f(w,z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + g(w,z) \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega, \qquad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \qquad w(x,0) = w_0, \quad z(x,0) = z_0, \tag{1.1}$$

kde Ω je otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^N$ s uzavřenou lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$; n jednotková vnější normála existující ve skoro všech bodech $\partial\Omega$; d_1, d_2 nezáporné parametry označované jako difuzní koeficienty a f, g spojité funkce[1].

Předpokládejme existenci prostorově konstatního, stacionárního řešení $\hat{W} = (\hat{w}, \hat{z})$ úlohy (1.1), tedy dvojice konstant splňující

$$f(\hat{w}, \hat{z}) = 0, \qquad g(\hat{w}, \hat{z}) = 0. \tag{1.2}$$

V následujícím textu budeme vyšetřovat stabilitu právě tohoto stacionárního stavu. Funkce f, g přepišme do tvaru Taylorova rozvoje v bodě $[\hat{w}, \hat{z}]$:

$$\begin{aligned} f(w,z) &= \frac{\partial f}{\partial w}(\hat{w},\hat{z})(w - \hat{w}) + \frac{\partial f}{\partial z}(\hat{w},\hat{z})(z - \hat{z}) + m_1(w,z) \\ g(w,z) &= \frac{\partial g}{\partial w}(\hat{w},\hat{z})(w - \hat{w}) + \frac{\partial g}{\partial z}(\hat{w},\hat{z})(z - \hat{z}) + m_2(w,z), \end{aligned}$$

kde $m_1(w,z)$, $m_2(w,z)$ značí Taylorovy zbytky funkcí f a g. Symbolem $B = (b_{ij})_{2,2}$ označme Jacobiho matici zobrazení $[f,g]^\top$ v bodě $[\hat{w}, \hat{z}]$. Systém pak máme ve tvaru

$$\begin{aligned} w_t &= d_1 \Delta w + b_{11}(w - \hat{w}) + b_{12}(z - \hat{z}) + m_1(w,z) \\ z_t &= d_2 \Delta z + b_{21}(w - \hat{w}) + b_{22}(z - \hat{z}) + m_2(w,z). \end{aligned}$$

Převeďme úlohu s kladným, prostorově konstantním, stacionárním řešením na ekvivalentní úlohu s nulovým stacionárním řešením. Formálně se tento posun provede substitucí $u = w - \hat{w}$, $v = z - \hat{z}$. Celkem tedy dostáváme úlohu

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u,v) \\ v_t &= d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{v } [0,\infty) \times \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \qquad u(x,0) = u_0 := w_0 - \hat{w}, \quad v(x,0) = v_0 := z_0 - \hat{z}, \tag{1.3}$$

[1] Další předpoklady budou přidány později.

kde n_1, n_2 jsou malé perturbace splňující

$$n_j(\xi,\eta) = o(|\xi| + |\eta|) \quad \text{pro } \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}\colon |\xi| + |\eta| \to 0, j = 1,2.$$

Stacionárním konstatním řešením úlohy (1.3) je bod $[\hat{u},\hat{v}] = [0,0]$.

Nadále budeme ve všech systémech implicitně uvažovat dvojici počátečních podmínek u_0, v_0, aniž bychom to nadále psali.

1.1 Stabilita systému bez difuze

Nalezněme nejdříve podmínky na členy matice B, za kterých nastává stabilita nulového stacionárního řešení systému bez difuze, tedy systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty). \tag{1.4}$$

K tomu využijeme větu o linearizované stabilitě z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

Tvrzení 1.1 (O linearizované stabilitě)**.** *Je dána rovnice $x' = f(x)$. Nechť $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ splňuje $f(x_0) = 0$, f je spojitě diferencovatelná na okolí bodu x_0. Označme B Jacobiho matici zobrazení f v bodě x_0. Pak platí,*

a) jestliže pro každé vlastní číslo λ matice B je $\operatorname{Re}\lambda < 0$, pak je x_0 asymptoticky stabilní.

b) jestliže existuje vlastní číslo λ matice B splňující $\operatorname{Re}\lambda > 0$, pak je x_0 nestabilní.

Vyjádřeme tedy vlastní čísla matice B. Ty se dostanou jako kořeny rovnice

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě dostaneme rovnici

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0, \tag{1.5}$$

jejíž řešení jsou tvaru

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$
$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Ověřme, že hledanými podmínkami, za kterých jsou reálné části obou vlastních čísel λ_1, λ_2 záporné, jsou

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22} < 0, \tag{P1}$$
$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0. \tag{P2}$$

Přepokládáme-li nejdříve platnost obou podmínek, z (P1) okamžitě plyne zápornost $\operatorname{Re}\lambda_2$ a z (P2) pak i

$$2\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\left\{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}\right\} < b_{11} + b_{22} + |b_{11} + b_{22}| = 0.$$

Naopak, v případě $\operatorname{tr} B \geq 0$ by zřejmě byla $\operatorname{Re}\lambda_1$ nezáporná. V případě $\det B \leq 0$ a platnosti (P1) by platilo

$$2\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\left\{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}\right\} > b_{11} + b_{22} + |b_{11} + b_{22}| = 0.$$

Dostáváme tedy, že podmínky (P1), (P2) jsou ekvivalentní se záporností reálných částí kořenů kvadratické rovnice (1.5), a tedy asymptotickou stabilitu nulového stacionárního řešení úlohy (1.4), tj. úlohy (1.3) bez difuzních členů ($d_1 = d_2 = 0$).

1.2 Nestabilita systému s difuzí

Vyšetřeme podmínky na data úlohy (1.3), aby stacionární řešení $\hat{U}$ bylo nestabilní vzhledem k malým perturbacím. K tomu použijeme větu o linearizované stabilitě pro systém parciálních diferenciálních rovnic.

Připomeňme, že prostor $W^{1,2}(\Omega)$ je Hilbertovým prostorem s obvyklým skalárním součinem

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v + uv \,\mathrm{d}x \qquad \forall u, v \in W^{1,2}(\Omega).$$

Normu prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ indukovanou tímto skalárním součinem budeme značit symbolem $\|\cdot\|$, na rozdíl od L^p-normy, kterou značíme $\|\cdot\|_p$.

Dále zaveďme označení $[W^{1,2}(\Omega)]^2 = W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$. Tento prostor je Hilbertovým prostorem s normou indukovanou skalárním součinem

$$\langle U, W \rangle_\sim = \langle u, v \rangle + \langle w, z \rangle \qquad \forall U, W \in [W^{1,2}(\Omega)]^2, U = [u, v], W = [w, z].$$

Tvrzení 1.2. *Uvažujme úlohu na vlastní čísla*

$$\begin{aligned} d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v &= \lambda u \\ d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v &= \lambda v \end{aligned} \quad v\ \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad na\ \partial\Omega. \tag{1.6}$$

Pak platí:

(i) Jestliže existuje kladné ε takové, že je $\operatorname{Re}\lambda \leq -\varepsilon$ pro všechna vlastní čísla λ úlohy (1.6)*, pak je řešení $\hat{U}$ systému* (1.3) *stabilní v normě prostoru* $[W^{1,2}(\Omega)]^2$.

(ii) Jestliže existuje vlastní číslo λ úlohy (1.6) *splňující* $\operatorname{Re}\lambda > 0$*, pak je řešení $\hat{U}$ systému* (1.3) *nestabilní v normě prostoru* $[W^{1,2}(\Omega)]^2$.

Zaveďme slabou formulaci úlohy (1.6). Řekneme, že $U = [u, v]$ je slabé řešení okrajové úlohy (1.6), jestliže $U \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$ a splňuje rovnost

$$\begin{aligned} &\int_\Omega d_1 \nabla u \nabla \varphi - (b_{11}u + b_{12}v - \lambda u)\varphi \, \mathrm{d}x = 0 \\ &\int_\Omega d_2 \nabla v \nabla \varphi - (b_{21}u + b_{22}v - \lambda v)\varphi \, \mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{1.7}$$

Pro pevnou funkci $u \in W^{1,2}(\Omega)$ označme

$$F(\varphi) = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Pomocí Hölderovy nerovnosti a vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ukažme, že je funkcionál F konečný:

$$F(\varphi) = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \varphi^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_2 \|\varphi\|_2 \le c\|\varphi\| < \infty.$$

Dále je F zřejmě lineární, díky předchozímu odhadu omezený, a tedy i spojitý. Z Rieszovy věty o reprezentaci 6.1 existuje právě jeden prvek z prostoru $W^{1,2}(\Omega)$, označme jej Au, splňující

$$F(\varphi) = \langle Au, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Lemma 1.3. *Operátor $A \colon W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)$ definovaný předpisem*

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{1.8}$$

je lineární, spojitý, symetrický a kompaktní.

Důkaz. Takto je dle předchozího korektně definován lineární operátor A. Je zřejmě symetrický, neboť

$$\langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega u\varphi \, \mathrm{d}x = \langle u, A\varphi \rangle \qquad \forall u, \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Ukažme, že je kompaktní. Vezměme posloupnost $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omezenou v prostoru $W^{1,2}(\Omega)$ a ukažme, že z posloupnosti $\{Au_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Z omezené posloupnosti $\{u_n\}$ lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergující k prvku u. Díky kompaktnímu vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$ platí, že posloupnost $\{u_{n_k}\}$ konverguje silně v prostoru $L^2(\Omega)$ k témuž prvku. Použitím Hölderovy nerovnosti pak dostáváme

$$\begin{aligned} \|Au_n - Au\| &= \sup_{\|\varphi\|\le 1} \int_\Omega (u_n - u)\varphi \, \mathrm{d}x \le \sup_{\|\varphi\|\le 1} \left(\int_\Omega (u_n - u)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \varphi^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le c\|u_n - u\|_2 \to 0 \end{aligned}$$

Posloupnost $\{Au_{n_k}\}$ je hledaná konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{Au_n\}$ a kompaktnost A je tedy ukázána. ☐

Použitím definice skalárního součinu ve $W^{1,2}(\Omega)$ a operátoru A přepišme systém (1.7) do ekvivalentního tvaru

$$\begin{aligned} d_1 u - (b_{11} + d_1 - \lambda)Au - b_{12}Av = 0 \\ d_2 v - b_{21}Au - (b_{22} + d_2 - \lambda)Av = 0. \end{aligned}$$

Označíme-li

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad AU = \begin{bmatrix} Au \\ Av \end{bmatrix}, \quad D(d) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B(d) = \begin{pmatrix} b_{11} + d_1 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} + d_2 \end{pmatrix},$$

dostáváme ekvivalentní vektorový zápis

$$D(d)U - B(d)AU + \lambda AU = 0 \tag{1.9}$$

Vyjádřeme teď vlastní čísla operátoru A, a to na základě vlastních čísel laplaciánu s Neumannovou okrajovou podmínkou, tedy řešení úlohy.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \kappa u \quad \text{v } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Pokud v dalším textu zmíníme úlohu s laplaciánem, vždy budeme myslet tuto úlohu, tj. laplacián s Neumannovou okrajovou podmínkou.

Vlastní čísla (1.10) se dají uspořádat do nekonečné neklesající posloupnosti

$$0 = \kappa_0 < \kappa_1 \le \kappa_2 \le \kappa_3 \le \dots.$$

Ze slabé formulace úlohy (1.10) pak postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi - \kappa u \varphi \, \mathrm{d}x &= 0 \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega), \\ \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + u\varphi - (1+\kappa) u \varphi \, \mathrm{d}x &= 0 \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega), \\ u - (1+\kappa)Au &= 0, \\ Au &= \frac{1}{1+\kappa} u, \end{aligned} \tag{1.11}$$

kde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ je slabé řešení úlohy (1.10). Ze známých výsledků regularity eliptické rovnice máme, že u je i klasické řešení úlohy (1.10). Pak ze vztahu (1.11) plyne, že $\nu_n := \frac{1}{1+\kappa_n}$ jsou vlastní čísla operátoru A a že u je vlastní vektor operátoru A, právě když je vlastní funkcí úlohy (1.10).

Z vlastních vektorů lineárního kompaktního symetrického operátoru A v Hilbertově prostoru lze vybrat úplný ortonormální systém e_n. Pak dokážeme libovolnou dvojici $U = [u, v]$ zapsat ve tvaru

$$U(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j e_j(x), \tag{1.12}$$

kde $F_j = [F_1^{(j)}, F_2^{(j)}]^\top \in \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbb{N}_0$. Díky spojitosti lineárního operátoru A můžeme psát

$$A\Big(\sum_{j=0}^{\infty} F_j e_j\Big) = A\Big(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} F_j e_j\Big) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} F_j A(e_j) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j A(e_j).$$

Pomocí něj dosaďme získaný vztah (1.12) do rovnice (1.9), čímž dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(D(d) - B(d)A + \lambda A\right) F_j e_j = 0.$$

Do této rovnosti dosaďme vztah (1.11) a dostaneme

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big((1+\kappa_j)D(d) - B(d) + \lambda E\Big) F_j e_j = 0,$$

což díky definici matice $B(d)$ můžeme upravit na tvar

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Big(\kappa_j D(d) - B + \lambda E\Big) F_j e_j = 0.$$

Sčítance této sumy jsou navzájem ortogonální, nulovost sumy je tedy ekvivalentní s nulovostí všech sčítanců. Navíc jsou e_j pro $j \in \mathbb{N}_0$ nenulové, dostáváme tedy ekvivalentní sadu podmínek

$$\Big(\kappa_j D(d) - B + \lambda E\Big) F_j = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}_0. \tag{1.13}$$

Číslo λ je vlastní číslo úlohy (1.6), právě když existuje nenulové řešení $U(x)$. A toto řešení je díky rozvoji (1.12) nenulové právě tehdy, když existuje $j \in \mathbb{N}_0$ s $F_j \neq 0$. Pro nějaké $j \in \mathbb{N}_0$ je F_j nenulové, právě když algebraická rovnice (1.13) má nenulové řešení F_j, což je právě když platí

$$\det(\kappa_j D(d) - B + \lambda E) = 0.$$

Rozepišme:

$$\begin{aligned} 0 &= (\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda)(\kappa_j d_2 - b_{22} + \lambda) - b_{12}b_{21} = \\ &= \lambda^2 + (\kappa_j d_1 + \kappa_j d_2 - b_{11} - b_{22})\lambda + H_d(\kappa_j), \end{aligned} \tag{1.14}$$

kde značíme

$$H_d(\kappa_j) = (\kappa_j d_1 - b_{11})(\kappa_j d_2 - b_{22}) - b_{12}b_{21}.$$

Tedy λ je vlastní číslo úlohy (1.6), právě když je kořenem této kvadratické rovnice pro nějaké $j \in \mathbb{N}_0$, tj. $\lambda = \lambda_1^{(j)}$ nebo $\lambda = \lambda_2^{(j)}$, kde

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(j)} &= \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}, \\ \lambda_2^{(j)} &= \frac{b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j]^2 - 4H_d(\kappa_j)}}{2}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

K tomu, abychom mohli využít tvrzení 1.2, potřebujeme vyšetřit reálné části čísel $\lambda_1^{(j)}$, $\lambda_2^{(j)}$. Zřejmě je $\kappa_j(d_1 + d_2) > 0$, a spolu s podmínkou (P1) dostáváme

$$b_{11} + b_{22} - (d_1 + d_2)\kappa_j < 0.$$

Z toho ihned plyne, že $\operatorname{Re}\lambda_2^{(j)}$ je záporné. Potřebujeme tedy, aby alespoň $\operatorname{Re}\lambda_1^{(j)}$ bylo kladné. Z vyjádření $\lambda_1^{(j)}$ je vidět, že podmínka zaručující $\operatorname{Re}\lambda_1^{(j)} > 0$ je zápornost $H_d(\kappa_j)$, tedy

$$H_d(\kappa_j) = d_1 d_2 (\kappa_j)^2 - (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)\kappa_j + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} < 0. \tag{1.16}$$

Najděme tedy nutné podmínky pro to, aby (1.16) platila. První podmínka vyjde z vyšetřování znamémek jednotlivých členů (1.16). Víme, že difuzní koeficienty jsou kladné, determinant B kladný a κ_j kladné. Z toho zřejmě plyne, že první nutnou podmínkou je

$$b_{11}d_2 + b_{22}d_1 > 0. \tag{P3}$$

Druhá podmínka vychází z následující jednoduché úvahy. Pro každou funkci, která je alespoň v jednom bodě záporná, platí, že hodnota této funkce v bodě minima musí být také záporná. Najděme proto minimum funkce H_d:

$$0 = \frac{\partial H_d(\kappa)}{\partial \kappa} = 2\kappa d_1 d_2 - (b_{11}d_2 + b_{22}d_1),$$

$$\kappa_{\min} = \frac{b_{11}d_2 + b_{22}d_1}{2d_1 d_2}.$$

V tomto bodě má funkce H_d hodnotu

$$H_d(\kappa_{\min}) = -\frac{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2}{4d_1 d_2} + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Dohromady tedy dostáváme druhou nutnou podmínku k platnosti (1.16):

$$\frac{(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2}{4d_1 d_2} > \det B. \tag{P4}$$

Uveďme teď některé důsledky nalezených podmínek. Konkrétně z podmínek (P1), (P3) nutně plyne, že koeficienty b_{11} a b_{22} mají různá znaménka a že difuzní koeficienty musí být navzájem různé. Dohromady s podmínkou (P2) dostáváme $b_{12}b_{21} < 0$, což znamená, že koeficienty b_{12}, b_{21} musí mít také navzájem různá znaménka. Samotná matice B tedy musí být jednoho z typů

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & + \\ - & + \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix}.$$

Zřejmě se třetí typ matice dostane pouhou záměnou u a v z prvního typu, taktéž čtvrtý typ ze druhého, tedy stačí uvažovat první dva typy. Navíc pak z podmínky (P3) ihned plyne, že $d_1 < d_2$.

Shrňme nalezené podmínky na data úlohy z této kapitoly. Nalezli jsme nutné podmínky kladené na úlohu (1.1), za kterých dochází k Turingovu jevu, a to

$$\operatorname{tr} B < 0, \qquad \det B > 0, \qquad b_{11}d_2 + b_{22}d_1 > 0, \tag{P1-P3}$$

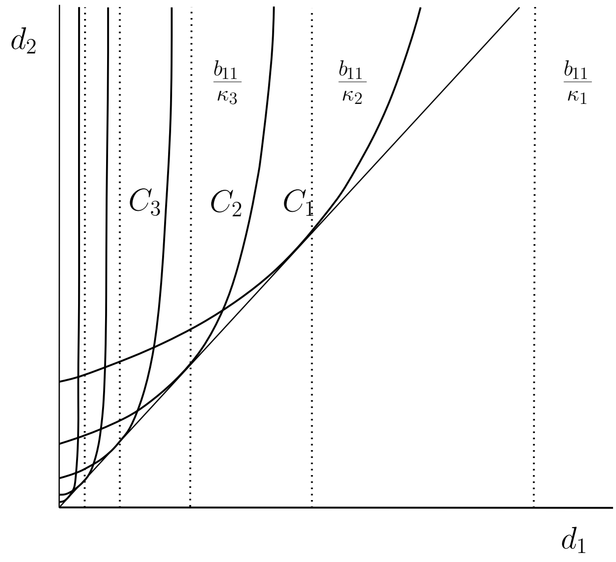
$$(b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 > 4d_1 d_2 \det B. \tag{P4}$$

Tyto podmínky zaručují platnost nerovností

$$b_{11}b_{22} < 0, \quad b_{12}b_{21} < 0 \tag{1.17}$$

a toho, že matice B je jednoho z typů

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$



Obrázek 1.1: Hypeboly C_j.

1.3 Oblast stability a nestability

V této sekci vyšetříme množiny dvojic difuzních parametrů $[d_1, d_2]$, pro které je stacionární řešení $\hat{U} = [0, 0]$ úlohy (1.3) stabilní či nestabilní v normě prostoru $[W^{1,2}(\Omega)]^2$. Jinými slovy, vyšetříme tzv. oblast stability a oblast nestability.

Navažme na předchozí sekci. Připomeňme, že jsme získali rovnici (1.15), tj. vyjádření vlastních čísel λ úlohy (1.6). Poté jsme si uvědomili, že za našich předpokladů je reálná část vlastního čísla λ_2 vždy záporná a reálná část vlastního čísla λ_1 záporná, pokud je $H_d(\kappa_j)$ kladné, a kladná, pokud je $H_d(\kappa_j)$ záporné.

Znaménko $\operatorname{Re} \lambda_1$ se tedy mění v bodech daných rovnicí $H_d(\kappa_j) = 0$. Ta se dá ekvivalentně přepsat do tvaru

$$d_2 = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{b_{12} b_{21}}{d_1 \kappa_j - b_{11}} + b_{22} \right), j \in \mathbb{N}, \tag{1.19}$$

což je rovnice hyperboly (o neznámých d_1, d_2). Jelikož nás zajímají pouze kladné difuzní koeficienty, zaveďme označení

$$C_j = \left\{ [d_1, d_2] \in \mathbb{R}^2_+, d_2 = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{b_{12} b_{21}}{d_1 \kappa_j - b_{11}} + b_{22} \right) \right\}$$

pro $j \in \mathbb{N}$ a tuto množinu nazývejme j-tou hyperbolou (viz obr. (1.1)). Takováto hyperbola má asymptoty

$$d_1 = \frac{b_{11}}{\kappa_j}, \quad d_2 = \frac{b_{22}}{\kappa_j}$$

a dá se ukázat, že všechny hyperboly mají společnou tečnu ([17])

$$d_2 = \frac{b_{11} b_{22} + 2\sqrt{-b_{12} b_{21} \det B}}{b_{11}^2} d_1.$$

Vlastní čísla κ_j jsou uspořádána do spočetné nekonečné neklesající posloupnosti (srovnej se sekcí 1.2). Pak z tvaru C_j plyne, že se hyperboly C_j vzhledem k rostoucímu j přibližují k $d_1 = 0$.

Přesněji platí: buď $d_2^0 \in \mathbb{R}_+$ libovolné pevné a vezměme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ platí $[d_1^n, d_2^0] \in C_n$. Pak pro posloupnost těchto bodů $\{d_1^n\}_{n>n_0}$ platí

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n>n_0}} d_1^n = 0. \tag{1.20}$$

Dále platí, označíme-li posloupnost bodů $\{d_2^0\}_{n\in\mathbb{N}}$ splňujících $[0, d_2^n] \in C_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\lim_{n\to\infty} d_2^n = 0.$$

Dále, pokud jsou vlastní čísla laplaciánu prostá, tj. $\kappa_n < \kappa_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, pak $C_n \neq C_j$ pro každou dvojici různých indexů $n, j \in \mathbb{N}$. Pokud má vlastní číslo κ_n násobnost m_n, pak

$$C_{n-1} \neq C_n = C_{n+1} = \cdots = C_{n+m_n-1} \neq C_{n+m_n}.$$

Poznamenejme, proč jsme množinu C_j nedefinovali pro $j = 0$. Vlastní číslo $\kappa_0 = 0$ sice existuje, pro všechna d ale platí $H_d(0) = \det B \neq 0$, a tedy hyperbola pro $j = 0$ neexistuje.

Důležitost zavedení pojmu hyperboly ilustruje následující tvrzení, které shrnuje fakta z předešlého postupu.

Tvrzení 1.4. *Předpokládejme, že jsou splněny podmínky* (P1-P3) *kladené na matici B. Pak pro každé vlastní číslo $\lambda_j := \lambda_1^{(j)}$ (viz* (1.15)*) úlohy* (1.6) *platí:*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\lambda_j < 0 & \textit{pro } d \textit{ vpravo od } C_j, \\ \lambda_j = 0 & \textit{pro } d \textit{ na } C_j, \\ \lambda_j > 0 & \textit{pro } d \textit{ vlevo od } C_j. \end{cases}$$

Reálná část vlastního čísla $\lambda_2^{(j)}$ je vždy záporná.

Zaveďme následující označení, pomocí něhož popíšeme množiny parametrů vedoucích ke stabilitě nebo nestabilitě nulového řešení.

Značení. Množina C_E označuje obálku křivek C_j pro všechna $j \in \mathbb{N}$ (viz obr. (1.2)), přesněji množinu

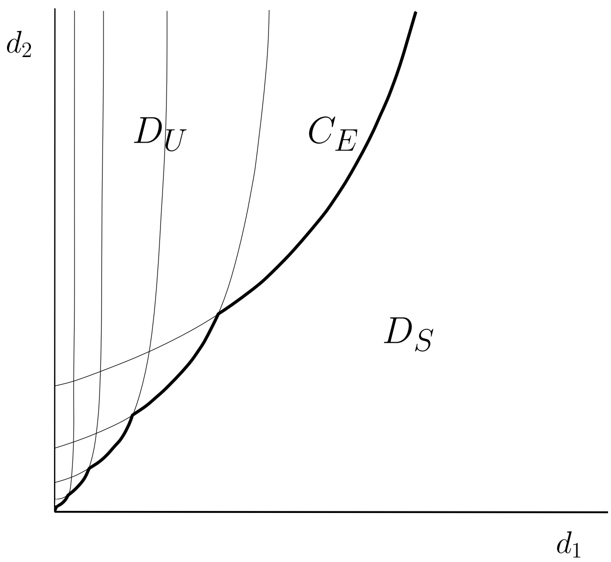
$$C_E = \left\{[d_1, d_2]\colon d_1 \in \mathbb{R}_+, d_2 = \min\{z\colon [d_1, z] \in \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j\}\right\}$$

Dále označme podmnožiny $\mathbb{R}_+^2$ vyťaté množinou C_E:

$$D_S = \{d \in \mathbb{R}_+^2\colon d \text{ leží vpravo od } C_E\}$$
$$D_U = \{d \in \mathbb{R}_+^2\colon d \text{ leží vlevo od } C_E\}$$

Tvrzení 1.5. *Za předpokladů tvrzení 1.4 platí:*

- *Pro každé $d \in D_S$ existuje ε kladné takové, že všechna vlastní čísla λ úlohy* (1.6) *splňují* $\operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon$.



Obrázek 1.2: Ilustrace množin C_E, D_U a D_S.

- *Pro každé* $d \in D_U$ *existuje vlastní číslo* λ *úlohy* (1.6) *splňující* $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Důkaz. První podmínku dokažme sporem. Předpokládejme, že existuje $d \in D_S$ takové, že pro každé ε kladné existuje vlastní číslo λ úlohy (1.6), které splňuje $0 \geq \operatorname{Re}\lambda > -\varepsilon$. Tedy musí existovat posloupnost indexů $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ splňující $\lambda_{j_k} \to 0$. Zřejmě pro tuto posloupnost platí $j_k \to \infty$.

Pro $\lambda_{j_k} \to 0$ ze vztahu (1.15) platí $H_d(\kappa_{j_k}) \to 0$. Zároveň ovšem z definice H_d plyne $H_d(\kappa) \to \infty$ pro $\kappa \to \infty$, což je spor.

Druhá podmínka plyne z předešlého tvrzení. □

Toto tvrzení nás opravňuje nazývat množinu D_S oblastí stability a množinu D_U oblastí nestability.

Důsledek 1.6. *Za předpokladů věty 1.4 je nulové řešení stabilní v normě* $W^{1,2}(\Omega)$ *pro* $d \in D_S$ *a nestabilní pro* $d \in D_U$.

Tvar vlastních čísel nám je již znám. Vyjádřeme i tvar vlastních vektorů.

Tvrzení 1.7. *Je-li* λ *vlastní číslo úlohy* (1.6), *pak příslušné vlastní vektory tvoří prostor*

$$E_d(\lambda) = \operatorname{span}\left\{\left[e_j, \frac{d_1\kappa_j - b_{11} + \lambda}{b_{12}} e_j\right]\right\}_{j\in J_d(\lambda)},$$

kde $J_d(\lambda)$ *je množina indexů* j*, pro které má rovnice* (1.13) *netriviální řešení.*

Důkaz. Z úvah předchozí sekce víme, že λ je vlastní číslo úlohy (1.6), právě když má algebraická rovnice (1.13) pro nějaké j netriviální řešení a také, že vlastní vektory jsou dvojice $U = \sum F_j e_j$, kde sčítáme přes všechna j, pro něž má (1.13) netriviální řešení F_j. Rovnost (1.13) přepišme do tvaru

$$(\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda)F_j^{(1)} + b_{12}F_j^{(2)} = 0,$$

ze které stačí $F_j^{(2)}$ vyjádřit:

$$F_j^{(2)} = -\frac{\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda}{b_{12}} F_j^{(1)}.$$

Řešení rovnice (1.13) jsou tedy násobky vektorů

$$\left[1, \frac{\kappa_j d_1 - b_{11} + \lambda}{b_{12}}\right].$$

$\square$

2. Existence bifurkační větve

V minulé kapitole jsme zjistili, že uvažovaný prostor difuzních parametrů $\mathbb{R}^2_+$ je rozdělen na dvě části, oblast stability, tedy oblast, ve které je triviální řešení stabilní, a oblast nestability, tedy oblast, ve které je triviální řešení nestabilní.

V této kapitole nás budou zajímat nenulová stacionární řešení. Zkoumáme tedy řešení stacionární úlohy

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) &= 0 \\ d_2\Delta v + b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) &= 0 \end{aligned} \quad \text{v } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Navíc v případě vícedimenzionální prostorové proměnné předpokládejme růstové podmínky

$$|n_i(\xi,\eta)| \le C(1 + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}) \quad \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

kde máme $q \in \mathbb{R}_+$ v případě $N = 2$ a $q \in [1, 2N/(N-2))$ v případě $N > 2$.

Dále zafixujme $d_2 = d_2^0 > 0$ a za bifurkační parametr zvolme d_1. Nadále používejme značení $\mu = d_1$. Před zavedením bifurkačního bodu převeďme naši úlohu do slabé formulace a pak do tvaru operátorové rovnice.

Definice. Řekneme, že $U = [u,v]$ je slabé řešení okrajové úlohy (2.1), jestliže $U \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$ a splňuje systém

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu\nabla u\nabla\varphi - (b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v))\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \\ \int_\Omega d_2^0\nabla v\nabla\varphi - (b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v))\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \quad \forall\varphi \in W^{1,2}(\Omega). \tag{2.3}$$

Odvodíme operátorový tvar rovnice (2.3). Volme $j = 1,2$ a pro pevná $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ označme

$$F^{(j)}(\varphi) = \int_\Omega n_j(u,v)\varphi \,\mathrm{d}x, \qquad \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Ukažme, že je funkcionál $F^{(j)}$ konečný. Zřejmě to je pravda v případě jednodimenzionální prostorové proměnné, ověřme případ vícedimenzionální prostorové proměnné. Buď $u,v \in W^{1,2}(\Omega)$. Z věty o kompaktním vnoření platí $u,v \in L^q(\Omega)$, kde

$$q \in \begin{cases} [1,\infty) & \text{pro } N = 2, \\ [1, \frac{2N}{N-2}) & \text{pro } N > 2. \end{cases}$$

Použijme klasické označení q' pro duální index k indexu q, tedy kladné číslo splňující

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Pak zřejmě platí $q - 1 = q/q'$ a z věty 6.7 o Němyckého operátoru a předpokladu (2.2) plyne $n_j(u,v) \in [L^{q'}(\Omega)]^2$. Z Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned} F^{(j)}(\varphi) = \int_\Omega n_j(u,v)\varphi \,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega |n_j(u,v)|^{q'} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le \\ \le c\|n_j(u,v)\|_{q'}\|\varphi\| < +\infty. \end{aligned}$$

Dále je $F^{(j)}$ lineární a díky předchozímu odhadu omezený, tedy spojitý. Z Rieszovy věty o reprezentaci 6.1 existuje právě jeden prvek prostoru $[W^{1,2}(\Omega)]^2$, označme jej $N_j(u,v)$, splňující

$$F^{(j)}(\varphi) = \langle N_j(u,v), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega).$$

Lemma 2.1. *Operátor* $N_j : [W^{1,2}(\Omega)]^2 \to W^{1,2}(\Omega)$, $j = 1,2$, *definovaný předpisem*

$$\langle N_j(u,v), \varphi\rangle = \int_\Omega n_j(u,v)\varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall u, v, \varphi \in W^{1,2}(\Omega) \tag{2.4}$$

je spojitý, kompaktní a je malou perturbací, tj. splňuje

$$\lim_{\substack{\|u\|+\|v\|\to 0\\ u,v\in W^{1,2}(\Omega)}} \frac{\|N_j(u,v)\|}{\|u\| + \|v\|} = 0 \tag{2.5}$$

Důkaz. Takto je dle předchozího korektně definován spojitý operátor N_j. Ukažme, že je kompaktní. Vezměme posloupnost $\{[u_n, v_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ omezenou v prostoru $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ a ukažme, že z posloupnosti $\{N_j(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost. Z omezené posloupnosti $\{[u_n, v_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost $\{[u_{n_k}, v_{n_k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ k prvku $[u, v]$. Z kompaktnosti vnoření $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ a z věty 6.7 o Němyckého operátoru platí, že posloupnost $\{n_j(u_{n_k}, v_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ konverguje silně v prostoru $[L^{q'}(\Omega)]^2$ k prvku $n_j(u,v)$. Pak použitím Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}
\|N_j(u_{n_k}, v_{n_k}) - N_j(u,v)\| &= \sup_{\|\varphi\|\le 1} \int_\Omega [n_j(u_{n_k}, v_{n_k}) - n_j(u,v)]\varphi \, \mathrm{d}x \le \\
&\le \sup_{\|\varphi\|\le 1} \left(\int_\Omega |n_j(u_{n_k}, v_{n_k}) - n_j(u,v)|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |\varphi|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \le \\
&\le C\left(\int_\Omega |n_j(u_{n_k}, v_{n_k}) - n_j(u,v)|^{q'} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q'}} \to 0.
\end{aligned}$$

Posloupnost $\{N_j(u_{n_k}, v_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ je hledaná konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{N_j(u_n, v_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ a kompaktnost N_j je tedy dokázána.

Zbývá ověřit podmínku (2.5). Tento důkaz je podrobně uveden v [10, Con A1]. □

Systém (2.3) pak můžeme přepsat do ekvivalentního tvaru

$$\begin{aligned}
\mu u - (b_{11} + \mu)Au - b_{12}Av - N_1(u,v) = 0\\
d_2^0 v - b_{21}Au - (b_{22} + d_2^0)Av - N_2(u,v) = 0.
\end{aligned}$$

Připomeneme-li označení

$$D([\mu, d_2^0]) = \begin{pmatrix} \mu & 0\\ 0 & d_2^0\end{pmatrix}, \qquad B([\mu, d_2^0]) = \begin{pmatrix} b_{11}+\mu & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}+d_2^0\end{pmatrix}$$

a označíme-li navíc

$$N(U) = \begin{bmatrix} N_1(u,v)\\ N_2(u,v)\end{bmatrix},$$

dostáváme vektorový zápis

$$D([\mu, d_2^0])U - B([\mu, d_2^0])AU - N(U) = 0 \tag{2.6}$$

Definice. Bifurkačním bodem úlohy (2.6) označujeme parametr $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ takový, že v libovolně malém okolí bodu $[\mu_0, 0, 0]$ v prostoru $\mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2$ existuje $[\mu, u, v] \in \mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2$ s $[u, v] \neq [0, 0]$, splňující rovnici (2.6).

K popsání množiny nenulových řešení úlohy (2.6) využijeme rabinowitzovskou globální bifurkační větu, která nám za daných předpokladů dává nejen existenci bifurkačního bodu, navíc i určitou globálnost množiny nenulových řešení (tzv. bifurkační větve) vycházející z tohoto bifurkačního bodu.

2.1 Verze pro $[\mu_0, d_2^0]$ ležící na právě jedné hyperbole

Naším cílem je dokázat následující verzi globální bifurkační věty:

Věta 2.2. *Přepokládejme, že jsou splněny podmínky* (P1-P3) *kladené na matici B. Buď d_2^0 pevná kladná konstanta. Mějme libovolné μ_0 takové, že $[\mu_0, d_2^0]$ leží na hyperbole C_j pro nějaké $j \in \mathbb{N}$ a na žádné jiné, tj. $[\mu_0, d_2^0] \notin C_k$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \neq j$, tedy speciálně vlastní číslo κ_j úlohy* (1.10) *je prosté. Předpokládejme, že jsou pro $i = 1, 2$ splněny podmínky*

$$\lim_{\substack{|\xi|+|\eta|\to 0\\ \xi,\eta\in\mathbb{R}}} \frac{n_i(\xi,\eta)}{|\xi|+|\eta|} = 0. \tag{2.7}$$

Navíc v případě vícedimenzionální prostorové proměnné předpokládejme růstové podmínky

$$|n_i(\xi,\eta)| \leq C(1 + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}) \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

kde q je libovolné při $N = 2$ a $q \in [1, 2N/(N-2))$ při $N > 2$.

Pak je μ_0 bifurkační bod úlohy (2.6)*. Označíme-li množinu*

$$S = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2,\ U \text{ nenulové řešení } (2.6)\}}$$

a S^0 komponentu množiny S obsahující $[\mu_0, 0]$, je navíc bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S^0 splňuje alespoň jednu z následujích podmínek:

(S1) $\exists \bar{\mu} \neq \mu_0\colon [\bar{\mu}, 0] \in S^0$

(S2) $\exists \{[\mu_n, U_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^0\colon \mu_n + \|U_n\| \to \infty$

(S3) $\exists \{[\mu_n, U_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^0\colon \mu_n \to 0^+$

Definice. Množinu S^0 nazýváme bifurkační větví příslušnou bifurkačnímu bodu μ_0. Pokud bifurkační větev S^0 splňuje alespoň jednu z podmínek *(S1)*, *(S2)*, *(S3)* uvedených v tvrzení věty 2.2, řekneme, že S^0 je globální bifurkační větví.

K důkazu věty použijeme silnější verzi Rabinowitzovy globální bifurkační věty, uvedenou například v [9]:

Věta 2.3. *Uvažujme reálný Hilbertův prostor H a spojité kompaktní operátory T, $N: O \to H$, kde O je otevřená množina v $\mathbb{R} \times H$. Předpokládejme, že $T_\mu := T(\mu, \cdot)$ je lineární pro každé pevné μ a*

$$\lim_{\|U\| \to 0} \frac{\|N(\mu, U)\|}{\|U\|} = 0 \text{ stejnoměrně pro } \mu \text{ z kompaktních intervalů.} \tag{2.8}$$

Uvažujme μ_0 takové, že $[\mu_0, 0] \in O$ a pro μ z okolí bodu μ_0 existuje vlastní číslo λ_μ liché násobnosti úlohy

$$U - T_\mu U = \lambda U$$

závisející spojitě na μ a takové, že

$$\operatorname{sign} \lambda_{\mu_0 + \varepsilon} = -\operatorname{sign} \lambda_{\mu_0 - \varepsilon} \text{ pro všechna dostatečně malá } \varepsilon. \tag{2.9}$$

Pak μ_0 je bifurkační bod rovnice

$$U - T_\mu(U) - N(\mu, U) = 0. \tag{2.10}$$

Označíme-li množinu

$$S = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R} \times H, U \text{ nenulové řešení } (2.6)\}}$$

a S^0 komponentu množiny S obsahující $[\mu_0, 0]$, je navíc bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S^0 splňuje alespoň jednu z následujích podmínek:

(i) Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in S^0$.

(ii) Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $[\mu_n, U_n] \to \partial O$ nebo $\|U_n\| + |\mu_n| \to \infty$.

Důkaz věty 2.2. Položme $H = [W^{1,2}(\Omega)]^2$ a $O = \mathbb{R}_+ \times H$. Převedeme úlohu (2.6) do tvaru rovnice (2.10). Zavedeme operátory

$$T(\mu, U) := D^{-1}([\mu, d_2^0]) B([\mu, d_2^0]) AU, \quad N(\mu, U) := D^{-1}([\mu, d_2^0]) N(U)$$

a vynásobením zleva operátorovou rovnici inverzní maticí $D^{-1}([\mu, d_2^0])$ získáváme tvar rovnice (2.10).

Ověřme postupně předpoklady kladené na tyto operátory. Spojitost, respektive kompaktnost, plyne ze spojitosti, respektive kompaktnosti, operátorů A, N_j, $j = 1, 2$ z lemmat 1.3 a 2.1, a ze spojité závislosti matic $D^{-1}([\mu, d_2^0])$ a $B([\mu, d_2^0])$ na proměnné μ. Linearita operátoru $T_\mu = T(\mu, \cdot)$ plyne z linearity jednotlivých činitelů. Podmínka (2.8) plyne také z lemmatu 2.1.

Řešení rovnice $U - T_{\mu_0} U = 0$ jsou řešeními úlohy (1.9) pro $\lambda = 0$. Takové řešení U odpovídá řešení úlohy (1.7), což díky regularitě slabého řešení eliptické rovnice je klasickým řešením (1.6). A jelikož leží uvažovaný bod $[\mu_0, d_2^0]$ na j-té hyperbole a žádné jiné, vlastní číslo laplaciánu κ_j je prosté, jsou vlastní vektory podle tvrzení 1.7 tvaru

$$U_0 \in \operatorname{span}\left\{e_j, \frac{\mu_0 \kappa_j - b_{11}}{b_{12}} e_j\right\},$$

a tedy tvoří jednodimenzionální prostor a $\lambda = 0$ je geometricky prosté vlastní číslo operátoru $I - T_{\mu_0}$.

Pro důkaz algebraické prostoty zbývá ukázat $\langle U_0, U_0^* \rangle \neq 0$, kde $U_0^* = [u^*, v^*]$ je vlastní vektor adjungované úlohy k úloze (1.6), tedy úlohy

$$\begin{aligned} \mu_0 \Delta u^* + b_{11} u^* + b_{21} v^* = \lambda^* u^* \\ d_2^0 \Delta v^* + b_{12} u^* + b_{22} v^* = \lambda^* v^* \end{aligned} \quad \text{v } \Omega, \qquad \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial v^*}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \tag{2.11}$$

Označme

$$B^* = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

adjungovanou matici k matici B. Vyjádření U_0^* získáme analogickým postupem jako v důkazu tvrzení 1.7. Obdobně, jako při odvození rovnosti (1.13) v sekci 1.2 se ukáže, že λ^* je vlastní číslo úlohy (2.11), právě když má rovnice

$$(\kappa_l D([\mu, d_2^0]) - B^* + \lambda^* E) F_l = 0$$

pro nějaké $l \in \mathbb{N}_0$ netriviální řešení a víme, že pro vlastní vektory platí $U_0^* = \sum_{l=0}^{\infty} F_l e_l$. Stačí pak toto řešení vyjádřit:

$$F_l^{(2)} = -\frac{\kappa_l \mu_0 - b_{11} + \lambda^*}{b_{21}} F_l^{(1)}.$$

Z toho vyplývá, že vlastní vektory adjungované úlohy příslušné vlastnímu číslu $\lambda^* = 0$ jsou tvaru

$$U_0^* \in \operatorname{span}\left\{ e_j, \frac{\kappa_j \mu_0 - b_{11}}{b_{21}} e_j \right\}.$$

Teď tedy můžeme odhadovat výraz $\langle U_0, U_0^* \rangle$. V druhé rovnosti využijeme předpokladu, že $[\mu_0, d_2^0]$ leží na j-té hyperbole C_j. Z podmínek na matici B (P1-P3) a z faktu, že C_j leží nad asymptotou $d_2 = b_{22}/\kappa_j$ pak vyplývá kladnost posledního výrazu.

$$\begin{aligned} \langle U_0, U_0^* \rangle &= 1 + \frac{\kappa_j \mu_0 - b_{11}}{b_{12}} \frac{\kappa_j \mu_0 - b_{11}}{b_{21}} = 1 + \frac{\kappa_j \mu_0 - b_{11}}{\kappa_j d_2^0 - b_{22}} = \\ &= \frac{(\mu_0 + d_2^0)\kappa_j - (b_{11} + b_{22})}{d_2^0 \kappa_j - b_{22}} > 0. \end{aligned}$$

Vlastní čísla operátoru $I - D([\mu, d_2^0])^{-1} B([\mu, d_2^0]) A$ se dají odvodit stejným postupem jako v sekcích 1.2 a 1.3. Pro ilustraci uveďme hlavní kroky.

Místo úlohy (1.9) uvažujme úlohu

$$U - D([\mu, d_2^0])^{-1} B([\mu, d_2^0]) A U = \lambda U, \tag{2.12}$$

nebo-li po úpravě

$$D([\mu, d_2^0]) U - B([\mu, d_2^0]) A U - \lambda D([\mu, d_2^0]) U = 0.$$

Dosazením vztahů (1.11) a (1.12) přepíšeme předchozí rovnost do tvaru

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(D([\mu, d_2^0]) - \frac{1}{1 + \kappa_l} ([\mu, d_2^0]) - \lambda D([\mu, d_2^0]) \right) F_l e_l = 0$$

a po úpravě dostaneme díky ortogonalitě e_l sadu podmínek ekvivalentních s rovnicí (2.12) podobnou podmínkám (1.13):

$$\Big((1-\lambda)(1+\kappa_l)D([\mu,d_2^0]) - B([\mu,d_2^0])\Big)F_l = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \tag{2.13}$$

Číslo λ je vlastní číslo úlohy (2.12), právě když platí

$$\det\Big((1-\lambda)(1+\kappa_l)D([\mu,d_2^0]) - B([\mu,d_2^0])\Big) = 0.$$

Číslo λ je tedy kořenem rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= [\mu_0\kappa_l - \mu_0(1+\kappa_l)\lambda - b_{11}][d_2^0\kappa_l - d_2^0(1+\kappa_l)\lambda - b_{22}] - b_{12}b_{21} = \\ &= \mu_0 d_2^0(1+\kappa_l)^2\lambda^2 - [\mu_0(d_2^0\kappa_l - b_{22}) + d_2^0(\mu_0\kappa_l - b_{11})](1+\kappa_l)\lambda + H_d(\kappa_l), \end{aligned} \tag{2.14}$$

kde symbol $H_d(\kappa_l)$, zavedený v sekci 1.2, značí:

$$H_d(\kappa_l) = (\kappa_l\mu_0 - b_{11})(\kappa_l d_2^0 - b_{22}) - b_{12}b_{21}.$$

Z tvrzení 1.4 pak plyne, že j-té vlastní číslo $\lambda_1^{(j)}$ je nulové právě na hyperbolách C_j, je kladné vpravo od C_j a záporné vlevo od C_j. Jelikož předpokládáme $[\mu_0, d_2^0] \in C_j$, leží body $[\mu_0+\varepsilon, d_2^0]$ a $[\mu_0-\varepsilon, d_2^0]$ na opačných stranách od C_j, a tedy dostáváme, že podmínka (2.9) je splněna.

Buď nyní S^0 množina z tvrzení věty 2.3. Zřejmě tato množina splňuje i vlastnosti z tvrzení věty 2.2. Tím je důkaz dokončen. □

2.2 Verze pro $[\mu_0, d_2^0]$ ležící v průniku dvou hyperbol

Zabývejme se případem bodu $[\mu_0, d_2^0]$ ležícího v průniku dvou hyperbol C_j a C_k pro nějaká $j > k$ přirozená. Ukazuje se, že tento bod je vzhledem k parametru μ v případě jednodimenzionální prostorové proměnné bifurkačním bodem. Uvažujme tedy v této kapitole úlohu s jednodimenzionální prostorovou proměnnou, tj. x pouze na intervalu $I = (0, L)$.

Návod pochází z článku [18]. Hlavní myšlenka je omezit se při hledání bifurkační větve na vhodný podprostor prostoru $W^{1,2}(I)$, ve kterém se jedna ze dvou vlastních funkcí příslušných hyperbolám C_k, C_l, nebude vyskytovat, a ve kterém ukážeme existenci globální bifurkační větve obdobným způsobem jako ve větě 2.2. Poté ještě bude potřeba ověřit, že tato větev je globální bifurkační větví i vzhledem k prostoru $W^{1,2}(I)$. Prostorem splňujícím výše uvedené se ukáže být následující prostor:

Značení. Pro $N, n \in \mathbb{N}$ označme prostory

$$W_n^{1,2}(I) = \overline{\operatorname{span}\left\{\cos\left(\frac{mn\pi}{L}x\right)\right\}_{m=0}^{\infty}}^{\|\cdot\|}, \qquad [W_n^{1,2}(I)]^2 = W_n^{1,2}(I) \times W_n^{1,2}(I).$$

Tato sekce začíná řadou pomocných lemmat, která postupně vyústí ve větu 2.13 zaručující existenci bifurkační větve vycházející z kritického bodu násobnosti 2.

Poznámka 2.4. Ukažme, že se prostor $W^{1,2}(I)$ dá zapsat ve tvaru

$$\overline{\operatorname{span}\left\{\cos(\frac{m\pi}{L}x)\right\}_{m=0}^{\infty}}^{\|\cdot\|}.$$

V první kapitole jsme totiž ukázali, že operátor A je symetrický a kompaktní. Podle Hellinger-Toeplitzovy věty [14, 11.10] je každý symetrický operátor definovaný na celém Hilbertově prostoru hermitovský. Dále, podle Hilbert-Schmidtovy spektrální věty [14, 8.19] množina vlastních vektorů kompaktního Hermitovského operátoru A generuje prostor $W^{1,2}(I)$. A konečně víme, že vlastní vektory operátoru A jsou právě všechny kosiny z tvrzení poznámky (viz [3]). Navíc jsou tyto vlastní vektory na sebe navzájem ortogonální, tedy množina těchto kosinů je bází tohoto prostoru.

Lemma 2.5. *Prostor $W_n^{1,2}(I)$ je vlastním podprostorem prostoru $W^{1,2}(I)$ pro $n > 1$. Navíc, označíme-li*

$$Z(I) = \overline{\operatorname{span}\left\{\cos(\frac{k\pi}{L}x), k \in \mathbb{N}, k \not\equiv 0 \pmod{n}\right\}}^{\|\cdot\|},$$

potom je tento prostor ortogonálním doplňkem $W_n^{1,2}(I)$ v prostoru $W^{1,2}(I)$.

Před samotným důkazem připomeňme následující obecnou vlastnost Hilbertova prostoru:

Poznámka 2.6. Buď H Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$, A uzavřený podprostor H a B ortogonální doplněk A v H. Dále mějme $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortogonální bázi A a $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortogonální bázi B. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) $u \in A$,

(ii) $u \in H$ splňuje $\langle u, \psi_j\rangle_H = 0$ pro každé $j \in \mathbb{N}$.

Dokažme. Ortogonální doplněk množiny A je definován tak, že pro každé $a \in A$ a $b \in B$ platí $\langle a, b\rangle_H = 0$, tedy implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ platí. Naopak, mějme $u \in H$ a ukažme

$$\langle u, b\rangle_H = 0 \quad \forall b \in B.$$

Prvek b můžeme rozepsat do nekonečné sumy

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k,$$

jejímž dosazením do (2.6) a následným využitím spojitosti skalárního součinu dostaneme požadované:

$$\langle u, b\rangle_H = \langle u, \lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} a_k\psi_k\rangle_H = \lim_{M\to\infty} \langle u, \sum_{k=0}^{M} a_k\psi_k\rangle_H = \lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} a_k\langle u, \psi_k\rangle_H = 0.$$

Důkaz lemmatu 2.5. Ukažme, že direktní součet $W_n^{1,2}(I)$ a $Z(I)$ dává celý prostor $W^{1,2}(I)$. Definujme následující množiny indexů:

$$J_1 = \{k \in \mathbb{N}_0, k \equiv 0 \pmod{n}\}, \quad J_2 = \{m \in \mathbb{N}_0, m \not\equiv 0 \pmod{n}\}. \tag{2.15}$$

Vezměme funkci $u \in W_n^{1,2}(I)$ a rozepišme ji do řady

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big) = \underbrace{\sum_{k\in J_1} a_k \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big)}_{u_1} + \underbrace{\sum_{m\in J_2} a_m \cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)}_{u_2},$$

kde u_1 značí funkci z prostoru $W_n^{1,2}(I)$ a u_2 funkci z $Z(I)$.

Ukažme teď, že jsou oba podprostory navzájem ortogonální. Díky poznámce 2.6 stačí ukázat

$$\Big\langle \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big), \cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\Big\rangle = 0 \qquad \forall k \in J_1,\ \forall m \in J_2.$$

Tedy upravujme:

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big), \cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\Big\rangle = \\
&\quad = \int_0^L \Big[\cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\Big]' \Big[\cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\Big]' \,\mathrm{d}x + \int_0^L \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \frac{km\pi^2}{L^2}\int_0^L \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\sin\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\,\mathrm{d}x + \int_0^L \cos\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{m\pi}{L}x\big)\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Nulovost obou integrálů plyne z nulovosti integrálu ze součinu sinů, respektive kosinů, pro různé argumenty $k \neq m$; různost k a m je zaručena disjunktností indexových množin J_1 a J_2. □

Zaveďme následující operátor symetrického prodlužování. Tento operátor bude v následující kapitole použit i pro $u \in W^{1,2}(0, L/k)$, proto v definici tohoto operátoru použijeme obecnějšího označení $(0, K)$ pro uvažovaný interval.

Značení. Mějme $K > 0$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$ a mějme $u \in W^{1,2}(0, K)$. Pak označme

$$T^{k,l}(u)(x) = \begin{cases} u(x - (i-1)K) & x \in ((i-1)K, iK), i \text{ liché} \\ u(iK - x) & x \in ((i-1)K, iK), i \text{ sudé} \end{cases}$$

pro $i = k+1, k+2, \dots l$.

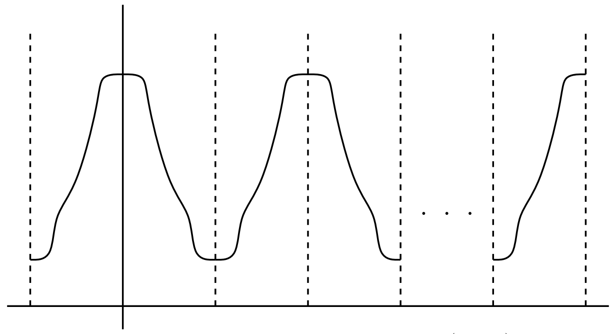
Poznámka 2.7. Ilustrujme na několika případech operátor $T^{k,l}$. První příklad viz obr. (2.1). Dále pro $u \in W^{1,2}(0, L)$ zřejmě $T^{0,1}(u)$ značí funkci u, $T^{-1,1}(u)$ značí sudé prodloužení u na interval $(-L, L)$ a $T^{-2,2}(u)$ značí periodické prodloužení funkce $T^{-1,1}(u)$ na interval $(-2L, 2L)$.

Lemma 2.8. *Buď $K > 0$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $k < l$ a mějme $u \in W^{1,2}(0, K)$. Pak funkce $T^{k,l}(u)$ náleží do prostoru $W^{1,2}(kK, lK)$. Navíc je operátor $T^{k,l}$ spojitý.*

Důkaz. Stěžejním bodem důkazu je ukázat, že je funkce hladká v bodech navázání. Proto bez újmy na obecnosti předpokládejme $k = 0$ a $l = 2$; pro obecné hodnoty se úvahy a výpočty provedou úplně stejně.

Pro zjednodušení zápisu označme $\widetilde{u} = T^{0,2}(u)$. Ukažme nejdříve $\widetilde{u} \in L^2(0, 2K)$:

$$\|\widetilde{u}\|_2^2 = \int_0^K |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_K^{2K} |u(L-x)|^2 \,\mathrm{d}x = 2\|u\|_2^2 < +\infty.$$



Obrázek 2.1: Prodloužení funkce definované na $(0, K)$ pomocí operátoru $T^{-1,l}$, l sudé.

Dále ukažme, že prodloužení slabé derivace původní funkce u je slabou derivací prodloužené funkce $\widetilde{u}$. Potřebujeme ověřit rovnost

$$\int_0^{2K} \widetilde{u}'\varphi \,\mathrm{d}x = -\int_0^{2K} \widetilde{u}\varphi' \,\mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, 2K). \tag{2.16}$$

Jelikož je $\widetilde{u}|_{(0,K)}$ z prostoru $W^{1,2}(0, K)$ a $\widetilde{u}|_{(K,2K)}$ z prostoru $W^{1,2}(K, 2K)$, můžeme integrál na levé straně rozdělit na integrál přes $(0, K)$ a na integrál přes $(K, 2K)$ a zvlášť aplikovat per partes. Poznamenejme, že je prostor $W^{1,2}$ v případě jedné prostorové dimenzi vnořen do absolutně spojitých funkcí, což opravňuje následující zápis hraničních hodnot. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(0, 2K)$ tedy počítejme:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2K} \widetilde{u}'\varphi \,\mathrm{d}x &= \int_0^{K} \widetilde{u}'\varphi \,\mathrm{d}x + \int_K^{2K} \widetilde{u}'\varphi \,\mathrm{d}x = \\
&= -\int_0^{K} \widetilde{u}\varphi' \,\mathrm{d}x - \int_K^{2K} \widetilde{u}\varphi' \,\mathrm{d}x - \widetilde{u}(0)\varphi(0) \\
&\qquad + \widetilde{u}(K)\varphi(K) - \widetilde{u}(K)\varphi(K) + \widetilde{u}(2K)\varphi(2K) = \\
&= -\int_0^{2K} \widetilde{u}\varphi' \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Na posledním řádku jsme využili toho, že je každá funkce z $\mathcal{D}(0, 2K)$ nulová na hranici. Stejně jako u funkce $\widetilde{u}$ se ověří, že derivace funkce $\widetilde{u}$ je z prostoru $L^2(0, 2K)$.

Abychom dokázali spojitost operátoru $T^{k,l}$, potřebujeme ukázat, že platí

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall u, v \in W^{1,2}(0, K), \|u - v\|_{W^{1,2}(0,K)} < \delta \Rightarrow \\
&\qquad\qquad \Rightarrow \|T^{k,l}(u) - T^{k,l}(v)\|_{W^{1,2}(kK,lK)} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tato podmínka zřejmě platí, stačí volit $\delta = \varepsilon/(l-k)$ a podívat se na normu rozdílu $T^{k,l}(u) - T^{k,l}(v)$ na každém podintervalu $((i-1)K, iK)$, $i = k+1, k+2, \ldots, l$, zvlášť. Z konstrukce $T^{k,l}$ plyne, že jsou funkce $T^{k,l}(u)$, $T^{k,l}(v)$ na těchto intervalech identické nebo překlopené k funkcím u, v, a tedy norma rozdílu $T^{k,l}(u) - T^{k,l}(v)$ na každém intervalu je rovna normě rozdílu $u - v$. Dostáváme tedy

$$\|T^{k,l}(u) - T^{k,l}(v)\|_{W^{1,2}(kK,lK)} \le (l - k)\|u - v\|_{W^{1,2}(0,K)} < (l - k)\delta = \varepsilon.$$

□

Do konce kapitoly pracujme s operátorem $T^{-2,2}\colon W^{1,2}(0,L) \to W^{1,2}(-2L,2L)$.

Lemma 2.9. *Buď $u(x) \in W^{1,2}(I)$. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $u(x)$ náleží prostoru $W_n^{1,2}(I)$

(ii) $T^{-2,2}(u)(x)$ splňuje $T^{-2,2}(u)(x - \frac{2L}{n}) = T^{-2,2}(u)(x)$ pro všechna $x \in I$.

Důkaz. Dokazujme nejdříve implikaci $(i) \Rightarrow (ii)$. Buď tedy $u \in W_n^{1,2}(I)$, což znamená, že funkci u můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{nk\pi}{L}x) \quad \text{na } I,$$

kde a_k jsou pro všechna $k \in \mathbb{N}$ reálné konstanty. Ze sudosti kosinů vyplývá, že funkci $T^{-2,2}(u)$ můžeme analogicky napsat jako řadu

$$T^{-2,2}(u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{nk\pi}{L}x) \quad \text{na } (-2L,2L).$$

Odtud již plyne s pomocí 2π-periodičnosti kosinů podmínka (ii):

$$\begin{aligned} T^{-2,2}(u)(x - \frac{2L}{n}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{nk\pi}{L}x - \frac{2Lnk\pi}{Ln}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{nk\pi}{L}x) = T^{-2,2}(u)(x). \end{aligned}$$

Dokazujme obrácenou implikaci. Buď $u \in W^{1,2}(I)$ a vezměme $T^{-2,2}(u)$ její dané rozšíření. Z lemmatu 2.8 víme $T^{-2,2}(u) \in W^{1,2}(-2L,2L)$ a tudíž díky poznámce 2.4 můžeme tuto funkci napsat jako součet řady

$$T^{-2,2}(u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) \quad \text{na } (-2L,2L).$$

Z $(2L/n)$-periodičnosti této funkce pak platí rovnost:

$$T^{-2,2}(u)(x) = T^{-2,2}(u)(x - \frac{2L}{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x - \frac{2k\pi}{n}).$$

Porovnejme mezi sebou k-té členy těchto řad:

$$\begin{aligned} a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) &= a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x - \frac{2k\pi}{n}) = \\ &= a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x)\cos(\frac{2k\pi}{n}) + a_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)\sin(\frac{2k\pi}{n}). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aby se levá strana rovnala pravé, musí být sinové členy nulové. Člen $\sin(2k\pi/n)$ je nulový pro $k = np/2$, $p \in \mathbb{N}_0$, tedy pro ostatní k musí být koeficienty a_k nulové. Pro $k = n(2p+1)/2$, $p \in \mathbb{N}_0$ platí $\cos(2k\pi/n) = -1$, což pro tato k vede z (2.17) k rovnosti

$$a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) = -a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x),$$

což může být splněno pouze pokud jsou koeficienty a_k nulové. Celkem vyšlo, že koeficienty a_k jsou nenulové pro $k = np$, $p \in \mathbb{N}_0$, což jsou právě $k \in J_1$ a tedy a_k jsou nulové pro $k \in J_2$. Z toho plyne, že $T^{-2,2}(u)$ patří do prostoru $W_n^{1,2}(-2L,2L)$. Funkce u je pouze restrikcí $T^{-2,2}(u)$ na interval I, tedy funkce u náleží do prostoru $W_n^{1,2}(I)$. $\square$

Lemma 2.10. *Prostor $[W_n^{1,2}(I)]^2$ je invariantním podprostorem $[W^{1,2}(I)]^2$ vzhledem ke kompaktnímu operátoru*

$$D^{-1}([\mu, d_2^0])B([\mu, d_2^0])AU + D^{-1}([\mu, d_2^0])N(U).$$

Speciálně platí i pro operátory A a N.

Důkaz. Kompaktní operátor ve znění lemmatu si označme symbolem $\mathcal{G}(\mu, U)$. Pro libovolné $U \in [W_n^{1,2}(I)]^2$ chceme ukázat, že funkce $\mathcal{G}(\mu, U)$ je z prostoru $[W_n^{1,2}(I)]^2$. Díky poznámce 2.6 stačí ukázat pro každou složku $\mathcal{G}_j$, $j = 1,2$, operátoru $\mathcal{G}$ platnost rovnosti

$$\left\langle \mathcal{G}_j(\mu, U(x)), \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right\rangle = 0 \qquad \forall U \in [W_n^{1,2}(I)]^2,\ \forall \mu \in \mathbb{R}_+,\ \forall m \in J_2$$

neboť právě tyto kosiny tvoří bázi prostoru $Z(I)$, tj. ortogonálního doplňku $W_n^{1,2}(I)$. Rozepsáním operátoru $\mathcal{G}$ dostáváme systém ekvivalentních podmínek

$$\begin{aligned} &\left\langle \frac{b_{11}+\mu}{\mu}Au + \frac{b_{12}}{\mu}Av + \frac{1}{\mu}N_1(u,v), \cos\left(\frac{m_1\pi}{L}x\right)\right\rangle = 0 \\ &\left\langle \frac{b_{21}}{d_2^0}Au + \frac{b_{22}+d_2^0}{d_2^0}Av + \frac{1}{d_2^0}N_2(u,v), \cos\left(\frac{m_2\pi}{L}x\right)\right\rangle = 0 \end{aligned} \qquad \forall m_1, m_2 \in J_2.$$

Použitím definice operátorů A a N_j můžeme přepsat tento systém na systém

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[\frac{b_{11}+\mu}{\mu}u(x) + \frac{b_{12}}{\mu}v(x) + \frac{1}{\mu}n_1(u(x),v(x))\right]\cos\left(\frac{m_1\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0 \\ &\int_0^L \left[\frac{b_{21}}{d_2^0}u(x) + \frac{b_{22}+d_2^0}{d_2^0}v(x) + \frac{1}{d_2^0}n_2(u(x),v(x))\right]\cos\left(\frac{m_2\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \qquad \forall m_1, m_2 \in J_2.$$

Zřejmě nám stačí ověřit dvojici podmínek

$$\begin{aligned} \int_0^L u(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0 &\qquad \forall u \in W_n^{1,2}(I),\ \forall m \in J_2, \\ \int_0^L n_j(U(x))\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0 &\qquad \forall U \in [W_n^{1,2}(I)]^2,\ j = 1,2,\ \forall m \in J_2. \end{aligned}$$

První rovnost jsme již dokázali při dokazování lemmatu 2.5. Ověřme teď druhou rovnost pro $j \in \{1,2\}$ libovolné pevné. Označme symbolem $\widetilde{U}$ dvojici prodloužených funkcí $[T^{-2,2}(u), T^{-2,2}(v)]^\top$. Funkce n_j není přímo závislá na prostorové proměnné, tedy díky sudosti $\widetilde{U}$ je $n_j(\widetilde{U})$ sudá na svém definičním oboru. Pak platí

$$\int_0^L n_j(U(x))\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-L}^L n_j(\widetilde{U}(x))\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x. \tag{2.18}$$

Navíc ze sudosti $n_j(\widetilde{U})$ vyplývá i platnost

$$\int_{-L}^L n_j(\widetilde{U}(x))\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Můžeme tedy rovnost (2.18) přepsat do tvaru

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^L n_j(\widetilde{U}(x))\exp\left(\frac{im\pi}{L}x\right)\mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Funkci $\exp(im\pi x/L)$, uvažovanou na intervalu $(-L, L)$, periodicky prodlužme na interval $(-2L, 2L)$. Dále připomeňme, že podle lemmatu 2.9 platí $\widetilde{U}(x - 2L/n) = \widetilde{U}(x)$. To nás vede k užití substituce $x = z - 2L/n$ na integrál v (2.19):

$$\frac{1}{2}\int_{-L+\frac{2L}{n}}^{L+\frac{2L}{n}} n_j(\widetilde{U}(z))\exp\left(\frac{im\pi}{L}(z-\frac{2L}{n})\right)\mathrm{d}z. \tag{2.20}$$

Jelikož je integrand $2L$-periodický, můžeme posunout integrační meze do $(-L, L)$. Integrál (2.20) je pak roven

$$\frac{1}{2}\exp\left(\frac{-2m\pi i}{n}\right)\int_{-L}^{L} n_j(\widetilde{U}(z))\exp(\frac{im\pi}{L}z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.21}$$

Vzájemným odečtením výrazů (2.18) a (2.21) získáváme vztah

$$\left[1-\exp\left(\frac{-2m\pi i}{n}\right)\right]\int_{-L}^{L} n_j(\widetilde{U}(x))\exp(\frac{im\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.22}$$

Pro $m \not\equiv 0 \pmod n$ je konstanta před integrálem nenulová, musí být kvůli zachování rovnosti (2.22) integrál roven nule. Speciálně je rovna nule jeho reálná část, čímž jsme dokázali tvrzení. □

Zaveďme následující úlohu pro $U \in [W_n^{1,2}(I)]^2$:

$$\begin{aligned} &\int_I \mu\nabla u\nabla\varphi - (b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v))\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \\ &\int_I d_2^0\nabla v\nabla\varphi - (b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v))\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \qquad \forall\varphi \in W_n^{1,2}(I). \tag{2.23}$$

Dále symbolem A^n označme restrikci operátoru A na prostor $W_n^{1,2}(I)$ a symboly N_j^n pro $j = 1,2$ restrikci operátoru N_j^n na prostor $[W_n^{1,2}(I)]^2$. Z lemmatu 2.10 plyne, že obraz těchto operátorů je prostor $W_n^{1,2}(I)$. Dále se dá obdobně jako v lemmatech 1.3 a 2.1 ukázat, že operátor A^n je lineární, spojitý, kompaktní, symetrický a operátory N_j^n jsou pro $j = 1,2$ spojité, kompaktní a splňují

$$\lim_{\substack{\|u\|+\|v\|\to 0 \\ u,v\in W_n^{1,2}(I)}} \frac{\|N_j^n(u,v)\|}{\|u\| + \|v\|} = 0. \tag{2.24}$$

Systém (2.23) pak můžeme přepsat jako operátorovou rovnici v prostoru $W_n^{1,2}(I)$

$$\begin{aligned} \mu u - (b_{11}+\mu)A^n u - b_{12}A^n v - N_1^n(u,v) &= 0 \\ d_2^0 v - b_{21}A^n u - (b_{22}+d_2^0)A^n v - N_2^n(u,v) &= 0 \end{aligned}$$

a pomocí označení $N^n(U) = [N_1^n(U), N_2^n(U)]^\top$ dostat vektorový zápis

$$D([\mu, d_2^0])U - B([\mu, d_2^0])A^n U - N^n(U) = 0. \tag{2.25}$$

Tvrzení 2.11. *Buď $N = 1$ a buď $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ takové, že platí $[\mu_0, d_2^0] \in C_j \cap C_k$ pro nějaká $j > k$ přirozená a nechť platí ostatní předpoklady věty 2.2. Položme*

$$n = \begin{cases} j & \text{pro } j/k \text{ celé}, \\ j \text{ nebo } k & \text{pro } j/k \text{ necelé}. \end{cases}$$

Pak μ_0 je bifurkačním bodem úlohy (2.25).

Navíc, označíme-li množinu

$$S_n = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W_n^{1,2}(I)]^2, U \text{nenulové řešení } (2.25)\}}$$

a S_n^0 komponentu množiny S_n obsahující $[\mu_0, 0]$, je bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S_n^0 splňuje alespoň jednu ze tří podmínek z věty 2.2.

Důkaz. Ověřme předpoklady věty 2.3. Prostor $W_n^{1,2}(I)$ je uzavřeným podprostorem Hilbertova prostoru $W^{1,2}(I)$, a tedy Hilbertův prostor. Položme $H = [W_n^{1,2}(I)]^2$ a $O = \mathbb{R}^+ \times H$.

Spočítejme vlastní čísla a vlastní vektory následující úlohy v prostoru $W_n^{1,2}(I)$:

$$\begin{aligned} \int_I \mu \nabla u \nabla \varphi - (b_{11}u + b_{12}v - \lambda u)\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \\ \int_I d_2^0 \nabla v \nabla \varphi - (b_{21}u + b_{22}v - \lambda v)\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \end{aligned} \qquad \forall \varphi \in W_n^{1,2}(I). \tag{2.26}$$

Tu pomocí operátoru A^n a definice skalárního součinu přepišme do operátorové rovnice tvaru

$$D([\mu, d_2^0])U - B([\mu, d_2^0])A^n U + \lambda A^n U = 0. \tag{2.27}$$

Postupujme obdobným postupem jako v sekci 1.2. Z definice operátoru A^n plyne, že vlastní čísla operátoru A^n jsou ta vlastní čísla A, jejichž příslušné vlastní vektory leží v prostoru $W_n^{1,2}(I)$. Tedy dle (1.11) jsou vlastní vektory A^n tvaru

$$\begin{aligned} \chi &= \{u : u \text{ vlastní vektor úlohy } (1.10), u \in W_n^{1,2}(I)\} = \\ &= \left\{\cos\left(\frac{nl\pi}{L}x\right), l \in \mathbb{N}_0\right\} \end{aligned}$$

a vlastní čísla A^n tvaru

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{1}{1+\kappa} : \kappa \text{ vlastní číslo úlohy (1.10) příslušné nějakému } u \in \chi\right\} = \\ &= \left\{\frac{1}{1+\kappa_{nl}}, l \in \mathbb{N}_0\right\}. \end{aligned}$$

Pak z prostoty vlastních čísel laplaciánu v jedné prosotorové dimenzi vyplývá, že vlastní vektory χ lineárního, kompaktního, symetrického operátoru A^n tvoří úplný ortogonální systém prostoru $W_n^{1,2}(I)$. Potom lze libovolné $U \in [W_n^{1,2}(I)]^2$ zapsat ve tvaru

$$U(x) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l \cos\left(\frac{nl\pi}{L}x\right), \tag{2.28}$$

kde $F_l = [F_1^{(l)}, F_2^{(l)}]^\top \in \mathbb{R}^2$, $l \in \mathbb{N}_0$. Pak ze vztahů (2.28), (2.27), (1.11) a ortogonality prvků množiny χ dostáváme (srovnej se sekcí 1.2) ekvivalentní sadu podmínek

$$\Big(\kappa_l D(d) - B + \lambda E\Big)F_l = 0 \quad \forall l \in \mathbb{N}_0. \tag{2.29}$$

Číslo λ je vlastní číslo úlohy (2.26), právě když existuje nenulové řešení $U(x)$. A toto řešení je díky rozvoji (2.28) nenulové právě tehdy, když existuje $l \in \mathbb{N}_0$ s $F_l \neq 0$. Pro nějaké $l \in \mathbb{N}_0$ je F_l nenulové, právě když algebraická rovnice (2.29) má nenulové řešení F_l, což je právě když platí

$$\det(\kappa_l D(d) - B + \lambda E) = 0.$$

Vyjádřením kořenů $\lambda_1^{(j)}$, $\lambda_2^{(j)}$ této rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(l)} &= \frac{b_{11} + b_{22} - (\mu + d_2^0)\kappa_l + \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (\mu + d_2^0)\kappa_l]^2 - 4H_d(\kappa_l)}}{2}, \\ \lambda_2^{(l)} &= \frac{b_{11} + b_{22} - (\mu + d_2^0)\kappa_l - \sqrt{[b_{11} + b_{22} - (\mu + d_2^0)\kappa_l]^2 - 4H_d(\kappa_l)}}{2}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Vlastní vektory (2.26) jsou dvojice $U = \sum F_l \cos(nl\pi x/L)$, kde sčítáme přes všechna l, pro něž má (2.29) netriviální řešení F_l. Řešení rovnice (2.29) jsou právě všechny násobky vektoru

$$\left[1, \frac{\mu\kappa_l - b_{11} + \lambda}{b_{12}}\right].$$

Díky volbě indexu n je $[\mu_0, d_2^0]$ vzhledem k úloze (2.25) kritickým bodem násobnosti jedna[1], a tedy vlastní vektory úlohy (2.26) s $\mu = \mu_0$ příslušné vlastnímu číslu $\lambda = 0$ tvoří podprostor

$$\operatorname{span}\left\{\left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \frac{\mu\kappa_l - b_{11}}{b_{12}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\right\}. \tag{2.31}$$

Dále položme

$$\begin{aligned} T_\mu^n(U) = T^n(\mu, U) &:= D^{-1}([\mu, d_2^0])B([\mu, d_2^0])A^n U, \\ N^n(\mu, U) &:= D^{-1}([\mu, d_2^0])[N_1^n(U), N_2^n(U)]^\top. \end{aligned}$$

Předpoklady věty 2.3 kladené na operátory T^n, N^n jsou splněny, což plyne z výše uvedených vlastností operátorů A^n a N_j^n obdobně jako v důkazu věty 2.2.

Ukažme, že $\lambda = 0$ je prosté vlastní číslo operátoru $I - T_{\mu_0}^n$. Řešení rovnice $U - T_{\mu_0}^n U = 0$ jsou řešení úlohy (2.27) pro $\lambda = 0$, jehož příslušné vlastní vektory jsou tvaru (2.31), a tedy $\lambda = 0$ je geometricky prosté vlastní číslo operátoru $I - T_{\mu_0}^n$. Analogicky k důkazu věty 2.2 se ukáže, že vlastní vektory U_0^* adjungované úlohy k úloze (2.26) příslušné vlastnímu číslu $\lambda^* = 0$ jsou tvaru

$$U_0^* \in \operatorname{span}\left\{e_n, \frac{\mu_0\kappa_n - b_{11}}{b_{21}} e_n\right\}.$$

Pak z $[\mu_0, d_2^0] \in C_n$, z podmínek na matici B (P1-P3) a z faktu, že C_n leží nad asymptotou $d_2 = b_{22}/\kappa_n$ plyne

$$\begin{aligned} \langle U_0, U_0^* \rangle &= 1 + \frac{\kappa_n\mu_0 - b_{11}}{b_{12}} \frac{\kappa_n\mu_0 - b_{11}}{b_{21}} = 1 + \frac{\kappa_n\mu_0 - b_{11}}{\kappa_n d_2^0 - b_{22}} = \\ &= \frac{(\mu_0 + d_2^0)\kappa_n - (b_{11} + b_{22})}{d_2^0\kappa_n - b_{22}} > 0 \end{aligned}$$

[1]Skutečně, označíme-li $m \in \{j, k\}/\{n\}$ (tj. symbolem m označujeme ten index j nebo k, který není označen symbolem n), pak funkce $\cos(m\pi x/L)$ není vlastní funkcí operátoru A^n, a tedy $1/(1 + \kappa_m)$ není vlastním číslem operátoru A^n. Z toho plyne, že $[\mu_0, d_2^0]$ je vzhledem k úloze (2.25) kritickým bodem násobnosti jedna.

a $\lambda = 0$ je tedy algebraicky prosté vlastní číslo.

Vlastní čísla operátoru $I - T^n_{\mu_0}$ se spočítají stejně jako v důkazu věty 2.2 s tím, že uvažujeme κ_l pouze pro $l \equiv 0 \pmod n$. Tímto postupem dostaneme, že λ jsou kořeny rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= [\mu_0\kappa_l - \mu_0(1+\kappa_l)\lambda - b_{11}][d_2^0\kappa_l - d_2^0(1+\kappa_l)\lambda - b_{22}] - b_{12}b_{21} = \\ &= \mu_0 d_2^0(1+\kappa_l)^2\lambda^2 - [\mu_0(d_2^0\kappa_l - b_{22}) + d_2^0(\mu_0\kappa_l - b_{11})](1+\kappa_l)\lambda + H_d(\kappa_l), \end{aligned} \tag{2.32}$$

kde symbol $H_d(\kappa_l)$, zavedený v sekci 1.2, značí:

$$H_d(\kappa_l) = (\kappa_l\mu_0 - b_{11})(\kappa_l d_2^0 - b_{22}) - b_{12}b_{21}.$$

Z tvrzení 1.4 a volby indexu n pak plyne, že n-té vlastní číslo $\lambda_1^{(n)}$ je nulové právě na hyperbolách C_n, je kladné vpravo od C_n a záporné vlevo od C_n. Jelikož předpokládáme $[\mu_0, d_2^0] \in C_n$, leží body $[\mu_0 + \varepsilon, d_2^0]$ a $[\mu_0 - \varepsilon, d_2^0]$ na opačných stranách od C_n, a tedy dohromady dostáváme, že podmínka (2.9) je splněna.

Buď nyní S^0 množina z tvrzení věty 2.3. Zřejmě tato množina splňuje i vlastnosti z tvrzení 2.11. Tím je důkaz dokončen.

□

Poznámka 2.12. Poznamenejme, proč není ve znění tvrzení voleno rovnou $k = j$, což zřejmě k existenci bifurkační větve postačuje. Výše uvedená formulace je totiž silnější, neboť v případě neceléého čísla j/l dostaneme dle této věty existenci dokonce dvou bifurkačních větví S_j^0 a S_l^0.

Věta 2.13. *Nechť $N = 1$ a přepokládejme, že jsou splněny podmínky* (P1-P3) *kladené na matici B. Buď d_2^0 pevná kladná konstanta. Mějme libovolné μ_0 takové, že $[\mu_0, d_2^0]$ leží v průniku dvou hyperbol C_l a C_n pro nějaká $l, n \in \mathbb{N}$, $l > n$. Předpokládejme, že jsou pro $i = 1, 2$ splněny podmínky* (2.7).

Pak je μ_0 bifurkační bod úlohy (2.6). *Navíc je bifurkační bod μ_0 globální ve smyslu věty 2.2.*

Důkaz. Z tvrzení 2.11 dostáváme existenci globální bifurkační větve S_n^0 v prostoru $\mathbb{R}_+ \times [W_n^{1,2}(I)]^2$. O ní potřebujeme ukázat, že je globální bifurkační větví i vzhledem k prostoru $\mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(I)]^2$. Zřejmě platí, že prostor $\mathbb{R}_+ \times [W_n^{1,2}(I)]^2$ je podprostorem $\mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(I)]^2$, zbývá tedy ukázat, že pro každou dvojici $[\mu, U] \in S_n^0$ je U řešením rovnice (2.6) uvažované na prostoru $[W^{1,2}(I)]^2$, tedy že U splňuje

$$\langle U - T(\mu, U) - N(\mu, U), \Phi\rangle_\sim = 0 \quad \forall \Phi \in [W^{1,2}(I)]^2. \tag{2.33}$$

Z lemmatu 2.5 víme, že můžeme každou složku funkce $\Phi = [\varphi^1, \varphi^2]$ napsat jako součet $\varphi^j = \varphi_1^j + \varphi_2^j$, kde φ_1^j je funkce z $W_n^{1,2}(I)$ a φ_2^j je z prostoru $Z(I)$ pro $j = 1, 2$. Úlohu (2.33) můžeme ekvivalentně zapsat jako úlohu

$$\begin{aligned} \langle U - T(\mu, U) - N(\mu, U), \Phi_1\rangle_\sim + \langle U - T(\mu, U) - N(\mu, U), \Phi_2\rangle_\sim = 0 \\ \forall \Phi_1 \in [W_n^{1,2}(I)]^2,\ \forall \Phi_2 \in [Z(I)]^2. \end{aligned}$$

První skalární součin je roven nule, neboť U je podle předpokladu řešením úlohy (2.25). Druhý skalární součin je roven nule díky ortogonalitě prostorů $W_n^{1,2}(I)$ a $Z(I)$ dle lemmatu 2.5, jelikož $U - T(\mu, U) - N(\mu, U)$ leží dle lemmatu 2.10 v prostoru $[W_n^{1,2}(I)]^2$ a Φ_2 v prostoru $Z(I)$ dle předpokladu. Funkce U je tedy řešením (2.33) a tvrzení je dokázáno. □

Poznámka 2.14. V návaznosti na poznámku 2.12 zmiňme, že ani v případě necelého čísla j/l nemůžeme očekávat, že najdeme všechny prvky množiny S^0; sjednocení množin S_l^0 a S_j^0 tvoří obecně pouze (ne nutně vlastní) podmnožinu S^0.

3. Nekompaktnost bifurkační větve

V této kapitole se budeme zabývat kompaktností bifurkační větve. Nejdříve ukážeme, že v obecné prostorové dimenzi je množina S z věty 2.2 lokálně kompaktní. Poté dáme do souvislosti kompaktnost a omezenost s podmínkami *(S1)*, *(S2)*, *(S3)* z věty 2.2. Nakonec dokážeme, že v případě jedné prostorové dimenzi je bifurkační větev S^0 nekompaktní.

Definice. Řekneme, že množina je lokálně kompaktní, jestliže je její každá uzavřená omezená podmmnožina kompaktní.

Tvrzení 3.1. *Množina S z věty 2.2 je lokálně kompaktní. Speciálně je lokálně kompaktní i bifurkační větev S^0.*

Důkaz. Vezměme M libovolnou uzavřenou omezenou podmnožinu S a vezměme libovolnou posloupnost $\{[\mu_n, U_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ prvků z M. Posloupnost $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená posloupnost čísel, tedy existuje vybraná podposloupnost $\{\mu_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergující k prvku $\mu \in \mathbb{R}_+$ (Skutečně $\mu \neq 0$, neboť množina M je uzavřenou podmnožinou $\mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2$.). Z reflexivity kartézského součinu $[W^{1,2}(\Omega)]^2$ existuje vybraná podposloupnost $\{U_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ slabě konvergující k prvku $U \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$. Celkem tedy máme existenci vybrané podposloupnosti $\{[\mu_{n_k}, U_{n_k}]\}_{k\in\mathbb{N}}$ slabě konvergující k prvku $[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2$. Body $[\mu_n, U_n]$ splňují (pro U_n nenulová plyne z definice S, pro $U_n = 0$ platí zřejmě)

$$U_n - D^{-1}([\mu_n, d_2^0])B([\mu_n, d_2^0])AU_n - D^{-1}([\mu_n, d_2^0])N(U_n) = 0. \tag{3.1}$$

Víme, že N je kompaktní operátor, tedy existuje vybraná podposloupnost $\{U_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (značená stejně) konvergující silně k prvku $\widetilde{N} \in [W^{1,2}(\Omega)]^2$. Dále A je kompaktní a lineární, tedy opět existuje vybraná podposloupnost $\{U_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ (značená stejně) konvergující silně k prvku AU. Jelikož jsou obě konvergence silné, plyne z rovnosti (3.1) silná konvergence $\{U_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ k prvku U.

Množina S je uzavřená v prostoru $\mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2$, tedy $[\mu, U]$ do ní náleží. Množinu M jsme brali uzavřenou v S, tedy $[\mu, U] \in M$ a M je kompaktní. ◻

Tvrzení 3.2. *Bifurkační větev S^0 definovaná ve větě 2.2 splňuje následující ekvivalence:*

(i) S^0 splňuje (S2)*, právě když je neomezená.*

(ii) S^0 splňuje (S2) *nebo* (S3)*, právě když je nekompaktní.*

Speciálně platí, že je-li S^0 kompaktní, splňuje podmínku (S1).

Důkaz. (i) Platí-li podmínka *(S2)*, je množina S^0 zřejmě neomezená. Naopak, je-li S^0 neomezená, musí existovat posloupnost $\{[\mu_n, U_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \in S^0$ taková, že $\mu_n \to \infty$ nebo $\|U_n\| \to \infty$, což je ekvivalentní s podmínkou *(S2)*.

(ii) Platí-li *(S2)*, je dle (i) množina S^0 neomezená, a tedy nekompaktní. Platí-li *(S3)* a existovala by vybraná konvergentní podposloupnost této posloupnosti, musela by jít k bodu $[0, U]$, což ale není prvek S^0 a tato množina tedy není kompaktní.

Naopak, předpokládejme, že je S^0 nekompaktní. Z tvrzení 3.1 víme, že S^0 je lokálně kompaktní. Aby tedy byla zároveň nekompaktní, musí být S^0 buď neomezená, a tedy platí podmínka *(S2)*, nebo neuzavřená, a tedy platí podmínka *(S3)*.

Je-li S^0 kompaktní, dle předchozí části tohoto tvrzení nenastanou podmínky *(S2)* ani *(S3)* a tedy dle definice S^0 ve větě 2.2 musí být splněna podmínka *(S1)*. □

Nadále uvažme, že dimenze prostorové proměnné je jedna. V dalším textu budeme uvažovat různé úlohy (2.3) v závislosti na velikosti intervalu I. Proto ke každému označení úlohy (2.3) bude připsán interval, na kterém se úloha uvažuje (tj. který se dosadí za množinu Ω). Dále pro přehlednost přidejme označení závislosti na délce intervalu některých, dříve zavedených pojmů:

Značení.
- $\kappa_j(L)$ je j-té vlastní číslo laplaciánu s Neumannovou okrajovou podmínkou na intervalu $(0, L)$,
- $C_j(L) = \left\{[d_1, d_2] \in \mathbb{R}^2_+, d_2 = \frac{1}{\kappa_j(L)}\left(\frac{b_{12}b_{21}}{d_1\kappa_j(L) - b_{11}} + b_{22}\right)\right\}$,
- $S(L) = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(I)]^2, U \text{ nenulové řešení (2.3) na } I = (0, L)\}}$,
- $S^0(L)$ komponenta množiny $S(L)$ obsahující bod $[\mu_0, 0]$.

Dále zaveďme označení

$$d_j(L) : [d_j(L), d_2^0] \in C_j(L), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Poznamenejme, že každý bifurkační bod μ se dá zapsat symbolem $d_j(L)$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$, neboť z sekce 1.3 víme, že každý bod $[\mu, d_2^0]$ leží na hyperbole C_j pro nějaké $j \in \mathbb{N}$.

Před větou o nekompaktnosti bifurkační větve v jedné prostorové dimenzi prezentujme dvě pomocná lemmata:

Lemma 3.3. *Vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné a mějme řešení $U = [u, v] \in [W^{1,2}(0, L/k)]^2$ splňující* (2.3) *na intervalu $(0, L/k)$. Pak funkce $T^{0,k}(U) = [T^{0,k}(u), T^{0,k}(v)]$ je řešením rovnice* (2.3) *na intervalu $(0, L)$*[1]*.*

Důkaz. Z lemmatu 2.8 vyplývá $T^{0,k}(U) \in W^{1,2}(0, L)$. Zbývá tedy ukázat, že $T^{0,k}(U)$ splňuje rovnici (2.3) na intervalu I. Ověřme, že U řeší první rovnici, důkaz pro druhou je stejný.

[1]Operátor $T^{0,k}$ je definován před lemmatem 2.8.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme $k = 2$, úvahy a výpočty jsou pro obecné k stejné. Pro libovolné $\varphi \in W^{1,2}(I)$ počítejme:

$$\mu \int_0^L [T^{0,2}u]'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^L f(T^{0,2}u(x), T^{0,2}v(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \underbrace{\mu \int_0^{L/2} u'(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{L/2} f(u(x),v(x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} +$$
$$+ \underbrace{\mu \int_{L/2}^{L} u'(L-x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_{L/2}^{L} f(u(L-x),v(L-x))\varphi(x)\,\mathrm{d}x}_{=:J_5}.$$

Součet prvních dvou integrálů na pravé straně je roven 0, neboť u je řešením rovnice (2.3) na intervalu $(0, L/2)$. V druhých dvou integrálech (součet označme symbolem J_5) proveďme substituci $y = L - x$:

$$J_5 = -\mu \int_0^{L/2} u'(y)\varphi'(L-y)\,\mathrm{d}y + \int_0^{L/2} f(u(y),v(y))\varphi(L-y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall \varphi \in W^{1,2}(0,L). \tag{3.2}$$

Položme $\psi(y) = \varphi(L-y)$. Jelikož je testovací funkce φ z prostoru $W^{1,2}(0,L)$, je zřejmě funkce ψ z prostoru $W^{1,2}(0,L)$. Pak je (3.2) ekvivalentní s tím, že

$$J_5 = -\mu \int_0^{L/2} u'(y)\psi'(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^{L/2} f(u(y),v(y))\psi(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall \psi \in W^{1,2}(0,L),$$

což je rovno 0, neboť u je řešením rovnice (2.3) na intervalu $(0, L/2)$. □

Lemma 3.4. *Pro každé $j \in \mathbb{N}$ platí*

$$C_j(L) = C_1\left(\frac{L}{j}\right).$$

Důkaz. Důkaz vychází z explicitního vyjádření vlastních čísel Laplaciánu, které pro případ jednodimenzionální prostorové proměnné známe (viz [3]):

$$\kappa_j(L) = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \qquad j = 0, 1, \dots .$$

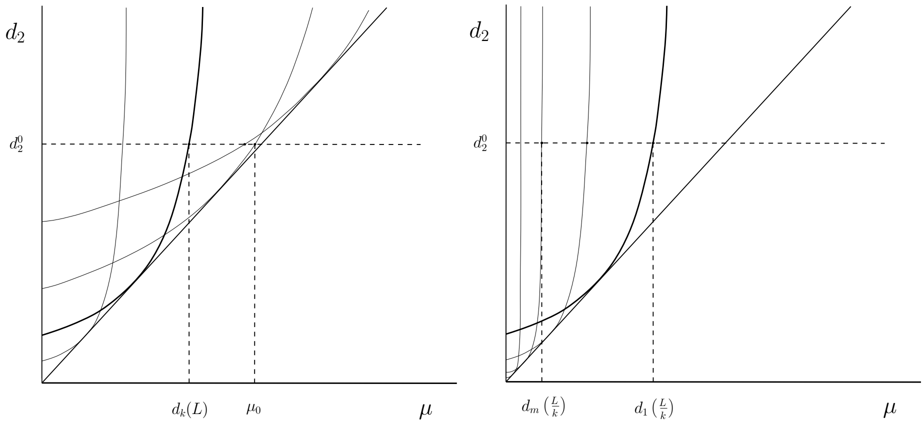
Tedy platí rovnost

$$\kappa_j(L) = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\frac{L}{j}}\right)^2 = \kappa_1\left(\frac{L}{j}\right) \qquad j = 1, 2, \dots .$$

Tvrzení pak plyne z definice hyperbol $C_j(L)$

$$C_j(L) = \left\{[d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2 \colon d_2 = \frac{1}{\kappa_j(L)}\left(\frac{b_{12}b_{21}}{d_1\kappa_j(L) - b_{11}} + b_{22}\right)\right\} =$$
$$= \left\{[d_1, d_2] \in \mathbb{R}_+^2 \colon d_2 = \frac{1}{\kappa_1(\frac{L}{j})}\left(\frac{b_{12}b_{21}}{d_1\kappa_1(\frac{L}{j}) - b_{11}} + b_{22}\right)\right\} =$$
$$= C_1\left(\frac{L}{j}\right) \qquad j = 1, 2 \dots$$

□



Obrázek 3.1: Ilustrace postupu důkazu. Graf na levé straně patří úloze na intervalu $(0, L)$, graf na pravé straně úloze na intervalu $(0, L/k)$.

Věta 3.5. *Bifurkační větev S^0 z věty 2.2, respektive z věty 2.13, je v případě jedné prostorové dimenze nekompaktní.*

Důkaz. Připomeňme nejdříve, že pro bifurkační bod μ_0 dle předpokladu věty 2.2 platí, že $[\mu_0, 0]$ leží na j-té hyperbole, tedy $d_j(L) = \mu_0$.

Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že $S^0(L)$ je kompaktní. Hyperboly C_j se s rostoucímu j přibližují k přímce $\mu = 0$ (srovnej se sekcí 1.3), tedy speciálně platí (1.20). Díky předpokladu kompaktnosti S^0 a tvrzení 3.2 existuje konečný index n_0 takový, že pro každé $n > n_0$ bod $[d_n(L), 0]$ neleží v S^0. Díky tomu je množina

$$\{n \in \mathbb{N} : [d_n(L), 0] \in S^0(L)\}$$

konečná a můžeme vzít maximum této množiny, které označíme k. Podle lemmatu 3.4 platí:

$$d_k(L) \in C_k(L) = C_1\left(\frac{L}{k}\right) \Rightarrow d_k(L) = d_1\left(\frac{L}{k}\right).$$

Tedy $d_k(L)$ je takové číslo, že $[d_k(L), d_2^0] = [d_1(L/k), d_2^0]$ leží na první hyperbole úlohy (2.3) uvažované na intervalu $(0, L/k)$ (viz obr. (3.1)). Chceme ukázat, že bod $d_1(L/k)$ je globálním bifurkačním bodem úlohy (2.3) na intervalu $(0, L/k)$.

Připomeňme, že každé vlastní číslo laplaciánu je v případě jednodimenzionální prostorové proměnné prosté, a tedy jsou všechny hyperboly navzájem různé. Použitím věty 2.2 nebo věty 2.13 pak dostáváme existenci globální bifurkační větve $S^0(L/k)$, tj. komponenty množiny

$$S\left(\frac{L}{k}\right) = \overline{\left\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times \left[W^{1,2}\left(0, \frac{L}{k}\right)\right]^2, U \text{ nenulové řešení (2.3)}\right\}}$$

obsahující $[d_1(L/k), 0]$. Mohou nastat dva případy, buď bifurkační větev $S^0(L/k)$ je kompaktní nebo nekompaktní.

Předpokládejme nejdříve, že je nekompaktní. Pak dle lemmatu 3.3 platí:

$$[\mu, U] \in S\left(\frac{L}{k}\right) \Rightarrow [\mu, T^{0,k}(U)] \subset S(L). \tag{3.3}$$

Navíc víme z lemmatu 2.8, že operátor $T^{0,k}$ je spojitý, a tedy zobrazuje souvislé množiny na souvislé. Proto, vezmeme-li obraz množiny $S^0(L/k)$, tj. množinu

$$\widetilde{S}^0 = \left\{[\mu, T^{0,k}(U)] : [\mu, U] \in S^0(L/k)\right\},$$

je množina $\widetilde{S}^0$ souvislá a díky (3.3) je souvislou podmnožinou $S(L)$ obsahující bod $[\mu_0, 0]$, a tedy souvislou podmnožinou $S^0(L)$, tj.

$$\widetilde{S}^0 \subset S^0(L). \tag{3.4}$$

To ale vede ke sporu s předpokladem, že $S^0(L)$ je kompaktní.

$S^0(L/k)$ je tedy kompaktní. Z toho (srovnej se začátkem důkazu) vyplývá, že množina

$$\left\{n \in \mathbb{N}: \left[d_n\left(\frac{L}{k}\right), 0\right] \in S^0\left(\frac{L}{k}\right)\right\}$$

je omezená a můžeme vzít maximum m této množiny. Navíc z tvrzení 3.2 dostáváme, že $S^0(L/k)$ splňuje podmínku *(S1)*, tedy musí být $m > 1$. Z lemmatu 3.4 dostáváme rovnost

$$d_m\left(\frac{L}{k}\right) = d_1\left(\frac{L}{km}\right) = d_{km}(L).$$

Tedy $d_m(L/k)$ je takové číslo, že $[d_m(L/k), d_2^0] = [d_{km}(L), d_2^0]$ leží na km-té hyperbole úlohy (2.3) uvažované na intervalu $(0, L)$ a použitím věty 2.2, respektive věty 2.13, opět dostáváme, že $d_{km}(L)$ je bifurkačním bodem úlohy (2.3) na intervalu $(0, L)$. Navíc z (3.4) plyne $[d_{km}(L), 0] \in S^0(L)$, čímž dostáváme spor s maximalitou indexu k.

$\square$

4. Apriorní odhady Thomasova modelu

V této kapitole se budeme zabývat apriorními odhady řešení Thomasova modelu, což je systém typu reakce-difuze tvaru:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1\Delta u + a - u - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} \\ v_t &= d_2\Delta v + \alpha(b-v) - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2}, \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde a, b, α, ϱ, k jsou kladné konstanty. Tento model vychází z experimentálních dat, popisuje specifickou reakci kyslíku (v) a kyseliny močové (u) za přítomnosti enzymu urikázy. Model je čerpán z [9] a z [11].

My se zajímáme o stacionární, prostorově nekonstantní řešení, tedy o řešení stacionární úlohy

$$\begin{aligned} d_1\Delta u + a - u - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} &= 0 \\ d_2\Delta v + \alpha(b-v) - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} &= 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Nejdříve ukážeme, že každé slabé řešení systému (4.2) je za vhodných dodatečných předpokladů klasickým řešením (4.2). Díky tomu budeme moci dále postupovat jako v článku [17], ve kterém autoři zkoumali klasická řešení Lengyel Epsteinova modelu.

Pokud budeme mluvit o konstantách a řekneme, že závisí pouze na pevných datech úlohy, myslíme tím, že závisí na parametrech a, b, α, ϱ, k, d_2, Ω. Případné další závislosti budou explicitně zmíněny.

Nadále zaveďme označení:

$$\begin{aligned} f(u,v) &= a - u - \varrho R(u,v), \\ g(u,v) &= \alpha(b-v) - \varrho R(u,v), \end{aligned} \qquad R(u,v) = \frac{uv}{1+u+ku^2}.$$

4.1 Regularita řešení

Připomeňme, že U je klasickým řešením úlohy (4.2), pokud je z prostoru $[\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})]^2$, řeší rovnici (4.2) bodově a splňuje okrajové podmínky. Předpokládejme, že U je slabé řešení úlohy (4.2) a nalezněme podmínky zaručující náležení u do Hölderova prostoru $\mathcal{C}^{2,\gamma}$ pro vhodné $\gamma \in (0,1)$. Pro názornost dokažme případ $N < 4$.

Tvrzení 4.1. *Buď $N = 1, 2, 3$. V případě $N = 2$ nebo $N = 3$ předpokládejme navíc $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{2,1}$. Pak je každé slabé řešení úlohy* (4.2) *jejím klasickým řešením.*

Důkaz. Mějme $u, v \in W^{1,2}(\Omega)$ slabé řešení úlohy (4.2). Z věty o vnoření (tvrzení 6.6) plyne $u, v \in L^{q_1}$, kde

$$q_1 \begin{cases} = \infty & \text{pro } N = 1, \\ \in [1, \infty) & \text{pro } N = 2, \\ = \frac{2N}{N-2} & \text{pro } N > 2. \end{cases}$$

Pak z odhadů funkcí $f(u, v)$, $g(u, v)$:

$$|f(u,v)| = \left| a - u - \varrho \underbrace{\frac{u}{1 + u + ku^2}}_{\leq 1} v \right| \leq C(1 + u + v),$$

$$|g(u,v)| = \left| \alpha(b - v) - \varrho \frac{u}{1 + u + ku^2} v \right| \leq C(1 + v)$$

plyne, že $f(u, v), g(u, v)$ jsou také z prostoru L^{q_1}. Z regularity eliptické rovnice pak platí

$$u, v \in W^{2,q_1}(\Omega). \tag{4.3}$$

Postup opakujme. Z (4.3) a tvrzení 6.6 máme[1]

$$\partial_i u, \partial_i v \in W^{1,q_1} \hookrightarrow \begin{cases} \mathcal{C}^{0,q_2}(\Omega), q_2 \in [0, 1] & \text{pro } N = 1, \\ \mathcal{C}^{0,q_2}(\Omega), q_2 \in [0, 1) & \text{pro } N = 2, \\ \mathcal{C}^{0,q_2}(\Omega), q_2 \in [0, 1/2) & \text{pro } N = 3, \end{cases}$$

a také

$$u, v \in W^{2,q_1} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,q_3}(\Omega), q_3 \in [0, 1] \quad \text{pro } N < 4.$$

Odhadujme teď derivaci funkce $f(u, v)$:

$$\begin{aligned} |\partial_i f(u,v)| &= \left| -\partial_i u - \varrho \frac{(v\partial_i u + u\partial_i v)(1 + u + ku^2) - uv(1 + 2ku)\partial_i u}{(1 + u + ku^2)^2} \right| = \\ &= \left| -\partial_i u - \varrho \frac{1}{1 + u + ku^2} v\partial_i u + \varrho \frac{u}{1 + u + ku^2} \partial_i v - \varrho \frac{(1 + 2ku)u}{(1 + u + ku^2}^2 v\partial_i u \right| \leq \\ &\leq C(|\partial_i u| + |v||\partial_i u| + |\partial_i v|). \end{aligned}$$

Víme, že součin dvou Hölderovských funkcí je opět Hölderovská funkce s menším indexem (viz [7]), a tedy z přechozích výsledků plyne

$$|v||\partial_i u| \in \mathcal{C}^{0,q_4}(\overline{\Omega}),$$

kde

$$q_4 \in \begin{cases} [0, 1] & \text{pro } N = 1, \\ [0, 1) & \text{pro } N = 2, \\ [0, 1/2) & \text{pro } N = 3. \end{cases}$$

Ostatní členy odhadu funkce $f(u, v)$ náleží do lepších prostorů, proto dostáváme, že $f(u, v) \in \mathcal{C}^{0,q_4}(\Omega)$. Stejně se dokáže $g(u, v) \in \mathcal{C}^{0,q_4}(\Omega)$. Z regularity eliptické rovnice dostáváme $u, v \in \mathcal{C}^{2,q_4}(\overline{\Omega})$, a tedy pro $N = 1, 2, 3$ jsme dokázali tvrzení. $\square$

Pro případy $N > 3$ bychom tento postup dále opakovali, až bychom potřebnou regularitu získali.

---

[1]Symbolem ∂_i označujeme slsabou derivaci dle i-té složky prostorové proměnné.

4.2 Pomocné odhady

Berme na vědomí, že díky tvrzení 4.1 je každé slabé řešení (4.2) zároveň řešením klasickým. Odhadněme řešení u, v pomocí následujícího důsledku principu maxima pocházejícího z článku [13]:

Tvrzení 4.2. *Buď $F(x,w) \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Pokud $w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ splňuje*

$$\Delta w(x) + F(x, w(x)) \geq 0 \ v\ \Omega, \frac{\partial w}{\partial n} \leq 0 \ na\ \partial\Omega \tag{4.4}$$

a $w(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} w$, pak je $F(x_0, w(x_0)) \geq 0$. Podobně, pokud jsou nerovnosti v (4.4) obrácené a $w(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} w$, pak je $F(x_0, w(x_0)) \leq 0$.

Lemma 4.3. *Kladná řešení (u,v) systému (4.2) splňují*

$$\frac{a}{1+\varrho b} \leq u \leq a, \qquad \frac{\alpha b}{\alpha + \varrho a} \leq v \leq b \quad na\ \overline{\Omega}.$$

Důkaz. Nechť funkce u nabývá v bodě x^* svého maxima přes množinu $\overline{\Omega}$. Pak dle tvrzení 4.2 platí

$$a - u(x^*) - \frac{\varrho u(x^*) v(x^*)}{1 + u(x^*) + k[u(x^*)]^2} \geq 0,$$

z čehož ihned dostáváme

$$u(x) \leq u(x^*) \leq a \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Analogicky, nechť funkce v nabývá v bodě y^* svého maxima přes množinu $\overline{\Omega}$, pak dostáváme

$$v(x) \leq v(y^*) \leq b \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Naopak, předpokládejme teď, že funkce u nabývá v bodě x^* svého minima přes množinu $\overline{\Omega}$. Pak dle tvrzení 4.2 platí

$$a - u(x^*) - \frac{\varrho u(x^*) v(x^*)}{1 + u(x^*) + k[u(x^*)]^2} \leq 0.$$

Jmenovatel je ostře větší než jedna, tedy platí

$$a - u(x^*) - \varrho u(x^*) v(x^*) < 0,$$

z čehož užitím výše odvozeného horního odhadu funkce v dostaneme

$$\frac{a}{1+\varrho b} < u(x^*) \leq u(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Opět provedeme analogicky pro funkci v, nechť nabývá v bodě y^* svého minima přes množinu $\overline{\Omega}$. Pak dle tvrzení 4.2 a užitím výše odvozeného horního odhadu funkce u dostaneme postupně

$$\begin{aligned} \alpha b - \alpha v(y^*) - \frac{\varrho u(y^*) v(y^*)}{1 + u(y^*) + k[u(y^*)]^2} &\leq 0, \\ \alpha b - \alpha v(y^*) - \varrho u(y^*) v(y^*) &< 0, \\ \frac{\alpha b}{\alpha + \varrho a} &< v(y^*) \leq v(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

$\square$

Definice. Pro kladná řešení (u, v) systému (4.2) definujeme průměry

$$\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \bar{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemma 4.4. *Kladná řešení* (u, v) *systému* (4.2) *splňují*

$$a - \alpha b = \bar{u} - \alpha \bar{v}. \tag{4.5}$$

Důkaz. Položme

$$w = d_2 v - d_1 u \tag{4.6}$$

a počítejme:

$$\begin{aligned}\Delta w = d_2 \Delta v - d_1 \Delta u &= -\alpha b + \alpha v + \varrho \frac{uv}{1 + u + ku^2} + a - u - \varrho \frac{uv}{1 + u + ku^2} = \\ &= a - \alpha b + \alpha v - u \end{aligned} \tag{4.7}$$

Integrací přes množinu Ω, užitím Gauss-Greenovy věty a využitím Neumannovy okrajové podmínky dostáváme

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} = \int_\Omega \Delta w \,\mathrm{d}x = \int_\Omega a - \alpha b + \alpha v - u \,\mathrm{d}x,$$

z čehož po vydělení rovnice mírou množiny Ω dostaneme rovnost (4.5). □

Definice. Označme odchylky řešení od jejich průměrů

$$\phi = u - \bar{u}, \qquad \psi = v - \bar{v}.$$

Poznámka 4.5. Zřejmě pro všechna kladná řešení (u, v) úlohy (4.2) platí následující pozorování o právě zavedených pojmech. Tyto vztahy budeme nadále v důkazech mlčky využívat.

(i) $\nabla u = \nabla u - \nabla \bar{u} = \nabla \phi, \qquad \nabla v = \nabla \psi,$

(ii) $\Delta u = \Delta u - \Delta \bar{u} = \Delta \phi, \qquad \Delta v = \Delta \psi$

(iii) $\int_\Omega \phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi \,\mathrm{d}x = 0,$

(iv) $\int_\Omega u\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega u\psi - \bar{u} \int_\Omega \psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega v\phi \,\mathrm{d}x,$

(v) $\int_\Omega u\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x, \qquad \int_\Omega v\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x.$

Lemma 4.6. *Nechť* (u, v) *je řešení* (4.2) *a* w *funkce definovaná vztahem* (4.6). *Pak*

$$\int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_2 + \alpha d_1} \left[\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x + d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x \right], \tag{4.8}$$

$$\int_\Omega \nabla\phi \nabla\psi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_1} \left[d_2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x + \alpha \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x \right], \tag{4.9}$$

$$\int_\Omega \nabla\phi \nabla\psi \,\mathrm{d}x = \frac{1}{d_2} \left[d_1 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x \right]. \tag{4.10}$$

Speciálně, pokud je (u, v) *nekonstantní v obou složkách, platí*

$$\int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x > 0.$$

Důkaz. Z rovnosti (4.5) a (4.7) dostáváme

$$\Delta w = a - \alpha b + \alpha v - u = \bar{u} - \alpha\bar{v} + \alpha v - u = \alpha\psi - \phi. \tag{4.11}$$

Z Gauss-Greenovy věty, rovnosti (4.11) a (4.6) plyne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta w) w \,\mathrm{d}x = \int_\Omega (\phi - \alpha\psi)(d_2 v - d_1 u)\,\mathrm{d}x = \\ = d_2 \int_\Omega v\phi \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega u\phi \,\mathrm{d}x - \alpha d_2 \int_\Omega v\psi \,\mathrm{d}x + \alpha d_1 \int_\Omega u\psi \,\mathrm{d}x = \\ = (d_2 + \alpha d_1) \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x - \alpha d_2 \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Z rovnosti levé a pravé strany dostáváme (4.8). Pro důkaz druhé rovnosti počítejme výraz $\int_\Omega \nabla w \nabla \psi$ dvěma způsoby, použitím rovností (4.6) a (4.11):

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla w \nabla\psi \,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega \nabla v \nabla\psi \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla\psi \,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi \,\mathrm{d}x, \\ &\int_\Omega \nabla w \nabla\psi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta w)\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Porovnáním obou rovností dostáváme rovnost (4.9). Obdobným způsobem počítejme výraz $\int_\Omega \nabla w \nabla\phi \,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \nabla w \nabla\phi \,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega \nabla v \nabla\phi \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega \nabla u \nabla\phi \,\mathrm{d}x = d_2 \int_\Omega \nabla\phi\nabla\psi \,\mathrm{d}x - d_1 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x, \\ &\int_\Omega \nabla w \nabla\phi \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega (\Delta w)\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\phi|^2 \,\mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Porovnáním obou rovností dostáváme i třetí rovnost (4.10). ☐

Tvrzení 4.7. *Buď (u, v) kladné řešení (4.2). Pak platí*

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x < \left(\frac{d_2^2}{d_1^2} + \frac{\alpha^2}{2\kappa_1 d_1}\right) \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x, \tag{4.12}$$

kde κ_1 je první kladné vlastní číslo laplaciánu uvažovaného na oblasti Ω s Neumannovými okrajovými podmínkami (viz sekce 1.2).

Důkaz. Z rovností (4.6) a (4.10) plyne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |d_2 \nabla v - d_1 \nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = \\ = d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1 d_2 \int_\Omega \nabla\psi\nabla\phi \,\mathrm{d}x + d_1^2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x = \\ = d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1^2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \\ + 2\alpha d_1 \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x + d_1^2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x = \\ = d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - d_1^2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + 2\alpha d_1 \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Z toho dostáváme následující nerovnost, na kterou dále aplikujeme postupně Cauchyovu nerovnost

$$\int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x \le \varepsilon \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x$$

pro ε kladné (viz [7, kap 7.1]), a Poincaréovu nerovnost

$$\int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{\kappa_1} \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x$$

(srovnej s [17, kap 3]):

$$\begin{aligned}
d_1^2 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x &= d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + 2\alpha d_1 \int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x \\
&\le d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x - 2d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + 2d_1 \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \frac{2\alpha^2 d_1}{4} \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x \\
&= d_2^2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\alpha^2 d_1}{2} \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x \\
&\le \left(d_2^2 + \frac{\alpha^2 d_1}{2\kappa_1} \right) \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

což je ekvivalentní s nerovností (4.12). □

4.3 Odhad $W^{1,2}$-normy řešení

Uvedeme zde dva odhady normy řešení v závislosti na parametru d_1; první vychází přímočaře z rovnic, druhý využívá výsledků předchozí sekce. Liší se v odhadu normy u, první odhad je silnější pro $d_1 < 1$, druhý pro $d_1 > 1$.

Tvrzení 4.8. *Existují konstanty C_1, C_2 závislé pouze na pevných datech úlohy takové, že pro všechna kladná řešení (u, v) systému (4.2) platí:*

$$\|u\| \le \frac{C_1}{d_1}, \qquad \|v\| \le C_2.$$

Důkaz. Odhady L^2 normy řešení u, v zřejmě plynou z apriorních odhadů v lemmatu 4.3. Odhady L^2 normy gradientu řešení pak vychází z rovnice a lemmatu 4.3. Skutečně:

$$\begin{aligned}
d_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x &= -d_1 \int_\Omega (\Delta u) u \,\mathrm{d}x = \int_\Omega au \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x - \varrho \int_\Omega \frac{u^2 v}{1 + u + ku^2} \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int_\Omega au \,\mathrm{d}x \le a^2 |\Omega|, \\
d_2 \int_\Omega |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x &= -d_2 \int_\Omega (\Delta v) v \,\mathrm{d}x = \alpha \int_\Omega bv \,\mathrm{d}x - \alpha \int_\Omega v^2 \,\mathrm{d}x - \varrho \int_\Omega \frac{uv^2}{1 + u + ku^2} \,\mathrm{d}x \le \\
&\le \int_\Omega \alpha bv \,\mathrm{d}x \le \alpha b^2 |\Omega|.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.9. *Existují konstanty C_f, C_g závisející pouze na pevných datech úlohy splňující*

$$\int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \le C_f d_1^{-2},$$

$$\int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le C_g.$$

Důkaz. Uvědomme si nejdříve, že odhady z lemmatu 4.3 nám dávají existenci kladných konstant c_f a c_g závislých na datech úlohy takových, že platí

$$|f(u,v)| \le c_f, \quad |g(u,v)| \le c_g.$$

Skutečně,

$$\begin{aligned} |f(u,v)| &= \left| a - u - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} \right| \le a + \varrho b =: c_f, \\ |g(u,v)| &= \left| \alpha(b-v) - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} \right| \le \alpha b + \varrho b =: c_g. \end{aligned}$$

Odhadujme $W^{1,2}$ normu ϕ:

$$\begin{aligned} d_1 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x &= -d_1 \int_\Omega (\Delta\phi)\phi \,\mathrm{d}x = -d_1 \int_\Omega (\Delta u)\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(a - u - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} \right) \phi \,\mathrm{d}x \le \\ &\le c_f \int_\Omega |\phi| \,\mathrm{d}x \le c_f \sqrt{|\Omega|} \left(\int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

kde jsme v posledním kroku využili Schwarzovy nerovnosti. Dále použitím Poincaréovy nerovnosti na (4.13) dostáváme nejdříve

$$d_1 \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \le c_f \sqrt{\frac{|\Omega|}{\kappa_1}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

a poté odhad normy gradientu

$$\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c_f^2 |\Omega|}{\kappa_1} d_1^{-2}.$$

Celkově tedy dostáváme první nerovnost

$$\int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \le \left(1 + \frac{1}{\kappa_1} \right) \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \le c_f^2 |\Omega| \frac{1+\kappa_1}{\kappa_1^2} d_1^{-2}.$$

Druhá nerovnost se dokáže úplně stejně. Skutečně, použitím Cauchyovy a Poincaréovy nerovnosti máme odhad

$$\begin{aligned} d_2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x &= -d_2 \int_\Omega (\Delta\psi)\psi \,\mathrm{d}x = -d_2 \int_\Omega (\Delta v)\psi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \left(\alpha(b-v) - \frac{\varrho uv}{1+u+ku^2} \right) \psi \,\mathrm{d}x \le \\ &\le c_g \int_\Omega |\psi| \,\mathrm{d}x \le c_g \sqrt{|\Omega|} \left(\int_\Omega |\psi|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \le c_g \sqrt{\frac{|\Omega|}{\kappa_1}} \left(\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

z něhož dostáváme omezení shora

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{c_g^2 |\Omega|}{\kappa_1 d_2^2}$$

a dohromady i druhou nerovnost

$$\int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le \left(1 + \frac{1}{\kappa_1} \right) \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le c_g^2 |\Omega| \frac{1+\kappa_1}{\kappa_1^2}.$$

□

Tvrzení 4.10. *Existují konstanty C_1, C_2 závislé pouze na pevných datech úlohy takové, že pro všechna kladná řešení (u,v) systému (4.2) platí:*

$$\|u\| \leq C_1(1+\frac{1}{d_1^2}), \qquad \|v\| \leq C_2.$$

Důkaz. Začněme výpočtem normy pro řešení u. Nejdříve proveďme pomocné pozorování

$$\int_\Omega \phi^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u-\bar{u})^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x - 2\bar{u}\int_\Omega u\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \bar{u}^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x - |\Omega|\bar{u}^2,$$

z čehož pak použitím předchozího lemmatu dostáváme kýžený odhad

$$\|u\| = \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \phi^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x + |\Omega|\bar{u}^2 \leq C_1(1+d_1^{-2}),$$

kde C_1 je konstanta závislá pouze na pevných datech úlohy. Obdobným postupem dostaneme i odhad pro druhou funkci v.

$$\int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (v-\bar{v})^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x - 2\bar{v}\int_\Omega v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \bar{v}^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x - |\Omega|\bar{v}^2,$$

$$\|v\| = \int_\Omega v^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x + |\Omega|\bar{v}^2 \leq C_2,$$

kde C_2 je konstanta závislá pouze na pevných datech úlohy. □

4.4 Odhad parametru d_1

Věta 4.11. *Existuje kladná konstanta $\widetilde{d_1}$ závislá pouze na pevných datech úlohy taková, že pro žádná $d_1 > \widetilde{d_1}$ neexistuje nekonstatní řešení (4.2).*

Důkaz. Vynásobme druhou rovnici systému (4.2) funkcí ψ, integrujme přes Ω a použitím vztahů z poznámky 4.5 upravujme:

$$\begin{aligned}
&d_2 \int_\Omega |\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = -d_2\int_\Omega (\Delta\psi)\psi\,\mathrm{d}x = -d_2\int_\Omega (\Delta v)\psi\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = \alpha b\int_\Omega \psi\,\mathrm{d}x - \alpha\int_\Omega v\psi\,\mathrm{d}x - \varrho\int_\Omega \frac{uv}{1+u+ku^2}\psi\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = -\alpha\int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x - \varrho\int_\Omega \frac{uv-u\bar{v}}{1+u+ku^2}\psi\,\mathrm{d}x - \varrho\int_\Omega\left(\frac{u\bar{v}}{1+u+ku^2} - \frac{\bar{u}\bar{v}}{1+\bar{u}+k\bar{u}^2}\right)\psi\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = -\alpha\int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x - \varrho\int_\Omega \frac{u}{1+u+ku^2}\psi^2\,\mathrm{d}x + \\
&\qquad\qquad + \varrho\int_\Omega \frac{-u-u\bar{u}-ku\bar{u}^2+\bar{u}+u\bar{u}+ku^2\bar{u}}{(1+u+ku^2)(1+\bar{u}+k\bar{u}^2)}\bar{v}\psi\,\mathrm{d}x = \\
&\quad = -\alpha\int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x - \varrho\int_\Omega \frac{u}{1+u+ku^2}\psi^2\,\mathrm{d}x + \varrho\int_\Omega \frac{(1-ku\bar{u})\bar{v}}{(1+u+ku^2)(1+\bar{u}+k\bar{u}^2)}\phi\psi\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Díky odhadům z lemmatu 4.3 existují konstanty C_1, C_2 závislé pouze na datech úlohy takové, že platí

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x \leq C_1\int_\Omega \phi\psi\,\mathrm{d}x - C_2\int_\Omega \psi^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

Zřejmě je C_2 kladné. Jelikož je na levé straně nerovnosti (4.14) kladné číslo a na pravé straně jsou kladné členy $\int_\Omega \phi\psi \,\mathrm{d}x$ (viz lemma 4.6) a $C_2 \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x$, musí být kladná i konstanta C_1. Na tento odhad použijme postupně Cauchyovu a Poincaréovu nerovnost:

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le \frac{C_1^2}{4C_2} \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x + C_2 \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x - C_2 \int_\Omega \psi^2 \,\mathrm{d}x = \frac{C_1^2}{4C_2} \int_\Omega \phi^2 \,\mathrm{d}x \le$$
$$\le \frac{C_1^2}{4C_2\kappa_1} \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Z tvrzení 4.7 pak dostáváme odhad

$$\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x \le \left(\frac{d_2^2}{d_1^2} + \frac{\alpha^2}{2\kappa_1 d_1} \right) \frac{C_1^2}{4C_2\kappa_1} \int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

Označme konstantu

$$\widetilde{d_1} = \frac{\alpha^2 C_1^2}{16 C_2 \kappa_1^2} + \frac{C_1}{4} \sqrt{\frac{\alpha^4 C_1^2}{16 C_2^2 \kappa_1^4} + \frac{d_2^2}{C_2\kappa_1}}.$$

Ta je zkonstruovaná tak, že pro všechna $d_1 > \widetilde{d_1}$ platí

$$\left(\frac{d_2^2}{d_1^2} + \frac{\alpha^2}{2\kappa_1 d_1} \right) \frac{C_1^2}{4C_2\kappa_1} < 1.$$

Z nerovnosti (4.15) pak pro $d_1 > \widetilde{d_1}$ plyne $\int_\Omega |\nabla\psi|^2 \,\mathrm{d}x = 0$ a z odhadu z tvrzení 4.7 také $\int_\Omega |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x = 0$. Z toho dostáváme $|\nabla\phi| \equiv |\nabla\psi| \equiv 0$, a tedy u, v musí být konstanty. $\square$

5. Závěr

Věta 5.1. *Uvažujme případ jedné prostorové dimenze, tedy $N = 1$ a buďte a, b, α, ϱ, k kladné konstanty splňující podmínky Turingovy nestability [1]. Pak pro každé $[d_1, d_2] \in D_U$ (viz sekce 1.3) existuje alespoň jedno stacionární řešení úlohy 4.1 různé od $[\hat{u}, \hat{v}]$.*

Důkaz. Buď $[d_1^p, d_2^p] \in D_U$ libovolné pevné. Z definice množiny D_U existuje $d_1^0 \in \mathbb{R}_+$ takové, že $[d_1^0, d_2^p] \in C_E{}^2$ a existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $[d_1^0, d_2^p] \in C_j$. Chceme dokázat, že pro každé $d_1 \leq d_1^0$ existuje alespoň jedno stacionární řešení úlohy 4.1 různé od $[\hat{u}, \hat{v}]$.

Prostorově konstatní, stacionární řešení (4.2) se dostane jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} a - \hat{u} - \varrho \frac{\hat{u}\hat{v}}{1 + \hat{u} + k\hat{u}^2} &= 0 \\ \alpha(b - \hat{v}) - \varrho \frac{\hat{u}\hat{v}}{1 + \hat{u} + k\hat{u}^2} &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme, že $\hat{u}$ musí splňovat rovnici

$$0 = k\hat{u}^3 + (1 - ka - \varrho)\hat{u}^2 + (\alpha k \varrho - 1 - a - a\varrho)\hat{u} - a.$$

Tato rovnice je kubická rovnice s reálnými koeficienty, a tedy má jedno až tři reálné kořeny. Tedy úloha (4.1) má vždy alespoň jedno prostorově konstantní, stacionární řešení $[\hat{u}, \hat{v}]$[3].

Formálně budeme nadále uvažovat úlohu s prostorově konstantním, stacionárním řešením posunutým do nuly

$$\begin{aligned} -d_1 \Delta u &= a - u + \hat{u} - \varrho \frac{(u - \hat{u})(v - \hat{v})}{1 + u - \hat{u} + k(u - \hat{u})^2} \\ -d_2^0 \Delta v &= \alpha(b - v + \hat{v}) - \varrho \frac{(u - \hat{u})(v - \hat{v})}{1 + u - \hat{u} + k(u - \hat{u})^2} \end{aligned} \tag{5.1}$$

a její slabou či operátorovou alternativu, kterou dostaneme stejným postupem jako v kapitole 1 a 2.

Z věty 2.2, respektive 2.13, dostáváme, že d_1^0 je globální bifurkační bod úlohy (4.2); navíc existuje souvislá větev S^0 netriviálních řešení bifurkujích v bodě d_1^0 splňující alespoň jednu ze tří podmínek *(S1)*, *(S2)*, *(S3)*. Dále z věty 3.5 plyne, že S^0 nutně splňuje *(S2)* nebo *(S3)*.

V tuto chvíli si uvědomme souvislost mezi nekonstantním řešením (4.2) a netriviálním řešením (5.1). Pokud je (u, v) nekonstantní řešení (4.2), je $(u - \hat{u}, v - \hat{v})$ netriviální řešení (5.1) a naopak, pokud je (u, v) netriviální řešení (5.1), je

[1] To, které konstanty vyhovují tomu, že nastane Turingův efekt, je rozebíráno v [11]. Výpočty jsou zdlouhavé a nejsou hlavním předmětem této práce. Spokojme se s tvrzením, že dané konstanty existují a že se v případě konkrétních dat dají podmínky (P1-P3) výpočtem ověřit.

[2] Definice viz sekce 1.3.

[3] V případě více kořenů není apriori jasné, použití kterého vede ke splnění Turingova efektu. Pro nás ale stačí předpokládat, že to jedno z nich je (viz předchozí poznámku pod čarou) a to si označme $[\hat{u}, \hat{v}]$.

$(u+\hat{u}, v+\hat{v})$ řešení (4.2) různé od $[\hat{u},\hat{v}]$. Dále, máme-li souvislou množinu $\widetilde{S}$ netriviálních řešení (5.1), je zřejmě i množina

$$\{[\mu, u+\hat{u}, v+\hat{v}], [\mu, u, v] \in \widetilde{S}\}$$

řešení (4.2) souvislá a analogicky naopak. Uvažujme tedy množinu

$$\widetilde{S^0} = \{[\mu, u+\hat{u}, v+\hat{v}], [\mu, u, v] \in S^0\}.$$

Ta je tedy souvislou množinou řešení (4.2) různých od $[\hat{u},\hat{v}]$, která splňuje *(S2)* nebo *(S3)*.

Přepokládejme na chvíli, že by $\widetilde{S^0}$ splňovala pouze podmínku *(S2)*. Vezměme tedy posloupnost $\{[d_{1,n}, U_n]\}_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{S^0}$ splňující $d_{1,n} + \|U_n\| \to \infty$. Z věty 4.11 plyne existence konstanty $\widetilde{d_1}$ takové, že pro všechna $d_1 > \widetilde{d_1}$ neexistuje prostorově nekonstantní řešení. Z toho dostáváme, že musí platit $d_{1,n} < \widetilde{d_1}$ a tedy $d_{1,n} \not\to \infty$. Dále z tvrzení 4.8 máme odhady řešení

$$\|u\| \leq \frac{C_1}{d_1}, \qquad \|v\| \leq C_2.$$

Pokud tedy předpokládáme, že *(S3)* neplatí, musí také platit $U_n \not\to \infty$ a podmínka *(S2)* neplatí. Z této úvahy dostáváme, že $\widetilde{S^0}$ nutně splňuje podmínku *(S3)*.

Ze souvislosti $\widetilde{S^0}$ a platnosti podmínky *(S3)* dostáváme, že pro všechna kladná $d_1 < d_1^0$ existuje řešení (4.2) různé od $[\hat{u},\hat{v}]$. Tedy speciálně i pro $d_1 = d_1^p$ a tvrzení je dokázáno. $\square$

6. Dodatky

Věta 6.1. *[7] Pro každý omezený lineární funkcionál F na Hilbertově prostoru H existuje právě jeden prvek $f \in H$ takový, že $F(x) = (x, f)$ pro všechna $x \in H$ a platí $\|F\| = \|f\|$.*

Tvrzení 6.2. *[4, kap. 5.8.1] Buď Ω omezená, souvislá, otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$ s $\mathcal{C}^1$ hranicí. Předpokládejme $1 \leq p \leq \infty$. Pak existuje konstanta C závislá pouze na n, p, Ω taková, že*

$$\|u - \bar{u}\|_p \leq C\|\nabla u\|_p$$

pro každou funkci $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Tvrzení 6.3. *[7, kap, 7.1] Pro všechna a, b, p, q, ε kladné reálné konstatny splňující*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

platí

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p} b^q}{q} \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q.$$

Tvrzení 6.4. *[4, kap. C.2] Buďte $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Pak*

(i) $\int_\Omega \Delta u \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \,\mathrm{d}S$,

(ii) $\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} u \,\mathrm{d}S$,

Tvrzení 6.5 (Regularita slabého řešení)**.** *[5, kap. 2.1.3] Nechť Ω je třídy $\mathcal{C}^{k-1,1}$, $k \geq 2$. Buď $a_{ij} \in W^{k-1,\infty}(\overline{\Omega})$, $b \geq 0$, $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2$. Buď $f \in W^{k-2,2}(\Omega)$. Pak u, jediné slabé řešení Neumannovy úlohy*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + bu &= f && v\ \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && na\ \partial\Omega, \end{aligned}$$

patří do $W^{k,2}(\Omega)$.

Tvrzení 6.6 (Vnoření Sobolevových prostorů)**.** *[5, věta A.3.59] Buď $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [1 \in \infty]$. Buď dále $j \in [0, k)$. Označme*

$$m_0 = \frac{1}{p} - \frac{k - j}{N}$$

a (je-li $m_0 \neq 0$)

$$m = \frac{1}{m_0}.$$

Je-li $m_0 > 0$, pak

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,m}(\Omega).$$

Je-li $m_0 = 0$, pak

$$\forall q \in [1, \infty) : W^{k,p} \hookrightarrow\hookrightarrow W^{j,q}(\Omega).$$

Je-li $m_0 < 0$, pak pro $\mu = -Nm_0$ platí:

(i) *je-li* $\mu \in (0,1)$, *pak*

$$W^{k,p} \hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\mu}(\overline{\Omega}),$$

(ii) *je-li* $\mu = 1$, *pak*

- $p \neq \infty : \forall \alpha \in [0,1) : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega})$,
- $p = \infty : W^{k,\infty}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}^{k-1,\infty}(\overline{\Omega})$,

(iii) *je-li* $\mu > 1$, *pak*

$$\forall \alpha \in [0,1] : W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow \mathcal{C}^{j,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Tvrzení 6.7 (tvrzení o Nemytského operátoru)**.** *[2, věta* 3.2.24*] Buď* Ω *otevřená podmnožina* $\mathbb{R}^N$ *a* $p, q \in [1,\infty)$. *Nechť funkce* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňuje Caratheodoryovy podmínky, tj.*

(i) *pro všechna* $y \in \mathbb{R}$ *je funkce* $x \mapsto f(x,y)$ *měřitelná na* Ω,

(ii) *pro skoro všechna* $x \in \Omega$ *je funkce* $y \mapsto f(x,y)$ *spojitá na* $\mathbb{R}$.

Nechť existuje funkce $g \in L^q(\Omega)$ *a* $c \in \mathbb{R}$ *splňující*

$$|f(x,y)| \leq g(x) + c|y|^{\frac{p}{q}}, \qquad \text{pro skoro všechna } x \in \Omega \text{ a všechna } y \in \mathbb{R}.$$

Dále buď $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ *měřitelná na* Ω *a označme*

$$F(\varphi) : x \mapsto f(x, \varphi(x)), \qquad x \in \Omega.$$

Pak

(i) $F(\varphi) \in L^q(\Omega)$ *pro všechna* $\varphi \in L^p(\Omega)$;

(ii) F *je spojité zobrazení z* $L^p(\Omega)$ *do* $L^q(\Omega)$;

(iii) F *zobrazuje omezené množiny v* $L^p(\Omega)$ *na omezené množiny v* $L^q(\Omega)$.

Seznam použité literatury

[1] Chaplain, M.A.J., Ganesh, M., Graham, I.G., *Spatio-temporal pattern formation on spherical surfaces: numerical simulation and application to solid tumour growth* J. Math. Biol. 42, 2001: p. 387-423.

[2] Drábek, P., Milota, J., *Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations*, Basel: Birkhäuser, 2007. ISBN 978-3-7643-8146-2.

[3] Edmunds, D.E., Evans, W.D., *Spectral Theory and Differential Operators*, Oxford: Clarendon Press, 1990. ISBN 0-19-853542-2.

[4] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Providence: American Mathematical Society, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3.

[5] John, O., Málek, J., Pokorný, M., Rokyta, M., Stará, J., *Úvod do moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic*. 2009.

[6] Gierer, A., Meinhardt, H., *A Thery of Biological Pattern Formation*, Kybernetik 12, Springer-Verlag, 1972: p. 30-39.

[7] Gilbarg, D., Trudinger N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, 2001.

[8] Jang, J., Ni, W.-M., Tang, M., *Global Bifurcation and Structure of Turing Patterns in the 1-D Lengyel-Epstein Model*, Journal of Dynamics and Differential Equations, Vol. 16, No. 2, 2004.

[9] Kučera, M., *Diferenciální rovnice v biologii II*, nepublikováno.

[10] Kučera, M., *Reaction-diffusion systems: Stabilizing efect of conditions described by quasivariational inequalities.* Czechoslovak Math, J. 47 (122), 1997, p. 469-486.

[11] Murray, J.D., *Mathematical Biology II Spatial models and biomedical applications*, New York: Springer, 2003. ISBN 0-387-95228-4.

[12] Liu, R.T., Liaw, S.S., Maini, P.K., *Two-stage Turing model for generating pigment patterns on the leopard and the jaguar*, Physical review E74, 2006.

[13] Lou, Y., Ni, W.-M., *Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion*, J. Differential Equations 131, 1996. p. 79-131.

[14] Lukeš, J., *Zápisky z funkcionální analýzy*, Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2069-5.

[15] Meinhardt, H., *The Algorithmic Beauty of Sea Shells* 4. vydání. Tübingen: Springer, 2009. 236s. ISBN 978-3-540-92141-7.

[16] Nakamasu, A., Takahashi, G., Kanbe, A., Kondo, S., *Interactions between zebrafish pigment cells responsible for the generation of Turing patterns*, PNAS, vol. 106, no. 21, 2009: p. 8429-8434.

[17] Ni, W.-M., Tang, M., *Turing Patterns in the Lengyel-Epstein system for the CIMA reactions*, American Mathematical Society 375, 2005. p. 3953-3969.

[18] Nishiura, Y., *Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 13, No. 4, 1982.

[19] Rothe, F., *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems* Springer-Verlag, vol 1072, 1984, p. 216.

[20] Turing, A.M., *The Chemical Basis of Morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641, 1952, p. 37-72.

[21] Weinberger, H. F., *Invariant sets for weakly coupled parabolic and elliptic systems*, Rend. Mat. 8, 1975, p. 295-310.

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{R}; \mathbb{R}_+$	reálná čísla; nezáporná reálná čísla
$\mathbb{N}; \mathbb{N}_0$	přirozená čísla; přirozená čísla s nulou
N	dimenze prostoru
$\Omega; I$	otevřená omezená podmnožina $\mathbb{R}^n$; otevřený interval $(0, L)$
$\operatorname{tr} B$	stopa matice B
$\det B$	determinant matice B
$\operatorname{span} M$	lineární obal množiny M
$\operatorname{Re} \lambda$	reálná část čísla λ
κ_j	j-té vlastní číslo laplaciánu (1.10) s Neumannovou okrajovou podmínkou
$H_d(\kappa_j)$	konrétní polynom, viz str. 9
C_j	j-tá hyperbola, viz str. 11
C_E	obálka křivek C_j pro všechna $j \in \mathbb{N}$, viz str. 12
D_S	oblast stability, viz str. 12
D_U	oblast nestability, viz str. 12
$X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$	kompaktní vnoření prostoru X do prostoru Y
$\hat{u}$	prostorově konstantní, stacionární řešení
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	skalární součin v prostoru $W^{1,2}$
$[W^{1,2}(\Omega)]^2$	$= W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_\sim$	skalární součin v prostoru $[W^{1,2}(\Omega)]^2$
$\| \cdot \|_p$	norma prostoru $L^p(\Omega)$
$\| \cdot \|$	norma prostoru $W^{1,2}(\Omega)$
$\| \cdot \|_X$	norma prostoru X
$D(d), B(d)$	matice definované na str. 8
A	operátor definovaný na str. 7
N_j	operátor definovaná na str. 16
d_2^0	pevně zvolený difuzní koeficient d_2
S	$= \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W^{1,2}(\Omega)]^2, U \text{nenulové řešení (2.6) s } d_1 = \mu\}}$
S^0	komponenta S obsahující daný bifurkační bod, viz
$\operatorname{sign} \lambda$	parita násobnosti vlastního čísla λ
$W_n^{1,2}$	$= \overline{\operatorname{span}\{\cos(nm\pi x/L)\}_{m \in \mathbb{N}_0}}^{\|\cdot\|_{1,2}}$
S_n	$= \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R}_+ \times [W_n^{1,2}(\Omega)]^2, U \text{nenulové řešení (2.6) s } d_1 = \mu\}}$
S_n^0	komponenta S_n obsahující daný bifurkační bod
$k \equiv 0 \pmod{n}$	číslo k je kongruentní s 0 po dělení n
J_1, J_2	množiny indexů definované na str. 21
$T^{k,l}(\cdot)$	operátor definovaný na str. 22
$\kappa_j(L)$	j-té vlastní číslo laplaciánu (1.10) příslušné úloze na intervalu $(0, L)$
$C_j(L)$	j-tá hyperbola příslušná úloze na intervalu $(0, L)$
$S(L)$	množina S se zdůrazněnou závislosti na intervalu $(0, L)$
$S^0(L)$	komponenta $S(L)$ obsahující daný bifurkační bod
$d_j(L)$	$[d_j(L), d_2^0] \in C_j(L)$
∂_i	slabá derivace dle i-té složky prostoru
$C^{k,\alpha}$	prostor Hölderovských funkcí
$\lfloor \cdot \rfloor$	dolní celá část
ϕ	$= u - \bar{u} = u - \|\Omega\|^{-1} \int_\Omega u \, \mathrm{d}x$
ψ	$= v - \bar{v} = v - \|\Omega\|^{-1} \int_\Omega v \, \mathrm{d}x$