Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Žákovská tvorba slovních úloh jako indikátor matematické kultury žáků ZŠ

Students' problem posing as an indicator of mathematical culture of lower secondary students

Mgr. Jiří Bureš

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Školitel: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Pedagogika – Didaktika matematiky

2014

Prohlašuji, že jsem disertační práci na téma Žákovská kultura slovních úloh jako indikátor matematické kultury žáků ZŠ vypracoval pod vedením školitelky samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato disertační práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Datum : *Podpis:*

Děkuji paní prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné připomínky a výbornou spolupráci při tvorbě této disertační práce. Dále děkuji paní Mgr. Marii Tiché, CSc., za inspiraci a konzultace k teoretické části práce a panu prof. Bernardu Sarrazymu za pomoc při přípravě a analýze výzkumu.

NÁZEV PRÁCE: Žákovská tvorba slovních úloh jako indikátor matematické kultury žáků ZŠ

AUTOR: Mgr. Jiří Bureš

KATEDRA: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

ŠKOLITEL: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

ABSTRAKT: Předkládaná disertační práce je zaměřena na žákovskou tvorbu slovních úloh jako indikátor matematické kultury žáků ZŠ. Teoretický rámec práce je tvořen výzkumem zaměřeným na tvorbu matematických úloh (*problem posing*), výzkumem zabývajícím se slovními úlohami, matematickou kulturou a Teorií didaktických situací v matematice. Cílem práce je zkoumat souvislost mezi tvorbou slovních úloh a matematickou kulturou žáků prostřednictvím analýzy a stanovení charakteristických znaků vytvořených úloh.

Práce se skládá ze dvou částí: teoretické a výzkumné. V teoretické části jsou jednak shrnuty hlavní poznatky o žákovské tvorbě úloh, dále pak popsány některé přístupy k pojmům slovní úloha a matematická kultura, a nakonec vysvětleny hlavní pojmy Teorie didaktických situací použité v této práci.

Experimentální část je uvedena analýzou předexperimentu, na jejímž základě je vytvořeno a charakterizováno pojetí matematické kultury při tvoření úloh. Na něj navazuje analýza hlavního experimentu, která poskytuje úplný popis vytvořených úloh na základě tohoto pojetí. Na závěr jsou shrnuty výsledky této analýzy zaměřené na hlavní charakteristické rysy vytvořených úloh a porovnání z různých hledisek, popsány závěry výzkumu a naznačeny možnosti pro navazující výzkum.

KLÍČOVÁ SLOVA: tvorba slovních úloh, slovní úloha, matematická kultura, Teorie didaktických situací v matematice

TITLE: Students’ problem posing as an indicator of mathematical culture of lower secondary students

AUTHOR: Mgr. Jiří Bureš

DEPARTMENT: Department of Mathematics and Mathematical Education

SUPERVISOR: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

ABSTRACT: This thesis is focused on students’ problem posing as an indicator of mathematical culture of lower secondary students. The theoretical background consists of research on problem posing, word problems in mathematics, mathematical culture and the Theory of didactical situations in mathematics. The goal of the thesis is to analyse links between problem posing and students’ mathematical culture through the analysis and description of the posed problems.

The thesis consists of two parts, theoretical and research part. In the theoretical part, there are the main findings about students’ problem posing and some approaches to the concepts of word problems and mathematical culture, and the main concepts of the Theory of didactical situations used in the thesis.

The research part starts with the analysis of the pre-experiment, which constitutes the basis for creation and characteristics of the conception of mathematical culture of problem posing. These parts are followed by the analysis of the main experiment, which provides the complete description of the posed problems based on this conception. The thesis is concluded with the summary of the results of the analysis are summarized focusing on key features of the posed problems and the comparison from different perspectives. The final part also contains of the conclusions and implications for further research.

KEY WORDS: problem posing, word problems, mathematical culture, theory of didactical situations in mathematics

Obsah

I. Úvod

Tato práce navazuje na výzkumnou činnost realizovanou členy Katedry matematiky a didaktiky matematiky Pedagogické fakulty UK zaměřenou na matematickou kulturu a slovní úlohy a jejich tvorbu. Matematickou kulturou žáků při řešení slovních úloh se dlouhodobě zabývá J. Novotná spolu s výzkumným týmem laboratoře LACES v Bordeaux (G. Brousseau, B. Sarrazy, P. Clanché a další). Jedním z cílů tohoto výzkumu je zkoumat, jakým způsobem se projevuje kultura žáků (třídy) při řešení slovních úloh (viz kapitola 3.5). Tvorbou slovních úloh se dlouhodobě zabývá M. Tichá, která zkoumá roli tvoření úloh v profesní přípravě budoucích učitelů 1. stupně (viz kapitola 1.6.2), a J. Zhouf, který se zabývá tvorbou matematických úloh pro nadané studenty (viz kapitola 8.2).

Tato práce je také součástí výzkumného proudu, který se zabývá aktivitami spojenými s *problem posing*[1] a jejich významem ve výuce matematiky. V tradičním pojetí je výuka matematiky na 2. stupni ZŠ a na SŠ založena zejména na odpovídání na předem připravené otázky, na procvičování početních dovedností a na řešení předem připravených úloh. Matematika je tedy představována zejména jako účinný nástroj pro řešení problémů a hledání odpovědí na otázky. Jen málo prostoru bývá věnováno otázkám samotným – odkud se berou, jak a proč vznikají. Je-li jednou z rolí školské matematiky vést žáky k samostatnému a tvořivému myšlení, jen těžko se toho dosáhne v takovém tradičním pojetí výuky, kde žák pouze přejímá a aplikuje již známé poznatky. Absence rozvoje tvořivosti, samostatného a tvůrčího přístupu, a nedostatek souvislostí mezi školskou matematikou na straně jedné a reálným životem nebo matematikou jako vědeckou disciplínou na straně druhé byla motivací k bližšímu zkoumání *problem posing* v rámci didaktiky matematiky, které se postupně rozvíjí od 80. let 20. století.

Aktivity spojené s *problem posing* ve výuce matematiky jsou zkoumány z různých pohledů, zejména pak jsou hledány souvislosti mezi *problem posing* a řešením úloh (*problem solving*) nebo *problem posing* a kreativitou jedince. *Problem posing* je také využíváno jako diagnostický nástroj pro zkoumání porozumění matematice (zejména u budoucích učitelů matematiky). Při studiu literatury k *problem posing* jsme došli k názoru, že ačkoli se *problem posing* používá jako zdroj informací o žácích nebo (budoucích) učitelích, nebyla dosud

[1] Pojem *problem posing* je v teoretické části této práce používán v původním anglickém znění (viz kapitola 1.1). V dalších částech práce jsou používány zejména pojmy tvorba úloh nebo tvoření úloh.

dostatečně popsána souvislost mezi *problem posing* (konkrétně schopností tvořit matematické úlohy) a matematickou kulturou zkoumané instituce[2] (jednotlivce nebo skupiny). Cílem této práce je tedy navázat na zmíněné výzkumy a zaměřit se na hledání souvislostí mezi matematickou kulturou jednotlivce nebo třídy a žákovskou tvorbou slovních úloh. Tyto souvislosti se mohou projevit v úlohách vytvořených danou třídou (např. tendence žáků třídy tvořit úlohy určitým způsobem, rozdíly v úlohách vytvořených dobrými, průměrnými a slabými žáky v matematice), mohou ale také ukazovat na individuální rozdíly mezi žáky. Tyto souvislosti mohou být důsledkem určité matematické kultury dané třídy. Není také vyloučen vliv nematematických okolností (nadání, jazyková gramotnost, výuka v jiných předmětech) na vytvořené úlohy.

V teoretické části práce jsou popsána základní východiska pro náš výzkum – výzkumy zabývající se *problem posing*, různá pojetí a charakteristiky slovní úlohy ve vyučování matematice a některá pojetí matematické kultury. Ve výzkumné části se podrobně věnujeme předběžnému experimentu a jeho analýze, která nám umožnila charakterizovat naše pojetí matematické kultury slovních úloh, ze kterého vychází metodologie pro analýzu hlavního experimentu. Teoretická východiska, analýza předexperimentu a analýza experimentu nám umožňují hledat odpovědi na následující otázky:

Jak definovat a charakterizovat matematickou kulturu při tvoření úloh?

Jak analyzovat vytvořené úlohy podle tohoto pojetí kultury při tvoření úloh?

Jak interpretovat výsledky této analýzy z hlediska jednotlivých žáků, skupin žáků a tříd?

Jaký je potenciál tvorby úloh jako indikátoru matematické kultury žáků?

Odpovědi na tyto otázky se nacházejí v kapitolách 8 – 11. V závěru práce jsou potom shrnuty výsledky výzkumu a možné důsledky pro navazující výzkum.

[2] Pojem instituce je vysvětlen v kapitole 4.2.

II. Teoretická část

Tato práce patří svým zaměřením do několika výzkumných proudů v didaktice matematiky, mezi které patří výzkum týkající se *problem posing*, výzkum zaměřený na problematiku slovních úloh a výzkum zaměřený na matematickou kulturu.

Náš výzkum se v první řadě zabývá tvorbou úloh, kterou chápeme jako součást obecné problematiky zvané *problem posing*. V kapitole 1 popisujeme obecně aktivity spojené s *problem posing* a zařazujeme žákovskou tvorbu úloh do kontextu této problematiky. Jelikož se zabýváme tvorbou slovních úloh a ve výzkumné části charakterizujeme vytvořené slovní úlohy pomocí proměnných a dalších charakteristik, popisujeme v kapitole 2 různé pohledy na slovní úlohy a jejich základní charakteristiky, ze kterých odvozujeme pojetí slovní úlohy použité v této práci a sledované parametry vytvořených úloh. V kapitole 3 shrnujeme několik vybraných pojetí matematické kultury vztažených k různým výzkumným situacím. Tato pojetí tvoří východisko pro naše pojetí matematické kultury při tvoření slovních úloh popsané v kapitole 8.

Z hlediska použitých metod a přístupu k výzkumné situaci se náš výzkum zařazuje do teoretického rámce Teorie didaktických situací podle G. Brousseaua. Kapitola 4 obsahuje stručný popis základních pojmů této teorie, které jsou použity v této práci a které jsou důležité pro náš výzkum.

Kapitola 1 Žákovská tvorba slovních úloh jako součást *problem posing*

Od 80. let 20. století se v didaktice matematiky výrazněji projevuje výzkumný proud, který se zaměřuje na proces, kterým matematické otázky a úlohy vznikají, zvaný *problem posing* (viz např. Brown, Walter, 1983; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994 a další). V pracích těchto autorů se často objevuje názor, že školská matematika je odtržena od matematiky jako vědní disciplíny (ve smyslu rozdílu ve vnímání matematické aktivity jedince – žáka a jedince – vědce) a že aktivity spojené s *problem posing* mají potenciál pro rozvoj nejen matematických schopností žáků, ale např. i jejich kreativity a schopnosti řešit úlohy. Výše uvedení autoři (a mnozí další, jako např. Ellerton, 1986 nebo English, 1998) vnímají *problem posing* jako důležitou součást vyučování matematice a vhodný objekt výzkumu v rámci didaktiky matematiky. Výzkumy popsané v této kapitole často analyzují *problem posing* žáků 1.stupně ZŠ nebo (budoucích) učitelů matematiky a popisují tedy tyto aktivity u skupin, o kterých by *problem posing* mělo poskytnout informace důležité pro výuku matematiky. Některé zkoumané charakteristiky *problem posing* mohou být obecně platné jak pro žáky, tak pro učitele matematiky (kteří byli také postaveni do pozice žáků). Závěry z těchto výzkumů se ale týkají vždy konkrétní skupiny, která se účastnila výzkumu. Hlavním cílem této části práce je popsat současný stav poznání souvisejícího s *problem posing* a zařadit žákovské tvorby slovních úloh do širšího kontextu této problematiky.

1.1 Vymezení pojmu *problem posing*

Anglický pojem *problem posing* v sobě zahrnuje více různých významů (např. kladení otázek, změna formulace zadání úloh, tvorba nových zadání úloh atd.). Proto bude tento pojem používán v původním anglickém znění. Tato část práce je zaměřena na vymezení pojmu *problem posing*, jeho zařazení do širšího výzkumného rámce a jeho souvislost s výukou matematiky.

V 90. letech 20. století nabídl E.A. Silver dva základní obecné pohledy na *problem posing*:

> *Problem posing* může vyjadřovat jak tvorbu nových úloh, tak i změnu formulace zadání daných úloh.[3] (Silver, 1994, s. 19)

[3] „*Problem posing* refers to both the generation of new problems and the re-formulation of given problems."

> *Problem posing* znamená tvorbu nové úlohy na základě nějaké situace nebo zkušenosti.[4] (Silver, 1995, s. 68)

S. S. Leung upozorňuje na vztah vytvořené úlohy k jejímu řešiteli:

> Navzdory jeho rozmanitým charakteristikám a různorodosti znamená *problem posing* především tvorbu úlohy, jejíž řešení nejsou známa řešiteli, pro kterého byla úloha vytvořena.[5] (Leung, 1997, s. 81)

C. Bonotto (2006) popisuje *problem posing* jako proces, během kterého žáci vytvářejí vlastní interpretace konkrétních situací na základě předchozích matematických zkušeností a formulují tyto situace jako smysluplnou matematickou úlohu. *Problem posing* je tedy příležitostí pro interpretaci a kritickou analýzu skutečnosti, protože žáci musí oddělovat důležité údaje od nepodstatných, odhalovat vztahy mezi nimi a rozhodovat, jsou-li informace, které mají k dispozici, dostatečné k řešení dané úlohy.

Na základě výše zmíněných pojetí lze tedy *problem posing* charakterizovat jako tvořivou činnost, která vychází z daných podmínek a projevuje se reflexí těchto podmínek a následným kladením otázek nebo tvorbou nových zadání úloh.

1.2 *Problem posing* jako jedna z forem otevřených úloh

Problem posing v matematice můžeme zařadit mezi tzv. otevřené úlohy (open problems). E. Pehkonen (1995) vymezuje otevřené úlohy jako protiklad úloh uzavřených (closed problems):

> Úloha je uzavřená, jestliže její výchozí situace a cílová situace jsou uzavřené, tj. přesně vysvětlené. Jestliže je výchozí a/nebo cílová situace otevřená, tj. není uzavřená, pak se jedná o otevřenou úlohu.[6] (Pehkonen, 1995, s. 55)

Podle E. Pehkonena lze otevřené úkoly rozdělit na 3 skupiny:

1. úlohy s otevřenou výchozí situací a uzavřenou cílovou situací (např. úlohy s otevřeným koncem, úlohy z běžného života),

[4] „*Problem posing* refers to the creation of a new problem from a situation or experience."

[5] „Despite its varied characteristics and heterogeneity, *problem posing essentially* means creating a problem with solutions unknown to the target problem solver for whom the problem has been created."

[6] „A problem is closed if its starting situation and goal situation are closed, i.e. exactly explained. If the starting situation and/or the goal situation are open, i.e. if they are not closed, we have an open problem."

2. úlohy s uzavřenou výchozí situací a otevřenou cílovou situací (úlohy z běžného života, modifikace dané úlohy),
3. úlohy s otevřenou výchozí i cílovou situací (např. projekty, *problem posing*).

E. A. Silver (1995) popisuje otevřené úlohy obecněji jako úlohy, které nebyly dosud vyřešeny, mají více možných interpretací a řešení, umožňují využít různých způsobů řešení a motivují k zobecnění nebo tvorbě dalších úloh.

Problem posing patří mezi otevřené úlohy podle E. Pehkonena, protože ani výchozí ani cílová situace nemusí být uzavřené. Pokud je např. východiskem pro *problem posing* reálná situace, existuje obvykle více různých matematických interpretací této situace. Při aktivitách spojených s *problem posing* vznikají v rámci cílové situace různé otázky nebo úlohy, tedy i cílová situace bývá většinou otevřená.

Rovněž podle E. A. Silvera je *problem posing* jedním z typů otevřené úlohy, jelikož proces probíhající během *problem posing* může být považován za proces řešení úlohy, ve kterém je nejednoznačně dané řešení, protože může vzniknout velké množství různých nových úloh.

1.3 Aktivity spojené s *problem posing* ve výuce matematiky

V tradičním pojetí výuky je hlavní náplní většiny hodin matematiky ve škole výklad spojený s rutinním procvičováním, na který navazuje řešení úloh často s postupně rostoucí obtížností, Zkoumání řešení úloh (*problem solving*) se věnuje velké množství odborných publikací. Žáci se většinou setkávají s úlohami, které pro ně vytvořil někdo jiný – nejčastěji učitel nebo autoři učebnic a sbírek. Matematická aktivita ale nespočívá pouze v řešení úloh, ale také v hledání nových otázek a nevyřešených problémů. Na tuto skutečnost upozornil např. E. A. Silver:

> Objevuje se úhel pohledu, který říká, že pokud se snažíme porozumět tomu, co je matematika, potřebujeme také porozumět činnostem a postupům matematiků. […] Kromě snahy řešit již formulované otevřené problémy formulují matematikové obvykle vlastní problémy, které jsou založeny na jejich osobních zkušenostech a zájmech.[7] (Silver, 1995, s. 68)

[7] „ An emerging view is that to understand what mathematics is, one needs to understand the activities or practice of persons who are makers of mathematics.“[...] Beyond attempting to solve pre – formulated, open problems, it is common for mathematicians also to formulate their own problems, based on their personal experience and interest.”

Na nedostatek aktivit spojených s *problem posing* ve školské matematice poukazují např. autoři projektu Making Mathematics:

> Pokud učitelé prezentují matematiku jako předem daný soubor faktů určených k předávání, pak implicitně naznačují, že žáci jsou odděleni od těch, kteří matematiku vytvořili.[8] (Education Development Center, 2002)

E. A. Silver (1994) popisuje několik různých pohledů na *problem posing* a jeho roli v matematice a vyučování matematice jako:

- nejvýznamnější součást matematické činnosti,
- charakteristický znak tvořivé činnosti nebo výjimečných matematických schopností,
- okno do žákovského chápání matematiky a matematických pojmů,
- nástroj ke zlepšení schopnosti řešit úlohy,
- prostředek ke zlepšení žákovských postojů k matematice,
- jeden z atributů problémového vyučování.

Většina autorů zabývajících se *problem posing* se shoduje v tom, že aktivity s ním spojené by měly být součástí školské matematiky i vzdělávání (budoucích) učitelů. *Problem posing* může žákům otevřít nové cesty k porozumění matematice a pomoci při analyzování problémových situací a řešení nejen matematických úloh.

1.4 Charakteristiky *problem posing*

Již v úvodní části bylo zmíněno, že pod pojmem *problem posing* je zahrnuto více různých aktivit. Aktivity spojené s *problem posing* můžeme posuzovat např. podle časové roviny, kdy probíhá, podle strategie přístupu k aktivitě a na základě prováděné činnosti. Charakteristiky typů *problem posing* uvedené v této kapitole se navzájem překrývají a doplňují.

---

[8] „When teachers present mathematics as a predetermined set of facts to be transmitted, the implicit message is that students are separate from those who created the mathematics."

1.4.1 Charakteristika *problem posing* na základě časových rovin vzhledem k řešení úlohy

E. A. Silver (1994) vymezuje tři základní časové roviny, podle kterých rozlišuje různé typy *problem posing*:

1. Pre-solution posing

Tento typ *problem posing* se vyskytuje zejména v situacích, jejichž cílem není vyřešit nějakou úlohu, ale vytvořit novou úlohu na základě zadaných údajů, situace nebo zkušenosti.

Příklad 1. Žáci dostanou zadánu následující situaci:

Petra si koupila k svačině 3 celozrnné rohlíky za 24 Kč, sýr za 22 Kč a jogurt za 12 Kč. V peněžence měla celkem 90 Kč.

Úkolem žáků je vytvořit na základě této situace aspoň 4 různá zadání úloh, například přidáním otázky (Kolik korun Petře zbylo po nákupu?)

2. Within-solution posing

Ve školní praxi se zřejmě nejčastěji vyskytuje within-solution posing, které může mít dvě různé formy. První a nejčastější je přetváření zadání úlohy v průběhu jejího řešení (interpretace zadání), jehož cílem je zejména analyzovat zadání takovým způsobem, abychom byli schopni úlohu vyřešit.[9] Druhou formou je pak hledání analogických úloh k dané úloze (Silver, 1996).

Příklad 2. Žáci mají vyřešit následující úlohu:

V nejmenovaném stánku s rychlým občerstvením proběhl malý dopolední průzkum prodeje hamburgerů, twistrů a sendvičů. Dohromady jich prodali 288. Bylo zjištěno, že hamburgerů se prodalo sedmkrát víc než twistrů a sendvičů o osm víc než twistrů. Kolik prodali hamburgerů, kolik twistrů a kolik sendvičů?

Během čtení zadání probíhá jeho interpretace: 3 druhy zboží, celkem 288 kusů apod. Tímto způsobem může vzniknout např. úloha, která popisuje matematický model původní úlohy bez jejího kontextu (288 kusů bylo rozděleno na 3 části. První z nich obsahuje sedmkrát víc kusů než druhá, třetí část o 8 kusů víc než druhá část. Kolik kusů obsahují jednotlivé části?).

[9] V pracích zabývajících se řešením slovních úloh se tato činnost označuje jako uchopování slovní úlohy.

Hledání analogických úloh může probíhat např. pomocí změny kontextu úlohy (místo stánku s občerstvením může být třeba rozdělení určité částky mezi 3 osoby). Místo převedení na analogickou úlohu může také být daná úloha rozdělena na několik podúloh.

3. Post-solution posing

Po vyřešení dané úlohy může dojít k obměňování výchozích podmínek nebo cílů úlohy. Na údaje uvedené v zadání je možné nahlížet jako na proměnné, měnit informace v nich obsažené a získávat nové úlohy. Další možností je měnit cíl úlohy, tj. zachovat informace v zadání a změnit otázku.

Příklad 3. Je zadána následující slovní úloha: Rákosníček, Křemílek a Vochomůrka pracovali o víkendu pro strýčka Skrblíka. Skrblíkovi se ale zdálo, že všichni nepracovali stejně, takže jim odměnu 1 320 € rozdělil takto: Rákosníček dostal čtyřikrát víc než Vochomůrka, Křemílek dostal šestkrát víc než Vochomůrka. Kolik peněz dostal každý z nich?

Žáci nejprve tuto úlohu vyřeší a poté mají za úkol měnit údaje v zadání (počet osob, celková suma, poměr obdržených peněz atd.) a tím vytvářet nové úlohy.

1.4.2 Charakteristika *problem posing* na základě strategie přístupu k zadání úlohy

J. Kopka (1996, 1999) vymezuje dvě základní strategie používané při aktivitách spojených s *problem posing*:

1. strategie akceptování daného (cílem je vytvořit nové zadání úlohy na základě daných údajů)

V rámci této strategie probíhají tři základní etapy: vyhledání údajů, tvorba otázek na základě vyhledaných údajů a vytváření hypotéz o odpovědích na otázky.

Příklad 1. Úloha může být zadána následujícím způsobem: Uvažujeme posloupnost 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58,... Jaké úvahy, otázky a hypotézy vás napadají při zkoumání čísel v této posloupnosti?

Žáci nejprve vyhledají údaje v zadání úlohy, poté vytvářejí otázky na základě zjištěných údajů (např. Jaký je rozdíl mezi dvěma sousedními členy? Střídají se pravidelně lichá a sudá čísla?) a na závěr vytvářejí hypotézy o odpovědích na otázky.

2. strategie neakceptování daného (cílem je vytvořit nová zadání pomocí změn údajů v původním zadání)

Tato strategie se skládá ze čtyř hlavních etap: výběr zadání, vytvoření seznamu údajů podle daného zadání, použití otázky „Co když ne?“ pro každý údaj, tvorba nových úloh založených na změně údaje.

Příklad 2. Žákům je zadáno následující tvrzení: Tři různé nekolineární body jednoznačně určují kružnici. Žáci mají za úkol popsat toto tvrzení (pojmy a vztahy mezi nimi). Poté použijí na každou informaci otázku „Co když ne?“ a vytvářejí tím nová tvrzení (Co když body jsou kolineární? Co když se jedná o 1, 2, 4 body?) Na základě těchto tvrzení formulují žáci nové úlohy (Určují čtyři různé nekolineární body kružnici?).

1.4.3 Charakteristika *problem posing* na základě prováděné činnosti

V rámci projektu Making Mathematics (Education Development Center, 2002) využili jeho autoři *problem posing* jako nástroj pro rozvoj matematických schopností žáků základních a středních škol. Klasifikaci aktivit spojených s *problem posing* podávají následujícím způsobem:

1. Tvorba zcela nových úloh z původních úloh nebo situací

Některé úlohy nebo situace mohou sloužit jako zdroj inspirace pro vznik nových otázek a úloh, jako např. obecně známý matematický problém, hra, skládanka nebo jen obyčejná úloha pocházející z učebnice.

2. Změna zadání úlohy

Autoři projektu popisují 7 základních způsobů, jak provést změny v zadání úlohy a vytvořit tím nové úlohy:

- změnit číselné hodnoty (celá čísla, desetinná čísla…),
- změnit geometrické údaje (konvexní vs. nekonvexní útvary, dimenze, umístění útvarů ...),
- změnit operaci (sčítání, násobení, zobrazení…),
- změnit zkoumané objekty (zaměnit čísla za matice, vektory…),

- odebrat nebo přidat podmínku,
- odebrat nebo přidat kontext (abstrakce odebráním nematematických informací…),
- zopakovat proces (použít víckrát stejný předpis pro funkci…).

Všechny výše uvedené změny mohou sloužit k vytvoření nových úloh, někdy však může dojít k situaci, že změnou zadání vznikne úloha, která není dobře zadaná (nereálné údaje, neexistence řešení apod.).

3. Kladení nových otázek k zadaným úlohám

Kromě vyřešení zadané úlohy nebo úloh vytvořených pomocí změn zadání můžeme klást také otázky, které zobecňují úlohu a zařazují ji do širšího kontextu, jako např.:

Existuje opravdu objekt, který jsme popsali během řešení úlohy?

Můžeme úlohu zobecnit?

Kolik existuje řešení, způsobů řešení úlohy?

Jaký postup jsme uplatnili a lze jej zobecnit na další případy? aj.

Podle M. Pittalise a kol. (2004) lze klasifikovat situace spojené s *problem posing* podle daných informací a typu úkolů, který mají žáci splnit. Žáci tak mohou vytvářet

1. obecné úlohy,
2. úlohy s daným řešením,
3. úlohy obsahující určitou informaci,
4. otázky pro danou situaci,
5. úlohy, které lze vypočítat daným způsobem.

1.4.4 Shrnutí

Přes svoji různorodost se charakteristiky typů *problem posing* uvedené v této části navzájem překrývají a doplňují. Použití některé z charakteristik *problem posing* závisí zejména na konkrétní situaci a aktivitě, v rámci které *problem posing* probíhá. V této práci nebude používán jen jediný z přístupů, ale aktivita bude popisována z různých hledisek.

1.5 Analýza aktivit spojených s *problem posing*

Zařazení aktivit spojených s *problem posing* do vyučování matematiky je považováno za žádoucí a přínosné (viz např. Silver, 1994; Stoyanova 2000). Vzhledem k tomu, že se jedná o otevřené úlohy, je velmi náročné tento typ aktivit analyzovat a případně hodnotit jejich úspěšnost a vliv na další aspekty matematického vzdělání. V této kapitole budou uvedeny některé konkrétní příklady aktivit spojených s *problem posing* a způsoby, jak jejich autoři přistupovali k jejich analýze a hodnocení. Cílem je popsat metody, které jsou zaměřeny na samotný proces *problem posing.* Jiné způsoby analýzy *problem posing* se věnují vytvořeným slovním úlohám, (např. Sarrazy, 2002; Ellerton, 1986) a budou podrobně popsány v 2. kapitole.

Pokud je nám známo, univerzální model analýzy a hodnocení *problem posing* zatím nebyl vytvořen. Je navíc zřejmé, že vzhledem k otevřenému charakteru aktivity je třeba hodnotit *problem posing* s ohledem na dané cíle, didaktickou situaci a prostředky, které mají žáci k dispozici, a proto univerzální model analýzy a hodnocení *problem posing* nemůže existovat. Jednotlivé přístupy k jeho analýze mohou být inspirací i v dalších situacích založených na *problem posing*.

1.5.1 Srovnávací analýza úloh vytvořených v různých fázích řešení dané úlohy

E. A. Silver a kol. (1996) zkoumali, jaké typy úloh vytvoří učitelé a budoucí učitelé matematiky, jednotlivě nebo ve dvojicích, na základě problémové situace, a srovnávali úlohy vytvořené v různých fázích plnění úkolu: před začátkem jeho plnění (1. fáze) a během jeho plnění nebo po jeho splnění (2. fáze). Úkol se skládal ze tří částí: tvorba otázek a úloh na základě analýzy možností dráhy kulečníkové koule, změna údajů v zadání spojená s analýzou dráhy koule a zaznamenávání otázek, které účastníky napadaly během plnění úkolu.

V 1. fázi bylo vytvořeno větší množství úloh než ve 2. fázi, zejména v případě dvojic tvůrců úloh, ale nebyly zaznamenány žádné statisticky významné rozdíly mezi úlohami vytvořenými během těchto dvou fází z hlediska typu vytvořených úloh, a to ani z pohledu obecnosti vytvořených úloh. Na druhou stranu se ukázalo, že většina jednotlivců i dvojic měla systém v tvoření úloh a že v dané situaci je tvorba úloh ovlivněna předchozími zkušenostmi tvůrců s kontextem daného úkolu. Výzkum dále ukázal, že může existovat vztah mezi tvorbou úloh a řešením úloh, protože někteří z účastníků výzkumu tvořili úlohy na základě informací, které se jim podařilo získat podle toho, jak daleko se jim podařilo dospět při řešení úkolu. Na druhou stranu nelze tvoření úloh považovat za měřítko schopnosti řešit úlohy, protože některé vytvořené úlohy byly mnohem složitější, než by jejich autoři byli schopni v daných podmínkách vyřešit.

1.5.2 Hodnocení *problem posing* na základě vlastností vytvořených úloh

S. S. Leung a E. A. Silver (1997) vytvořili v roce 1992 Test of Arithmetic Problem Posing, který zadali budoucím učitelům 1. stupně základní školy. Jejich cílem bylo analyzovat jednak schopnost cílové skupiny tvořit úlohy, ale také zkoumat vliv dvou různých typů zadání (přítomnost nebo absence číselných údajů v zadání) na tvorbu úloh a analyzovat tvorbu úloh na základě rozdílů v úrovni matematických znalostí a tvořivosti jednotlivých účastníků výzkumu. Vytvořené úlohy byly analyzovány ze dvou různých pohledů: kvality a komplexnosti.

E. A. Silver a J. Cai (2005) navázali na tento výzkum, přidali další dvě kritéria – množství a originalita vytvořených úloh – a ilustrovali je na příkladech úloh vytvořených žáky 1. stupně základní školy. Jejich cílem bylo jednak zkoumat hodnocení žáků prostřednictvím *problem posing*, jednak navázat na předchozí zkoumání hodnocení *problem posing* jako vyučovací aktivity. V rámci obou výzkumů stanovili autoři následující kritéria pro hodnocení *problem posing*:

1. množství vytvořených úloh

Jestliže je cílem nějakého úkolu vytvořit nové úlohy, pak existuje téměř vždy více správných odpovědí. Jejich množství se může stát kritériem pro hodnocení *problem posing* s tím, že je třeba odlišit jednak správně vytvořené úlohy od špatných, ale hlavně posoudit, zda vytvořené úlohy jsou stejné nebo různé: přestože mohou některé úlohy mít jinou slovní formu, jejich matematický model a operace mohou být stejné. Úlohy mohou být považovány za různé, pokud mají např. různá řešení.

2. originalita vytvořených úloh

V rámci úloh vytvořených skupinou žáků lze stanovit skupiny identických nebo analogicky řešitelných úloh. Zbylé úlohy lze považovat za originální v rámci úloh vytvořených danou skupinou žáků. Pro hodnocení žáků ve třídě nepovažují autoři toto kritérium za významné, lze je ale použít jako jeden z ukazatelů tvořivosti žáka (Silver, Cai; 2005).

3. kvalita vytvořených úloh

Kvalita úloh je posuzována podle toho, zda vytvořené úlohy jsou matematické nebo nematematické (tj. řešitelné i bez pomoci matematiky), věrohodné nebo nevěrohodné, a zda obsahují dostatečné informace k vyřešení úlohy (Leung, Silver, 1997).

4. komplexnost vytvořených úloh

Komplexnost vytvořených úloh je posuzována podle počtu kroků (aritmetických operací) nutných k jejich vyřešení, množství a složitosti matematických vztahů a syntaktické úrovně použitého jazyka. Autoři doporučují hodnotit matematickou nebo jazykovou komplexnost úlohy v případě, že vytvořená úloha je matematická a řešitelná, a nehodnotit úlohy, které nejsou řešitelné matematickými prostředky nebo nemají řešení (Silver, Cai, 2005).

1.5.3 Analýza *problem posing* z hlediska zdroje informací a způsobů řešení

Při zkoumání otázek vytvořených budoucími učiteli matematiky 1. a 2. stupně na základě dané situace analyzovala N. Gonzales (1996) vytvořené otázky z hlediska zdroje informací (*source of information*) použitého při formulování otázky a způsobu, jakým lze odpovědět na otázku (*response elicited*). Z hlediska zdroje informací rozlišila pět kategorií: informace daná v zadání situace, pozměněná informace ze zadání, rozšířená informace ze zadání, přidaná informace k informaci ze zadání a nejasný zdroj informace (např. pro neúplně formulované otázky). Zdrojem informací u většiny otázek byly údaje zadané v samotné situaci, u budoucích učitelů 2. stupně se vyskytlo více přidaných informací než u učitelů 1. stupně.

Z hlediska způsobu, jakým lze odpovědět na otázku, rozlišila N. Gonzales osm kategorií: pozorování zadané situace, přímý výpočet, změna symbolické reprezentace, objektivní interpretace zadaných údajů, výpočet na základě dalších výpočtů, kritické zhodnocení zadaných informací, osobní interpretace zadané situace a nejasný způsob (pro neúplné otázky, nesprávně formulované apod.). Většinu úloh bylo možné vyřešit přímým výpočtem, u učitelů 2. stupně se častěji objevil výpočet na základě dalších výpočtů než u učitelů 1. stupně, u kterých se častěji vyskytla odpověď na základě pozorování dané situace.

Výsledky výzkumu ukázaly na konzervativnější přístup skupiny učitelů 1. stupně, kteří se více drželi dané situace a nepřidávali příliš dalších údajů ani nevytvářeli varianty způsobů řešení. Většina vytvořených úloh byla na nižší kognitivní úrovni oproti úrovni znalostí studentů v matematice. Jako možnou příčinu uvádí autorka, že vytvořené úlohy byly součástí testu, což mohlo studenty vést k tvorbě jednodušších otázek (Gonzales, 1996).

1.5.4 Analýza poznávacích procesů spojených s *problem posing*

M. Pittalis a kol. (2004) a C. Christou a kol. (2005b) se zaměřili na poznávací procesy dětí mladšího školního věku použité během *problem posing* s cílem vytvořit jejich teoretický model, který by mohl být základem pro další analýzu *problem posing*. Autoři identifikovali poznávací procesy, které využívají žáci při aktivitách spojených s *problem posing* týkajících se situací obsahujících kvantitativní informace. Tyto procesy se ve větší nebo menší míře vyskytují ve všech situacích spojených s *problem posing*, každý z nich hraje významnou roli v určitém typu situace.

1. vyhledávání kvantitativních informací

Tento proces je klíčový zejména v situacích, kde je známa konkrétní odpověď, která funguje jako omezení pro výběr vhodných informací. Žáci analyzují strukturu dané situace a vhodně vybírají podstatné informace.

2. převádění určité formy kvantitativní informace do jiné formy

Převádění informací do jiné formy hraje podstatnou roli zejména v situacích, které jsou zadány obrázkem, tabulkou nebo diagramem. Žáci musí rozumět různým formám reprezentací matematických vztahů a musí je umět převést z jedné formy do jiné.

3. chápání a organizování kvantitativních informací tím, že jim dáme smysl, nebo vytváření vztahů mezi poskytnutými informacemi

Chápání informací hraje významnou roli v situacích, kde žáci tvoří úlohy na základě nějakého vzorce nebo rovnice, a vyžaduje chápání smyslu popsané operace.

4. psaní a upravování kvantitativních informací z daného podnětu.[10]

[10] 1. filtering quantitative information,

2. translating quantitative information from one form to another,

3. comprehending and organizing quantitative information by giving it meaning or creating relations between provided information,

Psaní a upravování informací je podstatné zejména v situacích, kde není *problem posing* omezeno informacemi z dané situace.

Autoři zadali několik testů na *problem posing* obsahující různé typy situací žákům ve věku 11 – 12 let. Podle výsledků testů rozdělili žáky do tří skupin:

1. žáci se spíše algoritmickým myšlením, kteří tvořili zejména úlohy obdobné úlohám v učebnicích,
2. žáci, kteří byli lépe schopni chápat vzájemné vztahy a převádět informace z jedné formy do jiné,
3. žáci, kteří byli schopni navíc vyhledat a třídit kvantitativní informace

Jako nejpodstatnější dovednost spojená s *problem posing* se projevila schopnost vyhledávání a upravování kvantitativních informací, která odlišila nejlepší žáky od ostatních. Ze závěrů výzkumu vyplývá, že tyto poznávací procesy se v různé míře vyskytují v situacích založených na *problem posing* a tento model je vhodný pro analýzu těchto situací (Christou a kol., 2005b).

1.5.5 Srovnání vytvořených úloh na základě schopností autorů řešit úlohy

S. Crespo (2003) zkoumala vývoj schopnosti tvořit úlohy u skupiny budoucích učitelů matematiky. Jejich způsob tvoření úloh se během doby trvání výzkumu výrazně změnil od většinou jednoduchých a základních úloh ke složitějším, otevřeným úlohám a problémovým situacím. Na rozdíl od předchozích výzkumů (např. Gonzales, 1996; Silver, 1996) se zde neprokázal rozdíl mezi úlohami vytvořenými studenty, kteří zároveň vykazovali rozdílnou schopnost řešit úlohy, a nebyla potvrzena korelace mezi matematickými schopnostmi studentů a jejich schopností tvořit úlohy. Podle názoru S. Crespo je jednou z příčin cílová skupina, pro kterou jsou vytvořené úlohy určeny. V předchozích výzkumech byly úlohy vytvářeny pro učitele nebo studenty samotné, kdežto v tomto výzkumu tvořili studenti úlohy přímo pro žáky, a v tomto případě nebyly úlohy vytvořené dobrým studentem vhodnější pro cílovou skupinu než úlohy vytvořené průměrným studentem.

---

4. editing quantitative information from given stimulus.

1.5.6 Shrnutí

Při analýze a hodnocení aktivit spojených s *problem posing* můžeme využít zejména následující postupy:

- analýza vytvořených úloh (množství, originalita, komplexnost, variabilita, kvalita),
- srovnávací analýza úloh vytvořených v různých situacích,
- analýza poznávacích procesů spojených s *problem posing*.

Tento výčet obsahuje nejčastěji používané přístupy používané při analýze a hodnocení aktivit spojených s *problem posing*. Další možné přístupy budou bezesporu předmětem výzkumů v budoucnosti.

1.6 Využití *problem posing* ve výuce

Jedním z nejdůležitějších témat výzkumů zabývajících se *problem posing* je jeho zařazení do kontextu matematického vzdělávání a vztah k dalším (matematickým) dovednostem a schopnostem žáků. Mnozí autoři (Leung, Silver, 1997; Stoyanova, 2000; Christou et al., 2005a; a další) se zabývají vztahem *problem posing* a řešením úloh. Další autoři (Camensisch, Petit; 2005) využívají *problem posing* jako nástroj rozvoje žákovské kompetence k práci s mateřským jazykem a čtení s porozuměním.

1.6.1 *Problem posing* a řešení úloh

E. A. Silver (1994) popisuje jako jeden ze základních charakteristických rysů *problem posing* jeho pozitivní vliv na schopnost žáků řešit slovní úlohy. Podle něj je jedním z důvodů, že dobře provedená analýza zadání úlohy v rámci *problem posing* může pomoci zařadit úlohu do kontextu dosavadních matematických znalostí žáků a usnadnit jim rozhodování o uplatnění konkrétní řešitelské strategie. Následující dva příklady naznačují souvislost mezi *problem posing* a řešením úloh.

E. Stoyanova (2000) zkoumala, jak zlepšit žákovské schopnosti řešení slovních úloh prostřednictvím *problem posing.* Zaměřila se na tři základní charakteristiky slovních úloh, na jejichž základě popsala tři skupiny otázek:

1. otázky týkající se jazykové stránky úlohy

První skupinu tvoří otázky a úkoly zaměřené na porozumění jazykové stránce slovní úlohy, pochopení neznámých slov a vazeb v zadání a případné přeformulování úlohy vlastními slovy jako např.: Jaká jsou klíčová slova? Jaká jsou neznámá slova? Jak můžeme říct úlohu jinými slovy? Jak můžeme přeformulovat úlohu, aby byla kratší, srozumitelnější, jasnější?

2. otázky týkající se struktury úloh a jejích vlastností

Druhou skupinu tvoří otázky a úkoly zaměřené na porozumění struktuře slovní úlohy, vyhledání a třídění podstatných informací a prezentaci přeformulované úlohy, jako např.: Jaké informace jsou zadány? Jaké jsou omezující podmínky? Je přeformulované zadání stejné jako původní zadání? Jaké změny zadání mohou vést k obdobné, snazší, obtížnější úloze?

3. otázky týkající se řešení úlohy

Třetí skupinu tvoří otázky zaměřené na řešení a postup řešení úlohy, možných fází řešení, podobně nebo stejně řešitelných úloh a různé změny zadání ovlivňující postup řešení, jako např. : Jakou úlohu podobnou této nevyřešené úloze můžeme vytvořit? Jaké jsou hlavní fáze postupu řešení? Jaké změny v zadání by změnily způsob řešení? Jaká úloha má stejný postup řešení jak vytvořená úloha?

Autorka formuluje i další otázky, které mohou pomoci žákům v hledání řešení úlohy v různých fázích procesu řešení (pre- , within- a post- solution posing, viz Silver, 1994). Hlavním cílem zařazení *problem posing* do výuky nebylo odpovědět na konkrétní otázku nebo vyřešit úlohu, ale kultivovat návyky žáků při řešení úloh pomocí analýzy zadání úlohy z různých hledisek. (Stoyanova, 2000)

C. Christou a kol. (2005a) využili ve svém výzkumu dynamický geometrický software[11] pro rozvoj aktivit spojených s řešením úloh a *problem posing*. Jedním z jejich cílů bylo zkoumat, jak může tento software sloužit jako prostředník pro generování nových úloh. Několik budoucích učitelů mělo za úkol vyřešit následující dvě úlohy:

Úloha 1. Představitelé čtyř měst plánují výstavbu letiště pro občany těchto měst. Najděte optimální umístění letiště tak, aby bylo umístěno spravedlivě pro obyvatele všech čtyř měst.

Úloha 2. Jaký útvar ohraničují osy vnitřních úhlů rovnoběžníku?[12]

[11] Geometer's Sketchpad (www.dynamicgeometry.com).

Pro tvorbu dalších úloh v rámci *post – solution posing* byla pro studenty inspirací zejména druhá úloha, která je zadána standardním způsobem. Pomocí manipulace se sestrojeným útvarem objevili studenti učitelství zvláštní případy řešení a rozšířili nebo zobecnili danou úlohu změnou původních údajů. Manipulace s objekty pomocí software umožnila studentům získat lepší vhled do situace, modelovat, experimentovat, stanovovat hypotézy a zobecňovat informace. Výzkum ukázal, že v prostředí dynamického geometrického software proces řešení úloh zahrnuje i *problem posing* a toto prostředí zároveň podporuje schopnost hledání souvislostí mezi použitím konkrétní řešitelské strategie a tendencí tvořit rozšiřující a zobecňující úlohy.

1.6.2 *Problem posing* jako diagnostický nástroj

Aktivity založené na *problem posing* bývají někdy používány k získání informací o matematických znalostech a dovednostech žáků. Např. autoři projektu Making Mathematics (Education Development Center, 2002) doporučují hodnotit jednak schopnost žáků jasně a přesně formulovat otázky a zadání úloh, dále pak originalitu otázek a zadání úloh vzhledem k znalostem žáků i k obecně známým otázkám.

E. A. Silver a J. Cai (2005) ukazují možnost využití *problem posing* k hodnocení toho, jak žáci rozumí daným pojmům a vztahům, pomocí aktivity, během které mají vytvářet a řešit různé úlohy, které lze vyřešit pomocí dělení.

P.–J. Lin (2004) použila ve svém výzkumu *problem posing* jako nástroj hodnocení porozumění žáků matematice a zdroj informací pro další vyučovací aktivity. Skupina učitelů vytvořila hodnotící tým, jehož každý člen připravoval hodnotící nástroje formou úkolů obsahujících nějakou otevřenou otázku směřující k tvorbě úloh. Úkoly, které učitelé pro své žáky vytvořili, byly následně rozděleny do čtyř kategorií:

1. tvorba slovní úlohy na základě číselného výrazu,
2. formulování slovní úlohy na základě obrázku,
3. formulování slovní úlohy podle matematického vyjádření (např. 6 množin po 5 prvcích),

[12] Problem 1. The authorities of four towns are planning to build an aeroport that will serve the needs of their citizens. Identify the optimal place for the location of the airport so that the needs of the four towns are served in a fair way.

Problem 2. What is the figure formed by the angle bisectors of the interior angles of the parallelogram?

4. formulování slovní úlohy na základě žákovských postupů řešení.

Prostřednictvím analýzy žákovských řešení vytvořených úloh získali učitelé informace o úrovni porozumění žáků daným matematickým tématům. Zařazení tohoto typu úloh poskytlo učitelům nástroj hodnocení využívající analýzu žákovských řešení, jejich ústních prezentací a diskusí o zadaných úkolech.

M. Tichá (2008) popsala ve své studii zabývající se nutností rozvíjení profesní kompetence učitelů *problem posing* jako nástroj diagnostiky porozumění pojmu zlomek a reedukace případných chyb. Žákům 2. stupně ZŠ, střední školy a budoucím učitelům 1. stupně ZŠ bylo zadáno několik různých operací se zlomky. Úkolem respondentů bylo vytvořit úlohy, které bylo možné vyřešit pomocí zadaných operací. Vytvořené úlohy ukázaly v některých případech nedostatky v chápání pojmu zlomek, jako např. směšování různých interpretací pojmu zlomek (operátor, poměr, část – celek, podíl, míra). M. Tichá zdůraznila, že pro efektivní využití *problem posing* jako diagnostického a reedukačního nástroje je nutné propojit tvoření úloh s jejich řešením a zařadit diskusi o vytvořených úlohách doplněnou o společnou reflexi autorů úloh s výzkumníkem.

Výše uvedené výzkumy ukazují možnost využití *problem posing* jako diagnostického nástroje pro hledání nedostatků v porozumění matematice, protože na aktivitách spojených s *problem posing* lze zároveň sledovat větší množství různých dovedností a při propojení s řešením úloh lze tyto nedostatky dobře odhalit. Otázkou zůstává, podle jakých kritérií jednotlivé dovednosti hodnotit a jakým způsobem zahrnout hodnocení aktivit spojených s *problem posing* do celkového hodnocení žáků v matematice.

1.6.3 *Problem posing* ve výuce matematiky

Kromě využití *problem posing* k analýze žákovských znalostí matematiky a k obecnému rozvoji matematických znalostí je možné nahlížet na *problem posing* jako na samostatnou aktivitu, která je součástí výuky stejně jako např. řešení úloh nebo procvičování základních početních dovedností. Jako příklad jsou uvedeny aktivity realizované v následujících projektech:

Autoři projektu Making Mathematics (Education Development Center, 2002) doporučují např. vzít úlohu a napsat všechny explicitní i implicitní informace a podmínky vyplývající ze zadání úlohy. Další možnou aktivitou je z daného zadání úlohy vytvořit pomocí jeho změn co nejvíce nových úloh.

A. Camensisch a S. Petit (2005) využili aktivity spojené s *problem posing* jako nástroj pro rozvoj čtení zadání úloh s porozuměním. Žáci 1. stupně základní školy měli třídit zadání úloh podle různých kritérií, vytvořit příběh podle zadání úlohy a naopak, vytvořit zadání úlohy podle příběhu. Kromě rozvoje schopnosti analyzovat zadání úlohy přispěla tato aktivita také k rozvoji schopnosti práce s mateřským jazykem.

J. Novotná a kol. (2012) při výzkumu kultury třídy při řešení slovních úloh použili *problem posing* při seznámení žáků s matematickým modelem slovní úlohy. Žáci 2. stupně ZŠ byli nejprve seznámeni s konkrétní slovní úlohou a jejím řešením, poté ve skupinách tvořili úlohy, které se řeší stejným způsobem jako daná úloha. Následovala diskusní část, během které jednotlivé skupiny prezentovaly vytvořené úlohy ostatním, kteří hodnotili shodu jejich matematického modelu s daným modelem. Tvorba slovních úloh měla pomoci žákům k porozumění matematické struktuře slovní úlohy a tím ke zlepšení schopnosti řešit slovní úlohy.

1.7 Shrnutí

Problem posing zahrnuje širokou škálu činností, které vycházejí z analýzy dané situace a směřují k jejím modifikacím a vytváření nových situací. Schopnost žáků analyzovat a tvořit zadání úloh může vypovídat o úrovni pochopení matematických pojmů a vztahů a napomoci k řešení různých úkolů, zejména slovních úloh. Možnosti analýzy a hodnocení aktivit spojených s *problem posing* nejsou zatím zcela prozkoumány a chybí jim jednotící teoretický základ. Analýza aktivit spojených s *problem posing* je obtížná, protože se jedná o otevřenou úlohu a její výstupy jsou ovlivněny velkým množství proměnných. Konkrétní příklady využití *problem posing* ve vyučování naznačují jeho potenciál jako vyučovací aktivity vedle tradičních aktivit, zejména jako vhodný doplněk k řešení úloh a jako vhodný diagnostický nástroj porozumění matematice.

Kapitola 2. Slovní úloha ve vyučování matematice

Slovní úlohy se vyskytují ve vyučování matematice již od starověku. Jejich využití ve výuce je různorodé, jejich význam je nesporný pro propojení matematiky a reálného života.

Způsob zařazení slovních úloh do výuky záleží zejména na učiteli a prochází stálým vývojem, od izolovaných slovních úloh a jejich sbírek až po slovní úlohy tematicky či jinak spojené (např. v rámci projektového vyučování). V této kapitole se budeme věnovat zavedení pojmu slovní úloha, rozlišíme jednotlivé složky a typy slovních úloh, popíšeme způsoby jejich využití ve vyučování a nakonec uvedeme způsoby, jakými byly slovní úlohy analyzovány v rámci některých výzkumů v didaktice matematiky.

2.1 Slovní úloha, způsob zadání slovní úlohy

Pojem slovní úloha je v literatuře definován různým způsobem, zejména v závislosti na konkrétním výzkumu a jeho cílech. Ukážeme několik příkladů definic slovních úloh pocházejících z prací zabývajících se řešením slovních úloh:

L. Verschaffel a kol. definují slovní úlohu následujícím způsobem:

> Slovní úlohy mohou být definovány jako slovní popisy problémových situací, ve kterých je položena jedna nebo více otázek, na něž lze odpovědět s využitím matematických operací aplikovaných na číselné údaje dostupné v zadání úlohy (Verschaffel a kol., 2000, s. ix).[13]

Za slovní úlohy nepovažují slovně vyjádřené matematické operace jako např. Co získáte, když odečtete 3 od 8? (Verschaffel a kol., 2000, s. ix)[14]

Z. Semadeni (1995) charakterizuje slovní úlohu jako takovou úlohu, která vždy obsahuje tři základní složky:

1. matematická struktura (známá a neznámá čísla a jejich vzájemné vztahy)
2. kontext (o čem je slovní úloha)
3. formát (způsob prezentace slovní úlohy)

---

[13]Word problems can be defined as verbal descriptions of problem situations wherein one or more questions are raised the answer to which can be obtained by the application of mathematical operations to numerical data available in the problem statement.

[14]What do you get if you subtract 3 from 8?

Slovní úlohy mohou být podle něj vyjádřeny jak písemně, tak ústně, musí ale obsahovat nějaké slovní vyjádření, což je odlišuje od úloh čistě matematických.

V české literatuře vymezuje pojem slovní úloha např. J. Vyšín, a to následujícím způsobem:

> Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy. (Vyšín, 1972, s. 107)

Takto vymezené slovní úlohy rozděluje do dvou skupin:

> První skupinu tvoří matematické úlohy, které jsou vysloveny z větší části slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů. [...]
>
> Druhou skupinu tvoří úlohy matematického charakteru, jejichž témata jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd. (Vyšín, 1972, s. 107 – 108)

M. Hejný definuje slovní úlohu následujícím způsobem:

> Termínom slovná úloha rozumieme matematickú úlohu, ktorá vyžaduje jazykové porozumenie a presah do životnej skúsenosti. (Hejný, 2003, s. 3)

Na rozdíl od J. Vyšína neomezují L. Verschaffel a kol. nebo M. Hejný slovní úlohy na aritmetické nebo algebraické, slovní úlohy mohou naopak vycházet i z dalších oblastí matematiky. Jejich pojetí způsobu zadání slovní úlohy je také obecnější než u Z. Semadeniho, jelikož připouští zadání psaným textem i ústně, ale také kombinací psaného textu a tabulky, obrázku nebo náčrtku atd. Další definice pojmu slovní úloha lze najít například v (Novotná, 2000, s. 7 – 11). Vzhledem k zaměření výzkumu budeme vycházet z pojetí pojmu slovní úloha podle M. Hejného, do nějž lze zařadit téměř všechny úlohy vytvořené žáky během experimentů.

2.2 Typologie slovních úloh

Slovní úlohy lze dělit podle různých kritérií, které mohou vycházet např. z charakteristik slovní úlohy uvedených v předchozím odstavci. Pro náš výzkum jsou důležité způsoby dělení podle oblastí matematiky a dělení podle kontextu (Novotná 2000, s. 16 – 19).

2.2.1 Dělení podle oblasti matematiky

Podle oblastí matematiky můžeme rozlišit slovní úlohy na aritmetické, algebraické, geometrické, kombinatorické, logické a další slovní úlohy. Příslušná oblast matematiky může vyplývat ze zadání úlohy nebo z úmyslu autora, řešitel ale může úlohu převést a vyřešit v rámci jiné oblasti matematiky. Často se vyskytují i úlohy spadající zároveň do více oblastí matematiky. Za **aritmetickou slovní úlohu** budeme považovat takovou úlohu, pro jejíž vyřešení je třeba využít jen aritmetické operace (sčítání, odčítání, násobení dělení atd.) a všechny vstupní číselné údaje jsou známé. Ostatní početní úlohy budeme považovat za **algebraické** (založené zpravidla na nalezení neznámé prostřednictvím rovnice nebo soustavy rovnic) nebo **kombinatorické**, kde je cílem určit počet prvků množiny. **Geometrická slovní úloha** je taková, která je založena na studiu tvarů, velikostí a vzájemných vztahů rovinných nebo prostorových útvarů, přičemž je možné ji vyřešit buď pomocí konstrukce nebo pomocí výpočtů a zařadit tak i mezi např. aritmetické nebo algebraické úlohy.

2.2.2 Dělení podle kontextu slovní úlohy

J. Novotná (2000) shrnuje způsoby dělení slovních úloh podle kontextu používané v učebnicích a rozlišuje následující druhy úloh, kterými se zabývá ve své práci: slovní úlohy o pohybu, o společné práci, o směsích, o obsahu a o dělení celku na části. K těmto typům úloh jsme doplnili další, které se objevily mezi úlohami vytvořenými v rámci naší výzkumné situace.

Slovní úlohy o dělení celku na části bývají ve vyučování často zařazeny jako aplikační úlohy pro rovnice. Tyto úlohy se dále dělí na následující čtyři typy podle povahy neznámé v zadání úlohy:

- v zadání slovní úlohy vystupuje zadaný celek a otázka úlohy je směřována na velikosti jeho částí,
- z textu úlohy jsou známy velikosti částí, otázka úlohy je směřována na velikost celku,
- z textu úlohy je známa velikost celku a některé z jeho částí, otázka úlohy je směřována na velikost zbývajících částí,
- z textu úlohy je známa velikost celku a velikosti jeho částí, otázka úlohy je směřována na počet částí celku (Novotná, 2000).

Slovní úlohy o procentech lze sice považovat za speciální případ dělení celku na části, v této práci budeme brát slovní úlohy o procentech a o dělení celku na části jako dva různé typy. Jedná se o úlohy, ve kterých je otázka směřována na základ, počet procent nebo procentovou část.

Slovní úlohy o pohybu jsou takové, kde se vyskytují ve vzájemném vztahu dráha, čas, rychlost a zrychlení, a otázka směřuje na některé z těchto informací.

Slovní úlohy o obsahu jsou takové, ve kterých je jedním z úkolů vypočítat obsah rovinného obrazce – čtverce, trojúhelníku, mnohoúhelníku nebo kruhu.

Slovní úlohy o obvodu jsou takové úlohy, ve kterých je jedním z úkolů vypočítat obvod rovinného obrazce – čtverce, trojúhelníku, mnohoúhelníku nebo kruhu.

Slovní úlohy o objemu jsou takové úlohy, ve kterých je jedním z úkolů vypočítat objem tělesa – hranolu, rotačního tělesa nebo libovolného nepravidelného tělesa.

Slovní úlohy o délce jsou takové úlohy, ve kterých je jedním z úkolů vypočítat délku nějaké trasy nebo lomené čáry. Nejedná se o úlohu o pohybu, v zadání nevystupují ani rychlost ani čas.

Kombinatorické slovní úlohy jsou takové úlohy, ve kterých je jedním z úkolů určit počet prvků nějaké množiny.

Konstrukční slovní úlohy jsou takové úlohy, ve kterých je jedním z úkolů zakreslit určitý objekt (čáru, trasu, mnohoúhelník), případně využít dané shodné nebo podobné zobrazení ke konstrukci objektu.

Pro úplnost uvádíme, že mezi úlohami vytvořenými v rámci naší výzkumné situace se vyskytly i další typy úloh, které byly zastoupeny nejvýše jednou nebo dvěma úlohami, jako např. nematematické úlohy (bez využití matematického aparátu), úlohy na porovnávání číselných údajů, úloha na vyčíslení chemické rovnice nebo úloha na čtení údajů z grafu.

2.3 Struktura slovní úlohy

L. Verschaffel a kol. (2000, s. x) shrnují následující základní charakteristické složky slovních úloh:

- matematická struktura (povaha údajů v zadání, povaha neznámé, matematické operace potřebné k nalezení neznámé z daných údajů)
- sémantická struktura (jakým způsobem odkazuje interpretace textu na konkrétní matematické vztahy)
- kontext (o čem je slovní úloha)

- formát (způsob formulace a prezentace slovní úlohy, umístění otázky v textu, struktura vět a souvětí, přítomnost nadbytečných údajů atd.)

Jiný, tzv. anatomický přístup ke slovní úloze používá M. Hejný (2003), který ji popisuje pomocí čtyř vrstev:

1. Vrstva príbehu či situácie sa týka rámcových predstáv o úlohe.
2. Vrstva objektov sa týka toho, čo tvorí „podmet" textu úlohy.
3. Vrstva vzťahov sa týka väzieb medzi objektmi úlohy.
4. Vrstva matematického modelu prezentuje prepis textu úlohy do formalizovaného jazyka.

Oba přístupy ke struktuře slovní úlohy se navzájem překrývají a doplňují, např. vrstva příběhu nebo situace a kontext slovní úlohy. V této práci budeme vycházet z charakteristiky L. Verschaffela a kol. a v následující části se budeme podrobněji věnovat jednotlivým charakteristickým složkám, které pro nás budou východiskem pro stanovení proměnných pro studium variability slovních úloh.

2.3.1 Matematická struktura slovní úlohy

Slovní úlohu lze chápat jako reprezentaci určitého matematického modelu a naopak, daný matematický model lze reprezentovat pomocí jedné nebo více slovních úloh. Může se jednat o model jednoduchý – několik kvantitativních údajů a informací svázaných jednoduchým vztahem, nebo složitější, který obsahuje větší množství kvantitativních údajů, informací o nich a různorodé vztahy. Při zkoumání vytvořených úloh zavedeme a popíšeme mj. proměnné, které se vztahují k matematickému modelu slovní úlohy. Z tohoto důvodu ukážeme několik pojetí matematického modelu slovní úlohy a zavedeme pojem matematický model slovní úlohy, z nějž pak odvodíme proměnné, které se k němu vztahují.

F. Kuřina (1978, s. 645 – 646) popisuje obecně matematický model reality:

> Model reality bude tedy určen uspořádanou trojicí [K, R, V], kde K je množina symbolů, které používáme k označení objektů poznávané části skutečnosti, R je množina symbolů relací odpovídajících poznaným vztahům a V je soubor výroků o dosud poznávaných vlastnostech reality, jež jsou formulovány ve vhodném jazyku.

H. Freudenthal (1986, s. 49 – 51) popisuje dva pohledy na matematický model: *model as pre-image, model as after-image* (na příkladu hry Člověče, nezlob se). *Model as pre-image* je abstraktní hrací deska, podle které byly vyrobeny konkrétní hrací desky. Jiný příklad může být báseň nebo píseň taková, jak ji autor vytvořil ve svých myšlenkách. *Model as after-image* může být reprezentován několika hracími deskami (identickými, od různých výrobců, jinak barevnými), které ale reprezentují jeden abstraktní objekt – hrací desku na Člověče, nezlob se. Několik různých provedení téže písně, několik podání recitace téže básně jsou dalšími příklady tohoto typu modelu.

V aplikované matematice se používá modelování pro popis reálných dějů. Matematický model úlohy můžeme popsat jako přesný matematický popis vztahů, které určují studovaný děj.

Obecný pohled na matematický model a jeho vlastnosti nabízí encyklopedie Wikipedia:

> Matematický model je formulací určitého pozorování prostřednictvím matematických nástrojů, technik a teorie a naopak, v obecném významu, interpretace matematických výsledků do předpovědí a operací v reálném světě. Model je považován za vhodný, pokud pokrývá reálný problém v celé jeho šíři, umožňuje získat výsledek v požadované lhůtě a lze jej znovu použít[15].

V souladu s předchozími definicemi budeme chápat matematický model slovní úlohy jako popis vzájemných vztahů mezi informacemi v zadání úlohy, které lze vyjádřit pomocí matematických prostředků. Tyto vztahy se zpravidla týkají číselných údajů, případně polohy geometrických útvarů, a jsou vyjádřeny pomocí matematických prostředků (relací, operací). Slovní úlohu budeme chápat jako reprezentaci určitého matematického modelu a naopak, každý matematický model budeme chápat jako reprezentaci určité skupiny úloh.

2.3.2 Sémantická struktura slovní úlohy

Sémantická struktura slovní úlohy se týká významu jednotlivých částí textu (slov, slovních spojení, vět...) a jejich interpretace vzhledem k výběru způsobu řešení a vytváření matematického modelu úlohy. Tato interpretace tedy umožňuje řešiteli, aby si vytvořil určitou

[15] Un modèle mathématique est une traduction d'une observation dans le but de lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel. Un modèle est pertinent s'il couvre bien le champ du problème réel, s'il permet d'obtenir le résultat escompté: dans le délai souhaité et réutilisable.

představu o úloze, kterou následně zpracuje do matematického modelu úlohy a úlohu řeší. Zároveň mohou být různé interpretace významu textu překážkou pro správné vyřešení slovní úlohy. Např. Fayol a kol. (1987) zkoumali úspěšnost řešení aritmetických slovních úloh žáků 1. stupně na základě tří proměnných: umístění otázky v textu, povaha neznámé (výchozí stav vs. finální stav) a vzájemná poloha daného známého vztahu nebo transformace v zadání úlohy. Na úspěšnost řešení úloh měly vliv zejména povaha neznámé a umístění transformace v textu, naopak umístění otázky v textu nemělo významný vliv na úspěšnost řešení. Autoři se přesto domnívají, že umístění otázky na začátek úlohy může pomoci žákům při třídění a zpracování dalších údajů v zadání (Fayol a kol., 1987).

Dalším charakteristickým rysem je tzv. sémantický indikátor (Sarrazy, 2002), (jednoslovný) výraz, který odkazuje na proces, který může implikovat způsob řešení. Takovým indikátorem může být např. sloveso koupit, prodat, nebo výrazy dohromady, o několik více apod. Tento pojem bývá v literatuře označován i jako signál nebo signální slovo.

2.3.3 Kontext slovní úlohy

Matematické úlohy mohou mít buď čistě matematický kontext, nebo reálný kontext (reálné nebo fiktivní téma s možnými společenskými nebo kulturními aspekty). Ve výuce matematiky je role reálného kontextu významná pro žákovo vnímání užitečnosti a praktického využití matematiky a pro jeho motivaci v učení se matematice. V případě úloh řešených ve škole se ale nejedná o zcela reálnou situaci, což umožňuje určité zjednodušení a zpřístupňuje žákům aspoň částečný vhled do situace, která by v reálném životě byla příliš složitá. Při práci se slovními úlohami jsou žáci také vedeni k odhalování určitého algoritmu v různých kontextech. O. Chapman (2006) zkoumala, jak učitelé různých typů škol pracují s kontextem slovních úloh ve své praxi. Ve svém výzkumu popisuje dva základní způsoby myšlení, na jejich základě studuje přístup učitelů (a žáků) ke kontextu slovních úloh:

1. Paradigmatický způsob myšlení

Paradigmatický způsob myšlení je založen na hledání univerzální, dekontextualizované pravdy a obecných příčin jevů, formálních ověřeních a důkazech založených na dobrém teoretickém základě. Při práci učitelů se slovními úlohami se tento způsob myšlení projevil zejména zaměřením na hledání řešení úlohy, hledáním dekontextualizovaného a univerzálního řešení, popisováním a seskupováním úloh podle jejich matematické struktury a celkovým zaměřením na matematický model a strukturu.

2. Narativní způsob myšlení

Narativní způsob myšlení je zaměřen na hledání významu zkušeností, detailní informace související s daným kontextem, kritiku a interpretaci daného textu, dobré a napínavé příběhy a lidské záměry a činy. Při práci učitelů se slovními úlohami se tento způsob myšlení projevil zejména zaměřením na význam a kontext slovní úlohy, detailním rozborem úlohy z hlediska kontextu a speciálních případů a kritickou analýzou a interpretací zadání úlohy.

Podle závěrů výzkumu by se oba tyto přístupy k práci s kontextem slovních úloh měly doplňovat a kombinovat, aby obohatily a rozvinuly práci žáků se slovními úlohami (Chapman, 2006).

Kontext slovní úlohy může ovlivnit úspěšnost žáků při řešení slovní úlohy. Žákům známý kontext úlohy je může vést k výběru řešitelských strategií, které využili při řešení úloh se stejným nebo podobným kontextem. Některé formulace úlohy související s jejím kontextem mohou být překážkou v porozumění úloze a tím i v jejím vyřešení. L. Verschaffel a kol. (2000) zmiňují, že ve vyučování matematice se často objevují tendence k dekontextualizaci slovních úloh, k omezení jejich reálného přesahu a tím i k ztrátě jednak jejich motivační a podnětné funkce pro žáky, jednak schopnosti propojit matematickou a reálnou složku úlohy (viz kapitola 2.4).

2.3.4 Formát slovní úlohy

Do formátu slovní úlohy patří následující charakteristiky: způsob formulace a prezentace slovní úlohy, umístění otázky v textu, struktura vět a souvětí v zadání úlohy, přítomnost nadbytečných údajů v zadání úlohy (viz např. Sarrazy, 2002, s. 5 – 8). Slovní úloha může být prezentována prostřednictvím textu, obrázku nebo symbolického zápisu, případně kombinací těchto forem. Jednotlivé charakteristiky formátu slovní úlohy mohou ovlivnit úspěšnost žáků při řešení úloh. Např. formulace použité v zadání úlohy nebo složitá struktura vět a souvětí mohou ovlivnit úspěšnost žáků při interpretaci zadání, přítomnost nadbytečných údajů může některé žáky vést ke snaze použít i tyto údaje a tím k nesprávnému řešení.

2.4 Slovní úloha ve vyučování matematice

L. Verschaffel a kol. (2000, s. xi – xii) popisují následující funkce, které slovní úlohy plní ve vyučování matematice [16]:

1. aplikační funkce (aplikace matematických poznatků v různých situacích)
2. motivační funkce (možnost žáků využít naučené matematické dovednosti v reálném životě)
3. selekční funkce (hodnocení inteligence a matematických schopností žáků)
4. podnětná funkce (rozvíjení kreativního myšlení, heuristických dovedností a schopností řešit problémy)
5. pojmotvorná funkce (rozvíjení nových matematických pojmů a dovedností)

Efektivní používání slovních úloh ve vyučování, které by umožnilo naplnit všechny nebo aspoň většinu výše zmíněných funkcí slovních úloh, by mělo být součástí komplexnějšího procesu (matematického modelování reálné situace) obsahujícího následující fáze: porozumění popsané situaci, vytvoření matematického modelu situace popisujícího podstatné prvky a vztahy situace, použití matematického modelu, interpretace výsledků a jejich souvislostí s původní situací a nakonec sdělení interpretovaných výsledků (Verschaffel a kol., s. xii).

Jsou-li slovní úlohy používány izolovaně a plní pouze aplikační funkci pro početní algoritmy, tj. nejsou-li používány jako součást komplexnějšího procesu, může docházet k nežádoucím situacím, jako např. k nepropojení matematické a kontextové složky úlohy. Přestože kontext slovní úlohy může být reálný nebo fiktivní, nemělo by docházet při řešení slovních úloh k využití matematických operací bez vhodné interpretace kontextu. Jako příklad uvedeme úlohu zadanou výzkumníky z Grenoblu (1979):

Na lodi je 26 ovcí a 10 koz. Kolik let je kapitánovi?[17]

V této úloze „vypočítalo“ 76 z 97 žáků kapitánův věk na základě číselných údajů ze zadání, aniž by si všimlo neadekvátností údajů vzhledem k zadané otázce. V Teorii didaktických situací (viz kapitola 4) lze tuto skutečnost interpretovat pomocí pojmů *didaktický kontrakt*

[16]application, motivation, selection, thought – provoking and concept – formation function

[17]Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine?

a *citlivost vůči didaktickému kontraktu* (Sarrazy, 2002). V takové situaci mají žáci dvě základní možnosti: zachovat se stejně jako v obdobných situacích, respektovat domnělý záměr učitele a vypočítat kapitánův věk, nebo označit úlohu za nesmyslnou a neřešit ji. Chybnou interpretaci úlohy a její řešení nelze vždy považovat za důsledek žákovy neznalosti nebo nepropojení matematické a reálné složky, ale je třeba zkoumat i důvody, které ho vedly k jeho odpovědi.

L. Verschaffel a kol. (2000, s. 3 – 14) uvádějí další příklady úloh, kde žáci „vyřešili“ úlohu (resp. použili vhodný matematický postup), ale zároveň nepropojili řešení s reálným kontextem, a úlohu tak správně nevyřešili, přestože jejich matematické řešení bylo v pořádku. Matematické modelování reálné situace během výuky matematiky neobsahuje vždy všechny potřebné fáze, zejména pak chybí fáze vhodného porozumění úloze a fáze vytvoření modelu situace spojená s následnou interpretací úlohy po využití matematických postupů (Verschaffel a kol., 2000, s. 13), čímž dochází ke stereotypnímu využívání naučených početních algoritmů a povrchnímu využívání slovních úloh k propojení matematiky a reálného světa.

2.5 Některé metody analýzy slovních úloh

Metody analýzy a způsoby popisu slovních úloh v různých výzkumech pro nás budou východiskem pro analýzu slovních úloh vytvořených v rámci našeho výzkumu. Na tomto místě je třeba připomenout, že se v našem případě nejedná o analýzu řešení slovních úloh s cílem popsat způsob řešení a případné chyby při řešení, ale o analýzu slovních úloh samotných z různých pohledů. Některé námi stanovené proměnné popisující slovní úlohy se však budou týkat jejich řešení, např. z pohledu řešitelnosti, počtu řešení nebo způsobů řešení vytvořených slovních úloh.

P. Nesher (1976) ve svém výzkumu o obtížích při řešení slovních úloh shrnuje dva základní přístupy, které do té doby používali výzkumníci při zkoumání obtíží při řešení slovních úloh: překladatelský přístup a přístup zkoumající strukturální proměnné[18]. Překladatelský přístup rozlišuje v rámci zadání slovní úlohy obecný jazyk a matematický jazyk a upozorňuje na problémy, které vznikají při přechodu z jednoho jazyka do druhého (viz např. Kane, 1967).

Přístup zkoumající strukturální proměnné se zabývá proměnnými, které ovlivňují žáky při řešení slovních úloh. Z nich sledovala P. Nesher (1976) ve svém výzkumu následující tři proměnné: počet binárních operací nutných k vyřešení úlohy, přítomnost/nepřítomnost

[18]the translation approach and the structural variables' approach

nadbytečné informace v zadání slovní úlohy a přítomnost/nepřítomnost signálního slova v zadání úlohy. Ve své práci vycházela z výzkumu probíhajícího na univerzitě ve Stanfordu, jehož cílem bylo najít strukturální proměnné slovních úloh, použít je při vytváření kurikula pro řešení slovních úloh a na základě těchto proměnných předvídat žákovskou úspěšnost při řešení slovních úloh. Konkrétně např. B. Searle a kol. (1974) se zabývali výukou řešení aritmetických slovních úloh dvou skupin žáků – sociálně znevýhodněných a neslyšících žáků – pomocí počítačového programu. V rámci přípravy kurikula popsali autoři strukturální proměnné, které popisují slovní úlohu a ovlivňují úspěšnost žáků při řešení aritmetických slovních úloh. Tyto proměnné jsou vybrány tak, aby charakterizovaly jednak standardní postup řešení úlohy, jednak samotné zadání úlohy. Několik proměnných se týká matematické povahy úlohy, která ale nemůže být jednoznačně identifikována v postupu řešení. Většina zadaných úloh měla jeden standardní postup řešení, v případě více standardních postupů byl vybrán takový, který buď odpovídal postupu z učebnice, nebo vycházel z proměnných přiřazených danému algoritmu nebo vycházel ze zkušeností autorů s nejčastějšími žákovskými postupy při řešení úloh. Proměnné byly několikrát revidovány, zpřesňovány a dále členěny na základě analýzy dat získaných z žákovských řešení zadaných úloh, Výsledkem je následující seznam základních použitých proměnných:

1. minimální počet různých aritmetických operací nutných k vyřešení úlohy
2. minimální počet kroků nutných k vyřešení úlohy
3. počet slov v zadání úlohy (každé číslo je počítáno jako 1 slovo)
4. úloha obsahuje převod jednotek, který je nutné provést, a zároveň její zadání tyto jednotky neobsahuje
5. úloha obsahuje signální slovo (pro každou operaci nebo aspoň pro konkrétní operace sčítání, odčítání, násobení nebo dělení)
6. pořadí čísel v zadání úlohy je stejné jako v postupu řešení
7. řešení úlohy vyžaduje znalost vzorce, který není součástí zadání úlohy
8. slovo průměr se vyskytuje v zadání úlohy a při řešení úlohy je třeba spočítat průměr
9. řešení úlohy vyžaduje sčítání
10. řešení úlohy vyžaduje odčítání

11. řešení úlohy vyžaduje násobení
12. řešení úlohy vyžaduje dělení
13. délka nejdelšího slova v zadání
14. počet slov v nejdelší větě
15. počet vět v zadání
16. úloha obsahuje převod jednotek, který je nutné provést, a zároveň její zadání tyto jednotky obsahuje
17. zadání úlohy je algebraické, neobsahuje příběh
18. počet konstant v postupu řešení
19. typ odčítání: Mám *a*, odečtu *b*, kolik zbude?
20. typ odčítání: Mám *b*. Kolik navíc potřebuji, abych získal *a*?
21. typ odčítání: $b' + c' = a$, $b' = b$. Tedy $c' = ?$
22. typ odčítání: $a' - c' = b$, $a' = a$. Tedy $c' = ?$
23. pořadí úlohy ve skupině úloh k vyřešení
24. postup řešení úlohy je stejný jako postup řešení předchozí úlohy
25. slovo průměr se vyskytuje v zadání úlohy a pro vyřešení úlohy je třeba spočítat průměr

Ze statistického zpracování analýzy proměnných nevyšly významné rozdíly mezi skupinou neslyšících a skupinou sociálně znevýhodněných žáků. Obě skupiny byly přibližně stejně úspěšné při řešení úloh z hlediska analýzy proměnných, což by mohlo ukázat na potenciál obdobně definovaných proměnných pro studium řešení slovních úloh.

Strukturální proměnné použil ve svém výzkumu založeném na tvorbě úloh B. Sarrazy (2002), který zkoumal souvislost schopnosti učitelů 1. stupně základní školy vytvořit různorodá zadání úlohy (úlohy obsahující právě jedno sčítání nebo odčítání lišící se podle obtížnosti) s citlivostí jejich žáků vůči didaktickému kontraktu[19]. B. Sarrazy analyzoval zadání úloh vytvořená těmito učiteli na základě 14 proměnných rozdělených do tří skupin:

[19] viz např. Brousseau (1998), s. 61

A. Numerické proměnné

1. typ použitých čísel (rozlišení velkých a malých čísel na základě možnosti použít jednoduchou početní operaci)
2. přítomnost/nepřítomnost nadbytečných číselných údajů

B. Rétorické proměnné

3. přítomnost/nepřítomnost sémantického indikátoru v zadání (přítomnost slov v zadání, která mohou odkazovat na určitý proces, např. koupit, o *x* více)
4. téma zadání (téma, které je/není žákům blízké)
5. přítomnost signálního slova v otázce (přítomnost slov jako celkem, každý apod.)
6. syntagmatická vs. časová organizace událostí (pořadí informací v zadání úlohy odpovídá nebo neodpovídá časovému sledu událostí
7. umístění otázky (umístění otázky na začátku, uvnitř, nebo na konci zadání úlohy)
8. použitá slovní zásoba (slova v zadání jsou/nejsou žákům blízká)
9. typ formulace (krátký a stručný text zadání vs. dlouhý text obsahující nadbytečné informace a slovní obraty)

C. sémanticko – konceptuální proměnné

10. typ aditivní struktury – 6 typů aditivních struktur podle G. Vergnauda, (1996)
11. povaha neznámé (neznámý je výsledný stav vs. neznámý je původní stav)
12. pořadí číselných údajů v zadání vs. pořadí operací (pořadí operací odpovídá pořadí čísel v zadání a zároveň pořadí informací zadání odpovídá pořadí čísel v zadání)
13. signál vs. matematický operátor (signál odpovídá/neodpovídá matematickému operátoru)
14. sémantický indikátor vs. matematický operátor (sémantický indikátor odpovídá nebo neodpovídá matematickému operátoru)

Na základě těchto proměnných stanovil B. Sarrazy tzv. index variability jednotlivých učitelů, kteří vytvářeli úlohy. Ukázalo se, že tento index silně koreluje s indexem citlivosti žáků vůči didaktickému kontraktu (viz kapitola 4).[20]

> Čím více se učitel zdá být schopen vhodným tvořivým způsobem přistupovat k zadání úlohy, tím méně mechanicky jeho žáci reagují na pravidla, které jim předkládá. (Sarrazy, 2002, s. 14)[21]

N. Ellerton (1986) zkoumala rozdíly mezi početními úlohami vytvořenými matematicky nadanými žáky a žáky slabými v matematice. V rámci výzkumu nechala žáky ve věku 11 – 13 let tvořit úlohy, které považují za obtížné pro své kamarády. Žáci měli také vytvořenou úlohu sami vyřešit. Na základě vytvořených úloh, jejich vyřešení autory a rozhovorů s nimi identifikovala N. Ellerton významné rozdíly mezi oběma skupinami úloh v následujících charakteristikách: obtížnost výpočtů, počet operací, použité typy čísel (zlomky, desetinná čísla, mocniny), předběžného plánování otázky, řešení úlohy a práce s ním, chápání pravidel a postupů a použitý typ jazyka (jazyk matematiky, běžný jazyk).

2.6 Shrnutí a východiska pro výzkum

Matematickou slovní úlohu budeme v našem výzkumu chápat v nejširším možném významu uvedeném v této kapitole, tj. jako popis nebo znázornění určité situace obsahující otázku, na kterou lze odpovědět s využitím matematických prostředků. Vhodnost tohoto pojetí vychází jednak ze zadání experimentu (nebylo explicitně vyžadováno vytvoření slovní úlohy), jednak ze samotných úloh vytvořených během experimentů, které nemají vždy všechny parametry slovní úlohy podle Vyšína (1972) nebo Hejného (2003). U vytvořených úloh budeme sledovat jejich zařazení podle kontextu a matematického modelu a na základě výše uvedených charakteristik stanovíme proměnné charakterizující úlohy z různých hledisek.

---

[20] Tento index měří, jak často žáci během výzkumu odpovídali na nesmyslné nebo špatně formulované otázky učitele tak, jako by se jednalo o korektně formulované matematické úlohy.

[21] Plus un maître se montre capable d'opérer des variations pertinentes sur la conception d'un énoncé de problème, moins ses élèves manifestent un rapport « rigide » avec les règles enseignées.

Kapitola 3. Matematická kultura a kultura dané třídy

Pojmy matematická kultura a kultura dané třídy se v literatuře vyskytují velmi často a bývají používána jejich různá pojetí vázaná vždy na konkrétní situaci. V naší práci vyjdeme z pojetí kultury a kultury školní třídy podle F. Seegera a kol. (1998), které doplníme o pojetí kultury pracovních skupin vycházející ze F. Stauba (2007), dobré matematické kultury jednotlivce podle F. Kuřiny (2010) a A. Hošpesové a kol. (2011), kultury vyučování matematice podle N. Stehlíkové (2007) a kultury při řešení slovních úloh (Novotná 2009, 2012; Novotná, Brousseau 2008). Na základě těchto pojetí a na základě analýzy předexperimentu vymezíme matematickou kulturu při tvoření slovních úloh (viz kapitola 8). Tato kultura je východiskem pro analýzu experimentu popsanou v kapitole 10.

3.1 Kultura a matematická kultura třídy

V našem pojetí představuje kultura obecný rámec, ve kterém se odehrávají procesy vyučování a učení; kultura dané třídy je pak vytvářena, konstruována a přijímána účastníky vyučovacího procesu – tj. zejména učitelem, žáky, učivem a studijními materiály. Kultura v obecném smyslu ovlivňuje kulturu dané třídy, je třeba si ale položit otázku, jak silný je její vliv na kulturu dané třídy, zejména pokud se jedná o formalizovanou a na přesnosti založenou disciplínu, jakou je např. matematika. Pojmy kultura a kultura dané třídy tedy spolu navzájem souvisejí a navzájem se ovlivňují. (Seeger a spol., 1998, s. 1)

F. Seeger a kol. (1998, s. 2 – 3) formulují širší pohled na matematickou kulturu dané třídy prostřednictvím následující otázky

> Jak může vypadat matematická kultura dané třídy, která prostřednictvím vyučovacího obsahu a výchovy k porozumění umožňuje žákům sdílet matematickou kulturu, a tedy i kulturu v obecném smyslu?[22] (Seeger a kol., 1998, s. 2)

Zároveň formulují také některé obecně sdílené principy a východiska při studiu matematické kultury dané třídy:

1. Vývoj matematické kultury dané třídy nemůže být nařízen vyšší mocí ani předepsán výzkumem.

[22]What could a culture of the mathematics classroom look like that, through its teaching content and its nurturing of sense – making, allows students to share the culture of mathematics and thereby also allows them to share the culture at large?

2. Matematické výsledky a výstupy jsou univerzální, ale učení se matematice obsahuje procesy vytváření významu pojmů citlivé na kontext vytvářený mj. matematickou kulturou dané třídy.
3. Matematická aktivita bývá často vnímána jako činnost jednotlivce, který sděluje výsledky své činnosti prostřednictvím obecně přijímaných postupů a formulací. Vyučování matematice ale probíhá v rámci společenských situací a interakcí a míra naučení závisí také na dynamice třídy jako sociální skupiny.
4. Vzhledem ke komplexnosti procesů vytvářejících matematickou kulturu dané třídy je třeba rozvíjet a používat nové teoretické pojmy. Jako vhodnější se také jeví kvalitativní výzkumné metody, které umožní studovat matematickou kulturu dané třídy jako síť vztahů a jako smysluplný kontext pro dotyčné osoby.

F. Seeger a kol. popisují tedy matematickou kulturu dané třídy jako východisko pro studium výuky a učení se matematice, které závisí zejména na konkrétním vyučovacím obsahu, způsobu výuky matematiky a vychází z konkrétní kultury tvořící rámec pro matematickou kulturu třídy. Zdůrazňují její relativní nezávislost na vnějších institucionálních vlivech a naopak závislost na konkrétním dění ve třídě.

3.2 Kultura pracovních skupin

J. M. Levine a R. L. Moreland (1991) ukazují dva základní pohledy na kulturu pracovních skupin používané v odborné literatuře (citováno podle Staub, 2007):

> Kultura je často popisována jako soubor myšlenek sdílených členy skupiny. Tyto myšlenky řídí činnost členů skupiny a poskytují rámec pro chápání jejich zkušeností. Jiný pohled na kulturu je jako na soubor zvyků, které reprezentují myšlenky sdílené členy skupiny. (Levine, Moreland, 1991, s. 258)
>
> Tyto zvyky mohou být popsány jako rutinní činnost, pohnutky, způsob vyjadřování, rituály a symboly. Kromě způsobu myšlení, názorů a sdílených způsobů chování jsou dalšími klíčovými prvky vytvářejícími kulturu artefakty (jako např. nástroje a jazyk), normy, hodnoty a instituce. (Staub, 2007, s. 320) [23]

[23]"First, culture is often viewed as a set of thoughts that are shared among group members. These thoughts guide group members' actions and provide a common interpretive framework for their experiences. Second, culture is often viewed as a set of customs that embody the thoughts that group members share" (Levine & Moreland, 1991, p. 258). Customs can be classified as routines, accounts, jargon, rituals, or symbols. In addition to ways

Tento popis kultury pracovních skupin můžeme vztáhnout na (matematickou) kulturu dané třídy při práci se slovními úlohami. Za myšlenky sdílené členy skupiny můžeme považovat matematické pojmy, znalosti a prostředky, se kterými byli členové skupiny seznámeni (které ale ne nutně všichni ovládají a umí používat). Za zvyky lze potom považovat způsoby práce s úlohami (jejich analýzu a zpracování informací ze zadání úlohy, početní postupy, formální zápis, závěr řešení), používané pomůcky, žákovské představy o možnostech výsledků a očekávání toho, co učitel považuje za správné (didaktický kontrakt, viz kapitola 4).

3.3 Kvalitativní pojetí matematické kultury jednotlivce a skupiny

Pojmy matematická kultura jednotlivce/školní třídy nejsou považovány za jednoznačně definovatelné. Následující dva pohledy nepopisují matematickou kulturu jako takovou, ale vyjadřují spíš její kvalitativní hodnocení a představují ji z pohledu jednotlivce a cílů matematického vzdělávání.

F. Kuřina (2010) popisuje člověka s dobrou matematickou kulturou následujícím způsobem:

> Člověk s dobrou matematickou kulturou je matematicky gramotný (ovládá dobře určitou oblast matematiky s jejími pojmy a metodami), dovede o matematice komunikovat různými způsoby (ovládá různé matematické jazyky) a vidí souvislosti mezi různými pojmy a různými oblastmi matematiky. (Kuřina, 2010, s. 243)

A. Hošpesová a kol. (2011) popisují matematickou kulturu následujícím způsobem:

> Termín matematická kultura budeme chápat ve smyslu dobrá matematika podle Terence Tao, tedy dobré matematické řešení problémů, dobrá matematická technika, dobré matematické aplikace, pěstování matematického vhledu, tvořivosti a krásy matematiky. (Hošpesová a kol., 2011, s. 25)

Stejní autoři také popisují základní principy, jak rozvíjet matematickou kulturu:

> Pěstovat matematickou kulturu znamená učit vidět kořeny matematiky v realitě (v přírodě a ve společnosti), poznávat svébytný svět matematických pojmů, rozumět mu a umět ho aplikovat „kultivovaně“ a správně na řešení otázek života. (Hošpesová a kol., 2011, s. 25)

---

of thoughts, beliefs, and shared patterns of behaviour, other key elements that are understood to constitute culture are artefacts (such as tools and language), norms, values and institutions.

Kvalitativní charakteristiku matematické kultury jednotlivce podává také S. Domoradzki (2011):

> Matematická kultura na elementární úrovni znamená pochopení matematiky jako určité intelektuální činnosti, konkrétně ovládání určitých početních technik, pochopení myšlenky řízení, ovládnutí jasných definicí pojmů a dokonce vnímání krásy matematiky[24]. (Domoradzki, 2011, s. 8)

V citovaných textech vychází tedy matematická kultura z následujících charakteristik: řešení problémů, znalost tématu, používání technik, vhled, aplikace, komunikace a tvořivost. Tyto obecné charakteristiky jsou navíc vždy vztaženy k matematice.

3.4. Kultura vyučování matematice z pohledu činností učitele

N. Stehlíková (2007) charakterizuje kulturu vyučování matematice z pohledů činnosti učitele a formuluje sedm základních obecných principů účinného vyučování matematice:

1. Učitel probouzí zájem dítěte o matematiku a její poznávání.
2. Učitel předkládá žákům podnětná prostředí (úlohy a problémy).
3. Učitel podporuje žákovu aktivní činnost.
4. Učitel rozvíjí u žáků schopnost samostatného a kritického myšlení.
5. Učitel nahlíží na chybu jako vývojové stádium žákova chápání matematiky a impulz pro další práci.
6. Učitel iniciuje a moderuje diskuse se žáky a mezi žáky o matematické podstatě problémů.
7. Učitel se u žáků orientuje na diagnostiku porozumění. (Stehlíková, 2007, s. 16)

Tyto principy jsou jedním z možných nástrojů, jak formovat a rozvíjet dobrou matematickou kulturu při tvoření úloh popsanou v kapitole 8.

---

[24]Mathematical culture at an elementary level means appreciation for mathematics as a certain intellectual activity, in particular, mastering of certain techniques of calculation, understanding the idea of leading, having a clear definition of terms and even the perception of the beauty of mathematics.

3.5 Matematická kultura při řešení slovních úloh

V této části se zaměříme na konkrétní matematickou kulturu, která se týká řešení slovních úloh.

G. Brousseau a J. Novotná (2008) charakterizují roli slovních úloh při vyučování matematice následujícím způsobem:

> Úlohy nejsou pouze úkoly, kde jednotlivec použije vyučovanou vědomost. Jsou podnětem k individuální aktivitě, která má simulovat skutečné nebo předpokládané matematické činnosti, které jsou základem doprovodným jevem této vědomosti. Jsou zejména základním prostředkem pro akulturaci žáků na určitou kulturní praxi, méně viditelnou než jazykovou praxi, a tedy obtížnější na předávání, ale považovanou za důležitou[25] (Brousseau, Novotná, 2008).

Schopnost vyřešit úlohu nezávisí podle G. Brousseaua a J. Novotné jen na institucionalizovaných vědomostech získaných během předchozí výuky, ale také na neinstitucionalizovaných poznatcích někdy nevědomě rozvíjených žáky během různých aktivit. Práce se slovní úlohou v hodině neprobíhá jen na základě dříve probraných vědomostí, ale také prostřednictvím poznatků sdílených učitelem a žáky, které nejsou vědomostí, ale které jsou nutné pro práci s úlohou. V každé situaci navíc hrají roli žákovy „soukromé“ poznatky, které ovlivňují jeho chování v situaci a které není možné při analýze situace objevit, ani ovlivnit jejich použití (Sarrazy, 1997).

Existence určité kultury slovních úloh v dané třídě se může také projevit shodou žákovských postojů ke slovním úlohám. G. Brousseau a J. Novotná (2008) zkoumali existenci takové kultury slovních úloh v rámci daných tříd prostřednictvím dotazníku, ve kterém žáci hodnotili slovní úlohy podle různých kritérií: obtížnost, délka textu, délka řešení, užitečnost, zajímavost a srozumitelnost. V některých třídách se vyskytla shodná hodnocení některých úloh, která autoři považují za důsledek faktorů souvisejících s konkrétní třídou. Tato shodná hodnocení

[25] Les problèmes ne sont pas seulement des tâches où l'individu met en œuvre le savoir enseigné. Ils sont une incitation à une activité individuelle qui doit simuler les activités mathématiques réelles ou supposées qui accompagnent et fondent ces savoirs. Mais ils sont aussi et surtout le moyen essentiel d'une acculturation des élèves à une pratique culturelle, plus cachée que la pratique des langages – et donc plus difficile à transmettre – mais reconnue comme importante.

lze považovat za projev určité kultury třídy při práci se slovními úlohami (Brousseau, Novotná, 2008).

Pojetí kultury, kultury pracovních skupin a matematické kultury jednotlivce nebo skupiny a kultury při řešení slovních úloh zmíněné v této práci netvoří v žádném případě úplný seznam všech přístupů k matematické kultuře, které lze nalézt v odborné literatuře. Poskytují nám ale dostatečné teoretické zázemí pro definování kultury jednotlivce při tvoření slovních úloh. Potvrzují také předpoklad zmíněný v úvodu této kapitoly, že pojem matematická kultura třídy a jemu obdobné pojmy jsou velice obtížně definovatelné. Pro konkrétní výzkumnou situaci je třeba stanovit pojetí matematické kultury s přesnými charakteristikami, na jehož základě lze následně danou situaci zkoumat.

Je třeba dodat, že existuje mnoho faktorů, které ovlivňují matematickou kulturu jednotlivce/dané třídy. Mezi nejvýznamnější patří celkové pojetí výuky matematiky v dané zemi předepsané vzdělávacím programem, způsob výuky učitele matematiky a jeho pojetí výuky matematiky a matematiky obecně, používané učební materiály, složení a klima třídy, důležitost matematiky v rámci studovaného oboru a mnoho dalších faktorů.

3.6 Shrnutí

Pojem matematická kultura představuje obecný rámec pro popis skutečnosti související s matematikou, výukou matematiky nebo učením se matematiky. Matematická kultura bývá většinou vztažena k určité skupině žáků nebo učitelů (kultura dané třídy, dané skupiny učitelů), případně k prováděné činnosti (např. řešení úloh). Při definování konkrétní matematické kultury je tedy třeba vycházet z konkrétní situace a charakteristiky přizpůsobit situaci a cílům. V naší práci používáme tento přístup k popsání matematické kultury při tvoření úloh (viz kapitola 8).

Kapitola 4. Vybrané pojmy Teorie didaktických situací

Teorie didaktických situací G. Brousseaua tvoří jeden z teoretických rámců výzkumu. V této kapitole jsou uvedeny některé základní pojmy teorie didaktických situací použité v této práci. Podrobnější vysvětlení těchto pojmů lze nalézt např. v (Brousseau, 1998; Brousseau 2012).

4.1 Didaktická situace (situation didactique)

Didaktickou situaci budeme chápat jako

> takové okolí žáka, které obsahuje vše, co přispívá k matematické složce jeho přípravy. (Brousseau, 2012, s. 37)

Základními složkami didaktické situace jsou žák se svým a-didaktickým prostředím (prostředí umožňující samostatné získávání poznatků), učitel zprostředkovávající danou vědomost prostřednictvím didaktického působení na žáka a předáváním informací, a vědomost, ke které má žák najít cestu prostřednictvím poznatků v rámci dané situace.

4.2 Poznatek, vědomost (connaissance, savoir)

Pojmy poznatek a vědomost mají v Teorii didaktických situací odlišné významy. Zatímco poznatek se váže k určitému subjektu, kontextu, situaci, činnosti a času, vědomost je naopak nadčasová a dekontextualizovaná. Poznatek je vázán na danou situaci a kontext a slouží subjektu jako prostředek pro rozhodování, výběr činnosti, formulace nebo důkazu. Vědomost je objektem činnosti a zkoumání subjektu. Dané tvrzení může v určitých situacích v roli poznatku, v jiných situacích v roli vědomosti.

Rozlišení významu těchto dvou pojmů je podstatné pro studium předávání vědomostí, které probíhá v situacích, kde se subjekt jednak setkává s poznatky, jednak také využívá konkrétní poznatky. Určitá vědomost, kterou má instituce[26], je prostřednictvím devoluce a zařazením do určitého kontextu změněna v poznatek, se kterým se setká subjekt v rámci didaktických situací. Prostřednictvím dekontextualizace a institucionalizace se z poznatku opět stává vědomost. (Brousseau, 1998, 2012; Laparra, Margolinas, 2010)

[26] Slovo instituce má v Teorii didaktických situací široký význam a může vyjadřovat kromě obvyklého významu také jednotlivce nebo skupinu lidí jako např. žáka, učitele, skupinu žáků nebo učitelů, školu apod.

4.3 Didaktický kontrakt

Didaktický kontrakt představuje soubor nepsaných pravidel a vzájemných očekávání účastníků didaktické situace (učitele a žáků). Kontrakt je implicitní a závisí vždy na podmínkách dané situace. Existence didaktického kontraktu vytváří určitý paradox, protože čím více se učitel snaží žáka něco naučit, tím méně mu umožňuje samostatně využít jeho poznatky a něčemu se naučit (viz např. Topazův jev, Jourdainův jev – Brousseau, 2012, s. 48 – 54). Učení se spočívá tedy v porušení nebo ve změnách didaktického kontraktu a ne na jeho dobrém fungování. (Brousseau, 1998)

4.4 Analýza a priori

Analýza a priori představuje jeden z nástrojů, který má učitel k dispozici při přípravě vyučovací jednotky, případně výzkumník při přípravě výzkumné (didaktické) situace. Jejím cílem je odhadnout a popsat předpokládaný průběh dané aktivity, její jednotlivé fáze a návaznosti mezi nimi, možné reakce a postoje učitele nebo žáků, strategie řešení úloh nebo způsoby realizace dané činnosti. Jejím cílem je také rozmyslet, které vědomosti a poznatky jsou nezbytné pro úspěšnou realizaci aktivity, které další poznatky a vědomosti mohou danou aktivitu ovlivnit, případně být jejím výstupem. Analýza a priori poskytuje podstatné informace o dané situaci a může pomoci odhalit možné obtíže při realizaci situace (podrobněji viz Nováková, 2013).

III. Výzkumná část

Kapitola 5. Úvod, formulace výzkumné otázky

5.1 Úvod

V teoretické části práce jsme shrnuli základní teoretická východiska pro zkoumání matematické kultury žáků při tvoření slovních úloh – výzkum zabývající se *problem posing*, charakteristiku matematické slovní úlohy a různá pojetí matematické kultury. Hlavním teoretickým rámcem pro zkoumání žákovské tvorby úloh je pro nás Teorie didaktických situací v matematice. Při přípravě a analýze výzkumné situace jsme vycházeli jednak z výzkumu G. Brouseaua a J. Novotné týkajícího se matematické kultury žáků při řešení slovních úloh (Brousseau, Novotná, 2008, viz kapitola 3.5), kterého se zúčastnil také autor této práce, jednak z výzkumů zabývajících se variabilitou učitelů a žáků B. Sarrazyho (Sarrazy, 2002, viz kapitola 2.5).

Tato východiska využijeme ve výzkumné části práce, ve které se zabýváme matematickou kulturou žáků při tvoření slovních úloh. Kapitola 6 je zaměřena na popis a analýzu a priori experimentu, na kterém je založen náš výzkum kultury při tvoření úloh. Kapitola 7 obsahuje analýzu předexperimentu, jejíž výsledky jsou východiskem pro definování našeho pojetí matematické kultury při tvoření slovních úloh popsaného v kapitole 8 a jeho aplikaci na analýzu úloh vytvořených v rámci hlavního experimentu a popis kultury žáků při tvoření slovních úloh uvedené v kapitole 10. Kapitola 9 obsahuje popis úloh vytvořených v rámci hlavního experimentu. V poslední, 11. kapitole, formulujeme závěry výzkumu a další možné otázky a směry navazujícího výzkumu.

5.2 Formulace výzkumné otázky

Naše cesta k výsledné formulaci problematiky a výzkumné otázky byla dlouhá a složitá. Na počátku jsme měli dva obecné výzkumné záměry. Prvním obecným záměrem bylo zkoumat a popsat matematickou kulturu dané třídy a učitele, tedy způsob, jakým probíhá matematika v dané třídě, jak probíhá komunikace a předávání matematických znalostí v dané třídě a jak se projevuje působení učitele na žákovském působení v matematice. Cílem nebylo hodnotit práci učitele nebo žáků, ale zkoumat činnost učitele a žákovské pojetí matematiky, konkrétně pak popsat vliv působení učitele na matematickou kulturu žáků, na jejich pojetí a chápání matematiky a na jejich přístup k matematice. Druhý obecný záměr byl inspirován spoluprací na výzkumu žákovské kultury při řešení slovních úloh (viz např. Brousseau, Novotná, 2008; Bureš, Hrabáková, 2008), kde žáci mimo jiné vytvářeli slovní úlohy a diskutovali o vytvořených úlohách. Z práce na tomto výzkumu vyplynul cíl zaměřit se na různé aspekty žákovské tvorby slovních úloh v rámci různých situací založených na tvorbě úloh. Přestože některé výzkumy (např. Christou a kol., 2005a, 2005b; Silver, Cai, 2005) zabývající se *problem posing* popisují jeho principy a některé způsoby jeho analýzy a hodnocení, chybí obecný rámec pro analýzu aktivit spojených s *problem posing*. Popis tohoto obecného rámce také měl být jedním z cílů našeho výzkumu.

Oba obecné výzkumné záměry se brzy ukázaly jako příliš rozsáhlé a obecně jen velmi těžko uskutečnitelné. Studium odborné literatury ukázalo příliš velkou šíři problematiky a velké množství vlivů, které se podílejí na vytváření matematické kultury učitele, třídy a jednotlivých žáků. Také analýza aktivit spojených s *problem posing* je zřejmě vždy vázána na konkrétní situace a obecný popis těchto aktivit není relevantní pro konkrétní situaci. Proto jsme se rozhodli pozměnit a zúžit zkoumanou problematiku tak, aby bylo možné zaměřit se na konkrétní otázky spojené jak s *problem posing*, tak s matematickou kulturou třídy.

Didaktické situace realizované během výše zmíněného výzkumu kultury při řešení úloh ukázaly na potenciál tvorby slovních úloh pro zkoumání matematické kultury dané třídy. Proto jsme se nakonec rozhodli oba záměry propojit a konkretizovat. Náš výzkum tedy není zaměřen obecně na matematickou kulturu třídy, ani obecně na *problem posing*, ale na jejich vzájemný vztah a souvislosti. **Naším hlavním cílem je zkoumat matematickou kulturu žáků při tvoření slovních úloh, tj. jak se projevuje matematická kultura žáků v situacích založených na tvorbě úloh a naopak, jak žákovská tvorba úloh může sloužit jako indikátor matematické kultury žáků.**

Žákovská tvorba slovních úloh slouží jednak jako nástroj pro zkoumání matematické kultury, jednak jako objekt zkoumání. Jako nástroj jsme ji vybrali pro to, že vhodně zvolená situace umožňuje žákům ukázat jejich matematické a formulační prostředky bez toho, že by byly tyto prostředky předmětem hodnocení ze strany jiné instituce. Na rozdíl od situace založené na řešení úloh nejsou žáci omezeni ve využití informací (např. hodnocením zvolené metody, správnosti postupu nebo výsledku). Zároveň se snažíme vytvořit komplexní popis úloh vytvořených v rámci výzkumné situace, žákovská tvorba úloh je tedy i objektem zkoumání.

Naše hypotézy jsou následující:

1. Existuje žákovská kultura jednotlivce při tvoření slovních úloh, která souvisí s matematickou úrovní jednotlivce a projevuje se kvalitou vytvořených úloh.
2. Existuje žákovská kultura skupiny při tvoření slovních úloh, která se projevuje shodnými znaky vytvořených úloh v rámci určité skupiny žáků.

Pro ověřování platnosti těchto hypotéz je třeba zavést pojem žákovská kultura při tvoření slovních úloh a stanovit jeho charakteristiky. Úlohy vytvořené žáky jsou předmětem zkoumání z několika hledisek – kvalita vytvořených úloh, pohled řešitele na úlohu a charakteristika matematického modelu úlohy. S matematickým modelem souvisejí také poznatky a vědomosti (matematické a nematematické), na které je zaměřena vytvořená úloha.

Na základě námi popsaného pojetí matematické kultury a jejích charakteristik jsme vytvořili nástroj pro popis vytvořených úloh podle různých proměnných a charakterizovali jednotlivé úlohy z pohledu jednotlivce a skupiny (dobrých, průměrných nebo slabých žáků dané třídy, případně celých tříd), a popsali jejich shodné a rozdílné znaky. Aktuální matematickou úroveň žáků jsme stanovili na základě srovnávací písemné práce. Závěry analýzy uvedené v kapitolách 10 a 11 naznačují existenci matematické kultury žáků při tvoření slovních úloh a její souvislost matematickou kulturou žáků dané třídy.

Kapitola 6. Experiment (zadání, analýza a priori)

6.1 Zadání experimentu

V této části popíšeme zadání experimentální situace tak, aby každý mohl v případě potřeby použít toto zadání ve třídě. Experiment je připraven pro žáky 9. ročníku ZŠ nebo odpovídajícího ročníku víceletého gymnázia. Jeho zadání by mělo proběhnout na samém konci školního roku, aby žáci měli za sebou studium všech matematických témat na základní škole. Jeho délka je 45 minut a žáci pracují samostatně. Na začátku hodiny rozdá učitel zadávací list a informuje žáky o tom, že mají tvořit úlohy, které na konci hodiny odevzdají.

Experiment je založen na tvorbě matematických úloh. Jsou dány dvě situace, v rámci každé z nich mají žáci samostatně vytvořit jednu snadnou a jednu obtížnou úlohu pro svoje spolužáky (celkem tedy čtyři úlohy). Při tvoření úloh nejsou omezeni zadáním situace, mohou si jej jakkoli upravit a doplnit. Učitel do tvorby úloh nijak nezasahuje, na případné dotazy odpovídá neutrálně a nechává veškerá rozhodnutí na samotných žácích.

Experiment obsahuje dvě situace, v rámci nichž mají žáci tvořit úlohy. První situace je zadána pomocí obrázku, druhá situace pomocí textu. První situace byla navržena takovým způsobem, aby vycházela z geometrického prostředí (čtvercová síť) a byla dostatečně „otevřená“, tj. neobsahovala žádný doplňující text, reálný kontext, číselné údaje ani jednotky. Obdobné prostředí se většinou nevyskytuje v učebnicích a sbírkách úloh. Druhá situace vychází z úloh, které se častěji vyskytují v učebnicích a sbírkách úloh. Text vychází z reálné situace obchodu s oblečením a jsou v něm popsány druhy oblečení a jejich ceny.

Situace jsou tedy vytvořeny takovým způsobem, aby byly navzájem co nejvíc odlišné ve svých charakteristikách. Základní rozdíly v zadání první a druhé situace jsou následující:

- nestandardní situace vs. obvyklá „učebnicová“ situace
- zadání pomocí obrázku vs. zadání pomocí textu
- geometrická povaha situace vs. aritmeticko-algebraická povaha situace
- žádný reálný kontext vs. reálná situace
- žádné číselné údaje vs. konkrétní ceny zboží

Takto rozdílné situace mají za cíl jednak umožnit vytvoření co největšího množství typů úloh, se kterými se žáci setkávají na základní škole, jednak umožnit všem žákům, bez ohledu na jejich úroveň v matematice, aby v situacích mohli aplikovat své znalosti získané během studia různých matematických témat.

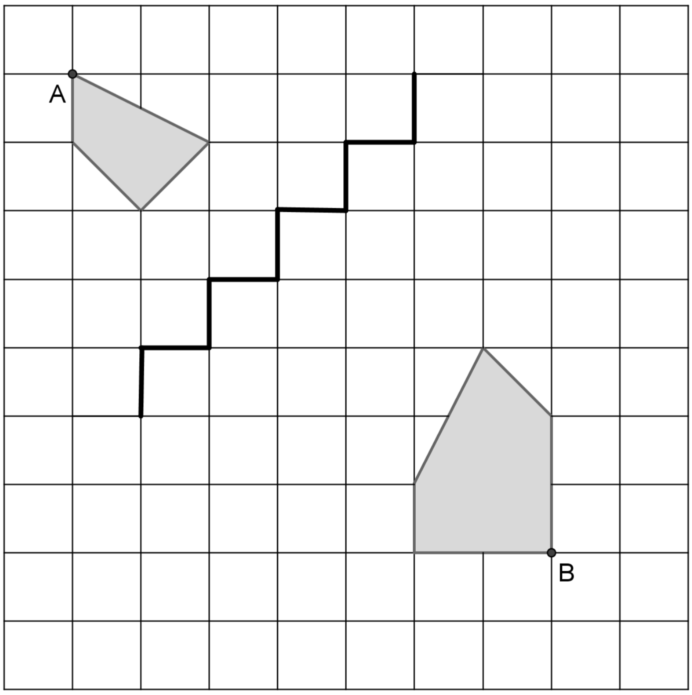
6.2 Zadání experimentu – pracovní list

Číslo: ....

1. Na základě daného obrázku vytvořte pro vaše spolužáky:

a) 1 úlohu, kterou považujete za snadnou, b) 1 úlohu, kterou považujete za obtížnou.

U obtížné úlohy napište, proč tuto úlohu považujete za obtížnou.



2. Na základě daného textu vytvořte pro vaše spolužáky:

a) 1 úlohu, kterou považujete za snadnou, b) 1 úlohu, kterou považujete za obtížnou.

U obtížné úlohy napište, proč tuto úlohu považujete za obtížnou.

Paní Velebná pracuje v obchodu s oblečením. Cestou domů vyprávěla v autobuse svojí kamarádce: „Dnes nám přivezli nové zboží – úžasnou jarní kolekci! Pro dámy máme krásná trička za 250 Kč za kus, halenky za 430 Kč za kus, krátké sukně za 360 Kč za kus. Pro pány potom sportovní kalhoty 740 Kč za kus a trička za 280 Kč za kus! Máme všechny velikosti v různých barevných odstínech.“

6.3 Analýza a priori experimentální situace

Před provedením experimentu ve třídě je vhodné provést částečnou analýzu a priori s cílem charakterizovat jednotlivé situace z matematického hlediska a navrhnout typy úloh, které žáci na základě daných situací vytvoří. Při charakteristice jednotlivých situací se lze zaměřit např. na formu zadání situace, známé a neznámé informace a typy čísel vyskytující se v zadání (explicitně nebo implicitně).

Na základě předpokládaných typů úloh vytvořených žáky jsou stanoveny proměnné, které popisují jednotlivé úlohy a zároveň umožní zkoumání variability vytvořených úloh. Proměnné jsou formulovány jako výroky, aby bylo možné jednoznačně rozhodnout o jejich výskytu v dané úloze. Východiskem pro stanovení možných proměnných je zde tedy strukturální přístup, který použili např. Searle et al. (1974), Nesher (1976) a Sarrazy (2002), a který jsme podrobněji popsali v kapitole 2.5.

6.3.1 Charakteristika situace 1

Situace 1 je zadána prostřednictvím obrázku, na kterém je čtvercová síť 10 x 10 obsahující jeden nepravidelný čtyřúhelník s vrcholem A a jeden nepravidelný pětiúhelník s vrcholem B. V síti je navíc tučně vyznačena lomená čára, která se nachází v oblasti mezi čtyřúhelníkem a pětiúhelníkem a je vedena po úsečkách vyznačujících čtvercovou síť. Zadání neobsahuje žádný text, žádné doplňující údaje ani jednotky.

Čtyřúhelník má délky stran $1;\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{5}$ jednotek, obvod $1+2\sqrt{2}+\sqrt{5}$ jednotek a obsah 2 čtvereční jednotky.

Pětiúhelník má délky stran $1;2;2;\sqrt{2};\sqrt{5}$ jednotek, obvod $5+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ jednotek a obsah 4,5 čtverečních jednotek.

Lomená čára má délku 9 jednotek.

Čtvercová síť má obvod 40 jednotek a obsah 100 čtverečních jednotek.

Příklady očekávaných typů úloh

Úlohy, které žáci mohou vytvořit, jsou rozděleny do několika skupin podle neznámé, kterou je třeba zjistit. Soupis úloh obsahuje pouze základní typy úloh. Lze předpokládat, že úlohy mohou být autory zařazeny do různého kontextu.

Čtvercová síť: Kolik čtverců o obsahu 1 j^2 je na obrázku? Kolik čtverců o obsahu x j^2 je na obrázku? Kolik čtverců je na obrázku?

Obsah: Jaký je obsah čtvercové sítě na obrázku? Jaký je obsah útvarů? Jaký je obsah části mimo útvary? Jaký je poměr obsahů útvarů? Kolik procent zabírá útvar ve čtvercové síti?

Obvod: Jaký je obvod čtvercové sítě na obrázku? Jaký je obvod čtyřúhelníku? Jaký je obvod pětiúhelníku? Jaký je obvod části čtvercové sítě bez mnohoúhelníků? Jaká je délka zvýrazněné čáry? Jaká je celková délka čar na obrázku?

Počet objektů/pokrytí: Lze pokrýt celou čtvercovou síť domečky tak, aby nezůstala žádná nezakrytá plocha? Kolik nejvíc útvarů (A, B, oba typy) se vejde do této čtvercové sítě tak, aby se žádné dva nepřekrývaly? Jakou maximální plochu čtvercové sítě lze pokrýt domečky? Kolik plochy čtvercové sítě zbude, pokud zaplníme síť co největším počtem domečků?

Cesty: Jaká je minimální délka cesty z A do B? Jaká je minimální délka cesty z A do B za určitých podmínek (překážky na cestě, směr pohybu)?

Lze očekávat, že někteří žáci budou obrázek zadání úlohy různým způsobem obměňovat a doplňovat, zejména přidáním dalších útvarů nebo vyznačením cest mezi různými místy ve čtvercové síti. Je možné předpokládat, že zejména pro vytvoření obtížné úlohy budou žáci kombinovat výše uvedené typy úloh. Také lze předpokládat, že většina úloh bude zaměřena na výpočet obvodu nebo obsahu daných útvarů a že nejčastěji dodaným číselným údajem bude délka úsečky nebo obsah jednoho čtverce ve čtvercové síti.

Na základě výzkumů založených na tvorbě úloh uvedených v kapitole 2.5 této práce jsou stanoveny možné proměnné pro charakteristiku vytvořených úloh, u kterých lze předpokládat, že budou odlišné u jednotlivých úloh, příp. autorů.

1. Zadání úlohy obsahuje kontext.
2. Zadání úlohy obsahuje číselné údaje.
3. Úloha je řešitelná.

4. Úloha je správně zadaná z matematického hlediska.
5. Zadání úlohy obsahuje dostatek údajů k vyřešení úlohy.
6. Zadání úlohy obsahuje přidané informace (dokreslené obrázky, pozměněné zadání apod.)

6.3.2 Charakteristika situace 2

Situace 2 je zadána prostřednictvím textu popisujícího rozhovor, ve kterém vypráví prodavačka z obchodu s oblečením své kamarádce o novém zboží. Text obsahuje informace o cenách 3 druhů oblečení pro dámy a 2 druhů oblečení pro pány. Všechny tyto druhy oblečení mají v obchodě v různých velikostech a odstínech. Ceny oblečení jsou uvedeny v celých korunách (250, 280, 360, 430, 740). Text neobsahuje žádný úkol ani otázku. Zadání situace neobsahuje žádný obrázek ani tabulku.

Příklady očekávaných typů úloh

Rodina Modrých má 3 děti – 2 chlapce a 1 dívku. Kolik by stálo oblečení pro každého z nich, pokud si každý koupil určitý počet kusů?

Mám určitou částku. Kolik peněz mi zbude, pokud si koupím určitý počet věcí?

Mám určitou částku. Bude mi tato částka stačit na zakoupení určitého počet věcí?

Jaké věci a kolik kusů mohu koupit za určitou částku?

Za celý den prodali v obchodě 7 triček, 5 sukní... Jaká byla celková tržba?

Kolik procent ceny trička tvoří cena halenky? atd.

Lze očekávat, že ve snadné úloze budou žáci pracovat s údaji v zadání a ptát se zejména na celkovou cenu nákupu, v obtížné úloze budou často přidávat další číselné údaje a větší množství otázek a úkolů k vyřešení. Je možné také předpokládat, že vzhledem k danému a přesně popsanému kontextu úlohy budou žáci tento kontext dodržovat a nebudou vytvářet vlastní, kromě případných doplnění daného kontextu.

Možné proměnné pro popis úloh

1. Zadání úlohy obsahuje víc než jednu otázku nebo úkol.
2. Zadání úlohy obsahuje nové číselné údaje.
3. Úloha je řešitelná.

4. Úloha je správně zadaná z matematického hlediska.
5. Zadání úlohy obsahuje dostatek údajů k vyřešení úlohy.
6. Zadání úlohy obsahuje přidané informace (dokreslené obrázky, pozměněné zadání apod.)
7. Zadání úlohy obsahuje nadbytečné informace.

Kapitola 7. Předexperiment a jeho analýza

7.1 Cíle předexperimentu, cílová skupina

Jako skupina pro provedení předexperimentu byla vybrána třída 2. C Gymnázia Jana Nerudy v Praze[27] (2. ročník šestiletého studia, věk 14 – 15 let).Tito žáci přišli na gymnázium z různých základních škol a víceletých gymnázií, čtyři z nich studovali v předchozích letech i na zahraničních školách. Během dvou let studia na gymnáziu měla třída stejného učitele matematiky. Matematika byla vyučována 4 hodiny týdně, z nichž 2 hodiny byla třída rozdělena na 2 skupiny.

Hlavními cíli předexperimentu bylo

1. ověřit, zda žáci budou schopni vytvořit úlohy na základě daných situací (dostatek času, dostatečná inspirace pro tvorbu úloh),
2. ověřit vhodnost a upřesnit formulaci proměnných pro popis vytvořených úloh (možnost ohodnotit úlohy podle daných proměnných, nalezení dalších relevantních proměnných, rozdíly mezi úlohami nebo autory úloh),
3. zjistit, zda existují (významné) rozdíly v úlohách vytvořených dobrými, průměrnými a slabými žáky v dané třídě (porovnání vyhodnocení proměnných pro tyto tři skupiny).

Experiment byl této třídě zadán na konci června roku 2010. Ve třídě bylo přítomno 18 z celkem 29 žáků. 16 žáků vytvořilo všechny čtyři úlohy, jeden žák stihl z časových důvodů vytvořit pouze tři úlohy a jeden žák dvě úlohy. Celkem tedy třída vytvořila 69 úloh. Jen několik žáků uvedlo ve svých komentářích, v čem spatřují obtížnost úloh.

7.2 Vytvořené úlohy a jejich charakteristiky, analýza variability

7.2.1 Situace 1

Do analýzy vytvořených úloh jsme zařadili všechny úlohy včetně takových, kde některé formulace nejsou zcela jednoznačné. Vytvořené úlohy jsme rozdělili nejprve podle oblastí matematiky, do kterých lze úlohy zařadit. Prostředí situace bylo geometrické a nikdo z žáků nevytvořil jiné prostředí, všechny úlohy se zabývají (rovinnými) útvary a lze je tedy z hlediska oblastí matematiky zařadit mezi geometrické úlohy. Z hlediska postupu řešení jsme úlohy rozdělili na početní a konstrukční úlohy, případně úlohy kombinující tyto postupy,

[27] Tuto třídu budeme v textu označovat Třída 1.

a ostatní úlohy. Podle způsobu řešení jsme pak úlohy rozdělili na aritmetické, algebraické, aritmeticko-algebraické a kombinatorické úlohy. U každé úlohy jsme následně popsali matematický model, na kterém je založena. V 34 úlohách vytvořených žáky v rámci situace 1 se vyskytlo celkem 20 druhů jednoduchých matematických modelů. Celkem 13 úloh bylo založeno pouze na jednom jednoduchém matematickém modelu, ostatních 21 úloh bylo založeno na matematickém modelu složeném ze dvou, tří nebo čtyř jednoduchých modelů. Podrobný přehled postupů, způsobů řešení a matematických modelů úloh zachycuje následující tabulka:

Tabulka 1. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 1, situace 1)

Číslo úlohy[28]	**Postup řešení**	**Způsob řešení**	**Matematický model**
101 – 1a	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, rozdíl obsahů
101 – 1b	P, K	AL	zakreslení trasy, délka trasy
102 – 1a	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, rozdíl obsahů, převod jednotek
102 – 1b	P	AL, AR	obvod mnohoúhelníku, rozdíl obvodů, převod jednotek
103 – 1a	P	AL, AR	délka trasy, porovnávání
103 – 1b	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent
104 – 1a	P	AR	obsah čtverce
104 – 1b	P, K	AL, AR	zakreslení trasy, úloha o pohybu – čas setkání
105 – 1a	O	jiný	určení souřadnic bodu
105 – 1b	P	AL	obsah trojúhelníku
106 – 1a	P	AL, AR	obsah čtverce, obvod čtverce
106 – 1b	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent
107 – 1a	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku
107 – 1b	P, K	AL	zakreslení trasy, úloha o pohybu – doba cesty
108 – 1a	P	AR	obsah mnohoúhelníku
108 – 1b	P, K	AR	osová souměrnost, určení počtu stran
109 – 1a	P	AL	obsah mnohoúhelníku
109 – 1b	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent
110 – 1a	P	AR	délka trasy (čáry)

[28]Poznámka k číslování úloh: trojciferné číslo je kód žáka, úloha 1a je snadná úloha k situaci 1, úloha 2b je obtížná úloha k situaci 2.

Vysvětlivky: P – početní úloha, K – konstrukční úloha, O – ostatní úlohy, AR – aritmetická úloha, AL – algebraická úloha, KO – kombinatorická úloha. U úloh 105 – 1a a 113 – 1a nelze rozlišit způsob řešení úlohy podle našeho rozdělení.

110 – 1b	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, součet obsahů
111 – 1a	P	AL, AR	obvod mnohoúhelníku, převod jednotek
111 – 1b	P	AL, AR	obvod mnohoúhelníku, obvod čtverce, součet obvodů, rozdíl obvodů
112 – 1a	P	AL	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku
112 – 1b	P	AL, AR	obsah čtverce, obsah mnohoúhelníku, součet obsahů, počet procent
113 – 1a	K	jiný	zakreslení trasy
113 – 1b	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, výpočet násobku, počet procent
114 – 1a	P	AL	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku
114 – 1b	P	AL	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, obsah kruhu, rozdíl obsahů
115 – 1a	P	KO	určení počtu čtverců
115 – 1b	P	KO	určení počtu čtverců
116 – 1a	P	KO	určení počtu čtverců
116 – 1b	P, K	AL	zakreslení trasy, úloha o pohybu – doba cesty
118 – 1a	P	AL, AR	obsah mnohoúhelníku
118 – 1b	P	AL	délka trasy

Tabulka 2 shrnuje rozdělení postupů řešení mezi snadné a obtížné úlohy, tabulka 3 pak rozdělení početních úloh podle způsobu řešení:

Tabulka 2. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 1, situace 1)

Postup řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Početní	27	15	12
Početně – konstrukční	5	0	5
Konstrukční	1	1	0
Ostatní	1	1	0

Tabulka 3. Rozdělení početních úloh podle způsobu řešení (třída 1, situace 1)

Způsob řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Algebraický	9	3	6
Aritmetický	4	3	1
Algebraicko-aritmetický	16	7	9
Kombinatorický	3	2	1

Přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách zachycuje tabulka 4 :

Tabulka 4. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 1, situace 1)

Matematický model	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha	Matematický model	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha
obsah mnohoúhelníku	15	9	6	obvod čtverce	2	1	1
obsah čtverce	8	2	6	úloha o pohybu – doba cesty	2	0	2
obvod mnohoúhelníku	6	4	2	určení počtu stran	1	0	1
počet procent	5	0	5	osová souměrnost	1	0	1
zakreslení trasy	5	1	4	úloha o pohybu – čas setkání	1	0	1
délka trasy	4	2	2	porovnávání	1	1	0
rozdíl obsahů nebo obvodů	4	2	2	určení souřadnic bodu	1	1	0
převod jednotek	3	2	1	výpočet násobku	1	0	1
určení počtu čtverců	3	2	1	obsah trojúhelníku	1	0	1
součet obsahů nebo obvodů	3	0	3	obsah kruhu	1	0	1

7.2.2 Situace 2

Stejně jako v situaci 1 jsme do analýzy vytvořených úloh zahrnuli všechny vytvořené úlohy. Kontext situace byl podobný kontextům často využívaným v učebnicích k aplikaci řešení rovnic a soustav rovnic a 34 z 35 vytvořených úloh vycházelo z tohoto kontextu. Pouze 1 úloha byla zasazena do jiného reálného kontextu. V úlohách vytvořených žáky se vyskytlo celkem 12 druhů jednoduchých matematických modelů. Celkem 16 úloh bylo založeno pouze na jednom jednoduchém matematickém modelu, ostatních 18 úloh obsahovalo kombinaci dvou, tří nebo čtyř z těchto modelů. Z hlediska postupu řešení jsme úlohy rozdělili na početní a logické úlohy. Podle způsobu řešení jsme pak početní úlohy rozdělili na aritmetické, algebraické, aritmeticko-algebraické. U každé úlohy jsme následně popsali matematický model, na kterém je založena. V 35 úlohách vytvořených žáky v rámci situace 2 se vyskytlo celkem 12 druhů jednoduchých matematických modelů. Podrobný přehled postupů, způsobů řešení a matematických modelů úloh zachycuje tabulka 5:

Tabulka 5. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 1, situace 2)[29]

Číslo úlohy	Postup řešení	Způsob řešení	Matematický model
101 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku, procentová část
101 – 2b	P	AL, AR	obsah obdélníku, obsah trojúhelníku, celek/část – velikost celku
102 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku, procentová část
102 – 2b	P	AR	celek/část – velikost celku, procentová část
103 – 2a	P	AR	celek/část – počet částí
103 – 2b	P	AL, AR	celek/část – počet částí
104 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
104 – 2b	P	AL, AR	jednoduchý úrok, celek/část – velikost celku, porovnávání
105 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
105 – 2b	P	AR	celek/část–velikost celku, procentová část, součet
106 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
106 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, procentová část
107 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku, rozdíl
107 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
108 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
108 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, procentová část
109 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
109 – 2b	P	AL, AR	celek/část – počet částí, procentová část
110 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
110 – 2b	P	AL, AR	úloha o pohybu – délka trasy, převod jednotek
111 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
111 – 2b	P	AR	celek/část – velikost celku
112 – 2a	P	AR	celek/část – počet částí
112 – 2b	L		logická úloha
113 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
113 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
114 – 2a	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, celek/část – velikost části
114 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, procentová část
115 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
115 – 2b	P	AR	celek/část – velikost celku, porovnávání
116 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku
116 – 2b	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
117 – 2a	P	AR	celek/část – velikost celku, procentová část

[29] Vysvětlivky: P – početní úloha, L – logická úloha, AR – aritmetická úloha, AL – algebraická úloha, KO – kombinatorická úloha

117 – 2b	P,L	AR	procentová část, logická úloha
118 – 2a	P	AL, AR	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání

Tabulka 6 shrnuje rozdělení postupů řešení mezi snadné a obtížné úlohy, tabulka 7 pak rozdělení početních úloh podle způsobu řešení:

Tabulka 6. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 1, situace 2)

Postup řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Početní	33	18	15
Početně – logické	1	0	1
Logické	1	0	1

Tabulka 7. Rozdělení početních úloh podle způsobu řešení (třída 1, situace 2)

Způsob řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Aritmetický	21	16	5
Algebraicko-aritmetický	13	2	11
Jiný	1	0	1

Přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách zachycuje následující tabulka:

Tabulka 8. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 1, situace 2)

Matematický model	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**	**Matematický model**	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
celek/část – velikost celku	28	16	12	obsah trojúhelníku	1	0	1
procentová část	14	4	10	úloha o pohybu – délka trasy	1	0	1
celek/část – počet částí	6	3	3	jednoduchý úrok	1	0	1
porovnávání	6	1	5	převod jednotek	1	1	0
logická úloha	2	0	2	součet	1	0	1
celek/část – velikost části	1	0	1	rozdíl	1	1	0
obsah obdélníku	1	0	1				

7.2.3 Prostředky pro zvýšení obtížnosti úloh

V rámci každé ze situací měli žáci vytvořit snadnou a obtížnou úlohu a měli zdůvodnit, proč je obtížná úloha obtížnější než snadná úloha. Toto zdůvodnění napsalo jen 9 žáků z 18. Nebudeme proto zkoumat, zda se jim podařilo zvýšit obtížnost úloh podle jejich záměru, ale popíšeme základní rozdíly v obou úlohách, které mají podle našeho názoru vliv na změnu obtížnosti úlohy:

Tabulka 9. Způsob zvýšení obtížnosti úloh (třída 1)

Způsob zvýšení obtížnosti	**Žák – situace**
změna matematického modelu	101 – 1, 101 – 2, 103 – 1, 103 – 2, 104 – 2, 105 – 1, 107 – 1, 108 – 1, 109 – 1, 110 – 1, 110 – 2, 112 – 2, 113 – 1, 115 – 1, 115 – 2, 116 – 1, 117 – 2, 118 – 1
víc operací	105 – 2
víc úkolů	111 – 1
změna typu čísel	111 – 2
změna matematického modelu, víc úkolů	104 – 1, 107 – 2, 114 – 1, 114 – 2,
změna matematického modelu, změna typu čísel v zadání	102 – 2
změna matematického modelu, víc úkolů, změna typu čísel v zadání	102 – 1
změna matematického modelu, víc úkolů, počítání s procenty	106 – 1, 106 – 2, 108 – 2, 109 – 2, 113 – 2, 116 – 2
změna matematického modelu, počítání s procenty	112 – 1
nelze porovnat	117 – 1, 118 – 2

Z informací uvedených v tabulce 9 vyplývá, že prostředkem pro zvýšení obtížnosti úloh byla ve velké většině situací (31 z 34) změna matematického modelu, v jednom případě zvýšení počtu operací, počtu úkolů k vyřešení a změna typu čísel. Ke změně matematického modelu se v 9 situacích přidalo zvýšení počtu úkolů, v 7 situacích počítání s procenty a ve 2 situacích změna typu čísel v zadání. Zvětšení délky zadání považujeme většinou za důsledek zvýšení počtu úkolů, nikoli za samostatný prostředek pro zvýšení obtížnosti úlohy.

7.2.4 Charakteristika vytvořených úloh – shrnutí a diskuse

Situace 1

Všechny vytvořené úlohy byly relevantní v dané situaci. Zadání vytvořených úloh bylo většinou jasné a jednoznačné, pouze v 5 úlohách z 34 jsou některé informace v zadání nejasné a připouštějí víc interpretací. Většinu úloh lze zařadit mezi početní geometrické úlohy, které lze řešit nejčastěji kombinací aritmetického a algebraického způsobu řešení. Pět úloh kombinujících početní a konstrukční postup řešení bylo vytvořeno jako obtížné úlohy, pouze jedna úloha založená na jednoduché konstrukci patří mezi snadné úlohy. Nejčastějším matematickým modelem byl výpočet obsahu mnohoúhelníku (jednoho ze dvou mnohoúhelníků zadaných přímo situací), dále pak výpočet obsahu čtverce, obvodu mnohoúhelníku, počtu procent a zakreslení trasy. Ostatní matematické modely se vyskytly v méně než pěti úlohách.

Změna obtížnosti úloh byla u téměř všech dvojic vytvořených úloh založena na změně matematického modelu, případně doplněné o větší počet úkolů nebo zařazení počítání s procenty.

Situace 2

Všechny úlohy byly relevantní a vycházely z kontextu dané situace, pouze jedna úloha patřila do jiného reálného kontextu. Zadání většiny úloh bylo jasné a jednoznačné, pouze zadání dvou úloh (s delším zadáním) obsahují nepřesnosti. Většinu úloh lze zařadit mezi početní úlohy řešitelné nejčastěji aritmetickou, případně aritmeticko-algebraickou cestou. Velká většina úloh byla založena na vztahu celku a jeho částí, nejčastěji pak na výpočet celku. Ve 14 úlohách se vyskytlo počítání s procenty, v 6 úlohách výpočet počtu částí a porovnávání. Ostatní matematické modely se vyskytly v méně než pěti úlohách.

Změna obtížnosti úloh byla u téměř všech dvojic vytvořených úloh uskutečněna prostřednictvím změny matematického modelu, dále pak zvýšením počtu operací nebo změnou typu čísel v zadání. V některých případech se ke změně matematického modelu přidalo i počítání s procenty a zvýšení počtu úkolů.

Diskuse

V úlohách vytvořených v rámci situace 1 se vyskytlo 20 různých matematických modelů, v situaci 2 pouze 13 různých modelů. Počet matematických modelů může souviset s větší otevřeností první situace a absencí jakéhokoli reálného kontextu. Je možné, že pro studium tvorby úloh nebo pro využití tvorby úloh pro studium repertoáru žákovských poznatků se jeví vhodnější situace otevřená a bez kontextu. Druhá situace svým „učebnicovým“ charakterem zřejmě víc navedla žáky na konkrétní typy úloh. Jelikož žáci ve většině případů měnili matematický model úlohy, situace se jeví jako vhodná pro studium matematické kultury žáků, protože umožňuje žákům použít jejich repertoár matematických poznatků.

Vytvořené úlohy byly většinou smysluplné, úplné a relevantní v dané situaci. Jejich matematické modely byly většinou takové, které žáci probírali již o několik let dříve, a jen velmi málo úloh bylo založeno na poznatcích z posledních dvou let studia (úlohy o pohybu, úrokování). Je možné se domnívat, že při tvorbě úloh použili žáci starší a dobře upevněné poznatky, kterými si jsou jisti. Při využití tvorby úloh pro zkoumání repertoáru žákových poznatků je třeba dávat pozor, aby daná situace dostatečně motivovala k využití poznatků, které chceme u žáků zkoumat. Je také možné, že schopnost řešit úlohy a tvořit úlohy v daném momentě je u daného žáka různá a že je žák schopen vyřešit obtížnější úlohy, než je schopen vytvořit. Tuto domněnku lze podpořit i tím, že v situaci 2 byla většina úloh na vztah celku a jeho částí, k jejich vyřešení stačilo většinou použít několik aritmetických operací a nebylo třeba sestavit rovnici nebo soustavu rovnic, jak je u obdobných úloh na 2. stupni obvyklé.

7.3 Analýza variability úloh předexperimentu na základě proměnných skupiny 1

V první fázi analýzy variability vytvořených úloh jsme využili proměnné, které jsme stanovili v rámci analýzy a priori, a doplnili jsme je o proměnné určené pro porovnání snadné a obtížné úlohy. Úlohy jsme hodnotili na základě 12 proměnných, z nichž 6 se týkalo jednotlivých úloh a 5 porovnání dvojic úloh. Při určení těchto proměnných jsme vycházeli z výzkumů, kde byly využity strukturální proměnné (Sarrazy, 2002; Suppes a kol., 1969; Searle a kol., 1974). V této fázi jsme proměnné nijak nestrukturovali do kategorií. Proměnné jsme formulovali jako výroky o jednotlivých úlohách nebo dvojicích úloh, aby bylo možné jednoznačně rozhodnout, zda se daná proměnná vztahuje k úloze nebo dvojici úloh. Je důležité poznamenat, že tyto proměnné byly posléze několikrát pozměněny, upřesněny a doplněny. Analýzu podle těchto proměnných zde uvádíme proto, abychom zdůvodnili provedené změny a upřesnění, a poukázali na některé problémy při definování vhodných proměnných.

7.3.1 Definice proměnných pro analýzu úloh

A. Proměnné sloužící pro popis jednotlivých úloh

První skupinu tvoří proměnné, které popisují jednotlivé úlohy z hlediska prostředků, které autor použil pro jejich vytvoření, a také z hlediska řešitelnosti jednotlivých úloh.

P1. Zadání úlohy obsahuje autorem přidaný kontext.

Posuzování této proměnné se liší v rámci jednotlivých situací. Situace 1 neobsahuje žádný reálný kontext, tato proměnná vyjadřuje, zda žák zasadil situaci do reálného kontextu. Situace 2 je naopak zasazena do reálného kontextu. Tato proměnná pak vyjadřuje, zda žák změnil daný reálný kontext situace za jiný.

Hodnoty:

zadání neobsahuje autorem přidaný kontext 0

zadání obsahuje autorem přidaný kontext 1

P2. Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje.

Tato proměnná vyjadřuje, zda žák přidal do zadání číselné údaje, nebo zda pracoval pouze s číselnými údaji danými zadáním situace. U situace 1 se jedná i o přidání jednotek délky nebo obsahu.

Hodnoty:

zadání neobsahuje nové číselné údaje 0

zadání obsahuje nové číselné údaje 1

P3. Úloha je řešitelná.

Tato proměnná vyjadřuje, zda lze odpovědět na dané otázky na základě zadaných nebo autorem přidaných informací. Jelikož měli žáci tvořit úlohy pro svoje spolužáky, úlohu budeme považovat za řešitelnou, pokud ji lze vyřešit pomocí poznatků, které mají žáci k dispozici v době konání experimentu..

Hodnoty:

úloha není řešitelná 0

úloha je řešitelná 1

P4. Úloha je správně zadaná z matematického hlediska.

Tato proměnná popisuje, zda je úloha správně a jednoznačně formulována z pohledu informací a vztahů mezi nimi, zda zadání neobsahuje nejasné formulace nebo rozpory mezi informacemi.

Hodnoty:

úloha není správně zadaná z matematického hlediska 0

úloha je správně zadaná z matematického hlediska 1

P5. Zadání úlohy obsahuje dostatek údajů k vyřešení úlohy.

Tato proměnná popisuje, zda zadání obsahuje všechny potřebné údaje k vyřešení úlohy – vzhledem k otázkám a úkolům formulovaným autorem úlohy.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje dostatek údajů k vyřešení úlohy 0

zadání úlohy obsahuje dostatek údajů k vyřešení úlohy 1

P6. Zadání úlohy obsahuje přidané kvalitativní informace.

Toto proměnná popisuje, zda autor formuloval otázky a úkoly pouze na základě informací v zadání situace, nebo zda k danému zadání doplnil další, jiné než číselné, údaje.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje přidané informace 0

zadání úlohy obsahuje přidané informace 1

B. Proměnné sloužící pro porovnání snadné a obtížné úlohy

Druhou skupinu tvoří proměnné, které slouží k porovnání snadné a obtížné úlohy z hlediska délky zadání úlohy, kontextu úloh, řešení úloh.

R1. Zadání obtížné úlohy je delší než zadání snadné úlohy.

Tato proměnná slouží pro porovnání délky zadání snadné a obtížné úlohy a popisuje případy, ve kterých je délka zadání obtížné úlohy víc než o řádek delší než zadání snadné úlohy. Délka je posuzována podle přepisu zadání úloh v příloze 1 této práce. Hodnotu 0 přiřadíme dvojicím úloh, kde zadání obtížné úlohy je přibližně stejně dlouhé nebo kratší než zadání snadné úlohy.

Hodnoty:

zadání obtížné úlohy není delší než zadání snadné úlohy 0

zadání obtížné úlohy je delší než zadání snadné úlohy 1

R2. Snadná úloha je modifikací obtížné úlohy.

Tato proměnná slouží k popisu případů dvojic úloh, kde autor vytvořil obtížnou úlohu pomocí modifikace snadné úlohy (změna nebo přidání údajů v zadání, použití snadné úlohy jako části obtížné úlohy apod.).

Hodnoty:

obtížná úloha není modifikací snadné úlohy nebo její části 0

obtížná úloha je modifikací snadné úlohy nebo její části 1

R3. Kontext obtížné úlohy je jiný než kontext snadné úlohy.

Tato proměnná popisuje rozdíly v rámci dvojice úloh z hlediska kontextu (úlohy zasazené do stejného nebo různého kontextu).

Hodnoty:

kontext obtížné úlohy je stejný jako kontext snadné úlohy 0

kontext obtížné úlohy je jiný než kontext snadné úlohy 1

R4. Obtížná úloha obsahuje změněné původní informace uvedené v zadání snadné úlohy.

Tato proměnná popisuje, zda se dvojice vytvořených úloh liší pouze v některých změněných (např. číselných) údajích v zadání úloh.

Hodnoty:

obtížná úloha neobsahuje změněné původní informace uvedené v zadání snadné úlohy 0

obtížná úloha obsahuje změněné původní informace uvedené v zadání snadné úlohy 1

R5. Matematický model obtížné úlohy je jiný než matematický model snadné úlohy.

Tato proměnná popisuje, zda je obtížná úloha založena na stejném nebo jiném matematickém modelu jako snadná úloha.

Hodnoty:

matematický model obtížné úlohy je stejný jako matematický model snadné úlohy 0

matematický model obtížné úlohy je jiný než matematický model snadné úlohy 1

R6. Na řešení obtížné úlohy je třeba víc operací než na řešení snadné úlohy.

Tato proměnná slouží k porovnání snadné a obtížné úlohy z hlediska počtu operací nutných k jejich vyřešení. Oproti proměnné R5 umožní najít i rozdíly mezi úlohami založenými na stejném matematickém modelu.

Hodnoty:

na řešení obtížné úlohy není třeba víc operací než na řešení snadné úlohy	0
na řešení obtížné úlohy je třeba víc operací než na řešení snadné úlohy	1

Pro ilustraci analýzy vytvořených úloh prostřednictvím výše uvedených proměnných jsme vybrali úlohy žáka 101 vytvořené v rámci situace 1:

101 – 1a Vypočítej rozdíl obsahů útvaru *B* a *A*, jestliže délka strany čtverce bude mít 1 cm.

101 – 1b Zakreslete a spočítejte trasu z bodu *A* do bodu *B*, jestliže křivka musí vždy procházet rohem čtverce (jedna vzdálenost je jedna strana čtverce nebo jedna úhlopříčka čtverce). Křivka vždy překoná jednu vzdálenost a poté dvě vzdálenosti, než změní svůj směr. (Pozn. k zadání úlohy patří ještě obrázek – viz příloha 1)

Následující tabulka ukazuje stanovení hodnot proměnných pro tyto úlohy:

Tabulka 10. Příklad stanovení hodnot proměnných úloh situace 1 (žák 101)

<table>
<tr><th>Úloha</th><th>P1</th><th>P2</th><th>P3</th><th>P4</th><th>P5</th><th>P6</th><th>R1</th><th>R2</th><th>R3</th><th>R4</th><th>R5</th><th>R6</th></tr>
<tr><td>101 – 1a</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>101 – 1b</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Úloha 1a ani 1b neobsahují autorem přidaný kontext, ale obsahují přidané kvalitativní a kvantitativní údaje. Obě úlohy jsou správně zadány, obsahují všechny informace pro vyřešení úlohy a jsou řešitelné. Úlohy se navzájem liší v délce zadání a matematickém modelu, snadná úloha není částí obtížné úlohy a obtížná úloha není modifikací snadné úlohy.

7.3.2 Analýza vytvořených úloh (situace 1, proměnné skupiny 1)

Tabulka 11 ukazuje hodnoty proměnných P1 – P6 pro všechny vytvořené úlohy v rámci situace 1:

Tabulka 11. Hodnoty proměnných P1 –P6 pro úlohy situace 1

Úloha	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Celkem	Úloha	P1	P2	P3	P4	P5	P6	Celkem
101 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	101 – 1b	0	1	1	1	1	1	5
102 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	102 – 1b	0	1	1	1	1	0	4
103 – 1a	0	0	1	1	1	1	4	103 – 1b	0	1	1	1	1	1	5
104 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	104 – 1b	1	1	1	1	1	1	6
105 – 1a	0	0	1	0	1	1	3	105 – 1b	0	1	1	1	1	1	5
106 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	106 – 1b	0	1	1	1	1	0	4
107 – 1a	0	0	1	1	1	1	4	107 – 1b	1	1	1	1	1	1	6
108 – 1a	0	0	1	1	1	1	4	108 – 1b	1	0	1	0	0	1	3
109 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	109 – 1b	0	0	1	1	1	0	3
110 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	110 – 1b	0	0	1	1	1	0	3
111 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	111 – 1b	0	0	1	1	1	0	3
112 – 1a	0	0	1	1	1	1	4	112 – 1b	0	0	1	1	1	1	4
113 – 1a	0	0	0	0	1	1	2	113 – 1b	0	0	1	1	1	0	3
114 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	114 – 1b	0	1	1	1	1	1	5
115 – 1a	0	0	1	1	1	1	4	115 – 1b	0	0	1	1	1	0	3
116 – 1a	0	0	1	1	1	0	3	116 – 1b	1	1	1	1	1	1	6
118 – 1a	0	1	1	1	1	0	4	118 – 1b	0	0	1	1	1	0	3

Proměnná P1 dosahuje hodnoty 1 ve 4 úlohách, proměnné P2 a P6 v 18 úlohách, proměnné P3 a P5 v 33 úlohách a proměnná P4 v 31 úlohách.

Tabulka 12 ukazuje porovnání snadné a obtížné úlohy podle proměnných R1–R6:

Tabulka 12. Hodnoty proměnných R1 – R6 pro úlohy situace 1[30]

Úlohy	R1	R2	R3	R4	R5	R6	Celkem	Úlohy	R1	R2	R3	R4	R5	R6	Celkem
101 – 1	1	0	0	0	1	0	2	110 – 1	0	0	0	0	1	1	2
102 – 1	1	0	0	1	1	1	4	111 – 1	0	1	0	0	1	1	3
103 – 1	0	0	0	0	1	1	2	112 – 1	1	1	0	0	1	1	4
104 – 1	1	0	1	0	1	1	4	113 – 1	0	0	0	0	1	1	2
105 – 1	0	0	0	0	1	1	2	114 – 1	1	1	0	1	1	1	5
106 – 1	1	0	0	0	1	1	3	115 – 1	0	1	0	1	1	1	4

[30] Žák 117 nevytvořil obě dvě úlohy k situaci 1, proto nejsou úlohy těchto dvou žáků uvedeny v tabulce 12.

107 – 1	1	0	1	0	1	1	4	116 – 1	1	0	1	0	1	1	4
108 – 1	1	0	1	0	1	0	3	118 – 1	0	0	0	0	1	0	1
109 – 1	0	0	0	0	1	1	2	**Celkem**	**9**	**4**	**4**	**2**	**17**	**14**	**50**

7.3.3 Výsledky analýzy vytvořených úloh (situace 1, proměnné skupiny 1)

Z 34 úloh je 33 úloh správně zadaných z matematického hlediska a obsahuje dostatek údajů k jejich vyřešení. 31 úloh je řešitelných, 18 úloh obsahuje kvalitativní informace přidané k zadání úlohy a 18 úloh obsahuje doplňující kvantitativní údaje. Pouhé 4 úlohy obsahují autorem přidaný kontext.

Z hlediska porovnání snadné a obtížné úlohy použili žáci v obtížné úloze zejména jiný matematický model (17 žáků ze 17) nebo větší počet operací (14 žáků). V 9 případech je zadání obtížné úlohy delší než zadání snadné úlohy. 4 žáci použili v obtížné úloze jiný kontext, u 4 žáků byla snadná úloha částí obtížné úlohy. Pouze 2 žáci změnili v obtížné úloze informace ze zadání snadné úlohy.

7.3.4 Analýza vytvořených úloh (situace 2, proměnné skupiny 1)

Tabulka 13 ukazuje hodnoty proměnných P1 – P6 pro všechny vytvořené úlohy v rámci situace 2:

Tabulka 13. Hodnoty proměnných P1 – P6 pro úlohy situace 2

Úloha	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**Celkem**	**Úloha**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**	**Celkem**
101 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	101 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
102 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	102 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
103 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	103 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
104 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	104 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
105 – 2a	0	0	1	1	1	0	3	105 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
106 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	106 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
107 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	107 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
108 – 2a	0	0	1	1	1	0	3	108 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
109 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	109 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
110 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	110 – 2b	0	1	1	1	1	0	4
111 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	111 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
112 – 2a	0	1	1	1	1	0	4	112 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
113 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	113 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
114 – 2a	1	1	1	1	1	1	6	114 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
115 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	115 – 2b	0	1	1	1	1	1	5

116 – 2a	0	0	1	1	1	0	3	116 – 2b	0	1	1	1	1	1	5
117 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	117 – 2b	0	1	0	0	0	1	2
118 – 2a	0	1	1	1	1	1	5	118– 2b	není						

Proměnná P1 nabývá hodnoty 1 pro 1 úlohu, proměnná P2 pro 32 úloh, proměnné P3, P4 a P5 pro 34 úloh a proměnná P6 pro 25 úloh. Tabulka 14 ukazuje porovnání snadné a obtížné úlohy podle proměnných R1 – R6:

Tabulka 14. Hodnoty proměnných R1 – R6 pro úlohy situace 2[31]

Úlohy	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**Celkem**	**Úlohy**	**R1**	**R2**	**R3**	**R4**	**R5**	**R6**	**Celkem**
101 – 2	1	0	0	0	1	1	3	109 – 2	1	0	0	0	1	1	3
102 – 2	1	0	0	0	0	1	2	110 – 2	1	0	0	0	1	0	2
103 – 2	1	0	0	0	1	1	3	111 – 2	1	1	0	1	0	0	3
104 – 2	1	1	0	0	1	1	4	112 – 2	1	0	0	0	1	1	3
105 – 2	1	0	0	0	1	1	3	113 – 2	1	0	0	0	1	1	3
106 – 2	1	0	0	0	1	1	3	114 – 2	0	0	1	0	1	0	2
107 – 2	1	0	0	0	1	1	3	115 – 2	1	1	0	0	1	1	4
108 – 2	1	0	0	0	1	1	3	116 – 2	1	0	0	0	1	1	3
								Celkem	**15**	**3**	**1**	**1**	**14**	**13**	**47**

7.3.5 Výsledky analýzy vytvořených úloh (situace 2, proměnné skupiny 1)

Z 35 úloh je 34 úloh správně zadaných z matematického hlediska, řešitelných, a obsahuje dostatek údajů k jejich vyřešení. 25 úloh obsahuje kvalitativní informace přidané k zadání úlohy. 32 úloh obsahuje doplňující číselné údaje. Pouze 1 úloha obsahuje jiný než původně zadaný kontext.

Z porovnání snadné a obtížné úlohy vyplývá, že žáci použili v obou úlohách často jiný matematický model (14 žáků z 16). Pro řešení obtížné úlohy bylo třeba také často použít větší počet operací (13 ze 16). V 15 případech bylo zadání obtížné úlohy delší než zadání snadné úlohy. Jeden žák použil v obtížné úloze jiný kontext. Jen ve 3 případech byla snadná úloha modifikací obtížné úlohy a žádný žák nezměnil v obtížné úloze informace ze zadání snadné úlohy.

[31] Žák 117 nedokončil druhou úlohu k situaci 2, žák 118 nevytvořil obě dvě úlohy k situaci 2, proto nejsou úlohy těchto dvou žáků uvedeny v tabulce 14.

7.3.6 Porovnání vytvořených úloh podle matematické úrovně jejich autorů

Pro stanovení aktuální matematické úrovně žáků a rozdělení na dobré, průměrné a slabé žáky v matematice jsme využili srovnávací písemnou práci, kterou psali žáci cca 3 týdny před konáním experimentu. Tato dvouhodinová písemná práce obsahovala základní úlohy z témat probraných během posledních dvou let studia matematiky. Žáky jsme rozdělili pomocí 1. a 3. kvartilu vypočítaného na základě počtu procent bodů získaných v této písemné práci – 1. kvartil obsahuje slabé žáky (5 žáků – 101, 104, 108, 110, 114), mezi 1. a 3. kvartil patří průměrní žáci (8 žáků – 102, 103, 105, 107, 109, 111, 117, 118) a nejlepší žáci dosáhli většího počtu procent bodů než 3. kvartil (5 žáků – 106, 112, 113, 115, 116).

Tabulka 15 ukazuje přehled, kolikrát využili žáci z těchto skupin jednotlivé matematické modely v úlohách vytvořených v rámci situace 1:

Tabulka 15. Počet použití jednotlivých matematických modelů–situace 1

Matematický model	**Celkem**	**Slabí**	**Průměrní**	**Dobří**
obsah mnohoúhelníku	15	5	6	4
obsah čtverce	8	2	2	4
obvod mnohoúhelníku	6	1	3	2
počet procent	5	0	2	3
zakreslení trasy	5	2	1	2
délka trasy	4	2	2	0
rozdíl obsahů nebo obvodů	4	2	2	0
převod jednotek	3	0	3	0
určení počtu čtverců	3	0	0	3
obvod čtverce	2	0	1	1
součet obsahů nebo obvodů	3	1	1	1
úloha o pohybu – doba cesty	2	0	1	1
určení počtu stran	1	1	0	0
osová souměrnost	1	1	0	0
úloha o pohybu – čas setkání	1	1	0	0
porovnávání	1	0	1	0
určení souřadnic bodu	1	0	1	0
výpočet násobku	1	0	0	1
obsah trojúhelníku	1	0	1	0
obsah kruhu	1	1	0	0
Celkový počet modelů	**68**	**19**	**27**	**22**

Z tabulky 15 je patrné rovnoměrné rozložení matematických modelů mezi všechny skupiny žáků. Slabí žáci použili jedenáct, průměrní čtrnáct a dobří deset různých matematických modelů.

Tabulka 16 ukazuje přehled, kolikrát využili žáci z těchto skupin jednotlivé matematické modely v úlohách vytvořených v rámci situace 2:

Tabulka 16. Počet použití jednotlivých matematických modelů–situace 2

Matematický model	**Celkem**	**Slabí**	**Průměrní**	**Dobří**
celek/část – velikost celku	28	9	11	8
procentová část	14	3	8	3
celek/část – počet částí	6	1	3	2
porovnávání	6	1	2	3
logická úloha	2	0	1	1
celek/část – velikost části	1	1	0	0
obsah obdélníku	1	1	0	0
obsah trojúhelníku	1	1	0	0
úloha o pohybu – délka trasy	1	1	0	0
jednoduchý úrok	1	1	0	0
převod jednotek	1	1	0	0
součet	1	0	1	0
rozdíl	1	0	1	0
Celkový počet modelů	**64**	**20**	**27**	**17**

Také v rámci situace 2 je patrné rovnoměrné rozložení matematických modelů mezi všechny skupiny žáků. Je možné zmínit relativně častější použití procentové části u skupiny průměrných žáků. Nejvíce různých modelů použili slabí žáci, v jejichž úlohách se vyskytlo celkem deset různých matematických modelů. Průměrní žáci použili sedm a dobří pět různých matematických modelů.

Jednotlivé skupiny žáků jsme porovnali i z hlediska počtu proměnných, které jsme přiřadili k úlohám při analýze obou situací. Celkovou hodnotu součtu bylo možné stanovit u 16 žáků z 18, kteří vytvořili všechny 4 úlohy (u žáků 117 a 118 jsme tedy součet nestanovili). Tabulka 17 zachycuje součet všech hodnot proměnných pro jednotlivé situace a celkový součet:

Tabulka 17. Celkový počet hodnot proměnných jednotlivých žáků

Žák	**Situace 1**		**Situace 2**		**Celkem**
	Úlohy	**Porovnání**	**Úlohy**	**Porovnání**	
101	9	2	10	3	24
102	8	4	10	2	22
103	9	2	9	3	23
104	10	4	9	4	27
105	8	2	8	3	21
106	8	3	9	3	23
107	10	4	10	3	27
108	7	3	8	3	21
109	7	2	9	2	20
110	7	2	8	2	19
111	7	3	10	3	23
112	8	4	9	3	24
113	5	2	10	3	20
114	9	5	11	2	27
115	7	4	10	4	25
116	9	1	8	3	21
117	–	–	7	–	–
118	7	1	5	–	–

Součet hodnot proměnných se u všech žáků pohyboval mezi 19 a 30. Průměrný součet u dobrých žáků byl 22,6, průměrných 22,7 a slabých 23,6, a je tedy téměř stejný u všech tří skupin.

7.3.7 Diskuse k analýze úloh na základě proměnných skupiny 1

Analýza vytvořených slovních úloh prostřednictvím první skupiny proměnných měla kromě informací o samotných úlohách ukázat, zda jsou proměnné vhodné pro popis jednotlivých úloh a jakým způsobem mohou přispět ke zkoumání matematické kultury žáků a kultury při tvoření úloh. Tabulka 18 ukazuje celkový počet úloh, u kterých daná proměnná nabyla hodnoty 1:

Tabulka 18. Počet úloh s hodnotou 1 u dané proměnné

	Počet úloh s hodnotou 1 (z 69 úloh)						**Počet úloh s hodnotou 1 (z 33 úloh)**					
Proměnná	P1	P2	P3	P4	P5	P6	R1	R2	R3	R4	R5	R5
∑	5	50	67	67	67	43	24	7	5	3	30	26

Proměnná P1 nabyla hodnoty 1 jen u malého množství úloh, žáci jen ve čtyřech případech zasadili úlohu do reálného kontextu v rámci situace 1 a jen v jednom případě změnili kontext u situace 2. U situace 2 je v některých případech obtížné rozlišit, zda se jedná o doplnění kontextu nebo přidání kvantitativních údajů (proměnná P6). Nízký výskyt hodnoty 1 proměnné P1 znamená, že žáci této téměř nepoužili ani nepřidávali kontext do vytvořených úloh. Situace je přímo nevedla k tomu, aby reálný kontext dodali. Jednou z možných interpretací je, že nemají tento typ situace propojený s reálným kontextem (situace 1) a že kontext druhé situace poskytl dostatečný rámec pro tvorbu snadné i obtížné úlohy.

Proměnná P2 nabyla hodnoty 1 u většiny úloh. U situace 1 vyjadřuje skutečnost, že žáci tvořili zejména početní úlohy, u situace 2 pak často žáci přidali další ceny zboží, určili počty zákazníků nebo zakoupených kusů oblečení, případně určovali slevy pomocí počtu procent atd. U vytvořených úloh by bylo třeba detailněji rozlišit, jaký typ číselného údaje žáci do zadání přidali (údaje stejné povahy jako ty, které se vyskytují v zadání situace, procenta, jednotky atd.), případně upřesnit číselný obor.

Proměnné P3, P4 a P5 nabyly hodnoty 1 u téměř všech úloh. Žáci vytvořili tedy téměř všechny úlohy řešitelné pomocí poznatků, které měli mít v době konání experimentu k dispozici. Téměř všechny úlohy byly také správně zadané z matematického hlediska, tj. bezesporné a jednoznačně formulované a obsahovaly dostatek údajů k jejich vyřešení. U některých úloh ale nebylo stanovení hodnot těchto proměnných jednoduché a jednoznačné, protože obdobná interpretace zadání může být příliš subjektivní. Takto definované proměnné se navíc ukazují jako navzájem ekvivalentní a bylo by je možné nahradit pouze jednou z nich.

Proměnná P6 nabyla hodnoty 1 u víc než poloviny úloh. Popisuje úlohy, kde žáci doplnili zadání úlohy o další informace a nevytvořili pouze otázku k dané situaci, doplněnou případně o nějaké kvantitativní údaje. Tato proměnná souvisí často také s proměnnou P1 nebo P2, protože doplnění kontextu nebo kvantitativní informace je často provázeno i přidáním dalších informací. Bylo by ale vhodné rozlišit, jaké typy informací byly do zadání přidány, aby byl zřejmý jejich vliv na vytvořenou úlohu.

Proměnná R1 nabyla hodnoty 1 u většiny dvojic úloh. Vytvoření obtížné úlohy si často vyžádalo doplnění popisu situace a přidání další informace do zadání, které pak bylo delší než zadání snadné úlohy. Bylo by třeba upřesnit formulaci této proměnné, aby bylo možné jednoznačně určit významný rozdíl mezi délkou zadání obou úloh.

Proměnná R2 nabyla hodnoty 1 u sedmi dvojic úloh. Žáci většinou netvořili obtížnou úlohu jako obecnější úlohu ke snadné úloze, ale vytvořili zcela jinou úlohu. Tato proměnná není vhodně definovaná, protože mnoho snadných a obtížných úloh bylo založeno na stejném matematickém modelu, takže z tohoto pohledu by bylo možné považovat téměř všechny obtížné úlohy za modifikaci snadné úlohy.

Proměnná R3 nabyla hodnoty 1 pouze u pěti dvojic úloh. Její malý výskyt souvisí s malým výskytem proměnné P1. Jelikož žáci příliš nepracovali s kontextem úlohy, kontext obou úloh byl většinou stejný a vycházel ze samotného zadání situace.

Proměnná R4 nabyla hodnoty 1 pouze u tří dvojic úloh. Obtížná úloha nebyla nikdy modifikací snadné úlohy. Stanovení hodnoty této proměnné bylo vzhledem k její definici obtížné, z určitého pohledu každá obtížná úloha obsahuje změněné údaje oproti snadné úloze. Tato proměnná ale měla popisovat zejména úlohy, které mají stejný matematický model a liší se pouze např. v použitých číslech nebo jednotkách.

Proměnné R5 a R6 mají u většiny úloh stejné hodnoty, obtížná úloha je často založena na stejném matematickém modelu jako snadná úloha doplněném o další modely. V definici proměnných nejsou vhodně rozlišeny pojmy matematický model a operace. Pokud bychom brali dva matematické modely jako stejné, pokud se liší pouze v použitých číslech, byly by vždy matematické modely snadné a obtížné úlohy různé. Porovnání počtu operací se jeví vhodnější pro situaci 2, kde je mnoho úloh se stejným matematickým modelem, ale počet operací se v rámci tohoto modelu může lišit. V situaci 1 jsou úlohy z tohoto pohledu často nesrovnatelné. I tyto proměnné jsou pro vhodný popis vytvořených úloh příliš obecné.

Shrneme-li závěry analýzy úloh pomocí proměnných skupiny 1, proměnné můžeme v této podobě považovat za nevhodně definované – buď jsou příliš obecné, nebo naopak zaměřené na detail, který se téměř nevyskytuje. Hlavní problémy při stanovování hodnot těchto proměnných jsou následující:

1. neměřitelnost – u části úloh šlo velmi obtížně rozhodnout, kterou hodnotu proměnné dané úloze přiřadit
2. malý výskyt – některé proměnné nabývají hodnoty 0 u téměř všech úloh a neposkytují tedy téměř žádnou informaci o vytvořených úlohách

3. příliš velký výskyt – některé proměnné nabývají hodnoty 1 u téměř všech úloh – tj. nerozlišují navzájem úlohy
4. vzájemná souvislost – hodnoty některých proměnných pro dané úlohy implikují hodnoty jiných proměnných, tj. existence jedné proměnné ovlivňuje ostatní.

Jednotlivé pojmy a proměnné je třeba přesněji definovat (např. vysvětlit pojem operace, délka zadání apod.). Při formulování a definování proměnných se projevují dvě protichůdné tendence – snaha zpřesňovat a konkretizovat proměnné vede k tomu, že u některých úloh nemá stanovení hodnot takové proměnné smysl, snaha stanovit obecné proměnné vede k tomu, že mají velmi malou vypovídací hodnotu o jednotlivých úlohách. Pro určení hodnot některých proměnných je tato situace příliš otevřená. Některé obdobně definované proměnné mají smysl u uzavřených situací nebo u situací s omezeným repertoárem poznatků, např. při zkoumání úloh, které mají být řešitelné pomocí konkrétního počtu daných operací (viz např. Sarrazy, 2002).

Celkově se takto definované proměnné ukazují jako nepoužitelné jak pro popis jednotlivých úloh, tak i pro vzájemné porovnání snadné a obtížné úlohy. Položíme-li si otázku, jaké nové informace nám tyto proměnné přinesly o vytvořených úlohách a jejich autorech, získáme jen stručnou odpověď:

Žáci vytvořili vhodně zadané, řešitelné úlohy, do kterých často doplnili číselné údaje. Žáci většinou tvořili obtížnou slovní úlohu prostřednictvím změny matematického modelu nebo přidáním počtu operací, zadání obtížné úlohy bylo často delší než zadání snadné úlohy.

Většinu těchto informací lze získat již z popisu úloh a jejich matematických modelů, proměnné tedy nepřinesly o úlohách nové podstatné informace. Pro analýzu úloh v rámci experimentu je tedy nutné tyto proměnné přeformulovat takovým způsobem, aby mohla být jejich hodnota jednoznačně stanovena, a aby lépe popisovaly vytvořené úlohy. Následující kapitola popisuje analýzu vytvořených úloh pomocí nově definovaných proměnných.

7.4 Analýza vytvořených úloh na základě proměnných skupiny 2

Na základě předchozích závěrů jsme vytvořili nový soubor proměnných pro analýzu vytvořených úloh. Tyto proměnné jsme rozdělili do několika skupin podle jejich vztahu k vytvořeným úlohám:

A) proměnné charakterizující text zadání úlohy,

B) proměnné charakterizující matematický model úlohy,

C) proměnné charakterizující řešení úlohy,

D) proměnné popisující rozdíly v zadání snadné a obtížné úlohy,

E) proměnné popisující rozdíly v matematickém modelu snadné a obtížné úlohy,

F) proměnné popisující rozdíly v řešení snadné a obtížné úlohy.

Každá z uvedených proměnných je formulována jako výrok o dané úloze, aby mohlo být jednoznačně rozhodnuto, jakou hodnotu přiřadit konkrétní proměnné u dané úlohy.

7.4.1 Formulace proměnných skupiny 2

Skupina A. Proměnné spojené s formulací zadání úlohy

A1. Zadání úlohy je formulováno jednoznačně.

Tato proměnná nahrazuje proměnné P4 a P5 z předchozí skupiny proměnných. Za jednoznačně formulované zadání považujeme takové, ve kterém jsou uvedeny všechny informace a popsány všechny vztahy mezi nimi, které jsou potřebné k vyřešení dané úlohy nebo k zodpovězení dané otázky. Pokud zadání obsahuje víc otázek nebo úkolů, musí tuto vlastnost mít každá z těchto otázek a každý úkol. Tato proměnná nepopisuje jednoznačnost řešení úlohy, ale informací v zadání úlohy.

Hodnoty:

zadání úlohy není formulováno jednoznačně	0
zadání úlohy je formulováno jednoznačně	1

A2. Zadání úlohy obsahuje víc než jeden úkol nebo jednu otázku.

Za zadání s víc než jednou otázkou nepovažujeme takové zadání, kde pro odpověď na danou otázku je potřeba zodpovědět ještě další otázky (možná souvislost s průběžnými nebo pomocnými výpočty), ale větší množství otázek musí být formulováno přímo autorem zadání.

Úloha obsahující větší množství otázek a úkolů bývá zpravidla pro řešitele obtížnější a časově náročnější. Tato proměnná souvisí navíc s proměnnou A5 (délka zadání úlohy). U některých úloh není jasné, zda bylo účelem vytvořit obtížnější úlohu prostřednictvím delšího zadání nebo většího množství otázek.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje úkol/otázku nebo obsahuje právě 1 úkol/otázku 0

zadání úlohy obsahuje víc než 1 úkol/otázku 1

A3. Zadání úlohy obsahuje autorem přidaný příběh.

Tato proměnná nahrazuje proměnnou P1 z proměnných skupiny 1. Povaha této proměnné je rozdílná v každé z výzkumných situací, protože v situaci 1 nebyl zadán žádný příběh. Úlohu vytvořenou v rámci situace 1 lze charakterizovat pomocí této proměnné, pokud žák vytvořil k úloze nějaký příběh (reálný nebo fiktivní). Úlohu vytvořenou v rámci situace 2 lze charakterizovat pomocí této proměnné, pokud žák použil v zadání úlohy jiný příběh, než který byl použit v samotném zadání situace.

zadání úlohy neobsahuje autorem vytvořený příběh 0

zadání úlohy obsahuje autorem vytvořený příběh 1

A4. Zadání úlohy obsahuje signál.

Tato proměnná rozlišuje úlohy podle toho, zda jejich zadání obsahuje signál, tj. slovo, slovní spojení, znak nebo obrázek, které přímo odkazuje na početní operaci nebo matematický model slovní úlohy.

Hodnoty:

zadání neobsahuje signální výraz 0

zadání obsahuje signální výraz 1

A5. Délka zadání úlohy neodpovídá délce zadání obvyklé v učebnicích používaných žáky.

Tato proměnná popisuje, zda je délka zadání úlohy obdobná jako délka zadání úloh, se kterými se žáci obvykle setkávají v učebnicích a sbírkách. Má hodnotu 1 u úloh, jejichž zadání je významně delší než obvyklé zadání úloh. Za obvyklou délku budeme považovat 5 řádků v učebnici, což je (až na jednotlivé výjimečné případy) největší délka zadání v učebnicích.

Hodnoty:

běžná délka zadání 0

větší délka zadání 1

Skupina B. Proměnné spojené s matematickým modelem úlohy

Tyto proměnné popisují matematický model úlohy a jeho části – použité druhy čísel v zadání a komplexnost modelu. Nezavádíme samostatnou proměnnou pro záporná čísla, iracionální čísla kvůli malému nebo žádnému výskytu těchto typů čísel ve vytvořených úlohách.

B1. Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje.

Situace 1, která byla zadána prostřednictvím obrázku, neobsahuje žádné číselné údaje. Situace 2 obsahuje číselné údaje – ceny jednotlivého zboží. U některých úloh byly do zadání přidány další číselné údaje. Povahu těchto číselných údajů rozlišujeme podrobněji v rámci proměnných B2 a B3.Pokud zadání úlohy v rámci Situace 1 neobsahuje číselné údaje, může se jednat buď o úlohu řešitelnou bez použití výpočtů (např. konstrukční úlohu, úlohu řešitelnou pomocí úvahy), nebo o úlohu, jejíž autor zapomněl tyto číselné údaje uvést.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje číselné údaje	0
zadání úlohy obsahuje číselné údaje	1

B2. Zadání úlohy obsahuje autorem přidané pomocné číselné údaje.

Proměnná B2 nabývá hodnoty 1 u úloh, kde autor přidal pomocné číselné údaje určující číslo nebo pořadí objektů, ceny zboží nebo počty procent, např. velikost slevy poskytnuté na zboží.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje autorem přidané pomocné číselné údaje	0
zadání obsahuje autorem přidané pomocné číselné údaje	1

B3. Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje určující počet nebo velikost objektů.

Hodnoty:

zadání úlohy neobsahuje autorem přidané počty, velikosti nebo ceny objektů	0
zadání úlohy obsahuje autorem přidané počty, velikosti nebo ceny objektů	1

B4. Zadání úlohy obsahuje necelá čísla.

Zadání úlohy obsahuje pouze celá čísla – v naprosté většině úloh se navíc jedná o kladná celá čísla. Jejich použití nemusí mít rozhodující vliv na obtížnost úlohy – riziko početní chyby je ale menší než v případě použití dalších typů čísel (viz následující proměnné).

Zadání úlohy obsahuje reálná čísla psaná formou zlomku nebo desetinného čísla, případně odmocniny. Tuto proměnnou používali autoři úloh zejména pro obtížné úlohy. Použití tohoto typu čísel zvyšuje riziko početní chyby při řešení úlohy.

Hodnoty:

zadání obsahuje pouze celá čísla	0
zadání obsahuje necelá čísla	1

B5. Matematický model úlohy se skládá z více modelů.

Některé úlohy jsou založeny na jednoduchém matematickém modelu, jiné úlohy mají buď složený matematický model, případně se jedná o posloupnost několika stejných matematických modelů. Úplný výčet matematických modelů je uveden u popisu úloh vytvořených v rámci jednotlivých situací (viz kapitola 7.2.1 a 7.2.2).

Hodnoty:

jednoduchý matematický model slovní úlohy	0
složený matematický model slovní úlohy	1

B6. Matematický model úlohy je složený z několika různých modelů.

Tato proměnná rozlišuje úlohy, ve kterých se jedná o posloupnost několika různých matematických modelů úlohy, a úlohy, u kterých se opakovaně vyskytuje stejný matematický model. V některých úlohách se vyskytuje víc stejných matematických modelů, v některých pak kombinace různých matematických modelů.

Hodnoty:

jednoduchý nebo složený matematický model slovní úlohy ze stejných modelů	0
složený matematický model slovní úlohy z různých modelů	1

Skupina C. Proměnné spojené s řešením úlohy

C1. Úloha je řešitelná.

Úlohu budeme považovat řešitelnou, pokud existuje její řešení a lze jej nalézt pomocí poznatků, které měli mít žáci k dispozici v době konání experimentu. Žáci měli tvořit úlohu pro svoje spolužáky, proto považujeme jejich repertoár poznatků za podstatný pro určení řešitelnosti úlohy.

Hodnoty:

úloha není řešitelná	0
úloha je řešitelná	1

Následující proměnné popisují metody řešení dané úlohy. Rozlišíme 3 základní typy: úlohy řešitelné úvahou, výpočtem a konstrukcí. U úloh řešitelných více metodami nabývá hodnoty 1 více než jedna z následujících tří proměnných.

C2. Úlohu lze vyřešit přímo (zpaměti).

Některé, zejména snadné úlohy je možné vyřešit bez nutnosti výpočtů, jednoduchou úvahou, případně interpretací informace ze zadání situace. Stejně jako u předchozí proměnné se možnost vyřešit úlohu úvahou vztahuje k předpokládanému repertoáru poznatků žáků v době konání experimentu.

Hodnoty:

úloha není řešitelná přímo	0
úloha je řešitelná přímo	1

C3. Úloha nebo její část je řešitelná výpočtem.

Tato proměnná umožňuje odlišit úlohy, při jejichž řešení je třeba použít operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a další. Tyto úlohy nelze zároveň vyřešit pouhou úvahou.

Hodnoty:

úloha není řešitelná výpočtem	0
úloha je zcela nebo částečně řešitelná výpočtem	1

C4. Řešení úlohy vyžaduje konstrukci.

Hodnoty 1 pro tuto proměnnou nabývají jednak úlohy, které je možné zcela vyřešit pomocí konstrukce, jednak úlohy, při jejichž řešení je potřeba provést konstrukci nebo jejímž výsledkem je konstrukce nějakého objektu.

Hodnoty:

řešení úlohy nevyžaduje konstrukci 0

řešení úlohy vyžaduje konstrukci 1

C5. K řešení úlohy pomocí výpočtu je třeba využít i jiná než celá čísla.

Tato proměnná rozděluje úlohy do skupin podle typu čísel, která je třeba použít pro vyřešení úlohy. Nejedná se o čísla, která jsou uvedena v zadání úlohy, ale zejména o druhy čísel, které se objeví až při samotném řešení úlohy.

Hodnoty:

k řešení úlohy stačí použít pouze celá čísla 0

k řešení úlohy je třeba využít i jiná než celá čísla 1

Tabulka 19 ukazuje přehled proměnných pro popis jednotlivých úloh:

Tabulka 19. Přehled proměnných pro popis úloh (skupina 2–A, B, C)

Skupina	**Kód**	**Proměnná**
A. Proměnné spojené s formulací zadání úlohy	A1	Zadání úlohy je formulováno jednoznačně.
	A2	Zadání úlohy obsahuje víc než jeden úkol nebo jednu otázku.
	A3	Zadání úlohy obsahuje autorem přidaný příběh.
	A4	Zadání úlohy obsahuje signál.
	A5	Délka zadání úlohy neodpovídá délce zadání obvyklé v učebnicích používaných žáky.
B. Proměnné spojené s matematickým modelem úlohy	B1	Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje.
	B2	Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje určující jednotky, ceny nebo počty procent.
	B3	Zadání úlohy obsahuje autorem přidané číselné údaje určující počet nebo velikost objektů.
	B4	Zadání úlohy obsahuje necelá čísla.
	B5	Matematický model úlohy se skládá z více modelů.
	B6	Matematický model úlohy je složený z několika různých modelů.

C. Proměnné spojené s řešením úlohy	C1	Úloha je řešitelná.
	C2	Úlohu lze vyřešit přímo (zpaměti).
	C3	Úloha nebo její část je řešitelná výpočtem.
	C4	Řešení úlohy vyžaduje konstrukci.
	C5	K řešení úlohy pomocí výpočtu je třeba využít i jiná než celá čísla.

Proměnné sloužící k porovnání snadné a obtížné úlohy

Tato část je věnována proměnným, které slouží ke srovnání snadné a obtížné úlohy v rámci jedné didaktické situace. Jejich cílem je zejména popsat prostředky, které využili jednotliví autoři úloh k vytvoření obtížnější úlohy. Skupina proměnných D se týká samotného zadání vytvořených úloh, skupina E se týká srovnání matematických modelů obou úloh a skupina F slouží ke srovnání řešení obou úloh.

Skupina D. Proměnné sloužící pro porovnání zadání snadné a obtížné úlohy

D1. Zadání obtížné úlohy je delší než zadání snadné úlohy.

Některé dvojice úloh měly velmi rozdílně dlouhé zadání, u jiných nebyl rozdíl v délce zadání nijak významný. Tato proměnná umožňuje odlišit dvojice úloh, kde obtížná úloha obsahuje větší množství autorem přidaných informací než snadná úloha. Na rozdíl od proměnné R1, kde jsme délku zadání posuzovali podle délky textu, jsme se rozhodli posuzovat délku zadání podle počtu uvedených informací. Nebylo totiž jasné, podle jakých kritérií stanovit významný rozdíl v délce obou zadání.

Hodnoty:

zadání obtížné úlohy je stejně dlouhé nebo kratší než zadání snadné úlohy 0

zadání obtížné úlohy je delší než zadání snadné úlohy 1

D2. Zadání obtížné úlohy obsahuje jiné druhy čísel než zadání snadné úlohy.

Vždy se jedná o druhy čísel, jejichž využití při výpočtech může být pro řešitele náročnější než využití původních čísel (např. použití desetinných čísel nebo zlomků místo celých čísel). Pokud obě dvě úlohy neobsahují čísla, řadíme je mezi úlohy se stejnými druhy čísel. Pokud jedna z úloh číselné obsahuje a druhá ne, považujeme je úlohy s různými druhy čísel.

Hodnoty:

zadání obtížné úlohy obsahuje stejné druhy čísel jako zadání snadné úlohy 0 zadání obtížné úlohy obsahuje jiné druhy čísel než zadání snadné úlohy 1

D3. Zadání obtížné úlohy obsahuje víc úkolů nebo otázek než zadání snadné úlohy.

Hodnoty:

zadání obtížné úlohy obsahuje stejné nebo menší množství úkolů než zadání snadné úlohy 0

zadání obtížné úlohy obsahuje větší množství úkolů než zadání snadné úlohy 1

D4. Kontext obtížné úlohy je méně obvyklý než kontext snadné úlohy.

Tato proměnná se vztahuje ke kontextu úloh a jeho blízkosti žákům. Příkladem blízkého kontextu může být nějaká každodenní situace nebo i kontexty, které žáci znají ze slovních úloh používaných v učebnici. Příkladem vzdálenějšího kontextu může být nějaký obtížný kontext (např. vědecký) nebo takový, který není příliš tradičně používán v matematických úlohách.

Hodnoty:

kontext obtížné úlohy je obdobný jako kontext snadné úlohy 0

kontext obtížné úlohy je méně obvyklý než kontext snadné úlohy 1

Skupina E. Proměnné sloužící k porovnání matematického modelu snadné a obtížné úlohy

E1. Obtížná úloha je založena na jiném matematickém modelu než snadná úloha.

Tato proměnná slouží k odlišení případů, kdy se snadná a obtížná úloha zcela liší z hlediska matematického modelu, tj. ani částečně se v jedné z úloh nevyskytuje matematický model druhé úlohy.

Hodnoty:

obtížná úloha je založena na stejném matematickém modelu jako snadná úloha 0

obtížná úloha je založena na jiném matematickém modelu než snadná úloha 1

E2. Matematický model obtížné úlohy obsahuje matematický model snadné úlohy.

Tato proměnná doplňuje proměnnou E1 a popisuje dvojice úloh, kde matematický model snadné úlohy je součástí matematického modelu obtížné úlohy.

Hodnoty:

matematický model obtížné úlohy neobsahuje matematický model snadné úlohy 0

matematický model obtížné úlohy obsahuje matematický model snadné úlohy 1

Skupina F. Proměnné sloužící k porovnání řešení snadné a obtížné úlohy

F1. Řešení obtížné úlohy vyžaduje víc kroků než řešení snadné úlohy.

Tato proměnná slouží k porovnání počtu kroků potřebných k vyřešení snadné a obtížné úlohy a umožňuje porovnat i úlohy založené na různých matematických modelech. Za jeden krok považujeme např. výpočet délky úsečky, zakreslení objektu, výpočet počtu procent, u jednodušších úloh se může jednat i o provedení jedné početní operace.

Hodnoty:

řešení obtížné úlohy nevyžaduje víc operací než řešení snadné úlohy 0

řešení obtížné úlohy vyžaduje víc operací než řešení snadné úlohy 1

F2. Řešení obtížné úlohy vyžaduje použití jiných typů čísel než řešení snadné úlohy.

Hodnoty:

řešení obtížné úlohy nevyžaduje použití jiných typů čísel než řešení snadné úlohy 0

řešení obtížné úlohy vyžaduje použití jiných typů čísel než řešení snadné úlohy 1

Tabulka 20. Přehled proměnných pro porovnání snadné a obtížné úlohy úloh (skupina 2–D, E, F)

Skupina	**Kód**	**Proměnná**
D. Proměnné sloužící pro porovnání zadání snadné a obtížné úlohy	D1	Zadání obtížné úlohy je delší než zadání snadné úlohy.
	D2	Zadání obtížné úlohy obsahuje jiné druhy čísel než zadání snadné úlohy.
	D3	Zadání obtížné úlohy obsahuje víc úkolů nebo otázek než zadání snadné úlohy.
	D4	Kontext obtížné úlohy je žákům vzdálenější než kontext snadné úlohy.
E. Proměnné sloužící pro porovnání matematického modelu snadné a obtížné úlohy	E1	Obtížná úloha je založena na jiném matematickém modelu než snadná úloha.
	E2	Matematický model obtížné úlohy obsahuje matematický model snadné úlohy.

F. Proměnné sloužící k porovnání řešení snadné a obtížné úlohy	F1	Řešení obtížné úlohy vyžaduje víc kroků než řešení snadné úlohy.
	F2	Řešení obtížné úlohy vyžaduje použití jiných typů čísel než řešení snadné úlohy.

7.4.2 Analýza vytvořených úloh (situace 1, proměnné skupiny 2)

Tabulka 21 ukazuje hodnoty proměnných skupin A, B, C pro všechny vytvořené úlohy v rámci situace 1:

Tabulka 21. Hodnoty proměnných skupin A, B,C pro úlohy situace 1

Úloha	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**Celkem**
101 – 1a	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	10
101 – 1b	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	11
102 – 1a	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	10
102 – 1b	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	12
103 – 1a	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	7
103 – 1b	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	9
104 – 1a	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	8
104 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	13
105 – 1a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2
105 – 1b	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	7
106 – 1a	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	10
106 – 1b	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	11
107 – 1a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	5
107 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	12
108 – 1a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	5
108 – 1b	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	3
109 – 1a	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	8
109 – 1b	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	8
110 – 1a	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	6
110 – 1b	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	8
111 – 1a	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	8
111 – 1b	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	7
112 – 1a	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	8
112 – 1b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	8
113 – 1a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
113 – 1b	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	8

114 – 1a	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	11
114 – 1b	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	10
115 – 1a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	4
115 – 1b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	4
116 – 1a	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	6
116 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	11
118 – 1a	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	8
118 – 1b	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	5
Celkem	**30**	**12**	**3**	**21**	**0**	**20**	**14**	**12**	**4**	**18**	**18**	**33**	**20**	**31**	**6**	**22**	**264**

Tabulka 22 ukazuje porovnání snadné a obtížné úlohy podle proměnných skupin D, E, F:

Tabulka 22. Hodnoty proměnných skupin D, E, F pro úlohy situace 1[32]

Úlohy	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**E1**	**E2**	**F1**	**F2**	**Celkem**
101 – 1	1	0	1	0	1	0	0	1	4
102 – 1	1	1	1	0	1	0	1	1	6
103 – 1	0	0	0	0	1	0	1	1	3
104 – 1	1	0	1	0	1	0	1	0	4
105 – 1	0	1	0	0	1	0	0	0	2
106 – 1	1	0	1	0	1	1	1	0	5
107 – 1	1	1	1	0	1	0	1	0	5
108 – 1	1	0	1	0	1	0	1	0	4
109 – 1	0	1	0	0	1	1	1	1	5
110 – 1	0	1	0	0	1	0	1	1	4
111 – 1	0	1	0	0	1	1	1	0	4
112 – 1	1	0	0	0	1	1	1	1	5
113 – 1	1	1	1	0	1	0	1	1	6
114 – 1	1	1	1	0	1	1	1	1	7
115 – 1	0	0	0	0	1	1	1	0	3
116 – 1	1	1	1	0	1	0	1	0	5
118 – 1	0	1	0	0	1	0	0	0	2
Celkem	**10**	**10**	**9**	**0**	**17**	**6**	**14**	**8**	**74**

7.4.3 Výsledky analýzy vytvořených úloh (situace 1, proměnné skupiny 2)

Z 34 zadání úloh je 30 formulováno jednoznačně. 12 zadání obsahuje víc než jeden úkol nebo otázku, 3 zadání obsahují autorem přidaný příběh, 21 zadání obsahuje signální výraz odkazující na matematický model. Délka všech zadání odpovídá ve všech úlohách délce zadání úloh obvyklé v učebnicích. 20 zadání úloh obsahuje autorem přidané číselné údaje, ve

[32] Žák 117 nevytvořil obě dvě úlohy k situaci 1, proto nejsou jeho úlohy uvedeny v tabulce 22.

14 z nich se jedná o jednotky, ceny nebo počty procent a ve 12 o velikost nebo počet objektů. Zadání 4 úloh obsahuje necelá čísla. Matematický model 18 úloh se skládá z několika různých modelů, ostatní úlohy jsou založeny na jednoduchém matematickém modelu. 33 úloh je řešitelných, z nich 20 lze vyřešit úvahou a 31 výpočtem. U 22 úloh je třeba k řešení využít jiná než celá čísla. Řešení 6 úloh vyžaduje konstrukci.

Z hlediska porovnání snadné a obtížné úlohy bylo u 10 dvojic úloh zadání obtížné úlohy delší než zadání snadné úlohy, u 10 dvojic úloh obsahovalo zadání jiné druhy čísel. Zadání obtížné úlohy obsahovalo víc otázek a úkolů u 9 dvojic úloh. Kontext obou úloh byl u všech dvojic obdobný. V obtížné úloze vždy použili žáci jiný matematický model (17 žáků ze 17), z nichž v 6 případech obsahoval matematický model obtížné úlohy matematický model snadné úlohy. Ve 14 případech vyžaduje řešení obtížné úlohy větší počet kroků než řešení snadné úlohy a v 8 případech použití jiných typů čísel.

7.4.4 Analýza vytvořených úloh (situace 2, proměnné skupiny 2)

Tabulka 23 ukazuje hodnoty proměnných skupin A, B, C pro všechny vytvořené úlohy v rámci situace 2:

Tabulka 23. Hodnoty proměnných skupin A, B,C pro úlohy situace 2

Úloha	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**Celkem**
101 – 2a	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	8
101 – 2b	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	9
102 – 2a	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	8
102 – 2b	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	11
103 – 2a	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	6
103 – 2b	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	8
104 – 2a	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	8
104 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	12
105 – 2a	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	6
105 – 2b	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	10
106 – 2a	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	9
106 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	11
107 – 2a	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	9
107 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	13
108 – 2a	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	6
108 – 2b	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	10
109 – 2a	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	7

109 – 2b	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	10
110 – 2a	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	7
110 – 2b	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	8
111 – 2a	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	8
111 – 2b	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	8
112 – 2a	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	7
112 – 2b	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	7
113 – 2a	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	8
113 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	13
114 – 2a	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	13
114 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	13
115 – 2a	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	7
115 – 2b	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	11
116 – 2a	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	4
116 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	14
117 – 2a	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	10
117 – 2b	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	6
118 – 2a	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	12
Celkem	**34**	**11**	**25**	**21**	**3**	**33**	**24**	**26**	**7**	**16**	**15**	**34**	**15**	**34**	**0**	**19**	

Tabulka 24 ukazuje porovnání snadné a obtížné úlohy podle proměnných skupin D, E, F:

Tabulka 24. Hodnoty proměnných skupin D, E, F pro úlohy situace 2[33]

Úlohy	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**E1**	**E2**	**F1**	**F2**	**Celkem**	**Úlohy**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**E1**	**E2**	**F1**	**F2**	**Celkem**
101 – 2	1	0	1	0	1	0	1	1	5	109 – 2	1	0	0	0	1	0	1	1	4
102 – 2	1	1	0	0	1	1	1	0	5	110 – 2	1	0	0	0	1	0	0	0	2
103 – 2	1	0	0	0	1	0	1	0	3	111 – 2	1	0	0	0	0	1	0	1	3
104 – 2	1	0	1	0	1	1	1	1	6	112 – 2	1	0	0	0	1	0	1	0	3
105 – 2	1	0	0	0	1	1	1	1	5	113 – 2	1	0	1	0	1	1	1	1	6
106 – 2	1	0	0	0	1	1	1	0	4	114 – 2	1	1	0	0	1	0	0	0	3
107 – 2	1	0	0	0	1	1	1	1	5	115 – 2	1	1	1	0	1	1	1	1	7
108 – 2	1	1	0	0	1	1	1	1	6	116 – 2	1	1	1	0	1	1	1	1	7
										Celkem	**16**	**5**	**5**	**0**	**15**	**10**	**13**	**10**	**74**

7.4.5 Výsledky analýzy vytvořených úloh (situace 1, proměnné skupiny 2)

Z 35 zadání úloh je 34 formulováno jednoznačně. 11 zadání obsahuje víc než jeden úkol nebo otázku, 25 zadání obsahuje autorem přidaný příběh, 21 zadání obsahuje signální výraz

[33] Žák 117 nedokončil druhou úlohu k situaci 2, žák 118 nevytvořil obě dvě úlohy k situaci 2, proto nejsou úlohy vytvořené těmito dvěma žáky uvedeny v tabulce 24.

odkazující na matematický model. 3 zadání jsou významně delší z hlediska počtu informací než zadání úloh obvyklá v učebnicích používaných žáky. 33 zadání úloh obsahuje autorem přidané číselné údaje, ve 24 z nich se jedná o jednotky, ceny nebo počty procent a ve 26 o velikost nebo počet objektů. Zadání 7 úloh obsahuje necelá čísla. Matematický model 15 úloh se skládá z několika různých modelů, v jednom případě z několika stejných modelů. Ostatní úlohy jsou založeny na jednoduchém matematickém modelu. 34 úloh je řešitelných, z nich 15 lze vyřešit úvahou a 34 výpočtem. U 19 úloh je třeba k řešení využít jiná než celá čísla. Ani jedno řešení úlohy nevyžaduje konstrukci.

Z hlediska porovnání snadné a obtížné úlohy bylo u 16 dvojic úloh zadání obtížné úlohy delší než zadání snadné úlohy, u 5 dvojic úloh obsahovalo zadání jiné druhy čísel. Zadání obtížné úlohy obsahovalo víc otázek a úkolů u 5 dvojic úloh. Kontext obou úloh byl u všech dvojic obdobný. V obtížné úloze téměř vždy použili žáci jiný matematický model (15 žáků ze 16), z nichž v 10 případech obsahoval matematický model obtížné úlohy matematický model snadné úlohy. Ve 12 případech vyžaduje řešení obtížné úlohy větší počet kroků než řešení snadné úlohy a v 10 případech použití jiných typů čísel.

7.4.6 Porovnání žáků na základě proměnných skupiny 2

Stejně jako při analýze úloh prostřednictvím proměnných skupiny 1 jsme jednotlivé skupiny žáků rozdělené podle matematické úrovně porovnali z hlediska počtu proměnných, které jsme přiřadili k úlohám při analýze obou situací. U každého žáka jsme stanovili celkovou hodnotu součtu všech proměnných. Tuto hodnotu součtu bylo možné stanovit u 16 žáků z 18, kteří vytvořili všechny 4 úlohy (u žáků 117 a 118 jsme tedy součet nestanovili). Tabulka 25 zachycuje součet všech hodnot proměnných pro jednotlivé situace a celkový součet:

Tabulka 25. Celkový součet hodnot proměnných jednotlivých žáků

Žák	Situace 1		Situace 2		Celkem
	Úlohy	Porovnání	Úlohy	Porovnání	
101	21	4	17	5	47
102	22	6	19	5	52
103	16	3	14	3	36
104	21	4	20	6	51
105	9	2	16	5	32
106	21	5	20	4	50
107	17	5	22	5	49

108	8	4	16	6	34
109	16	5	17	4	42
110	14	4	15	2	35
111	15	4	16	3	38
112	16	5	14	3	38
113	9	6	21	6	42
114	21	7	26	3	57
115	8	3	18	7	36
116	17	5	18	7	47
117	–	–	16	–	–
118	13	2	12	–	–

Součet hodnot proměnných se u všech žáků, kteří vytvořili všechny úlohy, pohyboval mezi 32 a 57. Průměrný součet u dobrých žáků byl 42,6, u průměrných 41,5 a u slabých 44,8, a je tedy téměř stejný u všech tří skupin.

7.4.7 Diskuse k analýze úloh na základě proměnných skupiny 2

Tabulka 26 ukazuje celkový počet úloh, kde daná proměnná nabyla hodnoty 1:

Tabulka 26. Počet úloh, kde daná proměnná nabyla hodnoty 1

	Počet úloh (z 69 možných)																**Počet úloh (z 33 možných)**							
Pr.	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**B1**	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**D1**	**D2**	**D3**	**D4**	**E1**	**E2**	**F1**	**F2**
∑	**64**	**23**	**28**	**42**	**3**	**53**	**38**	**38**	**11**	**34**	**33**	**67**	**35**	**65**	**6**	**41**	**26**	**15**	**14**	**0**	**32**	**16**	**26**	**18**
S1	30	12	3	21	0	20	14	12	4	18	18	33	20	31	6	22	10	10	9	0	17	6	14	8
S2	34	11	25	21	3	33	24	26	7	16	15	34	15	34	0	19	16	5	5	0	15	10	12	10
Sn	33	6	10	18	0	27	16	19	4	9	8	34	23	33	1	18	–	–	–	–	–	–	–	–
Ob	31	17	18	24	3	26	22	19	7	25	25	33	12	32	5	23	–	–	–	–	–	–	–	–

Proměnné skupin A, B , C

Proměnná A1 nabyla hodnoty 1 téměř u všech úloh, z celkového počtu 69 úloh bylo 64 formulováno jednoznačně. Stanovení její hodnoty může ale u některých úloh být subjektivní a závisí také na konkrétním textu a jeho možných interpretacích.

Proměnná A2 nabyla hodnoty 1 u 23 úloh, z nichž 17 bylo vytvořeno jako obtížné úlohy. Tuto proměnnou lze tedy považovat za jednu z možných charakteristik obtížných úloh z pohledu žáků. Stanovení hodnoty této proměnné je jednoznačné, pokud počet úkolů a otázek vychází pouze ze zadání úlohy. Počet úkolů k vyřešení nebo otázek k zodpovězení během řešení úlohy vychází již z konkrétního postupu řešení.

Proměnná A3 nabyla hodnoty 1 u 28 úloh, z nichž 23 bylo vytvořeno v rámci situace 2. Situace 1, jejíž zadání neobsahovalo žádný příběh, neinspirovala žáky k vytvoření příběhu úloh, zatímco v situaci 2 žáci její příběh často doplnili a rozvinuli.

Proměnná A4 nabyla hodnoty 1 u 42 úloh, její výskyt je rovnoměrný mezi oběma situacemi i typy úloh. V některých případech není její stanovení jednoznačné, protože signální výraz odkazuje pouze na část matematického modelu úlohy. V našem pojetí odkazuje tato proměnná spíš na skutečnost, že žáci často přímo přesně pojmenovali, co je třeba spočítat z matematického hlediska, aniž by motivovali řešitele k interpretaci zadání směrem k určení matematického modelu.

Proměnná A5 nabyla hodnoty 1 pouze u 3 obtížných úloh. Zadání bylo velmi dlouhé jen u 3 úloh, kde na popis logických vztahů nebo okolností situace bylo třeba využít delší text. U této proměnné je obtížné rozlišit, zda žák využil délku textu jako prostředek pro zvýšení obtížnosti úloh nebo zda se jedná o důsledek potřeby žáka přesně a podrobně popsat situaci.

Proměnná B1 nabyla hodnoty 1 u 53 úloh. Každá z proměnných B2 a B3 se vyskytla u 38 úloh. U 18 úloh se zároveň vyskytly oba dva typy přidaných číselných údajů. Otázkou je, zda je třeba rozlišovat, jaké typy číselných údajů autor do zadání situace zařadí. Pokud ano, bylo by vhodné jiným způsobem rozlišit typy číselných údajů, aby byly ve všech případech jasně rozlišitelné.

Proměnná B4 nabyla hodnoty 1 u 11 vytvořených úloh. Pouze u 11 úloh použili žáci v zadání i jiná než celá (přirozená čísla). Je pravděpodobné, že důvodem použití necelých čísel bylo zejména zvýšení obtížnosti výpočtů úloh. Počet výskytů této proměnné není příliš významný oproti proměnné B5, použití necelých čísel nebylo tedy hlavním prostředkem pro zvýšení obtížnosti úloh pro většinu žáků.

Proměnná B5 nabyla hodnoty 1 u 34 vytvořených úloh, u obtížných úloh třikrát častěji než u snadných úloh. Kromě 1 úlohy se vždy jednalo o víc různých modelů (proměnná B6) a je tedy zřejmé, že hlavní cestou pro zvýšení obtížnosti úloh byla změna a doplnění matematického modelu úloh.

Proměnná C1 nabyla hodnoty 1 u 67 úloh, kromě 2 úloh vytvořili žáci pouze řešitelné úlohy. Splnění této proměnné (a proměnné A1) je jedním ze základních požadavků na vytvořené úlohy.

Proměnná C2 nabyla hodnoty 1 u 35 úloh, z nichž 23 bylo vytvořeno jako snadné úlohy. Tato proměnná charakterizuje snadné úlohy, které bylo možné vyřešit jednoduchou úvahou, případně použitím jednoduché početní operace, kterou lze provést zpaměti. Podle našeho očekávání neměla tuto proměnnou splňovat žádná obtížná úloha, přesto bylo možné některé z nich vyřešit jednoduchou úvahou.

Proměnná C3 nabyla hodnoty 1 u 65 úloh a popisuje skutečnost, že většina úloh byla zcela nebo částečně řešitelná výpočtem, tj. že téměř žádné vytvořené úlohy nebyly konstrukční nebo řešitelné logickou úvahou. Proměnná C4 se vyskytla pouze u 6 úloh vytvořených v rámci situace 1, pouze u 6 úloh bylo tedy třeba provést konstrukci jednoduchého objektu (zakreslení trasy).

Proměnná C5 nabyla hodnoty 1 u 41 úloh, k jejichž řešení je třeba využít i jiná než celá čísla. V zadání se jiná než celá čísla vyskytla jen v 11 úlohách (proměnná B4), v řešení úloh se tedy vyskytla podstatně častěji. Jelikož se tato proměnná vyskytuje v obou situacích i typech úloh rovnoměrně, použité typy čísel nebyly podstatné pro zvýšení obtížnosti úloh. Je ale třeba doplnit, že se v zadání úloh téměř nevyskytla iracionální čísla.

Proměnné skupin D, E , F

Proměnná D1 nabyla hodnoty 1 u 26 dvojic úloh, zadání obtížné úlohy bylo většinou delší než zadání snadné úlohy, ale jeho délka byla většinou standardní (viz proměnná A5). Prodloužení délky textu bylo většinou způsobeno potřebou doplnit další informace a popsat jiný (složený) matematický model.

Proměnná D2 nabyla hodnoty 1 u 15 dvojic úloh. V některých případech se v jedné z úloh čísla vůbec nevyskytovala, v jiných případech byla celá čísla nahrazena desetinnými čísly. Počet výskytů této proměnné ukazuje na nepříliš podstatnou roli typů čísel v zadání úloh (viz také proměnná B4).

Proměnná D3 nabyla hodnoty 1 u 14 dvojic úloh. U některých obtížných úloh byl větší počet otázek nebo úkolů příčinou nebo důsledkem změny matematického modelu.

Proměnná D4 nenabyla hodnoty 1 u žádné dvojice vytvořených úloh. Žáci nezvyšovali obtížnost úloh prostřednictvím zasazení úlohy do jiného, méně známého kontextu.

Proměnná E1 nabyla hodnoty 1 téměř u všech dvojic úloh kromě jedné. Změna matematického modelu byla nejčastějším prostředkem pro zvýšení obtížnosti úloh.

Proměnná E2 nabyla hodnoty 1 u 16 dvojic vytvořených úloh. Zejména u situace 2 (10 dvojic úloh) obsahoval matematický model obtížné úlohy model snadné úlohy. Celkový počet matematických modelů je u situace 2 menší než u situace 1, a proto je také víc úloh založených na stejném matematickém modelu (celek – část – velikost celku).

Proměnná F1 nabyla hodnoty 1 u 26 dvojic úloh. Je zřejmé, že jedním z hlavních způsobů snahy o zvýšení obtížnosti úloh bylo zvýšení počtu kroků potřebných k vyřešení úlohy, které často souvisí i se změnou matematického modelu. U proměnných E1 a F1 není zřejmé, zda zvýšení počtu kroků bylo důsledkem změny matematického modelu nebo naopak.

Proměnná F2 nabyla hodnoty 1 u 18 dvojic úloh. Změna typů čísel mohla být důsledkem změny matematického modelu, protože žáci úlohy při tvoření většinou neřešili.

Druhá skupina proměnných se ukázala jako vhodnější pro popis vytvořených úloh. Vzhledem k přesněji definovaným proměnným bylo jednodušší stanovit hodnoty proměnných u jednotlivých úloh než u první skupiny proměnných. Ze všech 24 proměnných lze stanovit hodnoty 4 proměnných s větší mírou subjektivity (A1, A4, C1, C2), ostatní proměnné lze považovat za objektivní. Mezi těmito proměnnými jsou ale takové, jejichž definici je třeba upřesnit, aby bylo možné jejich hodnotu přesně stanovit. Je třeba přesněji definovat, co znamená např. autorem přidaný příběh, jaký výraz lze považovat za signální, případně lépe popsat obvyklou délku zadání (a zda vůbec obvyklá délka zadání existuje). Tyto proměnné umožňují částečně charakterizovat vytvořené úlohy, stále však chybí informace, které by lépe popisovaly způsob tvoření úloh specifický pro dané žáky a danou situaci a umožnily tak zkoumat přítomnost určité žákovské kultury při tvoření úloh.

7.5 Závěr a důsledky pro další výzkum

V této kapitole popíšeme závěry předexperimentu z hlediska cílů, které jsme stanovili před jeho realizací, a navrhneme další postup při analýze úloh vytvořených v rámci hlavního experimentu.

Prvním cílem bylo ověřit, zda žáci budou schopni vytvořit úlohy na základě daných situací. Žáci byli schopni vytvořit úlohy na základě obou zadaných situací. Situace také neomezují žáky nutností vyřešit vlastní vytvořené slovní úlohy a tím jim umožňují „svobodnou“ tvorbu úloh na základě vlastních schopností tvořit úlohy a zkušeností s úlohami. Domníváme se, že analýza situace, kde by žáci museli své vytvořené úlohy zároveň vyřešit, by byla reálně mnohem více ovlivněna schopností žáků řešit úlohy.

Kromě dvou žáků stihli všichni vytvořit všechny úlohy, poskytnutý čas na tvorbu úlohy byl tedy většinou dostačující. Většina žáků nestihla vytvořené úlohy vyřešit, jejich úkolem ale nebylo úlohy řešit. Žáci vytvořili úlohy různorodé délky, kontextu a náročnosti, s využitím různých matematických prostředků. Někteří žáci napsali komentář k vytvořeným úlohám, jiní jej buď nestihli, nebo vynechali úplně.

Žáci někdy spíše než snadnou a obtížnou úlohu tvořili úlohu snadnou a úlohu obtížnější, netvořili obtížnou variantu snadné úlohy, ale obtížnější úlohu založenou na jiném matematickém modelu. Původně jsme totiž očekávali, že žáci vytvoří snadnou úlohu a obtížná úloha bude často jen její modifikací, např. prostřednictvím změny typu čísel. Jako nejčastější způsob tvorby obtížné úlohy jsme tedy identifikovali změnu matematického modelu úlohy. Méně často se pak vyskytlo použití stejného matematického modelu pro obtížnější objekty, doplnění stejného matematického modelu o jednu nebo několik operací, případně o další matematický model, a přidání nových objektů do zadání situace.

Žáci také téměř nepoužívali matematické prostředky, které se měli naučit v posledních letech studia, a omezili se často na znalosti 2 až 3 roky staré, tj. z období, kdy žáci navštěvovali základní školu nebo jiné víceleté gymnázium. Výjimku tvoří několik úloh o pohybu a použití úroků. Vytvořené úlohy ukazují na významný vliv zkušeností žáků s určitými typy situací a úloh k nim vázaných, tj. také na vliv matematické kultury při řešení slovních úloh. Zejména v případě Situace 2 se často jednalo o úlohy, které jsou velmi podobné klasickým „učebnicovým“ úlohám. V konkrétním způsobu tvoření úlohy ukazují situace spíš na individuální rozdíly mezi žáky a jejich schopnosti formulovat (matematický) text.

Z výsledků experimentu vyplývá, že je možné nechat zadání pro hlavní experiment v původní podobě. Je ale třeba vytvořit takový model analýzy vytvořených úloh, který umožňuje popsat jednotlivé úlohy, porovnat jednotlivé úlohy, žáky, skupiny a třídy mezi sebou, ale zároveň zohledňuje různorodost, a tedy i vzájemnou neporovnatelnost některých úloh a subjektů.

Druhým cílem bylo ověřit a upřesnit formulaci proměnných pro popis vytvořených úloh z hlediska možnosti ohodnotit úlohy podle daných proměnných, nalezení dalších relevantních proměnných a jejich potenciálu pro hledání rozdílů mezi úlohami nebo autory úloh.

Přes změny učiněné oproti původně definovaným proměnným spočívající zejména v konkretizaci některých proměnných nejsou podle našeho názoru takto definované proměnné vhodné pro porovnání jednotlivých úloh a žáků. Při stanovování hodnot obou skupin proměnných přetrvávají stejné problémy jako u první skupiny proměnných, a to zejména:

1. nekonkrétnost a neměřitelnost – u části úloh nešlo rozhodnout, zda danou proměnnou splňují, úlohy často připouští různý výklad proměnné a tím i různou hodnotu,
2. vzájemná souvislost – výskyt některých proměnných dané úlohy implikuje výskyt jiných proměnných, tj. existence jedné proměnné ovlivňuje ostatní.

Různorodost úloh umožňuje stanovení mnoha proměnných, některé proměnné jsou ale specifické pro konkrétní typy úloh, aniž by ale významně ovlivňovaly jejich obtížnost, a jejich úloha při porovnávání úloh je sporná. Přítomnost takové proměnné sice formálně zvýší hodnotu indexu variability, ale zároveň sníží jeho vypovídací hodnotu.

Z analýzy úloh vyplývá existence hlavní proměnné pro porovnání – tj. té, kterou žák měnil obtížnost úlohy. Jedná se zejména o změnu matematického modelu („úloha je na něco jiného"). Konkrétně se jedná buď o jednoduchou změnu matematického modelu (výpočet obsahu se mění na výpočet obvodu), nebo o stejný matematický model aplikovaný na složitější objekt, stejný matematický model doplněný o další výpočet (např. délky strany, počtu procent apod.), případně doplnění dalších objektů a informací do zadání situace.

Při stanovování hodnot proměnných se nelze vždy omezit na 2 hodnoty (ano, ne), ale je třeba přidat další hodnotu, která popisuje, že o dané proměnné nelze jednoznačně rozhodnout, nebo že nemá smysl u dané úlohy diskutovat tuto proměnnou.

Proměnná, která nabývá stejné hodnoty u všech nebo téměř všech úloh, může být znakem určité kultury, ale jednotlivé úlohy a autory od sebe nerozlišuje. Proměnná, která má hodnotu

0 u všech nebo téměř všech úloh, může být považována za nevhodně zvolenou pro danou situaci, na druhou stranu může být také znakem určité kultury. Např. skutečnost, že do situace 1 nepřidali téměř žádní žáci reálný kontext, může ukazovat na nepropojení obdobných prostředí s reálným kontextem.

Analýzy úloh ve studované literatuře (viz např. Sarrazy, 2002, Searle a kol., 1974) prostřednictvím strukturálních proměnných se týkaly vždy uzavřených situací, kde byl okruh vytvořených úloh jasně definovaný a omezený (např. úlohy založené na konkrétním matematickém modelu). Uzavřenou situací byla možná skupina úloh již předem omezena, a zároveň bylo možné je všechny popsat pomocí univerzálně stanovených kritérií. Naše zadání situací pomocí obrázku a pomocí textu se ukázalo jako příliš otevřené pro popis vytvořených úloh prostřednictvím strukturálních proměnných. V naší situaci může fungovat popis úloh promocí strukturálních proměnných jen pro vybrané charakteristiky, které ale příliš nepopisují bohatost a rozdílnost vytvořených úloh. Bylo tedy třeba přijmout jinou strategii pro popis úloh, a to takovým způsobem, aby byla vhodně popsána jednak pestrost úloh samotných, jednak rozdíly snadné a obtížné úlohy vytvořené jedním autorem v rámci jedné situace. Vzhledem k otevřenosti situace a pestrosti vytvořených úloh bylo třeba vztáhnout jejich analýzu k určitému pojetí kultury při tvoření slovních úloh.

Třetím cílem bylo zjistit, zda existují rozdíly v úlohách vytvořených dobrými, průměrnými a slabými žáky v dané třídě (porovnání vyhodnocení proměnných pro tyto tři skupiny). V rámci porovnání matematických modelů a typů úloh vytvořených dobrými, průměrnými a slabými žáky nebyl pozorován žádný rozdíl mezi těmito skupinami. Ani analýza úloh pomocí proměnných neukázala mezi těmito skupinami žáků rozdíly. Je otázkou, zda by se neprojevily rozdíly v případě, že by skupina žáků byla výrazně větší.

Pro další zkoumání tvorby úloh bylo tedy třeba stanovit obecné pojetí kultury při tvoření slovních úloh (viz kapitola 9), které bylo třeba konkretizovat pro naši situaci tvorby úloh. Na základě této kultury bylo třeba stanovit vybrané proměnné popisující vytvořené úlohy, ale také další charakteristiky vytvořených úloh. Soubor proměnných a charakteristik by měl poskytnout lepší informace o vytvořených úlohách v rámci otevřené situace než pouhá analýza úloh pomocí strukturálních proměnných, která se v naší situaci ukázala jako obtížná a nedostatečná. Podrobný popis tohoto souboru a analýza úloh jsou uvedeny v kapitolách 10 a 11.

Kapitola 8. Matematická kultura žáků při tvoření slovních úloh

8.1 Úvod

Matematická kultura žáků při tvoření slovních úloh není zatím obecně přesně vymezena, v dostupné literatuře jsme neobjevili žádná vymezení tohoto pojmu a již zmíněné úvahy o matematické kultuře uvedené v kapitole 3 nás vedou k přesvědčení, že tento pojem nelze obecně definovat. Naše pojetí bude tedy specifické vzhledem k naší konkrétní situaci tvorby úloh. Nejprve vymezíme obecné základní charakteristiky této kultury, které budeme konkretizovat do proměnných vyskytujících se u vytvořených úloh. Tyto proměnné budou vycházet mj. z charakteristik slovní úlohy uvedených v kapitole 2, některé budou obecné, jiné se budou vztahovat pouze ke konkrétní situaci tvorby úloh. Na jejich základě budeme zkoumat variabilitu jednotlivých úloh, tvůrců a skupin, kterou následně porovnáme s naším vymezením matematické kultury žáků při tvoření slovních úloh.

Tvoření slovních úloh se ve výuce matematiky v rámci zkoumaných tříd nevyskytlo buď vůbec, nebo jen velmi zřídka. Žáci ani nebyli nijak systematicky připravováni na tvoření úloh. Na základě informací získaných z rozhovorů s učiteli matematiky se domníváme, že zkušenosti žáků se slovními úlohami vycházejí zejména z řešení slovních úloh v rámci hodin matematiky (případně také fyziky a chemie) a při tomto řešení byla postupně vytvářena jejich kultura řešení slovních úloh, která nejvýznamněji ovlivňuje jejich způsob tvorby slovních úloh. Významnou roli při vytváření kultury při řešení slovních úloh hraje způsob, jakým učitelé matematiky (případně dalších přírodovědných předmětů) během let školní docházky přistupovali ke slovním úlohám, jak s nimi v rámci výuky pracovali a s jakými typy slovních úloh se měli žáci možnost setkat.

Snaha o objektivní popis vytváří sama o sobě určitý paradox, protože na jedné straně je naším cílem definovat a popsat kulturu při tvoření slovních úloh, na druhé straně nemůžeme popsat všechny proměnné, které se v dané situaci tvorby úloh vyskytují, zejména žákovy „soukromé“ poznatky. I z tohoto důvodu se nesnažíme analyzovat rozdíly mezi tím, jakou úlohu žák zamýšlel vytvořit, a vytvořenou úlohou.

V této části popíšeme teoretický rámec, který nám umožní hledat odpovědi na následující otázky:

Jak definovat a charakterizovat matematickou kulturu při tvoření úloh?

Jak analyzovat vytvořené úlohy podle tohoto pojetí kultury při tvoření úloh?

Prostřednictvím odpovědí na tyto otázky budeme zkoumat úlohy vytvořené jednotlivcem nebo skupinou a hledat, zda existuje matematická kultura jednotlivce a skupin (např. školních tříd) při tvoření úloh. Za tímto účelem zavedeme na základě přístupů k matematické kultuře popsaných v kapitole 3 tři různá pojetí matematické kultury při tvoření úloh. První pojetí je kvalitativní, charakterizuje dobře vytvořenou matematickou úlohu. Druhé pojetí vychází z matematického modelu vytvořené úlohy a je zaměřeno na matematické vědomosti vyskytující se ve vytvořených úlohách. Třetí pojetí je zaměřeno na popis charakteristik úlohy podstatných pro její vyřešení z hlediska řešitele a jeho přístupu k vytvořené úloze.

8.2 Kvalitativní pojetí kultury při tvoření úloh

Nejprve definujeme naše pojetí kultury při tvoření slovních úloh z hlediska kvalitativního posouzení vytvořené úlohy. Toto pojetí vychází z charakteristik matematické kultury podle Kuřiny (2010), Hošpesové a kol. (2011) a je inspirováno myšlenkami tzv. „dobré matematiky“ podle T. Tao (2008). Naše definice kultury při tvoření úloh z kvalitativního hlediska je následující:

Žák s dobrou kulturou při tvoření slovních úloh vytvoří v rámci dané situace úlohu, která

1. je matematickou slovní úlohou (lze ji řešit matematickými prostředky),
2. je relevantní v dané situaci (tj. vztahuje se k dané situaci a splňuje její zadání),
3. je smysluplná v kontextu určeném žákem nebo situací (reálném/fiktivním),
4. je zajímavá (není pouhou reprodukcí běžně používaných úloh),
5. je jasně a jednoznačně formulovaná (jasný popis situace a z něj vycházející otázka),
6. vyžaduje využití netriviálních matematických prostředků (ne zcela triviální),
7. obsahuje všechny údaje nutné pro její vyřešení (úplnost),
8. po vyřešení poskytne nové informace o dané situaci.

Tyto charakteristiky nyní popíšeme podrobněji:

1. Úloha je matematickou slovní úlohou (lze ji řešit matematickými prostředky)

Matematickými prostředky rozumíme výpočty a konstrukce jako např. operace sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování, porovnávání, převádění jednotek, geometrické konstrukce. Za nematematické prostředky považujeme ostatní prostředky řešení úloh a problémů jako např. hlasování, vyjádření názoru na společenský jev apod.

2. Úloha je relevantní v dané situaci (tj. vztahuje se k dané situaci a splňuje její zadání)

Relevantní úloha vychází přímo nebo nepřímo z dané situace, nevylučujeme tedy úlohy, které jsou inspirovány danou situací, ale na první pohled s touto situací nesouvisejí. V jejich řešení ale musí daná situace nebo její některé parametry vystupovat jiným než formálním způsobem. Je-li např. v zadání situace číslo 25 a vytvořená úloha nemá s danou situací společného nic jiného než toto číslo, nepovažujeme ji za relevantní vzhledem k dané situaci.

3. Úloha je smysluplná v kontextu určeném žákem nebo situací (reálném/fiktivním)

Smysluplná úloha není pouhým souborem navzájem nesouvisejících a nepropojených informací, ale z úlohy je patrný autorův záměr vybrat ze situace konkrétní informace, případně k nim přidat další, a na jejich základě formulovat otázku řešitelnou matematickými prostředky (viz 1). Úloha, která neobsahuje žádnou otázku nebo úkol, není považována za smysluplnou.

4. Úloha je zajímavá (není pouhou reprodukcí běžně používaných úloh)

Zajímavá úloha se odlišuje od běžně používaných úloh v učebnicích a sbírkách, obsahuje autorův tvořivý vklad, např. ve formě netradičního kontextu nebo propojení několika oblastí matematiky. Tato charakteristika neslouží k vymezení dané úlohy vůči ostatním vytvořeným úlohám, ale vyjadřuje náš názor na úlohu jako takovou. Jsme si vědomi toho, že posouzení zajímavosti úlohy je velmi subjektivní. Na druhou stranu považujeme tuto charakteristiku za potřebnou z hlediska komplexnosti hodnocení kvality vytvořených úloh, protože snaha o zajímavost úlohy vede někdy k nepřesnostem ve formulaci a tím ke snížení indexu kvality, čímž by snaha o vytvoření zajímavé úlohy byla hodnocena spíš negativně.

5. Úloha je jasně a jednoznačně formulovaná (jasný popis situace a z něj vycházející otázka)

Všechny informace v úloze jsou jasně a jednoznačně formulovány, stejně tak jako jsou jasně popsány případné vztahy mezi informacemi v zadání. Na základě těchto informací je formulována jednoznačně položená a srozumitelná otázka (otázky).

6. Úloha vyžaduje využití netriviálních matematických prostředků (ne zcela triviálních)

Otázka triviálnosti matematických prostředků při řešení úlohy musí být vztažena ke skupině, pro kterou je úloha vytvářena. Za zcela triviální matematické prostředky budeme považovat takové, které by měly být cílovou skupinou dávno zvládnuty a považovány za samozřejmé. Příkladem může být úloha založená na sečtení dvou známých veličin vytvořená pro žáky

9. ročníku ZŠ nebo sestrojení úsečky dané dvěma známými body. Výjimku tvoří situace, kde je úkolem žáků tvořit i takové úlohy.

7. Úloha obsahuje všechny údaje nutné pro její vyřešení (úplnost)

Úplná úloha je taková úloha, která obsahuje všechny potřebné údaje k vyřešení a zodpovězení dané otázky. Patří sem i úlohy, které mají více řešení nebo naopak řešení nemají. Tato podmínka se také týká úloh, kde dohledání chybějících informací je úkolem řešitele. Podmínku nesplní např. úloha, ve které je třeba vypočítat konkrétní hodnotu obsahu obdélníku a není zadána jedna z délek stran, přičemž adresát úlohy nemá prostředky pro její dopočítání.

8. Úloha po vyřešení poskytne nové informace o dané situaci

Jedná se o úlohu, jejímž řešením nejsou údaje zřejmé ze zadání situace, ale její vyřešení přinese řešiteli nový vhled do vztahů v rámci dané situace a nové informace o této situaci.

První tři charakteristiky si všímají vnější stránky úlohy a mohou sloužit k rozlišení úloh, které byly vhodně vytvořeny v rámci dané situace (tj. splnily zadání situace), od úloh nevhodně vytvořených. Další čtyři charakteristiky umožňují detailnější hodnocení již vhodně vytvořené matematické a smysluplné úlohy relevantní v dané situaci.

Toto pojetí kultury při tvoření úloh může být vztaženo k autorům úloh, kteří s touto činností nemají žádné nebo téměř žádné zkušenosti a kteří tvoří úlohy zejména na základě svých zkušeností s řešením úloh v matematice. Tyto principy mohou být ale také vztaženy na tvorbu úloh zkušenými autory. Konkrétněji popsal kvalitativní pojetí „profesionálního“ tvůrce úloh např. J. Zhouf (2010), který se zabývá mj. tvorbou úloh pro talentované žáky, a formuloval principy tvorby úloh např. pro maturitní zkoušku, matematickou olympiádu, přijímací zkoušky, korespondenční semináře[34]. Je zřejmé, že na tyto úlohy jsou kladeny zcela jiné požadavky než na úlohy vytvořené žáky ZŠ, a výše zmíněné charakteristiky lze považovat u těchto úloh za samozřejmé.

[34]Několik příkladů těchto principů pro tvorbu zadání písemné maturitní zkoušky: gradace obtížnosti problému a testu, propojení více oblastí matematiky, problémy řešitelné více způsoby, nezařazování problémů s trikovým řešením, jednoznačnost a „čitelnost“ textu, zastoupení širokého spektra matematických témat v textu atd. (Zhouf 2010, s. 51)

8.3 Pojetí kultury při tvoření úloh z hlediska matematického modelu vytvořených úloh

Druhé pojetí kultury při tvoření úloh je založeno na matematických vědomostech, ke kterým je vztažena daná didaktická situace. Učitel (nebo výzkumník) v roli aktéra připravujícího podmínky pro tvůrce úloh (žáky) zadá podmínky pro tvorbu úloh – výchozí situaci, číselné údaje, matematický model atd. Tvůrce úloh použije poznatky, které považuje za vhodné pro vytvoření úloh splňujících zadání situace. Aktér připravující situaci tvorby úloh může být i sám tvůrce úloh, zejména pak na vědecké úrovni, kdy si výzkumník sám sobě klade otázky a formuluje úkoly k vyřešení. Poznatky použité při tvorbě úloh mohou vycházet z různých zdrojů. Může se jednat o zkušenosti z předchozích situací založených na tvorbě úloh, o zkušenosti s řešením úloh, matematické znalosti, ale i obecné schopnosti (např. formulování vět v daném jazyce) nebo znalosti z jiných oborů. Pokud se tvůrce úloh dříve nesetkal se situacemi založenými na tvorbě úloh, použité poznatky budou podle našeho názoru vycházet zejména z jeho zkušeností s řešením matematických úloh. Konkrétně pak z formulací zadání jemu známých úloh, matematických modelů a postupů řešení těchto úloh, tedy z jeho osobních zkušeností, kde a jak bylo možné použít matematické prostředky k získání odpovědi na danou otázku.

Zkoumání těchto žákových poznatků a jejich promítnutí se do vytvořených úloh je obtížné a jen velmi těžko proveditelné. Není možné zjistit, které matematické a nematematické poznatky použil žák při tvorbě úlohy. V rámci studia tvorby úloh je ale možné se zaměřit na vytvořené úlohy a zkoumat, jaké matematické poznatky se ve vytvořených úlohách vyskytují. Je třeba zdůraznit, že výskyt určitého matematického poznatku ve vytvořené úloze neznamená, že patří do žákova repertoáru poznatků. Nemůžeme totiž zjistit, jaký byl žákův konkrétní záměr a zda vytvořená úloha odpovídá jeho původnímu záměru. Předpokládáme navíc, že autorův záměr se během vytváření úlohy vyvíjel a zpřesňoval. Pokud by žák měl zároveň svoji vytvořenou úlohu vyřešit, mohlo by dojít k určité autokorekci a přizpůsobení zadání a řešení úlohy, nejednalo by se ale již o samostatný proces tvorby úloh.

Pojetí kultury při tvoření úloh z hlediska matematických vědomostí bude tedy zaměřeno na analýzu takových matematických vědomostí, které se vyskytují ve vytvořených úlohách, nebo takových matematických vědomostí, které se ve vytvořených úlohách nevyskytují, ale daná situace umožňuje jejich použití na úrovni autorů úloh. Za matematické vědomosti budeme považovat charakteristiky matematického modelu úlohy: jednoduchý nebo složený matematický model, povaha a počet neznámých, typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy a typ a počet kroků potřebných k vyřešení úlohy.

Tyto složky matematického modelu nyní popíšeme podrobněji:

1. Jednoduchý nebo složený matematický model

Jednoduchý matematický model v našem pojetí znamená, že úloha směřuje k nalezení jedné konkrétní neznámé a všechny výpočty přímo směřují k výpočtu této neznámé. Ostatní matematické modely budeme považovat za složené. Jsou-li např. v úloze zadány rozměry obdélníka a úkolem je vypočítat jeho obsah, jedná se o jednoduchý matematický model. Pokud by ale bylo třeba jeden z rozměrů obdélníka zjistit dalším výpočtem (procentová část, Pythagorova věta apod.), jedná se o složený matematický model.

2. Povaha a počet neznámých

Povaha neznámých vyjadřuje typ informace, kterou je třeba zjistit pro zodpovězení otázky úlohy. Může se jednat o číselnou hodnotu, poměr, porovnání údajů, interpretaci číselných výsledků, ale také o informaci geometrické povahy – zakreslení určitého objektu, nalezení dráhy, konstrukci útvaru apod. Počet neznámých vyjadřuje počet údajů, které je třeba v rámci řešení úlohy zjistit. Nejedná se tedy jen o výsledný údaj, ale také o údaje, které je třeba vypočítat k jeho nalezení.

3. Typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy

Typ čísel vyjadřuje, jaká čísla použil autor v zadání úlohy nebo jaká čísla je třeba použít k vyřešení úlohy. Nejprve rozlišíme, zda byla v úloze použita přirozená, celá, racionální nebo iracionální čísla. Detailnější pohled je zaměřen na velikost použitých čísel. Jako *snadná čísla* označíme taková, se kterými se „lépe počítá“, jako např. malá přirozená čísla, mocniny 10 a jejich celočíselné násobky. Jako *obtížná čísla* označíme desetinná čísla, zlomky, velká přirozená čísla, záporná čísla.

4. Typ a počet matematických kroků potřebných k vyřešení úlohy

Typ kroků vyjadřuje, které matematické kroky je třeba použít během řešení úlohy. V některých případech se může jednat i o kroky dané samotným zadáním úlohy, pokud autor konkrétně popisuje činnost řešitele, nebo případně mohou tyto kroky vyplývat i z použitého signálního slova. Termín krok může vyjadřovat jednak obvyklé operace jako sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, může se ale jednat i o provedení výčtu počtu prvků, konstrukci objektu, zakreslení objektu apod. Počet kroků vyjadřuje, kolik kroků (ne nutně navzájem různých) je třeba použít k vyřešení úlohy. V některých případech se může počet kroků zcela nebo částečně shodovat s počtem podmodelů složeného matematického modelu.

Počet kroků potřebných k vyřešení úlohy obsahuje nejen počet matematických kroků, ale i počet dalších úkonů, které je třeba provést. Při řešení úloh se kromě matematických operací jedná i o operace nematematické, jako např. přečtení zadání úlohy, identifikaci podstatných a nepodstatných informací ze zadání úlohy, provedení systematického zápisu, náčrtku, zapsání odpovědi atd. Počet kroků potřebných k vyřešení úlohy může souviset i s obtížností úlohy, větší počet kroků ale automaticky neznamená obtížnější úlohu.

Pro analýzu tvorby slovních úloh z hlediska matematických vědomostí je třeba stanovit úplný výčet těchto vědomostí, které se vyskytují v rámci dané situace. Je důležité si všímat takových vědomostí, které se vyskytují u určité skupiny úloh, protože takové vědomosti mohou odkazovat na společné rysy matematické kultury skupiny tvůrců. Je také vhodné se zaměřit na vědomosti, které se ve vytvořených úlohách nevyskytly vůbec nebo jen velmi málo (a přitom by pro ně daná situace mohla být vhodnou inspirací), protože i taková informace charakterizuje určitým způsobem matematickou kulturu skupiny tvůrců. V některých situacích tvorby úloh se může stát, že vzhledem k jejich otevřenosti není možné stanovit úplný výčet těchto vědomostí.

8.4 Pojetí kultury při tvoření úloh z hlediska řešitele

Třetí pojetí zkoumá kulturu při tvoření úloh z hlediska řešitele, který má před sebou vytvořenou úlohu, ale nezajímá se přímo o matematický model úlohy, ani o její kvalitativní hodnocení. Je zaměřeno na obecné charakteristiky úlohy, které vycházejí z činností potřebných pro obecné vyřešení problémové situace. Stanovení počtu kroků potřebných k vyřešení úlohy je součástí analýzy vytvořených úloh z pohledu matematického modelu. Z pohledu řešitele jsou popsány vytvořené úlohy pomocí následujících charakteristik: řešitelnost úlohy, počet úkolů k vyřešení, počet řešení úlohy, délka zadání úlohy a kontext úlohy.

Nyní popíšeme tyto charakteristiky podrobněji:

1. Řešitelnost úlohy

Řešitelnost úlohy vyjadřuje, zda je daná úloha řešitelná nebo ne, tj. zda existuje řešení úlohy nebo ne. Pokud se jedná o úlohu obsahující víc úkolů k vyřešení, je možné rozlišit úlohu, která je zcela nebo částečně řešitelná, pokud je aspoň některé z částí úlohy řešitelná.

2. Počet úkolů k vyřešení

Počet úkolů k vyřešení může být explicitně vyjádřen v zadání úlohy počtem otázek, často ale zodpovězení těchto otázek vyžaduje vyřešení dalších úkolů, které nejsou v zadání popsány nebo jsou jen naznačeny. Počet úkolů vyjadřuje tedy obecně celkový počet explicitně nebo implicitně popsaných úkolů, které je třeba vyřešit během procesu řešení úlohy. Nejedná se o počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (viz charakteristika 4 kultury z hlediska matematického modelu úloh). Při současném stanovení počtu kroků a počtu úkolů k vyřešení je vhodné stanovit pouze počet explicitně zadaných úkolů, aby nedošlo k záměně obou charakteristik.

3. Počet řešení úlohy

Počet řešení úlohy vyjadřuje celkový počet řešení úlohy. Pokud má některý dílčí úkol víc řešení, má víc řešení i celá úloha.

4. Délka zadání úlohy

Délka zadání úlohy je měřitelná počtem znaků, slov nebo vět v zadání úlohy. V rámci dané situace tvorby úloh dělíme vytvořené úlohy na určitý počet skupin podle délky zadání Případně je možné zaměřit se i na to, jakým způsobem ovlivnil autor délku zadání úlohy, a zkoumat tendence v rámci určité skupiny úloh. Může se jednat např. o popis kontextu úlohy, zařazení většího množství úkolů, u kratších úloh pak soustředění se na matematický model úlohy. V naší práci se zaměříme pouze na porovnání délky zadání vytvořených úloh a nebudeme systematicky analyzovat faktory, které délku zadání ovlivňují.

5. Kontext úlohy

Kontext úlohy může být buď čistě matematický, nebo vycházet z reálné nebo imaginární situace. Při studiu kontextu úlohy se lze zaměřit na to, zda autor úlohy zařadil nějaký nematematický kontext, a zda se jedná o kontext běžný v učebnicích a sbírkách, nebo o netradiční kontext, který může ztížit porozumění vytvořené úloze. V případě reálného kontextu lze zkoumat, zda zadané údaje a řešení úlohy je reálné vzhledem k zadanému kontextu.

8.5 Závěr

Výše popsaná pojetí kultury při tvoření úloh – z hlediska kvality vytvořených úloh, z hlediska matematických vědomostí a z hlediska (potenciálního) řešitele – dávají dohromady celkové pojetí kultury při tvoření úloh, které použijeme při analýze vytvořených úloh v rámci našeho výzkumu. Charakteristiky úloh konkretizujeme do proměnných popisujících jednotlivé úlohy. Na rozdíl od dříve popsaných způsobů analýzy slovních úloh považujeme naše pojetí za vhodněji přizpůsobené naší otevřené situaci tvorby slovních úloh. Jeho nevýhodou je to, že celkové přímé porovnání jednotlivých žáků, skupin žáků nebo tříd mezi sebou je na základě tohoto pojetí obtížnější a méně přehledné. Na druhou stranu je možné získat celkový popis vytvořených úloh a v případě potřeby se zaměřit na konkrétní charakteristiku.

Kapitola 9. Experiment – popis vytvořených úloh

Pro provedení experimentu jsme vybrali třídy 2. B a 2. C Gymnázia Jana Nerudy v Praze (2. ročník šestiletého studia, věk 14 – 15 let), abychom měli obdobnou skupinu žáků jako v předexperimentu z hlediska vzdělávacího programu. Tito žáci přišli na gymnázium z různých základních škol a jiných víceletých gymnázií. Během dvou let studia na gymnáziu se v žádné z obou tříd nezměnil učitel matematiky. Matematika byla vyučována 4 hodiny týdně, z nichž 2 hodiny byla třída rozdělena na 2 skupiny.

Experiment byl v těchto třídách zadán na konci června roku 2011. Ve třídě 2. B bylo přítomno 28 z celkem 30 žáků, ve třídě 2. C 18 žáků z celkem 30 žáků. Ve třídě 2. B vytvořilo 19 žáků všechny čtyři úlohy, 6 žáků tři úlohy, 2 žáci dvě úlohy a 1 žák pouze jednu úlohu. Celkem tedy třída 2. B vytvořila 99 úloh. Ve třídě 2. C vytvořilo 16 žáků všechny čtyři úlohy, jeden žák stihl z časových důvodů vytvořit pouze tři úlohy a 1 žák dvě úlohy. Celkem tedy třída vytvořila 69 úloh. V dalším textu budeme třídu 2. B označovat jako třídu 2, žáky třídy 2. B čísly 201 – 228, třídu 2. C jako třídu 3, žáky třídy 2. C čísly 301 – 318.

Obdobně jako při popisu úloh vytvořených v rámci předexperimentu jsme úlohy rozdělili podle postupu řešení na početní, konstrukční, početně-konstrukční a ostatní úlohy. Na rozdíl od předexperimentu jsme ale početní úlohy dále nedělili podle způsobu řešení na aritmetické nebo algebraické. Většinu úloh je totiž možné řešit jak pomocí aritmetických operací, tak pomocí rovnice, případně kombinací obojího. Je tedy možné je zařadit mezi aritmeticko-algebraické úlohy. Tato informace navíc není podstatná pro rozlišení úloh v našem pojetí kultury při tvoření úloh. Matematické modely úloh jsme u některých typů úloh upřesnili, např. použití Pythagorovy věty jsme vyčlenili jako samostatný matematický model. Část matematických modelů zůstala stejná jako v předexperimentu, ale objevily se i nové matematické modely.

9.1 Popis úloh vytvořených třídou 2

9.1.1 Situace 1

V tabulce 27 je zachycen přehled vytvořených úloh, jejich postupů řešení a matematických modelů, které se v dané úloze vyskytují:

Tabulka 27. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 2, situace 1)[35]

Číslo úlohy[36]	Postup řešení	Matematický model
201 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, převod jednotek
201 – 1b	P	objem tělesa
202 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
202 – 1b	P, K	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta, poměr, osová souměrnost
203 – 1a	P	délka čáry (trasy), délka strany čtverce
203 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, součet, porovnávání
204 – 1a	P, K	délka čáry (trasy), zakreslení čáry (trasy)
204 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, podobnost, objem tělesa
205 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
205 – 1b	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta, kvadratická rovnice
206 – 1a	K	popis konstrukce
206 – 1b	K	popis konstrukce
207 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
207 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, obsah obdélníku, počet procent
208 – 1a	P, K	zakreslení trasy, délka čáry (trasy), Pythagorova věta, zaokrouhlení
208 – 1b	P, K	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, porovnání tvarů, určení polohy bodu
209 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent
209 – 1b	K	osová souměrnost
210 – 1a	K	osová souměrnost
210 – 1b	K	posunutí, určení polohy bodu
211 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, podíl
211 – 1b	P	Pythagorova věta, délka strany čtverce, délka čáry (trasy)
212 – 1a	P, K	obsah mnohoúhelníku, určení počtu trojúhelníků
212 – 1b	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta, velikost úhlu

[35] Žák 220 nevytvořil úlohy k situaci 1, žák 227 nevytvořil úlohu 1b.

[36]Poznámka k číslování úloh: trojciferné číslo je kód žáka, úloha 1a je snadná úloha k situaci 1, úloha 2b je obtížná úloha k situaci 2.

Vysvětlivky: P – početní úloha, K – konstrukční úloha, O – ostatní úlohy

213 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku
213 – 1b	P	objem rotačního tělesa
214 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku
214 – 1b	P, K	osová souměrnost, obsah mnohoúhelníku, rozdíl, počet procent, poměr
215 – 1a	O	nematematická úloha
215 – 1b	P, K	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent, porovnávání, obvod mnohoúhelníku, poměr, konstrukce mnohoúhelníku
216 – 1a	P, K	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, zakreslení trasy
216 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce, počet procent
217 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
217 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta, násobení, podíl
218 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, porovnávání
218 – 1b	P	délka čáry (trasy)
219 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku
219 – 1b	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
221 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
221 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, obsah kruhu, obvod kruhu, obsah kruhové výseče, obsah kruhové úseče, délka oblouku kružnice, Pythagorova věta
222 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
222 – 1b	P, K	obsah mnohoúhelníku, konstrukce trojúhelníku, určení počtu trojúhelníků
223 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku
223 – 1b	P	výška objektu
224 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
224 – 1b	P, K	zakreslení trasy, délka čáry (trasy), úloha o pohybu – rychlost, úloha o pohybu – doba cesty, úloha o pohybu – čas setkání
225 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
225 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, rozdíl
226 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, počet procent
226 – 1b	K	zakreslení útvaru
227 – 1a	P, K	zakreslení trasy, délka čáry (trasy)
228 – 1a	P, K	zakreslení útvaru, velikost úhlu, obsah trojúhelníku, obvod trojúhelníku
228 – 1b	P, K	zakreslení útvaru, obsah mnohoúhelníku

Tabulka 28 shrnuje rozdělení vytvořených úloh podle postupu řešení:

Tabulka 28. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 2, situace 1)

Postup řešení	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha
Početní	33	18	15
Početně – konstrukční	13	6	7
Konstrukční	6	2	4
Ostatní	1	1	0

Z tabulky je patrné, že většinu úloh (celkem 33 z 53) lze zařadit mezi početní úlohy. Při řešení 19 úloh bylo třeba provést konstrukci. Tabulka 29 zachycuje přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách:

Tabulka 29. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 2, situace 1)

Matematický model	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha
obsah mnohoúhelníku	28	14	14
obvod mnohoúhelníku	20	12	8
Pythagorova věta	16	9	7
délka čáry (trasy)	7	4	3
počet procent	6	2	4
osová souměrnost	4	1	3
zakreslení trasy	4	3	1
obsah čtverce	3	1	2
porovnávání	3	1	2
poměr	3	0	3
zakreslení útvaru	3	1	2
rozdíl	2	0	2
objem tělesa	2	0	2
určení polohy bodu	2	0	2
popis konstrukce	2	1	1
délka strany čtverce	2	1	1
velikost úhlu	2	1	1
podíl	2	1	1
převod jednotek	1	1	0
součet	1	0	1
úloha o pohybu – doba cesty	1	0	1
úloha o pohybu – rychlost	1	0	1
úloha o pohybu – čas setkání	1	0	1
obsah trojúhelníku	1	1	0
obvod trojúhelníku	1	1	0
obsah kruhu	1	0	1

podobnost	1	0	1
kvadratická rovnice	1	0	1
obsah obdélníku	1	0	1
zaokrouhlení	1	1	0
porovnání tvarů	1	0	1
posunutí	1	0	1
určení počtu trojúhelníků	1	1	0
objem rotačního tělesa	1	0	1
konstrukce mnohoúhelníku	1	0	1
konstrukce trojúhelníku	1	0	1
násobení	1	0	1
obsah kruhové výseče	1	0	1
obsah kruhové úseče	1	0	1
obvod kruhu	1	0	1
délka oblouku kružnice	1	0	1
výška objektu	1	0	1

V úlohách vytvořených třídou 2 se vyskytuje celkem 42 různých matematických modelů. Nejčastěji se vyskytuje obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku a Pythagorova věta. Celkem 25 matematických modelů se vyskytuje pouze v jedné úloze.

9.1.2 Situace 2

V tabulce 29 je zachycen přehled vytvořených úloh, jejich postupů řešení a matematických modelů, které se v dané úloze vyskytují:

Tabulka 29. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 2, situace 2)[37]

Číslo úlohy	Postup řešení	Matematický model
201 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
201 – 2b	P	celek/část – velikost celku
202 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část, jednoduchý úrok
202 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, jednoduchý úrok, součin
203 – 2a	P	úloha o pohybu – doba cesty
203 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část
204 – 2a	P	součin, podíl
204 – 2b	P	pravděpodobnost
205 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
205 – 2b	P	úloha o pohybu – rychlost, vyčíslení chemické rovnice, maximum červeného světla

[37] Žáci 221 a 277 nevytvořili úlohy k situaci 2, žák 222 nevytvořil úlohu 2a, žáci 223, 224, 225, 226 a 228 nevytvřili úlohu 2b.

206 – 2a	P	celek/část – velikost celku
206 – 2b	O	nematematická úloha
207 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
207 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, složený úrok
208 – 2a	P	celek/část – velikost celku, porovnávání
208 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí
209 – 2a	P	celek/část – počet částí, jednoduchý úrok
209 – 2b	P	celek/část – velikost celku, rozdíl, procentová část,
210 – 2a	P	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, rozdíl, procentová část
210 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, rozdíl, procentová část
211 – 2a	P	průměr
211 – 2b	P	celek/část – velikost celku, porovnávání, procentová část
212 – 2a	P	celek/část – velikost celku, poměr
212 – 2b	P	celek/část – velikost celku, porovnávání, procentová část
213 – 2a	P	celek/část – velikost celku
213 – 2b	P	celek/část – počet částí
214 – 2a	P	celek/část – počet částí
214 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, rozdíl, porovnávání
215 – 2a	P	celek/část – velikost celku, porovnávání, procentová část
215 – 2b	O	nematematická úloha
216 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
216 – 2b	P	procentová část, součet
217 – 2a	P	celek/část – velikost celku, rozdíl
217 – 2b	P	procentová část
218 – 2a	P	celek/část – velikost celku
218 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, složený úrok
219 – 2a	P	procentová část
219 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část
220 – 2a	P	celek/část – počet částí, celek/část – velikost celku
220 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, jednoduchý úrok
222 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
223 – 2a	P	celek/část – počet částí
224 – 2a	P	celek/část – počet částí, celek/část – velikost celku
225 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
226 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
228 – 2a	P	počet kusů

Rozdělení postupů řešení mezi snadné a obtížné úlohy je shrnuto v tabulce 30:

Tabulka 30. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 2, situace 2)

Postup řešení	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha
Početní	44	25	19
Ostatní	2	0	2

Kromě dvou úloh lze všechny úlohy považovat za početní. Tabulka 31 zachycuje přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách:

Tabulka 31. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 2, situace 2)

Matematický model	Celkem	Snadná úloha	Obtížná úloha
celek/část – velikost celku	31	18	13
procentová část	24	10	14
celek/část – počet částí	9	6	3
porovnávání	8	4	4
rozdíl	5	2	3
jednoduchý úrok	4	2	2
součin	2	1	1
složený úrok	2	0	2
podíl	1	1	0
úloha o pohybu – doba cesty	1	1	0
průměr	1	1	0
počet kusů	1	1	0
úloha o pohybu – rychlost	1	0	1
pravděpodobnost	1	0	1
vyčíslení chemické rovnice	1	0	1
maximum červeného světla	1	0	1
součet	1	0	1

V úlohách vytvořených třídou 2 v rámci situace 2 se vyskytuje celkem 17 různých matematických modelů. Nejčastěji jsou úlohy zaměřeny na vztah celku a částí – výpočet velikosti celku.

9.1.3 Shrnutí způsobů zvýšení obtížnosti úloh

Tabulka 32 představuje shrnutí způsobů zvýšení obtížnosti úloh v rámci dané situace.

Tabulka 32. Způsob zvýšení obtížnosti úloh (třída 2)

Způsob zvýšení obtížnosti	**Žák – situace**
změna matematického modelu	201 – 1, 201 – 2, 203 – 1, 203 – 2, 204 – 1, 204 – 2, 205 – 2, 207 – 2, 208 – 1, 208 – 2, 209 – 1, 210 – 1, 211 – 1, 211 – 2, 212 – 1, 212 – 2, 213 – 1, 213 – 2, 214 – 1, 217 – 2, 218 – 1, 218 – 2, 219 – 1, 219 – 2, 220 – 2, 221 – 1, 222 – 1, 223 – 1, 224 – 1, 225 – 1, 226 – 1, 228 – 1
víc operací	202 – 2
víc úkolů	209 – 2, 210 – 2
změna matematického modelu, víc operací	202 – 1
změna matematického modelu, víc úkolů	205 – 1, 214 – 1, 217 – 1
změna matematického modelu, počítání s procenty	207 – 1, 216 – 1, 216 – 2
nelze porovnat	206 – 1, 206 – 2, 215 – 1, 215 – 2, 220 – 1, 221 – 1, 222 – 1, 223 – 2, 224 – 2, 225 – 2, 226 – 2, 227 – 1, 227 – 2, 228 – 2

Z tabulky 32 je patrné, že většina žáků se snažila zvýšit obtížnost úloh prostřednictvím změny matematického modelu (39 situací včetně kombinací), jen v 10 situacích bylo možné usoudit také na zvýšení obtížnosti prostřednictvím navýšení počtu úkolů, operací, případně zařazení počítání s procenty. Ve 14 situacích nešlo porovnat obtížnost úloh. Jednalo se o situace, kdy žák nevytvořil obě úlohy nebo jedna z úloh byla zařazena mezi nematematické úlohy.

9.2 Popis úloh vytvořených třídou 3

9.2.1 Situace 1

V tabulce 33 je zachycen přehled vytvořených úloh, jejich postupů řešení a matematických modelů, které se v dané úloze vyskytují:

Tabulka 33. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 3, situace 1)[38]

Číslo úlohy	**Postup řešení**	**Matematický model**
301 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku
301 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, poměr

[38] Žák 317 nevytvořil úlohu 1a, žák 318 úlohu 1b.

302 – 1a	P	délka čáry (trasy)
302 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku
303 – 1a	O	nematematická úloha
303 – 1b	O	nematematická úloha
304 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, porovnávání
304 – 1b	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
305 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta
305 – 1b	P	určení počtu mnohoúhelníků
306 – 1a	P	délka čáry (trasy)
306 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, obsah čtverce
307 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, součet
307 – 1b	P	obvod mnohoúhelníku, součet
308 – 1a	P	délka čáry (trasy), Pythagorova věta
308 – 1b	P	obsah trojúhelníku
309 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, podíl
309 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, součet, součin
310 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku, obvod mnohoúhelníku
310 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, součet, porovnávání
311 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, obsah mnohoúhelníku
311 – 1b	P	objem tělesa, výpočet hmotnosti
312 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, obsah mnohoúhelníku
312 – 1b	P	obsah mnohoúhelníku, počet procent
313 – 1a	P	obvod mnohoúhelníku, Pythagorova věta, součin, součet
313 – 1b	P, K	zakreslení trasy, délka čáry (trasy), Pythagorova věta, úloha o pohybu – doba cesty
314 – 1a	P	obsah mnohoúhelníku
314 – 1b	P, K	určení počtu mnohoúhelníků, pokrytí
315 – 1a	K	zakreslení trasy
315 – 1b	K	umístění útvaru
316 – 1a	P, K	obsah mnohoúhelníku, součet, druhá mocnina, zakreslení útvaru
316 – 1b	P, K	obvod mnohoúhelníku, součet, podíl, zakreslení útvaru
317 – 1b	P, K	zakreslení trasy, délka trasy, Pythagorova věta
318 – 1a	P, K	určení počtu mnohoúhelníků, zakreslení trasy

Rozdělení postupů řešení mezi snadné a obtížné úlohy je shrnuto v tabulce 34:

Tabulka 34. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 3, situace 1)

Postup řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Početní	24	13	11
Početně – konstrukční	6	2	4
Konstrukční	2	1	1
Ostatní	2	1	1

Z tabulky 34 vyplývá, že většinu úloh lze zařadit mezi početní úlohy (celkem 24 úloh z 34). K řešení celkem 8 úloh bylo třeba použít konstrukci. Tabulka 35 zachycuje přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách:

Tabulka 35. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 3, situace 1)

Matematický model	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
obsah mnohoúhelníku	15	9	6
obvod mnohoúhelníku	8	5	3
součet	7	3	4
Pythagorova věta	6	3	3
délka čáry (trasy)	4	3	1
zakreslení trasy	4	2	2
určení počtu mnohoúhelníků	3	1	2
porovnávání	2	1	1
zakreslení útvaru	2	1	1
podíl	2	1	1
součin	2	1	1
poměr	1	0	1
obsah čtverce	1	0	1
objem tělesa	1	0	1
úloha o pohybu – doba cesty	1	0	1
obsah trojúhelníku	1	0	1
počet procent	1	0	1
výpočet hmotnosti	1	0	1
pokrytí	1	0	1
druhá mocnina	1	1	0
umístění útvaru	1	0	1

V úlohách vytvořených třídou 3 v rámci situace 1 se vyskytuje celkem 21 různých matematických modelů. Úlohy jsou nejčastěji zaměřeny na výpočet obsahu nebo obvodu mnohoúhelníku. 10 matematických modelů se vyskytuje pouze v jedné úloze.

9.2.2 Situace 2

V tabulce 36 je zachycen přehled vytvořených úloh, jejich postupů řešení a matematických modelů, které se v dané úloze vyskytují:

Tabulka 36. Přehled typů úloh a matematických modelů (třída 3, situace2)[39]

Číslo úlohy	Postup řešení	Matematický model
301 – 2a	P	celek/část – velikost celku
301 – 2b	P	celek/část – počet částí
302 – 2a	P	celek/část – velikost části, procentová část
302 – 2b	P	celek/část – počet částí
303 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
303 – 2b	O	nematematická úloha
304 – 2a	P	celek/část – velikost celku, porovnávání
304 – 2b	P	celek/část – počet částí
305 – 2a	P	celek/část – počet částí
305 – 2b	P	procentová část
306 – 2a	P	součin, rozdíl
306 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – velikost části, počet procent
307 – 2a	P	celek/část – počet částí
307 – 2b	P	celek/část – velikost části, procentová část
308 – 2a	P	celek/část – velikost celku
308 – 2b	P	celek/část – velikost celku, procentová část, porovnávání
309 – 2a	O	čtení údajů z grafu
309 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – velikost části, celek/část – počet částí, procentová část, porovnávání
310 – 2a	P	celek/část – velikost celku
310 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, procentová část
311 – 2a	P	celek/část – velikost celku, součet
311 – 2b	P	celek/část – počet částí
312 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
312 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – velikost části, procentová část
313 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
313 – 2b	P	celek/část – počet částí
314 – 2a	P	celek/část – počet částí
314 – 2b	P	celek/část – počet částí
315 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
315 – 2b	P	celek/část – velikost celku, celek/část – počet částí, rozdíl

[39] Žák 317 nevytvořil úlohu 2b, žák 318 úlohu 1b.

316 – 2a	P	celek/část – velikost celku
316 – 2b	P	přímá úměrnost
317 – 2a	P	celek/část – velikost celku, procentová část
318 – 2a	P	celek/část – počet částí
318 – 2b	P	celek/část – počet částí, procentová část

Rozdělení postupů řešení mezi snadné a obtížné úlohy je shrnuto v tabulce 37:

Tabulka 37. Rozdělení úloh podle postupu řešení (třída 3, situace 2)

Postup řešení	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
Početní	33	18	15
Ostatní	2	1	1

Kromě dvou úloh lze všechny ostatní úlohy (33 z 35) zařadit mezi početní úlohy. Tabulka 38 zachycuje přehled matematických modelů podle počtu jejich výskytů v úlohách:

Tabulka 38. Přehled matematických modelů podle počtu výskytů ve vytvořených úlohách (třída 3, situace 2)

Matematický model	**Celkem**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**
celek/část – velikost celku	17	11	6
procentová část	13	6	7
celek/část – počet částí	14	4	10
celek/část – velikost části	5	1	4
porovnávání	3	1	2
rozdíl	2	1	1
součet	1	1	0
součin	1	1	0
čtení údajů z grafu	1	1	0
počet procent	1	0	1
přímá úměrnost	1	0	1

V úlohách vytvořených třídou 3 v rámci situace 2 se vyskytuje celkem 11 různých matematických modelů. Nejčastější modely jsou celek/část – velikost celku, procentová část a celek/část – počet částí. Ostatní modely se vykytují nejvýše v 5 úlohách.

9.2.3 Shrnutí způsobů zvýšení obtížnosti úloh

Tabulka 39 shrnuje způsob zvýšení obtížnosti v rámci dvojic úloh vytvořených v rámci dané situace:

Tabulka 39. Způsob zvýšení obtížnosti úloh (třída 3)

Způsob zvýšení obtížnosti	**Žák – situace**
změna matematického modelu	301 – 1, 301 – 2, 302 – 1, 302 – 2, 303 – 2, 304 – 1, 304 – 2, 305 – 1, 305 – 2, 306 – 1, 306 – 2, 307 – 1, 307 – 2, 308 – 1, 309 – 1, 309 – 2, 311 – 1, 311 – 2, 313 – 2, 314 – 1, 314 – 2, 315 – 1, 316 – 1, 318 – 2
víc úkolů	310 – 1, 312 – 1, 312 – 2,
změna matematického modelu, víc úkolů	308 – 2, 313 – 1, 315 – 2
změna matematického modelu, počítání s procenty	310 – 2, 316 – 2,
nelze porovnat	303 – 1, 317 – 1, 317 – 2, 318 – 1

Stejně jako v případě úloh vytvořených třídou 2, i v případě třídy 3 byla nejčastějším prostředkem pro zvýšení obtížnosti úloh změna matematického modelu (29 situací z 36 včetně kombinací). Ve 3 dvojicích úloh se jednalo o větší počet úkolů, a ve 4 situacích nebylo možné úlohy porovnat.

9.3 Shrnutí

Popis vytvořených úloh ukazuje různorodost obou situací jako východiska pro tvorbu úloh. Rozdíly spočívají zejména v typu vytvořených úloh a v jejich pestrosti z hlediska matematického modelu. Situace 2 vedla žáky téměř výhradně k vytvoření početních úloh (77 úloh z 81). Úlohy vytvořené v rámci situace 1 lze také většinou zařadit mezi početní úlohy (57 z 87), k řešení 27 úloh bylo třeba využít konstrukci. Třída 2 vytvořila celkem 19 úloh, jejichž řešení vyžaduje konstrukci, oproti 8 úlohám třídy 3.

V obou třídách vedla situace 1 k použití většího množství matematických modelů než situace 2. V úlohách vytvořených třídou 2 se v situaci 1 vyskytlo celkem 42 různých matematických modelů oproti 17 modelům v situaci 2. V úlohách vytvořených třídou 3 se v situaci 1 vyskytlo 21 matematických modelů oproti 11 modelům v situaci 2. Tyto počty matematických modelů zároveň ukazují na větší pestrost úloh vytvořených třídou 2.

Prostředkem pro zvýšení obtížnosti úloh byla v obou třídách nejčastěji změna matematického modelu (68 situací z 92), a to včetně kombinací změny matematického modelu a zvýšení počtu úkolů nebo operací. V ostatních případech se jednalo zejména o samotné navýšení počtu operací, počtu úkolů, případně zařazení počítání s procenty (6 situací). U 18 situací nelze úlohy porovnat (např. proto, že nebyly vytvořeny obě úlohy nebo jedna z úloh byla nematematická).

Kapitola 10. Analýza vytvořených úloh

10.1 Úvod

V této části popíšeme analýzu vytvořených úloh na základě pojetí kultury při tvoření úloh popsaných v kapitole 8. Nejprve se zaměříme na hodnocení úloh z hlediska kvality, poté charakterizujeme matematický model vytvořených úloh a na závěr popíšeme úlohy z hlediska řešitele. Některé charakteristiky vytvořených úloh použijeme ve stejné podobě, v jaké jsou popsány v kapitole 8. Některé charakteristiky pak konkretizujeme pro naši výzkumnou situaci.

10.2 Analýza vytvořených úloh z hlediska jejich kvality

Analýza vytvořených úloh z hlediska kvality vychází z požadavků na dobře vytvořenou úlohu, které jsme formulovali v kapitole 8.2. Tyto požadavky považujeme za proměnné formulované jako výroky, o jejichž platnosti lze rozhodnout u většiny vytvořených úloh. V takových případech označíme obdobně jako v analýze předexperimentu číslicí 1 splnění požadavku (tj. úloha splňuje požadavek popsaný danou proměnnou) a číslicí 0 jeho nesplnění (tj. úloha nesplňuje požadavek popsaný danou proměnnou)[40]. U některých úloh nemá snaha charakterizovat pomocí některých proměnných smysl, např. pokud není úloha matematickou slovní úlohou v našem pojetí, nelze vyhodnotit, zda obsahuje všechny údaje pro vyřešení. Takové volby označíme symbolem x. Pro posouzení kvality úloh budeme vždy posuzovat všechny úlohy vytvořené jedním autorem, nebudeme je tedy rozdělovat podle situací.

Při stanovování hodnot proměnné K6 považujeme za triviální úlohy, ve kterých bylo třeba pouze vypočítat obsah útvaru nebo délku čáry u situace 1 a ze známých údajů sečíst nebo odečíst známá čísla u situace 2. Ostatní úlohy považujeme za netriviální.

U každé úlohy stanovíme index kvality úlohy jako součet hodnot proměnných. Průměr indexů kvality úloh vytvořených jedním žákem označíme jako index kvality autora úloh. Úlohu, jejíž index kvality je větší nebo roven 6 (tj. splňuje aspoň 6 z 8 požadavků na dobře vytvořenou úlohu), budeme považovat za dobře vytvořenou úlohu. Za žáka s dobrou kulturou při tvoření úloh budeme považovat toho, jehož index kvality autora úloh je také větší nebo roven 6.

10.2.1 Analýza kvality vytvořených úloh – přehled hodnot proměnných

Tabulky 40 a 41 popisují analýzu kvality vytvořených úloh třídy 2 v rámci obou situací:

[40] Proměnné označíme symboly K1 – K8 ve stejném pořadí jako v kapitole 8.2. Písmeno K je přidáno k proměnným proto, aby nedošlo k záměně s dalšími skupinami proměnných.

Tabulka 40. Analýza kvality vytvořených úloh (třída 2, situace 1)

Úloha	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	∑	**Úloha**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	∑
201 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	201 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
202 – 1a	1	1	1	0	1	1	0	1	**6**	202 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
203 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	203 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
204 – 1a	1	1	1	1	1	0	1	0	**6**	204 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
205 – 1a	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**	205 – 1b	1	1	0	1	1	1	0	1	**6**
206 – 1a	0	1	0	0	x	x	x	x	**1**	206 – 1b	0	1	0	0	1	x	x	x	**2**
207 – 1a	1	1	1	0	1	1	0	1	**6**	207 – 1b	1	1	1	0	1	1	0	1	**6**
208 – 1a	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**	208 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
209 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	209 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
210 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	0	**5**	210 – 1b	1	0	1	1	0	0	0	1	**4**
211 – 1a	1	1	1	0	1	0	0	1	**5**	211 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
212 – 1a	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**	212 – 1b	1	1	1	0	1	1	0	1	**6**
213 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**7**	213 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
214 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	214 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
215 – 1a	0	1	1	1	x	x	x	x	**3**	215 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
216 – 1a	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**	216 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
217 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	217 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
218 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	218 – 1b	1	1	1	1	0	1	1	1	**7**
219 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	219 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
220 – 1a	není									220 – 1b	není								
221 – 1a	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**	221 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
222 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	222 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
223 – 1a	1	1	1	1	1	0	1	1	**7**	223 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
224 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	224 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
225 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	225 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
226 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	226 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
227 – 1a	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**	227 – 1b	není								
228 – 1a	1	1	1	0	1	1	0	1	**6**	228 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
∑	**25**	**27**	**26**	**4**	**19**	**16**	**17**	**23**	**157**	∑	**25**	**25**	**24**	**13**	**14**	**24**	**13**	**25**	**167**

Z 53 úloh vytvořených třídou 2 v rámci situace 1 považujeme 40 úloh za kvalitně vytvořených (s indexem větším nebo rovným 6), ostatních 13 úloh nepovažujeme za kvalitně vytvořené.

Tabulka 41. Analýza kvality vytvořených úloh (třída 2, situace 2)

Úloha	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	∑	**Úloha**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	∑
201 – 2a	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**	201 – 2b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
202 – 2a	1	1	1	1	0	1	1	1	**7**	202 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	**7**
203 – 2a	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	203 – 2b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
204 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	204 – 2b	1	1	1	1	1	1	0	1	**7**
205 – 2a	1	1	1	1	0	1	1	1	**7**	205 – 2b	1	0	0	1	1	1	1	1	**6**
206 – 2a	0	1	0	0	1	0	1	0	**3**	206 – 2b	0	0	0	0	1	x	x	x	**1**
207 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	207 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
208 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	208 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
209 – 2a	1	1	1	1	1	1	0	1	**7**	209 – 2b	1	1	1	1	1	1	0	1	**7**
210 – 2a	1	1	0	0	1	1	1	0	**5**	210 – 2b	1	1	0	0	1	1	0	1	**5**
211 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	211 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
212 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	212 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
213 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	213 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
214 – 2a	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**	214 – 2b	1	1	1	1	0	1	1	1	**7**
215 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	215 – 2b	0	1	1	1	x	x	x	x	**3**
216 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	216 – 2b	1	1	1	0	0	x	0	x	**3**
217 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	217 – 2b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
218 – 2a	1	1	1	0	0	0	1	1	**5**	218 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
219 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	219 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
220 – 2a	1	1	1	0	0	1	x	x	**4**	220 – 2b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
221 – 2a					**není**					221 – 2b					není				
222 – 2a					**není**					222 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
223 – 2a	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	223 – 2b					není				
224 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	224 – 2b					není				
225 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	225 – 2b					není				
226 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	226 – 2b					není				
227 – 2a					**není**					227 – 2b					není				
228 – 2a	0	1	1	0	1	x	1	1	**5**	228 – 2b					není				
∑	**23**	**25**	**23**	**5**	**19**	**18**	**22**	**22**	**157**	∑	**19**	**19**	**18**	**12**	**13**	**18**	**13**	**18**	**130**

Ze 46 úloh vytvořených třídou 2 v rámci situace 2 lze 35 úloh považovat za kvalitně vytvořené (index kvality větší nebo roven 6), ostatních 11 úloh nepovažujeme za kvalitně vytvořené.

Tabulky 42 a 43 popisují analýzu kvality vytvořených úloh třídy 3 v rámci obou situací:

Tabulka 42. Analýza kvality vytvořených úloh (třída 3, situace 1)

Úloha	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**∑**	**Úloha**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**∑**
301 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	301 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
302 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	302 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
303 – 1a	x	0	1	1	x	0	x	x	**2**	303 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
304 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	304 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
305 – 1a	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**	305 – 1b	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**
306 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	306 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
307 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	307 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
308 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	308 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
309 – 1a	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	309 – 1b	1	1	1	1	1	1	0	1	**7**
310 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	310 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
311 – 1a	1	1	1	0	0	1	1	1	**6**	311 – 1b	1	1	1	1	1	1	0	1	**7**
312 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	312 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
313 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	313 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
314 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	314 – 1b	1	1	1	1	0	1	0	1	**6**
315 – 1a	1	1	1	0	0	0	1	1	**5**	315 – 1b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
316 – 1a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	316 – 1b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
317 – 1a	není									317 – 1b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
318 – 1a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	318 – 1b	není								
∑	**16**	**16**	**17**	**2**	**13**	**8**	**15**	**16**	**103**	∑	**17**	**17**	**17**	**6**	**11**	**17**	**11**	**17**	**113**

Ze 34 úloh vytvořených třídou 3 v rámci situace 1 lze považovat 29 úloh za kvalitně vytvořené (index kvality větší nebo roven 6), ostatních 5 úloh nepovažujeme za kvalitně vytvořené.

Tabulka 43. Analýza kvality vytvořených úloh (třída 3, situace 2)

Úloha	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**∑**	**Úloha**	**K1**	**K2**	**K3**	**K4**	**K5**	**K6**	**K7**	**K8**	**∑**
301 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	301 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
302 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	302 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
303 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	303 – 2b	1	1	1	0	0	1	0	1	**5**
304 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	304 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
305 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	305 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
306 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	306 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
307 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	307 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
308 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	308 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
309 – 2a	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	309 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
310 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	310 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
311 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	311 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
312 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	312 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
313 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	313 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
314 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	314 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
315 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	315 – 2b	1	1	1	1	1	0	1	1	**7**
316 – 2a	1	1	1	0	1	0	1	1	**6**	316 – 2b	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**
317 – 2a	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**	317 – 2b	není								
318 – 2a	1	1	1	0	1	1	1	1	**7**	318 – 2b	1	1	1	1	1	1	1	1	**8**
∑	**18**	**18**	**18**	**2**	**18**	**10**	**18**	**18**	**120**	∑	**17**	**17**	**17**	**5**	**16**	**16**	**16**	**17**	**121**

Ze 35 úloh vytvořených třídou 3 v rámci situace 2 lze považovat 34 úloh za kvalitně vytvořené (index kvality větší nebo roven 6), pouze 1 úlohu nepovažujeme za kvalitně vytvořenou.

10.2.2 Shrnutí analýzy kvality vytvořených úloh

V této části shrneme výsledky analýzy kvality vytvořených úloh. Nejprve se zaměříme na jednotlivé úlohy a jejich index kvality, dále pak na jednotlivá kritéria kvality a na index kvality jednotlivých žáků. Na závěr porovnáme kvalitu vytvořených úloh v obou zkoumaných třídách.

Tabulka 44 shrnuje počty úloh vytvořených žáky obou tříd, které dosáhly konkrétní hodnoty indexu kvality:

Tabulka 44. Analýza kvality vytvořených úloh (počet úloh s daným indexem kvality)

Index	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Celkem**
Třída 2 Situace 1	1	1	1	1	9	20	14	6	**53**
Třída 2 Situace 2	1	0	3	1	6	9	19	7	**46**
Třída 2 Celkem	2	1	4	2	15	29	33	13	**99**
Třída 3 Situace 1	0	1	0	0	4	12	14	3	**34**
Třída 3 Situace 2	0	0	0	0	1	8	20	6	**35**
Třída 3 Celkem	0	1	0	0	5	20	34	9	**69**
Obě třídy Celkem	**2**	**2**	**4**	**2**	**20**	**49**	**67**	**22**	**168**

Z tabulky 44 je patrné, že ze 168 vytvořených úloh jich pouze 30 (18 %) nepovažujeme podle našich kritérií za dobře vytvořené (úlohy s indexem 1 až 5), zatímco 138 úloh (82 %) lze podle našich kritérií považovat za dobře vytvořené. V rámci situace 1 bylo 69 dobře vytvořených úloh z 87, v rámci situace 2 pak také 69 z 81 úloh.

Tabulka 45 shrnuje průměrný index kvality snadných a obtížných úloh v rámci obou tříd a situací:

Tabulka 45. Průměrný index kvality snadných a obtížných úloh

	Situace 1		**Situace 2**		**Celkem**
	Snadná úloha	**Obtížná úloha**	**Snadná úloha**	**Obtížná úloha**	
Třída 2	5,81	6,42	6,28	6,19	6,14
Třída 3	6,05	6,67	6,64	7,11	6,62

Tabulka 46 vyjadřuje počet úloh, které splňují jednotlivá kritéria kvality. V druhém řádku je uveden vždy celkový počet úloh vytvořených v rámci dané situace.

Tabulka 46. Počet úloh splňujících jednotlivé požadavky na kvalitu úlohy

	Třída 2			Třída 3			Obě třídy		
	Situace 1 (53 úloh)	Situace 2 (46 úloh)	Celkem (99 úloh)	Situace 1 (34 úloh)	Situace 2 (35 úloh)	Celkem (69 úloh)	Situace 1 (87 úloh)	Situace 2 (81 úloh)	Celkem (168 úloh)
K1	50	42	92	33	35	68	83	77	160
K2	52	44	96	33	35	68	85	79	164
K3	50	41	91	34	35	69	84	76	160
K4	17	17	34	8	7	15	25	24	49
K5	33	32	65	24	34	58	57	66	123
K6	40	36	76	25	26	51	65	62	127

K7	30	35	65	26	34	60	56	69	125
K8	48	40	88	33	35	68	81	75	156
∑	**324**	**287**	**611**	**216**	**241**	**457**	**540**	**528**	**1 068**

Na základě informací z tabulky 46 můžeme rozdělit jednotlivá kritéria do tří skupin: kritéria K1, K2, K3 a K8 splnilo víc než 90 % vytvořených úloh, kritéria K5, K6 a K7 splnilo přibližně 75 % úloh, kritérium K4 pouze 30 % úloh. Pro žáky nebyl tedy obecně problém vytvořit smysluplnou matematickou úlohu relevantní v dané situaci, která poskytne po vyřešení nové informace o situaci. Větší obtíže měli žáci s jasným a jednoznačným formulováním úlohy, v jejímž zadání se vyskytují všechny potřebné údaje pro vyřešení. Obdobné obtíže měli žáci s nutností využít i ne zcela triviální matematické poznatky a dostát tak podmínce, aby úlohy vytvořili pro své spolužáky. Nejméně často pak vytvořili žáci úlohu, kterou lze podle našich kritérií považovat za zajímavou, která tedy vykazuje určité znaky tvořivého přístupu a nestereotypního myšlení.

Tabulky 47 a 48 popisují index kvality každého žáka – tvůrce úloh. Žáci každé třídy byli rozděleni podle výsledku ve srovnávací písemné práci v matematice (viz příloha 3) do tří skupin – dobří žáci (D) jsou vymezeni 1. kvartilem, slabí žáci (S) jsou vymezeni 3. kvartilem, ostatní žáci jsou zařazeni mezi průměrné žáky (P) dané třídy. Je třeba dodat, že žáci třídy 3 dosáhli ve srovnávací písemné práci horších výsledků než žáci třídy 2. Dobří žáci třídy 3 by byli průměrnými v třídě 2 a průměrní žáci třídy 3 by byli slabými žáky v třídě 2 na základě těchto výsledků. Hodnota indexu kvality byla stanovena pro všechny žáky bez ohledu na počet vytvořených úloh.

Tabulka 47. Index kvality jednotlivých žáků (třída 2)

Žák	**201**	**202**	**203**	**204**	**205**	**206**	**207**	**208**	**209**	**210**	**211**	**212**	**213**	**214**	**215**	**216**
Skupina	S	D	P	P	S	D	D	P	P	S	S	P	D	P	P	P
Situace 1	14	11	14	12	12	3	12	13	13	9	12	11	15	12	11	13
Situace 2	12	13	14	13	13	4	15	15	14	10	13	14	14	12	9	10
Součet	26	24	28	25	25	7	27	28	27	19	25	25	29	24	20	23
Počet úloh	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
Index	**6,50**	**6,00**	**7,00**	**6,25**	**6,25**	**1,75**	**6,75**	**7,00**	**6,75**	**4,75**	**6,25**	**6,25**	**7,25**	**6,00**	**5,00**	**5,75**

Tabulka 47. Index kvality jednotlivých žáků (třída 2) – pokračování

Žák	**217**	**218**	**219**	**220**	**221**	**222**	**223**	**224**	**225**	**226**	**227**	**228**
Skupina	P	P	D	S	P	P	P	D	P	S	S	D
Situace 1	12	13	13	0	11	13	15	15	13	12	6	11
Situace 2	12	13	14	10	0	8	8	7	7	7	0	5
Součet	24	26	27	10	11	21	23	22	20	19	6	16
Počet úloh	4	4	4	2	2	3	3	3	3	3	1	3
Index	**6,00**	**6,50**	**6,75**	**5,00**	**5,50**	**7,00**	**7,67**	**7,33**	**6,67**	**6,33**	**6,00**	**5,33**

Tabulka 48. Index kvality jednotlivých žáků (třída 3)

Žák	**301**	**302**	**303**	**304**	**305**	**306**	**307**	**308**	**309**	**310**	**311**	**312**	**313**	**314**	**315**	**316**	**317**	**318**
Skupina	D	D	S	P	S	P	P	S	P	D	P	P	D	S	P	P	D	S
Situace 1	13	13	8	12	11	13	14	12	15	15	13	14	13	12	10	14	8	6
Situace 2	13	14	11	13	14	13	14	14	16	14	13	14	14	14	14	13	8	15
Součet	26	27	19	25	25	26	28	26	31	29	26	28	27	26	24	27	16	21
Počet úloh	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	2	3
Index	**6,5**	**6,75**	**4,75**	**6,25**	**6,25**	**6,5**	**7**	**6,5**	**7,75**	**7,25**	**6,5**	**7**	**6,75**	**6,5**	**6**	**6,75**	**8**	**7**

V tabulce 49 je shrnuta průměrná hodnota indexu kvality úloh pro jednotlivé skupiny žáků obou tříd. U třídy 2 jsou uvedeny 2 hodnoty u dobrých žáků a u všech žáků – hodnota v závorce je bez žáka 206, který měl zcela nejnižší index kvality ze všech žáků 1,75 (zřejmě došlo k mylné interpretaci zadání). Vzhledem k malému počtu žáků v této skupině tak jeho hodnota velmi ovlivňuje průměrný index kvality. Z tohoto důvodu uvádíme v tabulce obě hodnoty.

Tabulka 49. Průměrný index kvality podle matematické úrovně žáků

	Dobří	**Průměrní**	**Slabí**	**Všichni**
Třída 2	5,88 (6,56)	6,38	5,87	6,13 (6,29)
Třída 3	7,05	6,72	6,20	6,67

Třída 3 dosahuje vyšších hodnot indexu kvality úloh u všech skupin žáků, zároveň je vidět mírný pokles indexu kvality v obou třídách spolu s klesajícím výsledkem ve srovnávací písemné práci. Celkový průměrný index kvality úloh vytvořených třídou 2 je 6,14, index úloh vytvořených třídou 3 pak 6,62.

Po porovnání žáků a tříd se zaměříme na porovnání tříd z hlediska jednotlivých kritérií kvality úloh. Každá třída vytvořila jiný počet úloh. 28 žáků třídy vytvořilo celkem 99 úloh, 18 žáků třídy 3 vytvořilo celkem 69 úloh. Počet úloh splňujících jednotlivá kritéria jsme vyjádřili v procentech, která popisují zastoupení úloh splňujících dané kritérium mezi všemi úlohami vytvořených jednotlivými třídami v rámci příslušné situace.

Tabulka 50. Procentuální zastoupení úloh splňující dané kritérium kvality

	Třída 2			**Třída 3**			**Obě třídy**		
Proměnná	Situace 1 (53 úloh)	Situace 2 (46 úloh)	Celkem (99 úloh)	Situace 1 (34 úloh)	Situace 2 (35 úloh)	Celkem (69 úloh)	Situace 1 (87 úloh)	Situace 2 (81 úloh)	Celkem (168 úloh)
K1	94 %	91 %	93 %	97 %	100 %	99 %	95 %	95 %	95 %
K2	98 %	96 %	97 %	97 %	100 %	99 %	98 %	98 %	98 %
K3	94 %	89 %	92 %	100 %	100 %	100 %	97 %	94 %	95 %
K4	32 %	37 %	34 %	24 %	20 %	22 %	29 %	30 %	29 %
K5	62 %	70 %	66 %	71 %	97 %	84 %	66 %	81 %	73 %
K6	75 %	78 %	77 %	74 %	74 %	74 %	75 %	77 %	76 %
K7	57 %	76 %	66 %	76 %	97 %	87 %	64 %	85 %	74 %
K8	91 %	87 %	89 %	97 %	100 %	99 %	93 %	93 %	93 %
$\sum$	**76 %**	**78 %**	**77 %**	**79 %**	**86%**	**83 %**	**78 %**	**81 %**	**79 %**

Obě třídy dosahují obdobných hodnot u kritérií K1, K2, K3, K6 a K8 (rozdíl menší nebo roven 10 %), větší rozdíl nastává u kritéria K4 (12 %), K5 (18 %) a K7 (21 %). Zatímco procento úloh splňujících kritérium K4 je vyšší u třídy 2, kritéria K5 a K7 splňuje větší procento úloh vytvořených třídou 3. Podle našeho názoru spolu tyto charakteristiky souvisejí. Pokud se tvůrce úlohy snaží o vytvoření zajímavé a netradiční úlohy, může se v jeho úloze spíše vyskytnout nepřesnost formulace nebo neúplná informace. Kritérium K4 může charakterizovat určitou tvořivost autora – matematickou, výtvarnou nebo literární, jeho posouzení u jednotlivých úloh je ale velmi subjektivní.

10.3 Analýza matematického modelu vytvořených úloh

Analýza matematického modelu vytvořených úloh se skládá ze dvou částí. První část spočívá ve stanovení konkrétních matematických modelů daných úloh. Tyto modely jsou popsány v kapitole 9. Druhou část (a obsah této podkapitoly) tvoří obecné charakteristiky matematického modelu úlohy: jednoduchý nebo složený matematický model, povaha a počet neznámých, typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy a počet a typ kroků potřebných k vyřešení úlohy.

10.3.1 Jednoduchý nebo složený matematický model úlohy

Typ matematického modelu vytvořených úloh pro obě třídy je popsán v tabulkách 50 a 51.

Vysvětlivky k tabulkám 51, 52 a 53: J – jednoduchý matematický model, S – složený matematický model, x – nematematická úloha/nelze určit

Tabulka 51. Typ matematického modelu vytvořených úloh (třída 2)

Žák	Situace 1		Situace 2		Žák	Situace 1		Situace 2	
	1a	1b	2a	2b		1a	1b	2a	2b
201	S	S	J	J	215	x	S	S	x
202	S	S	S	S	216	S	S	S	S
203	J	S	J	S	217	S	S	S	S
204	J	S	S	S	218	S	J	J	S
205	J	S	S	S	219	J	J	J	S
206	x	x	J	x	220	není	není	J	S
207	S	S	S	S	221	S	S	není	není
208	J	S	S	S	222	S	S	není	S
209	S	J	S	S	223	J	S	S	není
210	J	J	S	S	224	J	S	S	není
211	S	S	J	S	225	J	S	S	není
212	S	J	S	S	226	S	J	S	není
213	J	S	J	S	227	J	není	není	není
214	J	S	J	S	228	S	S	J	není

Tabulka 52. Typ matematického modelu vytvořených úloh (třída 3)

Žák	Situace 1		Situace 2		Žák	Situace 1		Situace 2	
	1a	1b	2a	2b		1a	1b	2a	2b
301	J	S	J	S	310	S	S	J	S
302	J	J	S	S	311	S	S	J	J
303	x	S	S	x	312	S	S	S	S
304	S	J	S	J	313	S	S	S	J
305	J	J	J	J	314	S	J	J	J
306	J	S	S	J	315	J	J	S	J
307	J	J	J	S	316	S	S	J	S
308	J	S	J	S	317	není	J	S	není
309	S	S	S	S	318	J	není	J	J

V tabulce 53 jsou shrnuty počty jednotlivých typů matematických modelů vytvořených úloh:

Tabulka 53. Shrnutí počtu jednoduchých a složených matematických modelů (třída 2 a 3)

	Typ modelu	Situace 1			Situace 2			Celkem
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	J	12	6	**18**	10	1	**11**	29
	S	13	19	**32**	15	18	**33**	65
	x	2	1	**3**	0	2	**2**	5
Třída 3	J	8	7	**15**	9	8	**17**	32
	S	8	10	**18**	9	8	**17**	35
	x	1	0	**1**	0	1	**1**	2

V rámci situace 1 mělo celkem 33 úloh jednoduchý matematický model a 50 úloh složený matematický model. V rámci situace 2 mělo celkem 28 úloh jednoduchý matematický model a 50 úloh složený matematický model. U 7 úloh nebylo možné matematický model určit. V porovnání obou tříd se ukazuje významný rozdíl. Zatímco třída 2 vytvořila víc než dvojnásobný počet úloh se složeným matematickým modelem (65 úloh) oproti 29 úlohám s jednoduchým matematickým modelem, třída 3 vytvořila téměř stejný počet úloh se složeným (35) a s jednoduchým modelem (32).

10.3.2 Povaha a počet neznámých v úloze

Povaha neznámých vyjadřuje typ informace, kterou je třeba zjistit pro zodpovězení otázky úlohy. Může se jednat o číselnou hodnotu, poměr, porovnání údajů, interpretaci číselných výsledků, ale také o informaci geometrické povahy – zakreslení určitého objektu, nalezení dráhy, konstrukci útvaru apod. Podrobnější charakteristikou je pak počet kroků, které je třeba udělat k nalezení řešení úlohy (tj. k zjištění všech neznámých) – viz kapitola 10.3.4.

Vysvětlivky k tabulkám 54, 55 a 56: číslo značí počet neznámých, Č – číselná hodnota, PM – poměr, PR – porovnání údajů/objektů, K – konstrukce, Z – zakreslení, N – nalezení informace, x – nelze určit

Tabulka 54. Povaha a počet neznámých (třída 2)

Žák	**Situace 1**		**Situace 2**		**Žák**	**Situace 1**		**Situace 2**	
	1a	**1b**	**2a**	**2b**		**1a**	**1b**	**2a**	**2b**
201	2 – Č	1 – Č	1 – Č	1 – Č	215	x	8 – 6Č, K, PM	3 – 2Č, PR	x
202	4 – Č	2 – PM	2 – Č	2 – Č	216	5 – 4Č, Z	2 – Č	4 – Č	4 – Č
203	1 – Č	3 – Č, 2PR	1 – Č	1 – Č	217	3 – Č	8 – Č	2 – Č, N	3 – Č
204	1 – Č	2 – Č	2 – Č	2 – Č	218	1 – N	1 – N	1 – Č	1 – Č

205	1 – Č	4 – 3Č, K	4 – Č	3 – Č	219	2 – Č	2 – Č	1 – Č	1 – Č
206	x	x	1 – Č	x	220	není	není	1 – Č	1 – Č
207	4 – Č	1 – Č	1 – Č	2 – Č	221	2 – Č	2 – Č	není	není
208	1 – Č	5 – 2Č, K, 2N	3 – 2Č, N	2 – Č	222	3 – Č	5 – 3Č, K, N	není	1 – Č
209	6 – Č	2 – N,Z	1 – Č	3 – Č	223	1 – Č	1 – Č	10 – Č	není
210	1 – K	1 – N	1 – Č	2 – Č	224	4 – Č	5 – 4Č, Z	2 – Č	není
211	1 – Č	1 – Č	1 – Č	1 – Č	225	1 – Č	1 – Č	1 – Č	není
212	3 – Č	3 – Č	1 – Č	2 – Č	226	1 – Č	2 – N	1 – Č	není
213	1 – Č	1 – Č	1 – Č	1 – Č	227	1 – Z	není	není	není
214	2 – Č	6 – 4Č, K, PM	1 – Č	5 – 4N, Č	228	4 – 3Č, Z	3 – 2Č, Z	1 – Č	není

Tabulka 55. Povaha a počet neznámých (třída 3)

Žák	Situace 1		Situace 2		Žák	Situace 1		Situace 2	
	1a	1b	2a	2b		1a	1b	2a	2b
301	2 – Č	1 – PM	1 – Č	1 – Č	310	2 – Č	3 – 2Č, N	1 – Č	2 – Č, N
302	1 – Č	1 – Č	1 – Č	1 – Č	311	2 – Č	1 – Č	3 – Č	1 – Č
303	x	2 – Č, N	2 – Č	x	312	2 – Č	2 – Č	1 – Č	1 – Č
304	3 – Č	2 – Č	3 – Č	1 – Č	313	1 – Č	1 – Č	2 – Č	4 – Č
305	2 – Č	1 – N	2 – Č	1 – Č	314	2 – Č	1 – N	1 – N	5 – Č
306	1 – Č	1 – Č	1 – Č	1 – Č	315	1 – Z	2 – Z, N	2 – Č	2 – Č, Z
307	2 – Č, N	2 – Č, N	3 – Č	5 – Č	316	3 – 2Č, Z	3 – 2Č, Z	1 – Č	1 – Č
308	1 – Č	1 – Č	1 – Č	3 – 2Č, PR	317	není	1 – Č	2 – Č	není
309	3 – Č	1 – Č	4 – 2Č, 2N	8 – 6Č, 2N	318	1 – Č	není	1 – Č	5 – Č

V tabulce 56 jsou shrnuty informace ohledně povahy a počtu neznámých ve vytvořených úlohách:

Tabulka 56. Shrnutí informací o povaze a počtu neznámých (třídy 2, 3)

		Situace 1			Situace 2			Celkem
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	Č	46	50	**96**	45	34	**79**	175
	PR	0	2	**2**	1	0	**1**	3
	PM	0	4	**4**	0	0	**0**	4
	K	1	5	**6**	0	0	**0**	6
	Z	3	3	**6**	0	0	**0**	6
	N	1	7	**8**	2	4	**6**	14
	x	2	1	**3**	0	2	**2**	5
Třída 3	Č	27	16	**43**	29	38	**67**	110
	PR	0	0	**0**	0	1	**1**	1
	PM	0	1	**1**	0	0	**0**	1

	K	0	0	**0**	0	0	**0**	0
	Z	2	1	**3**	0	1	**1**	4
	N	1	6	**7**	3	3	**6**	13
	x	1	0	**1**	0	1	**1**	2

V úlohách vytvořených třídou 2 se vyskytuje celkem 212 neznámých, v úlohách vytvořených třídou 3 celkem 131 neznámých. Z celkového počtu 343 neznámých tvoří většinu číselné hodnoty (285 neznámých), s velkým odstupem následuje nalezení informace (27), zakreslení (10), konstrukce (6), poměr (5) a porovnání (4 neznámé). V 7 případech nelze povahu neznámé určit.

Tabulka 57 ukazuje porovnání úloh a situací z hlediska počtu neznámých. Nalezené hodnoty nevykazují žádnou tendenci v počtu neznámých ve snadných a obtížných úlohách.

Tabulka 57. Počet neznámých podle tříd a situací

	Situace 1		Situace 2		Celkem
	1a	1b	2a	2b	
Třída 2	53	71	48	40	83 %
Třída 3	31	24	32	44	84 %

Při porovnání tříd z hlediska povahy neznámých nenajdeme významné rozdíly. Jak ukazuje tabulka 58, podíl počtu číselných neznámých na celkovém počtu neznámých je u obou tříd téměř stejný. Na druhou stranu je možné vidět pokles podílu počtu číselných neznámých mezi snadnou a obtížnou úlohou. Obtížná úloha častěji obsahuje jinou než číselnou neznámou, a to zejména v situaci 1.

Tabulka 58. Podíl počtu neznámých číselných hodnot z celkového počtu neznámých

	Situace 1		Situace 2		Celkem
	1a	1b	2a	2b	
Třída 2	87 %	70 %	94 %	85 %	83 %
Třída 3	87 %	67 %	91 %	86 %	84 %

10.3.3 Typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy

Tabulky 59 a 60 popisují typ čísel použitý v úloze, tj. buď v zadání, nebo při řešení úlohy:

Vysvětlivky k tabulkám 59, 60 a 61: N – přirozená čísla, Q – racionální čísla, R – reálná čísla, s – snadná čísla, o – obtížná čísla, x – v úloze se nevyskytují čísla

Tabulka 59. Typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy (třída 2)

Žák	Situace 1		Situace 2		Žák	Situace 1		Situace 2	
	1a	**1b**	**2a**	**2b**		**1a**	**1b**	**2a**	**2b**
201	R, s	R, s	N, s	N, s	215	x	R, s	Q, s	x
202	R, s	R, s	R, o	R, o	216	R, s	Q, s	Q, s	Q, s
203	N, s	N, s	N, s	Q, s	217	R, s	R, s	N, s	Q, s
204	N, s	Q, s	N, s	Q, s	218	N, s	R, s	N, s	R, o
205	Q, s	R, o	R, s	Q, o	219	N, s	R, s	Q, s	Q, s
206	x	x	N, s	x	220	není	není	N, s	R, o
207	R, s	Q, s	Q, s	R, o	221	R, s	R, s	není	není
208	R, s	R, s	N, s	N, s	222	R, s	N, s	není	Q, s
209	R, s	x	R, s	R, o	223	N, s	R, s	N, s	není
210	x	x	Q, s	Q, o	224	R, s	R, s	N, s	není
211	Q, s	R, s	Q, s	Q, s	225	R, s	Q, s	Q, s	není
212	Q, s	R, s	N, s	Q, s	226	Q, s	x	Q, s	není
213	N, s	R, s	N, s	N, s	227	N, s	není	není	není
214	Q, s	Q, s	N, s	Q, o	228	R, s	R, s	N, s	není

Tabulka 60. Typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy (třída 3)

Žák	Situace 1		Situace 2		Žák	Situace 1		Situace 2	
	1a	**1b**	**2a**	**2b**		**1a**	**1b**	**2a**	**2b**
301	N, s	N, s	N, s	N, s	310	R, s	Q, s	N, s	Q, s
302	N, s	Q, s	Q, s	Q, s	311	R, s	Q, s	N, s	N, s
303	x	Q, s	Q, s	x	312	R, s	Q, s	N, s	Q, s
304	Q, s	R, s	N, s	N, s	313	R, s	R, s	N, s	N, s
305	R, s	N, s	Q, s	Q, s	314	Q, s	N, s	N, s	N, s
306	N, s	R, s	N, s	Q, s	315	x	x	Q, s	N, s
307	Q, s	R, s	N, s	Q, s	316	Q, s	R, s	N, s	Q, s
308	R, s	Q, s	N, s	Q, s	317	není	N, s	Q, s	není
309	Q, s	Q, s	Q, s	Q, o	318	N, s	není	N, s	Q, s

Tabulka 61 shrnuje typ čísel použitý v zadání nebo při řešení úlohy:

Tabulka 61. Typ čísel použitých v zadání nebo při řešení úlohy (shrnutí)

	Typ čísel	Situace 1			Situace 2			Celkem
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	N	7	2	**9**	14	3	**17**	26
	Q	5	5	**10**	8	11	**19**	29
	R	12	15	**27**	3	5	**8**	35
	s	24	21	**45**	24	11	**35**	80
	o	0	1	**1**	1	8	**9**	10
	x	3	4	**7**	0	2	**2**	9

Třída 3	N	4	4	**8**	12	6	**18**	26
	Q	5	7	**12**	6	10	**16**	28
	R	6	5	**11**	0	0	**0**	11
	s	15	16	**31**	18	15	**33**	64
	o	0	0	**0**	0	1	**1**	1
	x	2	1	**3**	0	1	**1**	4

V 52 úlohách se nevyskytují jiná než přirozená čísla, v dalších 57 úlohách se nevyskytují jiná než racionální čísla. Jiná než racionální čísla (v tabulkách označeno jako reálná čísla) se vyskytují ve 46 úlohách. V použití reálných čísel je značný rozdíl mezi třídou 2 (35 úloh) a třídou 3 (11 úloh). Reálná čísla se také častěji vyskytují v úlohách vytvořených v rámci situace 1 (38 úloh) než v úlohách vytvořených v rámci situace 2 (8 úloh). Ve 144 úlohách se vyskytují snadná čísla a v 11 úlohách obtížná čísla[41]. Obtížná čísla se vyskytují zejména v rámci situace 2 (10 úloh z 11). V 13 úlohách se čísla nevyskytují.

10.3.4 Počet a typ matematických kroků potřebných k vyřešení úlohy

Při určování počtu a typu kroků potřebných k vyřešení úlohy je třeba vyřešit problém, že úlohy lze často řešit více způsoby. Jelikož podle zadání experimentu měli žáci tvořit úlohy pro své spolužáky, budeme v naší analýze uvažovat takový postup řešení, který podle naší zkušenosti nejvíce odpovídá žákům dané věkové kategorie.

Údaj o počtu kroků vyjadřuje, kolik matematických kroků (ne nutně navzájem různých) je třeba použít k vyřešení úlohy. Typ kroků popisuje, které matematické kroky je třeba použít během řešení úlohy. V obecném případě může termín krok vyjadřovat obvyklé matematické operace jako sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, může se ale jednat i o provedení výčtu počtu prvků, použití vzorce konstrukci objektu, zakreslení objektu apod. Do naší analýzy jsme nezahrnuli kroky, které přímo nesouvisí s matematikou (přečtení zadání, zápis informací apod.).

Pro stanovení typu a počtu kroků jsme použili výčet všech možných kroků, které se vyskytují v daných úlohách. Jedná se o následující kroky (vysvětlivky k tabulkám 61, 62,63, 64 a 65): ZPO – provedení základní početní operace (výpočet obsahu útvaru ve čtvercové síti, rozdíl čísel, součet čísel, vyřešení lineární rovnice), PY – výpočet délky úsečky pomocí Pythagorovy věty, PM – stanovení poměru hodnot, Z – zakreslení objektu, INT – interpretace údajů, sestavení rovnice, nebo odpověď na otázku na základě dalších výpočtů nebo konstrukce, VZ –

[41] viz kapitola 8.3

použití vzorců (hmotnost, kvadratická rovnice, podobnost), PC – výpočet obsahující procenta (základ, procentová část, počet procent), x – nematematická úloha.

Pro ilustraci našeho postupu uveďme úlohu, ve které je třeba spočítat obvod obou daných obrazců v rámci situace 1. Tuto úlohu lze řešit pomocí 4 kroků (2x výpočet délky strany pomocí Pythagorovy věty a 2x součet délek stran jednotlivých mnohoúhelníků). Tabulky 62 a 63 popisují úlohy vytvořené třídou 2 v rámci obou situací z hlediska počtu a typu kroků:

Tabulka 62. Typ a počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (třída 2, situace 1)

Číslo úlohy	Počet kroků	Typ kroků	Číslo úlohy	Počet kroků	Typ kroků
201 – 1a	4	ZPO	201 – 1b	3	ZPO
202 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	202 – 1b	12	6 ZPO, 4 PM, 2 PY
203 – 1a	2	ZPO	203 – 1b	6	4 ZPO, 2 PR
204 – 1a	1	ZPO	204 – 1b	4	3 ZPO, INT
205 – 1a	3	ZPO	205 – 1b	7	2 ZPO, 2 PY, VZ, Z, INT
206 – 1a		x	206 – 1b		x
207 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	207 – 1b	3	2 ZPO, PC
208 – 1a	2	Z, ZPO	208 – 1b	7	2 INT, 2 ZPO, 2 PY, Z
209 – 1a	12	8 ZPO, 2 PY, 2 PR	209 – 1b	2	INT, Z
210 – 1a	2	Z	210 – 1b	2	INT, Z
211 – 1a	2	ZPO	211 – 1b	2	ZPO, PY
212 – 1a	3	2 ZPO, INT	212 – 1b	4	2 ZPO, 2 PY
213 – 1a	1	ZPO	213 – 1b	3	ZPO, INT, VZ
214 – 1a	2	ZPO	214 – 1b	16	9 Z, 3 ZPO, PM, 3 PC
215 – 1a		x	215 – 1b	10	5 ZPO, 2 PC, INT, PM, Z
216 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	216 – 1b	7	5 ZPO, 2 PC
217 – 1a	4	3 ZPO, PY	217 – 1b	10	8 ZPO, 2 PY
218 – 1a	3	2 ZPO, INT	218 – 1b	3	Z, ZPO, INT
219 – 1a	2	ZPO	219 – 1b	4	2 ZPO, 2 PY
220 – 1a	není		220 – 1b	není	
221 – 1a	4	3 ZPO, PY	221 – 1b	11	6 VZ, 3 PY, 2 ZPO
222 – 1a	6	3 ZPO, 3 PY	222 – 1b	6	3 ZPO, 2 Z, INT
223 – 1a	1	ZPO	223 – 1b	2	VZ, INT
224 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	224 – 1b	6	2 ZPO, 3 VZ, PY
225 – 1a	3	Z , PY, ZPO	225 – 1b	1	INT
226 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	226 – 1b	1	Z
227 – 1a	1	Z	227 – 1b	není	
228 – 1a	5	2 ZPO, Z, INT, PY	228 – 1b	4	2 Z, 2 ZPO

Tabulka 63. Typ a počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (třída 2, situace 2)

Číslo úlohy	**Počet kroků**	**Typ kroků**	**Číslo úlohy**	**Počet kroků**	**Typ kroků**
201 – 2a	2	ZPO, INT	201 – 2b	2	ZPO, INT
202 – 2a	6	4 ZPO, PC, VZ	202 – 2b	7	5 ZPO, PC, VZ
203 – 2a	1	ZPO	203 – 2b	5	3 PC, 2 ZPO
204 – 2a	3	ZPO	204 – 2b	7	6 ZPO, INT
205 – 2a	9	4 ZPO, 3 PC, 2 PR	205 – 2b	4	2 VZ, 2 ZPO
206 – 2a	1	ZPO	206 – 2b		x
207 – 2a	3	2 ZPO, PC	207 – 2b	9	4 PC, 3 ZPO, 2 VZ
208 – 2a	3	2 ZPO, INT	208 – 2b	3	2 ZPO, 1 INT
209 – 2a	3	VZ, ZPO, INT	209 – 2b	5	4 ZPO, 1 PC
210 – 2a	6	4 PC, 2 ZPO	210 – 2b	9	5 PC, 3 ZPO, VZ
211 – 2a	1	ZPO	211 – 2b	9	4 ZPO, 4 PC, INT
212 – 2a	2	ZPO	212 – 2b	6	4 PC, ZPO, INT
213 – 2a	1	ZPO	213 – 2b	3	2 INT, 1 ZPO
214 – 2a		x	214 – 2b	9	5 ZPO, 2 INT, PC, VZ
215 – 2a	10	6 ZPO, 2 PR, 2 PC	215 – 2b		x
216 – 2a	4	PC	216 – 2b	4	PC
217 – 2a	3	2 ZPO, PR	217 – 2b	4	PC
218 – 2a	1	ZPO	218 – 2b	4	2 ZPO, VZ,INT
219 – 2a	1	PC	219 – 2b	4	2 ZPO, 2 PC
220 – 2a	4	ZPO	220 – 2b	7	3 ZPO, 2 PC, VZ, INT
221 – 2a	není		221 – 2b	není	
222 – 2a	není		222 – 2b	8	5 PC, 3 ZPO
223 – 2a	10	ZPO	223 – 2b	není	
224 – 2a	7	ZPO	224 – 2b	není	
225 – 2a	2	PC	225 – 2b	není	
226 – 2a	7	5 PC, 2 ZPO	226 – 2b	není	
227 – 2a	není		227 – 2b	není	
228 – 2a	1	INT	228 – 2b	není	

Tabulky 64 a 65 popisují úlohy vytvořené třídou 2 v rámci obou situací z hlediska počtu a typu kroků:

Tabulka 64. Typ a počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (třída 3, situace 1)

Číslo úlohy	**Počet kroků**	**Typ kroků**	**Číslo úlohy**	**Počet kroků**	**Typ kroků**
301 – 1a	2	ZPO	301 – 1b	8	6 ZPO, PM, Z
302 – 1a	1	ZPO	302 – 1b	1	ZPO
303 – 1a		x	303 – 1b	5	4 ZPO, Z
304 – 1a	4	3 ZPO, INT	304 – 1b	4	2 ZPO, 2 PY
305 – 1a	4	2 ZPO, 2 PY	305 – 1b	2	ZPO, Z
306 – 1a	2	ZPO	306 – 1b	4	ZPO
307 – 1a	4	ZPO	307 – 1b	5	3 ZPO, 2 PY
308 – 1a	1	PY	308 – 1b	3	2 ZPO, Z
309 – 1a	3	INT	309 – 1b	6	ZPO
310 – 1a	4	ZPO	310 – 1b	7	5 ZPO, 2 INT
311 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	311 – 1b	7	4 ZPO, 3 VZ
312 – 1a	2	ZPO	312 – 1b	3	2 ZPO, PC
313 – 1a	6	4 ZPO, 2 PY	313 – 1b	3	2 ZPO, VZ
314 – 1a	3	ZPO	314 – 1b	2	Z, INT
315 – 1a	1	Z	315 – 1b	2	Z, INT
316 – 1a	4	3 ZPO, Z	316 – 1b	6	3 ZPO, 2 PY, Z
317 – 1a	není		317 – 1b	3	Z, ZPO, PY
318 – 1a	2	Z, INT	318 – 1b	není	

Tabulka 65. Typ a počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (třída 3, situace 2)

Číslo úlohy	**Počet kroků**	**Typ kroků**	**Číslo úlohy**	**Počet kroků**	**Typ kroků**
301 – 2a	2	ZPO	301 – 2b	5	4 ZPO, INT
302 – 2a	3	PC, 2 ZPO	302 – 2b	6	5 ZPO, INT
303 – 2a	2	ZPO, PY	303 – 2b		x
304 – 2a	4	3 ZPO, PR	304 – 2b	1	ZPO
305 – 2a	3	ZPO	305 – 2b	2	PC
306 – 2a	2	ZPO	306 – 2b	10	9 ZPO, PC
307 – 2a	2	ZPO	307 – 2b	5	PC
308 – 2a	2	ZPO	308 – 2b	9	6 PC, 3 ZPO
309 – 2a	3	INT	309 – 2b	10	6 PC, 3 ZPO, PR
310 – 2a	2	ZPO	310 – 2b	7	ZPO
311 – 2a	5	ZPO	311 – 2b	2	ZPO
312 – 2a	4	3 ZPO, PC	312 – 2b	2	ZPO, PC
313 – 2a	3	2 ZPO, PC	313 – 2b	4	ZPO
314 – 2a	1	ZPO	314 – 2b	2	ZPO

315 – 2a	3	2 ZPO, PC	315 – 2b	3	2 ZPO, Z
316 – 2a	2	ZPO	316 – 2b	1	ZPO
317 – 2a	6	4 ZPO, 2 PC	317 – 2b	není	
318 – 2a	2	ZPO	318 – 2b	7	6 ZPO, PC

Tabulka 66 shrnuje počet a typ kroků v jednotlivých úlohách, situacích a třídách. Připomeňme, že žáci třídy 2 vytvořili 27 úloh v situaci 1a, 26 úloh v situaci 1b, 25 úloh v situaci 2a a 21 úloh v situaci 2b, a žáci třídy 3 vytvořili 17 úloh v situaci 1a, 17 úloh v situaci 1b, 18 úloh v situaci 2a a 17 úloh v situaci 2b.

Tabulka 66. Shrnutí počtu a typu kroků v jednotlivých třídách a situacích

	Typ kroku	Situace 1			Situace 2			**Součet**
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	ZPO	63	59	**122**	57	49	**106**	**228**
	PY	19	17	**36**	0	0	**0**	**36**
	PR	2	2	**4**	5	0	**5**	**9**
	PM	0	6	**6**	0	0	**0**	**6**
	PC	0	8	**8**	23	40	**63**	**71**
	INT	3	12	**15**	4	11	**15**	**30**
	Z	6	20	**26**	0	0	**0**	**26**
	VZ	0	12	**12**	2	9	**11**	**23**
	Celkem	**93**	**136**	**229**	**91**	**109**	**200**	**429**
Třída 3	ZPO	34	46	**80**	40	50	**90**	**170**
	PY	7	7	**14**	1	0	**1**	**15**
	PR	0	0	**0**	1	1	**2**	**2**
	PM	0	1	**1**	0	0	**0**	**1**
	PC	0	1	**1**	6	22	**28**	**29**
	INT	5	4	**9**	3	2	**5**	**14**
	Z	3	8	**11**	0	1	**1**	**12**
	VZ	0	4	**4**	0	0	**0**	**4**
	Celkem	**49**	**71**	**120**	**51**	**76**	**127**	**247**
Celkem		**142**	**207**	**349**	**142**	**185**	**327**	**676**

Z celkového počtu 676 kroků se jedná v 398 případech o základní početní operace, ve 100 případech o počítání s procenty, v 51 případech o použití Pythagorovy věty, ve 44 případech o interpretaci údajů, v 38 případech o zakreslení útvaru, ve 27 o použití vzorce, v 11 případech o výpočet průměru a v 7 případech o výpočet poměru.

Pro vyřešení všech snadných úloh je třeba celkem 284 kroků, pro vyřešení všech obtížných úloh 392 kroků. Pro vyřešení snadné úlohy je třeba použít průměrně 3,3 kroku, pro vyřešení obtížné úlohy průměrně 4,8 kroku. Je tedy vidět významný nárůst počtu kroků mezi snadnou a obtížnou úlohou. Z hlediska počtu kroků existuje rozdíl mezi oběma třídami. K vyřešení úlohy vytvořené třídou 2 je třeba průměrně 4,3 kroku, k vyřešení úlohy vytvořené třídou 3 je třeba průměrně 3,6 kroku.

Zaměříme-li se na rozdíly mezi třídami z hlediska povahy neznámých, uvidíme rozdíly mezi oběma třídami. Tabulka 67 popisuje podíl počtu základních početních operací na celkovém počtu kroků

Tabulka 67. Podíl počtu základních početních operací na celkovém počtu kroků

	Situace 1		Situace 2		Celkem
	1a	1b	2a	2b	
Třída 2	68 %	43 %	63 %	53 %	53 %
Třída 3	69 %	65 %	78 %	66 %	69 %

Z tabulky 67 je patrné, že v úlohách vytvořených třídou 2 mají menší podíl základní početní operace (53 %) oproti třídě 3 (69 %). V úlohách vytvořených třídou 2 dostaly větší prostor méně časté a obtížnější kroky než v úlohách třídy 3, a to zejména počítání s procenty, Pythagorova věta, zakreslení objektu, použití vzorce nebo interpretace údajů.

10.3.5 Shrnutí analýzy matematického modelu vytvořených úloh

Některé charakteristiky matematického modelu vytvořených úloh byly popsány v kapitole 9.3 (typ úloh, konkrétní typy matematických modelů). V této části shrneme výsledky analýzy matematického modelu vytvořených úloh z hlediska typu matematického modelu (jednoduchý nebo složený model), povahy a počtu neznámých, typu čísel a počtu a typu matematických kroků potřebných k vyřešení úlohy.

Matematický model 60 % vytvořených úloh je složený z více matematických modelů (celkem 100 úloh ze 168), 61 úloh je založeno na jednoduchém matematickém modelu (36 %), u 7 úloh nelze matematický model určit. U obou situací převažuje složený matematický model. Je patrný rozdíl mezi oběma třídami. Zatímco třída 3 vytvořila téměř stejný počet úloh s jednoduchým (32 úloh) a složeným matematickým modelem (35 úloh), třída 2 vytvořila 65 úloh se složeným a 29 úloh s jednoduchým matematickým modelem.

Většina neznámých ve vytvořených úlohách byla číselné povahy (285 z 343 neznámých). Ostatní typy neznámých se vyskytovaly zejména u obtížných úloh, a to zejména v situaci 1 (36 neznámých). V úlohách vytvořených třídou 2 se vyskytl větší počet neznámých (212) oproti úlohám vytvořených třídou 3 (131 neznámých). Tento rozdíl souvisí s větším počtem složených modelů a úkolů k vyřešení v úlohách vytvořených třídou 2.

Typ čísel není důležitým kritériem pro zvýšení obtížnosti úloh ani v jedné z tříd nebo situací, protože ve 144 úlohách (86 %) se vyskytují snadná čísla a pouze v 11 úlohách obtížná čísla (7 %), ani charakteristickým znakem některé ze tříd nebo situací. Lze zmínit jen větší počet úloh obsahující i reálná (tj. iracionální) čísla vytvořených v rámci situace 1 (38 úloh) oproti 8 úlohám vytvořených v rámci situace 2.

Počet matematických kroků potřebných k vyřešení úlohy je rozdílný jak u snadných (284 kroků) a obtížných úloh (392 kroků), tak i u obou tříd. Na vyřešení úlohy vytvořené třídou 2 je třeba průměrně 4,3 kroků oproti 3,6 krokům pro vyřešení úlohy vytvořené třídou 3. V úlohách vytvořených třídou 2 se častěji (47 %) vyskytují jiné typy kroků než základní početní operace oproti třídě 3 (31 % kroků). U obtížných úloh v obou třídách a situacích je také menší podíl základních početních operací (51 % všech kroků) než u snadných úloh, u kterých tvoří základní početní operace 68 % kroků k vyřešení.

Na závěr porovnáme úlohy vytvořené dobrými, průměrnými a slabými žáky obou tříd z hlediska matematického modelu. Vzhledem k malému počtu žáků v jednotlivých skupinách[42] nelze tyto výsledky zobecňovat. Uvádíme je zde proto, že je považujeme za možnou inspiraci k dalším výzkumům matematické kultury při tvoření úloh.

Úlohy vytvořené skupinami dobrých žáků obou tříd vykazují obdobné procentuální zastoupení složených a jednoduchých matematických modelů a povahu neznámé. Obě skupiny se pak navzájem liší z hlediska použitého typu čísel, kdy dobří žáci třídy 2 častěji (46 % úloh) použili reálná čísla, zatímco v 50 % úloh dobrých žáků třídy 3 se vyskytují pouze přirozená čísla. Tyto skupiny se liší i z hlediska typu kroků potřebných k vyřešení úlohy. Zatímco u dobrých žáků třídy 2 tvoří základní početní operace 58 % kroků, u žáků třídy 3 je to 79 % kroků.

[42]Třída 2 – 7 dobrých, 14 průměrných a 7 slabých žáků. Třída 3 – 5 dobrých, 8 průměrných a 5 slabých žáků.

Skupiny průměrných žáků se liší z hlediska složených a jednoduchých matematických modelů. U průměrných žáků třídy 2 tvoří složené matematické modely 73 %, zatímco u třídy 3 jen 54 %. Z hlediska počtu neznámých se obě skupiny neliší, u úlohy vytvořených průměrnými žáky třídy 3 jsou zastoupeny jen 3 typy neznámých, zatímco u úloh vytvořených žáky třídy 2 jsou zastoupeny všechny popsané typy neznámých. Z hlediska typu čísel potřebných při řešení úlohy mají obě skupiny obdobné charakteristiky. Skupiny se liší i z hlediska typu kroků potřebných k vyřešení úlohy. Zatímco u průměrných žáků třídy 2 tvoří základní početní operace 52 % kroků, u průměrných žáků třídy 3 je to 66 % kroků.

Skupiny slabých žáků se liší z hlediska výskytu složených a jednoduchých matematických modelů. U slabých žáků třídy 2 tvoří složené matematické modely 59 %, zatímco u třídy 3 jen 26 %. Z hlediska povahy a počtu neznámých se obě skupiny neliší. Z hlediska typu čísel potřebných při řešení úlohy se obě skupiny liší v použití reálných čísel, u třídy 2 se jedná o 34 % úloh, zatímco u třídy 3 jen o 17 % úloh. Skupiny se také liší z hlediska typu kroků potřebných k vyřešení úlohy. Zatímco u slabých žáků třídy 2 tvoří základní početní operace 51 % kroků, u průměrných žáků třídy 3 je to 62 % kroků.

10.4 Charakteristika vytvořených úloh z pohledu řešitele

V této části popíšeme vytvořené úlohy z pohledu řešitele, a to pomocí následujících charakteristik:

L1. Řešitelnost úlohy

Z hlediska řešitelnosti úlohy rozlišíme 3 charakteristiky: A – úloha je zcela řešitelná, N – úloha není řešitelná, nebo je pouze částečně řešitelná, x – o řešitelnosti úlohy nelze rozhodnout (nematematická úloha).

L2. Počet úkolů k vyřešení

Počet úkolů k vyřešení označuje počet explicitně zadaných úkolů, které je třeba vyřešit, aby byla úloha úplně vyřešena. Nejedná se o počet kroků potřebných k vyřešení úlohy, který je popsán v předchozí kapitole.

L3. Počet řešení úlohy

Počet řešení úloh je určen pouze u řešitelných úloh a označuje počet řešení celé úlohy. Tj. např. pokud mají všechny části úlohy jedno řešení, má celá úloha také jedno řešení. Pokud má některá část úlohy víc řešení, má celá úloha také víc řešení.

L4. Délka zadání úlohy

Délka zadání úlohy je popsána pomocí počtu slov v zadání. U úloh s podtrženým číslem jsou navíc některé informace zadány i pomocí obrázku.

L5. Kontext úlohy

Rozlišíme dva typy kontextu: M – čistě matematický kontext, R – libovolný reálný kontext.

Vysvětlivky k tabulkám 68, 69, 70, 71 a 72: A – úloha je zcela řešitelná, N – úloha není řešitelná, nebo pouze částečně řešitelná, x – o řešitelnosti úlohy nelze rozhodnout (nematematická úloha), M – čistě matematický kontext, R – libovolný reálný kontext.

10.4.1 Analýza vytvořených úloh – přehled hodnot proměnných

Tabulky 68 a 69 popisují úlohy vytvořené třídou 2 z pohledu řešitele:

Tabulka 68. Analýza vytvořených úloh z pohledu řešitele (třída 2, situace 1)

Úloha	L1	L2	L3	L4	L5	Úloha	L1	L2	L3	L4	L5
201 – 1a	A	1	1	8	M	201 – 1b	A	1	1	3	M
202 – 1a	A	2	1	13	M	202 – 1b	A	2	1	24	M
203 – 1a	A	1	1	21	R	203 – 1b	A	3	1	95	R
204 – 1a	A	1	1	45	R	204 – 1b	A	2	1	66	R
205 – 1a	A	1	1	10	M	205 – 1b	A	3	1	19	M
206 – 1a	x	x	x	24	M	206 – 1b	x	x	x	70	M
207 – 1a	A	2	1	6	M	207 – 1b	A	1	1	9	M
208 – 1a	A	1	1	31	M	208 – 1b	A	5	>4	59	M
209 – 1a	A	4	1	23	M	209 – 1b	A	2	1	24	M
210 – 1a	A	2	1	13	M	210 – 1b	A	2	1	27	M
211 – 1a	A	1	1	6	M	211 – 1b	A	1	1	12	M
212 – 1a	A	2	>4	11	M	212 – 1b	A	1	1	4	M
213 – 1a	A	1	1	13	M	213 – 1b	A	1	1	14	M
214 – 1a	A	1	1	14	M	214 – 1b	A	14	1	42	M
215 – 1a	x	x	x	61	x	215 – 1b	A	7	>4	64	M
216 – 1a	A	3	1	56	R	216 – 1b	A	2	1	46	M
217 – 1a	A	3	1	10	M	217 – 1b	A	8	1	34	M
218 – 1a	A	1	1	21	R	218 – 1b	A	1	1	36	R
219 – 1a	A	1	1	6	M	219 – 1b	A	1	1	4	M
220 – 1a	není					220 – 1b	není				
221 – 1a	A	2	1	10	M	221 – 1b	A	2	1	8	M
222 – 1a	A	1	1	12	M	222 – 1b	A	3	>4	35	M

223 – 1a	A	1	1	57	R	223 – 1b	A	1	1	66	R
224 – 1a	A	2	1	14	M	224 – 1b	A	5	>4	86	R
225 – 1a	A	1	1	32	M	225 – 1b	A	1	1	27	M
226 – 1a	A	1	1	11	M	226 – 1b	A	2	>4	30	M
227 – 1a	A	1	>4	33	M	227 – 1b	není				
228 – 1a	A	4	>4	28	M	228 – 1b	A	2	>4	12	M

Tabulka 69. Analýza vytvořených úloh z pohledu řešitele (třída 2, situace 2)

Úloha	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**Úloha**	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**
201 – 2a	A	1	2	21	R	201 – 2b	N	1	x	22	R
202 – 2a	A	2	1	72	R	202 – 2b	A	2	1	80	R
203 – 2a	A	1	1	34	R	203 – 2b	A	1	1	45	R
204 – 2a	A	2	1	37	R	204 – 2b	A	2	1	30	R
205 – 2a	A	4	1	112	R	205 – 2b	A	3	1	97	R
206 – 2a	x	x	x	17	R	206 – 2b	x	x	x	6	x
207 – 2a	A	1	1	22	x	207 – 2b	A	2	1	91	R
208 – 2a	A	1	1	47	R	208 – 2b	A	1	1	81	R
209 – 2a	A	1	1	28	R	209 – 2b	A	3	1	55	R
210 – 2a	A	2	1	62	R	210 – 2b	A	2	1	50	R
211 – 2a	A	1	1	7	R	211 – 2b	A	1	1	79	R
212 – 2a	A	1	>4	27	R	212 – 2b	A	2	1	48	R
213 – 2a	A	1	1	11	R	213 – 2b	A	1	1	41	R
214 – 2a	A	1	>4	22	R	214 – 2b	A	4	1	129	R
215 – 2a	A	3	1	82	R	215 – 2b	x	x	x	25	x
216 – 2a	A	4	1	50	R	216 – 2b	A	4	1	78	R
217 – 2a	A	2	1	26	R	217 – 2b	A	1	1	52	R
218 – 2a	A	1	1	14	R	218 – 2b	A	2	1	53	R
219 – 2a	A	1	1	12	R	219 – 2b	A	1	1	28	R
220 – 2a	A	1	1	76	R	220 – 2b	A	1	1	102	R
221 – 2a	není					221 – 2b	není				
222 – 2a	není					222 – 2b	A	1	1	118	R
223 – 2a	A	1	1	95	R	223 – 2b	není				
224 – 2a	A	2	>4	60	R	224 – 2b	není				
225 – 2a	A	1	1	25	R	225 – 2b	není				
226 – 2a	A	1	1	21	R	226 – 2b	není				
227 – 2a	není					227 – 2b	není				
228 – 2a	A	1	1	49	R	228 – 2b	není				

Tabulky 70 a 71 popisují úlohy vytvořené třídou 3 z pohledu řešitele:

Tabulka 70. Analýza vytvořených úloh z pohledu řešitele (třída 3, situace 1)

Úloha	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**Úloha**	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**
301 – 1a	A	1	1	16	M	301 – 1b	A	1	1	29	M
302 – 1a	A	1	1	11	M	302 – 1b	A	1	1	9	M
303 – 1a	N	x	x	20	R	303 – 1b	A	2	>4	24	M
304 – 1a	A	2	1	14	M	304 – 1b	A	1	1	7	M
305 – 1a	A	1	1	6	M	305 – 1b	A	1	>4	18	M
306 – 1a	A	1	1	12	M	306 – 1b	A	1	1	15	M
307 – 1a	A	1	1	19	M	307 – 1b	A	1	1	20	M
308 – 1a	A	1	1	16	M	308 – 1b	A	1	1	23	M
309 – 1a	A	1	>4	17	R	309 – 1b	A	1	1	28	R
310 – 1a	A	2	1	6	M	310 – 1b	A	3	1	67	R
311 – 1a	A	2	1	16	R	311 – 1b	A	1	1	37	R
312 – 1a	A	2	1	6	M	312 – 1b	A	2	1	14	M
313 – 1a	A	1	1	25	R	313 – 1b	A	1	1	49	R
314 – 1a	A	1	1	16	M	314 – 1b	N	1	x	23	R
315 – 1a	A	1	1	17	M	315 – 1b	N	2	x	29	M
316 – 1a	A	2	>4	26	M	316 – 1b	A	2	>4	17	M
317 – 1a	není					317 – 1b	A	2	1	64	R
318 – 1a	A	1	1	15	M	318 – 1b	není				

Tabulka 71. Analýza vytvořených úloh z pohledu řešitele (třída 3, situace 2)

Úloha	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**Úloha**	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**
301 – 2a	A	1	1	26	R	301 – 2b	A	1	1	43	R
302 – 2a	A	1	1	31	R	302 – 2b	N	1	x	38	R
303 – 2a	A	2	1	42	R	303 – 2b	x	x	x	45	R
304 – 2a	A	1	1	18	R	304 – 2b	A	1	2	16	R
305 – 2a	A	1	1	27	R	305 – 2b	A	1	1	21	R
306 – 2a	A	1	1	42	R	306 – 2b	A	1	1	26	R
307 – 2a	A	1	1	26	R	307 – 2b	A	1	1	44	R
308 – 2a	A	1	1	17	R	308 – 2b	A	1	1	94	R
309 – 2a	A	3	1	25	R	309 – 2b	A	4	>4	172	R
310 – 2a	A	1	1	24	R	310 – 2b	A	2	1	96	R
311 – 2a	A	2	1	53	R	311 – 2b	A	1	1	38	R

312 – 2a	A	1	1	36	R	312 – 2b	A	1	1	38	R
313 – 2a	A	2	1	37	R	313 – 2b	A	1	4	24	R
314 – 2a	A	1	>4	17	R	314 – 2b	A	1	>4	14	R
315 – 2a	A	2	1	33	R	315 – 2b	A	2	>4	41	R
316 – 2a	A	1	1	16	R	316 – 2b	A	1	1	40	R
317 – 2a	A	2	1	69	R	317 – 2b	není				
318 – 2a	A	1	1	26	R	318 – 2b	A	1	1	69	R

Tabulka 72 shrnuje vytvořené úlohy z hlediska řešitelnosti (L1):

Tabulka 72. Řešitelnost vytvořených úloh (shrnutí)

	Řešitelnost	Situace 1			Situace 2			**Celkem**
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	A	25	25	**50**	24	18	**42**	**92**
	N	0	0	**0**	0	1	**1**	**1**
	x	2	1	**3**	1	2	**3**	**6**
Třída 3	A	16	15	**31**	18	15	**33**	**64**
	N	1	2	**3**	0	1	**1**	**4**
	x	0	0	**0**	0	1	**1**	**1**

Z celkového počtu 168 vytvořených úloh je 156 úloh řešitelných, 5 úloh není řešitelných, a u 7 úloh nelze rozhodnout, zda jsou řešitelné. Z hlediska řešitelnosti se nevyskytly významné rozdíly mezi oběma situacemi ani třídami.

Tabulka 73 shrnuje vytvořené úlohy podle počtu úkolů k vyřešení (L2):

Tabulka 73. Počet úkolů k vyřešení (shrnutí)

	Počet úkolů	Situace 1			Situace 2			**Celkem**
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	1	15	9	**24**	16	9	**25**	**49**
	2	6	8	**14**	5	6	**11**	**25**
	3	2	3	**5**	1	2	**3**	**8**
	4	2	0	**2**	2	2	**4**	**6**
	>4	0	5	**5**	0	0	**0**	**5**
Třída 3	1	11	11	**22**	12	12	**24**	**46**
	2	5	5	**10**	5	2	**7**	**17**
	3	0	1	**1**	1	0	**1**	**2**
	4	0	0	**0**	0	1	**1**	**1**
	>4	0	0	**0**	0	0	**0**	**0**

Ze 168 vytvořených úloh obsahuje 95 úloh 1 úkol k vyřešení, 42 úloh 2 úkoly k vyřešení, 10 úloh 3 úkoly k vyřešení, 7 úloh 4 úkoly k vyřešení a 5 úloh víc než 4 úkoly k vyřešení. U 9 úloh nelze určit počet úkolů k vyřešení. Počet úkolů k vyřešení je rovnoměrně rozdělen jak mezi situaci 1 a situaci 2, tak i mezi snadné a obtížné úlohy. Všech 5 úloh s víc než 4 úkoly k vyřešení se vyskytuje u třídy 2 a situace 1b. Tabulka 74 shrnuje vytvořené úlohy podle počtu řešení (L3):

Tabulka 74. Počet řešení (shrnutí)

	Počet řešení	Situace 1			Situace 2			**Celkem**
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	1	22	19	**41**	20	18	**38**	**79**
	2	0	0	**0**	1	0	**1**	**1**
	3	0	0	**0**	0	0	**0**	**0**
	4	0	0	**0**	0	0	**0**	**0**
	>4	3	6	**9**	3	0	**3**	**12**
Třída 3	1	14	12	**26**	17	10	**27**	**53**
	2	0	0	**0**	0	1	**1**	**1**
	3	0	0	**0**	0	0	**0**	**0**
	4	0	0	**0**	0	1	**1**	**1**
	>4	2	3	**5**	1	3	**4**	**9**

Ze 168 vytvořených úloh má 132 úloh 1 řešení, 2 úlohy 2 řešení, 1 úloha 4 řešení a 21 úloh víc než 4 řešení. U 12 úloh nelze určit počet řešení. Z hlediska počtu řešení nelze konstatovat významné rozdíly mezi situacemi ani třídami. Tabulka 75 shrnuje délku zadání úloh vytvořených žáky obou tříd v rámci obou situací. Pro přehlednost jsme délku zadání rozdělili do intervalů po 10 slovech.

Tabulka 75. Délka zadání vytvořených úloh (shrnutí)

Počet slov v zadání		**0 – 10**	**11 – 20**	**21 – 30**	**31 – 40**	**41 – 50**	**51 – 60**	**61 – 70**	**víc než 70**
Třída 2	1a	6	9	5	3	1	2	1	0
	1b	5	4	5	3	2	1	4	2
	2a	1	4	8	2	3	1	1	5
	2b	1	0	4	0	4	3	0	9
Třída 3	1a	3	12	2	0	0	0	0	0
	1b	2	5	6	1	1	0	2	0
	2a	0	4	6	4	2	1	1	0
	2b	0	2	3	4	4	0	1	3

Třída 2	**13**	**17**	**22**	**8**	**10**	**7**	**6**	**16**
Třída 3	**5**	**23**	**17**	**9**	**7**	**1**	**4**	**3**
Celkem	**18**	**40**	**39**	**17**	**17**	**8**	**10**	**19**

Délka téměř poloviny zadání vytvořených úloh (79 ze 168) je v rozmezí od 10 do 30 slov. Za výjimečně dlouhá považujeme zadání 19 úloh, která obsahují víc než 70 slov.

Tabulka 76. Průměrná délka zadání vytvořených úloh

	Průměrná délka zadání			
Třída 2	1a	21,8	28,4	38,8
	1b	35,2		
	2a	41,2	50,8	
	2b	62,4		
Třída 3	1a	15,2	21,5	31,2
	1b	27,8		
	2a	31,4	40,7	
	2b	50,5		

Z tabulky 76 vyplývá, že zadání úloh vytvořených v rámci situace 1 jsou průměrně o 20 slov kratší než zadání vytvořená v rámci situace 2. Zadání obtížné úlohy je v 58 případech delší než zadání snadné úlohy, zadání snadné úlohy je delší v 21 případech, v 11 případech nebyly vytvořeny obě úlohy. Průměrná délka zadání úloh vytvořených třídou 2 je větší (38,8 slova) než průměrná délka zadání úloh vytvořených třídou 3 (31,2 slova).

Tabulka 77 shrnuje počty vytvořených úloh podle jejich kontextu (matematického nebo reálného):

Tabulka 77. Kontext vytvořených úloh (shrnutí)

	Kontext	Situace 1			Situace 2			**Celkem**
		1a	1b	**Celkem**	2a	2b	**Celkem**	
Třída 2	M	21	21	**42**	0	0	**0**	**42**
	R	5	5	**10**	24	19	**43**	**53**
	x	1	0	**1**	1	2	**3**	**4**
Třída 3	M	13	11	**24**	0	0	**0**	**24**
	R	4	6	**10**	18	17	**35**	**45**
	x	0	0	**0**	0	0	**0**	**0**

Všechny úlohy vytvořené v rámci situace 2 mají reálný kontext. 66 úloh vytvořených v rámci situace 1 má matematický kontext, 20 úloh pak reálný kontext. U 4 úloh nebylo možné o povaze kontextu rozhodnout.

10.4.2 Shrnutí analýzy vytvořených úloh z pohledu řešitele

Analýza vytvořených úloh z pohledu řešitele byla provedena na základě následujících proměnných – řešitelnost úloh, počet úkolů k vyřešení, počet řešení úlohy, délka zadání a kontext úlohy.

93 % úloh (156 úloh ze 168) je řešitelných a jen 3 % úloh nejsou řešitelná (5 úloh), u zbylých 7 úloh není možné o řešitelnosti rozhodnout. 57 % vytvořených úloh (95 úloh ze 168) obsahuje pouze 1 úkol k vyřešení, 38 % úloh (64 úloh ze 168) obsahuje víc než 1 úkol k vyřešení, u 9 úloh nelze o počtu úkolů k vyřešení rozhodnout. 79 % úloh (132 úloh ze 168) má pouze 1 řešení, 14 % úloh (24 úloh ze 168) víc než 1 řešení, u 12 úloh nelze o počtu řešení rozhodnout. Z hlediska kritérií řešitelnosti úloh, počtu úkolů k vyřešení a počtu řešení úloh nejsou rozdíly ani mezi oběma třídami, ani oběma situacemi tvorby úloh.

Z hlediska délky zadání úloh naopak existují rozdíly mezi úlohami vytvořenými v rámci jedné situace, mezi situacemi i mezi třídami. Zadání obtížné úlohy je v 58 případech delší než zadání snadné úlohy, zadání snadné úlohy je delší v 21 případech. V 11 případech nelze délku zadání porovnat (nebyly vytvořeny obě úlohy). Zadání úloh vytvořených v rámci situace 2 jsou průměrně o 20 slov delší než zadání úloh vytvořených v rámci situace 1. Zadání úloh vytvořených třídou 2 jsou průměrně o 7 slov delší než zadání úloh vytvořených třídou 3.

Kontext vytvořených úloh vychází zpravidla z kontextu zadání situace. V rámci situace 2 mají všechny úlohy reálný kontext, v rámci situace 1 pak 68 úloh z 88 matematický kontext a zbývajících 20 úloh reálný kontext.

Pro hledání rozdílů situací, tříd a úloh z pohledu řešitele může sloužit zejména délka zadání úloh, zatímco výsledky analýzy na základě ostatních kritérií vycházejí obdobně u všech úloh, situací a tříd.

Na závěr porovnáme úlohy vytvořené skupinami dobrých, průměrných a slabých žáků jednotlivých tříd z hlediska řešitele. Z hlediska řešitelnosti a kontextu vytvořených úloh nemá porovnání obou tříd význam, protože téměř všechny vytvořené úlohy jsou řešitelné a jejich kontext je stejný u obou tříd. Vzhledem k malému počtu úloh není možné popsat případné rozdíly ani v počtu úkolů k vyřešení, ani v počtu řešení úloh. Porovnání délky zadání úloh ukazuje, že dobří žáci třídy 2 vytvořili kratší zadání úloh než dobří žáci třídy 3, zatímco průměrní a slabí žáci třídy 2 vytvořili delší zadání úloh než žáci stejných skupin třídy 3.

10.5 Shrnutí analýzy vytvořených úloh

Vytvořené úlohy jsme analyzovali ze tří základních hledisek - hledisko kvality, hledisko matematického modelu a hledisko řešitele. V této kapitole shrneme výsledky analýzy vytvořených úloh a odpovíme na otázku, jaké úlohy byly během experimentu vytvořeny a které znaky úloh považujeme za charakteristické pro matematickou kulturu skupin nebo jednotlivců. Nejprve shrneme obecné závěry týkající se vytvořených úloh, potom porovnáme snadné a obtížné úlohy a výchozí situace tvorby úloh, a nakonec porovnáme navzájem obě třídy.

10.5.1 Charakteristika vytvořených úloh

Žáci obou tříd vytvořili dohromady 168 úloh. 80 % vytvořených úloh patří mezi početní úlohy, řešení 16 % vyžaduje konstrukci. Průměrná délka zadání úlohy je 35,7 slov. V úlohách se vyskytuje celkem 62 různých matematických modelů.

Následující přehled popisuje, kolik procent všech vytvořených úloh splňuje jednotlivé charakteristiky (proměnné). Uvedené skupiny úloh nemusí nutně obsahovat stejné úlohy, u každé skupiny mohou některé úlohy splňovat pouze některé vyjmenované charakteristiky.

První část přehledu obsahuje charakteristiky, kterými lze popsat více než 70 % vytvořených úloh. Tyto charakteristiky poskytují základní informaci o tom, jaké úlohy byly vytvořeny, a mohou také být považovány za znak matematické kultury při tvoření úloh dané skupiny žáků.

Více než 90 % vytvořených úloh je matematických, smysluplných, řešitelných a relevantních v dané situaci, které po vyřešení poskytnou o situaci nové informace. Méně než 90 % a více než 70 % úloh lze označit za dobře vytvořené, jasně a jednoznačně formulované, mající pouze jedno řešení, obsahující všechny potřebné údaje pro vyřešení a obsahující pouze snadná čísla. Méně než 90 % a více než 70 % úloh také má reálný kontext a vyžaduje také využití ne zcela triviálních poznatků pro danou úroveň žáků.

Druhá část přehledu obsahuje charakteristiky, kterými lze popsat méně než 70 % a více než 30 % vytvořených úloh. Přestože je již nepovažujeme za charakteristické znaky vytvořených úloh ani matematické kultury dané skupiny žáků, mohou sloužit k rozlišení vytvořených úloh a charakterizovat matematickou kulturu jednotlivců při tvoření úloh:

Méně než 70 % a více než 50 % úloh je založeno na složeném matematickém modelu, má reálný kontext a obsahuje pouze jeden úkol k vyřešení. Méně než 50 % a více než 30 % úloh je zařazeno mezi zajímavé úlohy, založeno na složeném matematickém modelu, má čistě matematický kontext a obsahuje víc než jeden úkol k vyřešení.

Třetí část přehledu obsahuje charakteristiky, kterými lze popsat méně než 30 % vytvořených úloh. Tyto znaky lze považovat za charakteristický znak matematické kultury jednotlivce, v případě kontextu úloh pak za charakteristický znak dané situace. Méně než 30 % a více než 10 % úloh má víc než jedno řešení a má matematický kontext. U méně než 10 % úloh nelze určit matematický model a nelze rozhodnout o počtu řešení ani o počtu úkolů k vyřešení. Obdobný je počet úloh, které nejsou řešitelné a které obsahují obtížná čísla.

Uvedený popis vytvořených úloh a charakteristických znaků matematické kultury není úplný. Další možné charakteristiky matematické kultury skupin jsou uvedeny v kapitole 10.5.4.

10.5.2 Porovnání situací tvorby úloh

Experiment se skládá ze dvou různých situací tvorby úloh. Situace 1, zadaná prostřednictvím obrázku, je méně tradiční a navozuje geometrické prostředí, situace 2, zadaná prostřednictvím textu, je naopak tradičnější a navozuje prostředí klasických úloh dělení celku na části. V kapitole 6.3 obsahující částečnou analýzu a priori těchto situací jsme popsali předpokládané typy úloh, které měly být podle našeho názoru vytvořeny v rámci obou situací. Nejčastější typy vytvořených úloh většinou odpovídají našim předpokladům. Žáci vytvořili ale i úlohy, které jsme v naší analýze a priori nepředpokládali, a to zejména v rámci situace 1.

Větší otevřenost situace 1 považujeme za hlavní příčinu výskytu většího počtu různých matematických modelů (48 oproti 21 modelům v situaci 2). Absence reálného kontextu v situaci 1 je příčinou absence reálného kontextu ve většině úloh (66 z 87) vytvořených v rámci této situace. Kontext situace 2 byl dán samotným zadáním situace (obchod s oblečením). Všechny vytvořené úlohy v rámci situace 2 mají stejný kontext nebo z tohoto kontextu vycházejí.

Rozdíly mezi oběma situacemi se projevují i v průměrné délce zadání úloh. Zadání úloh vytvořených v rámci situace 1 jsou průměrně o 20 slov kratší než zadání vytvořená v rámci situace 2. Vysvětlujeme si to častou absencí reálného kontextu úloh vytvořených v rámci situace 1 a zároveň častou přítomností příběhu navazujícího na zadaný příběh u úloh vytvořených v rámci situace 2.

Rozdíly mezi oběma situacemi se neprojevují v kvalitě vytvořených úloh, ani v některých charakteristikách souvisejících s matematickým modelem úloh (jednoduchý nebo složený matematický model, povaha a počet neznámých). Rozdíly se naopak projevují v typu použitých čísel, kde v rámci situace 1 jsou častěji (38 úloh) použita reálná (iracionální) čísla, která se vyskytují zejména při výpočtu obvodu útvarů, zatímco v situaci 2 se tato čísla téměř nevyskytují (8 úloh). Obtížná čísla (viz kapitola 8.3) se vyskytují téměř výhradně u úloh vytvořených v rámci situace 2 (10 úloh z 11). Z hlediska typu kroků potřebných k vyřešení úlohy se v situaci 1 vyskytuje častěji než v situaci 2 použití Pythagorovy věty a zakreslení objektu, zatímco v situaci 2 vyskytuje častěji počítání s procenty oproti situaci 1. Tyto rozdíly považujeme také za důsledek způsobu zadání situací. Situace 1 navozuje spíše geometrické prostředí, zatímco situace 2 spíše úlohy zabývající se vztahem celku a částí.

Experiment založený na tvorbě úloh na základě daných situací umožnil žákům tvořit úlohy jak s matematickým, tak s reálným kontextem. Otevřenost situace 1 byla podnětem pro použití celkem 48 různých matematických modelů, uzavřenost situace 2 pro použití pouze 21 modelů, ale i pro vytvoření většího množství úloh založených na stejném matematickém modelu (vztah celku a částí, počítání s procenty). Kombinace obou situací tak poskytuje dostatečný prostor pro zkoumání charakteristických znaků matematické kultury při tvoření úloh.

10.5.3 Porovnání snadných a obtížných úloh

Zadání experimentu (viz kapitola 6.2) obsahovalo dvě situace tvorby úloh. V rámci každé z obou situací bylo úkolem žáků vytvořit snadnou a obtížnou úlohu. Cílem tohoto zadání bylo přimět žáky, aby více projevili získané poznatky než v případě, kdy by měli tvořit pouze jednu úlohu na základě dané situace. Hlavní rozdíl mezi snadnou a obtížnou úlohou vytvořenou daným žákem v rámci jedné situace se projevil ve změně matematického modelu, která se vyskytuje v 68 situacích z 92.V obtížných úlohách vytvořených žáky jednotlivých tříd v rámci konkrétní situace se také vyskytuje větší počet matematických modelů než ve snadných úlohách, s výjimkou situace 2 u třídy 3. Průměrný index kvality obtížných úloh je 6,56 a je vyšší než průměrný index kvality snadných úloh (6,17). Jednou z příčin tohoto rozdílu je častější výskyt proměnné K4 (zajímavost úlohy) u obtížných úloh.

Z hlediska matematického modelu vytvořených úloh mají obtížné úlohy častěji složený matematický model, větší počet kroků potřebných k vyřešení úlohy (392 z 676 úloh), v rámci situace 1 pak také větší pestrost povahy neznámých. Obtížná čísla se vyskytují téměř výhradně v obtížných úlohách.

Z pohledu řešitele je jediný rozdíl mezi snadnou a obtížnou úlohou délka zadání, které je v případě snadné úlohy průměrně o 20 slov kratší než zadání obtížné úlohy. V ostatních charakteristikách (řešitelnost, počet úkolů k vyřešení, počet řešení a kontext) nejsou rozdíly mezi snadnými a obtížnými úlohami.

Obtížné úlohy vytvořené v rámci experimentu lze tak popsat prostřednictvím následujících charakteristik: větší délka zadání, převážně složený matematický model, větší počet různých matematických modelů (větší pestrost), vyšší počet kroků potřebných k vyřešení úlohy a vyšší kvalita úloh.

10.5.4 Porovnání tříd

V této kapitole porovnáme obě třídy prostřednictvím vytvořených úloh a jejich charakteristik. Je třeba zmínit, že obě třídy vytvořily rozdílný počet úloh. 28 žáků třídy 2 vytvořilo celkem 99 úloh, zatímco 18 žáků třídy 3 celkem 69 úloh. Rozdíl mezi oběma třídami se projevil v pestrosti použitých matematických modelů. V obou situacích se v úlohách třídy 2 vyskytlo větší množství různých matematických modelů než v úlohách vytvořených třídou 3. V situaci 1 se jedná o 42 modelů použitých třídou 2 oproti 21 modelům použitých třídou 3, v situaci 2 pak o 17 modelů třídy 2 oproti 11 modelům použitých třídou 3. Rozdíl mezi oběma třídami se projevuje i ve využití konstrukce při řešení úloh, v rámci situace 1 je třeba využít konstrukci v 19 z 53 úloh vytvořených třídou 2 a pouze v 8 z 34 úloh vytvořených třídou 3.

Z hlediska kvality se projevuje rozdíl mezi oběma třídami. Průměrný index kvality úloh vytvořených třídou 2 je 6,14 a úloh vytvořených třídou 3 je 6,62. Podle našich kritérií tedy vytvořila třída 3 kvalitnější úlohy. Rozdíly mezi třídami se projevují v kritériích K4 (zajímavost), K5 (jednoznačnost) a K7 (úplnost). Zatímco úlohy vytvořené třídou 2 jsou častěji zajímavé podle našich kritérií, úlohy vytvořené třídou 3 obsahují častěji úplné informace a jsou jednoznačně formulované.

Porovnání z hlediska matematického modelu ukazuje některé rozdíly mezi úlohami vytvořenými jednotlivými třídami. Úlohy vytvořené třídou 2 mají častěji složený matematický model než úlohy vytvořené třídou 3. Zatímco třída 2 vytvořila víc než dvojnásobný počet úloh se složeným matematickým modelem (65 úloh) oproti 29 úlohám s jednoduchým matematickým modelem, třída 3 vytvořila téměř stejný počet úloh se složeným (35) a s jednoduchým matematickým modelem (32). V úlohách vytvořených třídou 2 se vyskytl větší počet neznámých (99 úloh, 212 neznámých) oproti úlohám vytvořených třídou 3 (69 úloh, 131 neznámých). Tento rozdíl souvisí s také větším počtem složených modelů a úkolů k vyřešení v úlohách vytvořených třídou 2. Z hlediska použitého typu čísel existuje rozdíl mezi třídou 2 (35 úloh) a třídou 3 (11 úloh) v počtu úloh, kde byla použita reálná (iracionální) čísla.

Porovnání úloh vytvořených oběma třídami z hlediska řešitele ukazuje také některé rozdíly. Při porovnání tříd z pohledu počtu kroků potřebných k vyřešení úlohy vidíme, že třída 2 má vyšší průměrný počet kroků na úlohu (4,3) oproti třídě 3 (3,6). Z hlediska typu kroků pak vykazují úlohy vytvořené třídou 2 větší pestrost kroků, zatímco úlohy vytvořené třídou 3 mají větší podíl základních početních operací. Délka zadání úloh vytvořených třídou 2 je průměrně o 7 slov větší než délka zadání úloh vytvořených třídou 3. Z hlediska kontextu a počtu neznámých nejsou mezi oběma třídami rozdíly.

Porovnání obou tříd podle různých kritérií tedy ukazuje, že existují rozdíly mezi oběma třídami. Úlohy vytvořené třídou 2 lze celkově charakterizovat jako zajímavější, delší a náročnější úlohy, třída 3 naopak vytvořila jednodušší, tradičnější a pečlivěji vytvořené úlohy, ve kterých se ale neprojevilo takové množství invence jako v úlohách vytvořených třídou 3. Porovnání tříd se věnujeme také v kapitole 11.1.

Při porovnání skupin dobrých, průměrných a slabých žáků[43] obou tříd nemáme k dispozici dostatečný počet úloh, abychom mohli věrohodně porovnat úlohy vytvořené těmito skupinami. Přesto zmíníme aspoň některé tendence, které naznačuje analýza těchto úloh. Index kvality jednotlivých žáků mírně klesá spolu s jejich úrovní. Dobří žáci mají nejvyšší a slabí žáci nejnižší index kvality. Dobří žáci obou tříd se liší v počtu kroků a typu použitých čísel a v průměrné délce zadání úloh. Průměrní žáci se liší v typu matematického modelu (jednoduchý nebo složený matematický model), v typu kroků potřebných pro vyřešení úlohy, a v průměrné délce zadání úloh. Slabí žáci obou tříd se liší v typu kroků, typu matematického modelu a použití reálných čísel, a v průměrné délce zadání úloh.

[43] Způsob rozdělení do skupin je uveden v kapitole 10.2.2, písemná práce a její výsledky v Příloze 3.

Kapitola 11. Závěr a diskuse

V závěrečné části práce se zaměříme na shrnutí a interpretaci výsledků výzkumu z hlediska zadání výzkumné situace, analýzy tvorby úloh, matematické kultury při tvoření slovních úloh a souvislosti mezi tvorbou a řešením úloh. Dále také naznačíme některé možnosti pro navazující výzkum**.**

11.1 Výzkumná situace

Experiment byl zadán žákům na konci školního roku, na konci 2. ročníku šestiletého gymnázia, po napsání srovnávací písemné práce shrnující základní učivo z matematiky za poslední dva roky studia. Tento termín jsme zvolili proto, aby žáci měli k dispozici maximální možný repertoár poznatků týkajících se matematických modelů, které se objevují v matematice na základní škole. V každé ze tříd se experimentu zúčastnil jiný počet žáků (28 žáků z 30 ve třídě 2 a 18 žáků z 30 ve třídě 3). Výsledky srovnávací písemné práce ukazují rozdíl mezi oběma třídami ve schopnosti řešit úlohy. Třída 2 dosáhla lepších výsledků než třída 3 (viz příloha 3) a nejlepší žáci třídy 3 by ve třídě 2 patřili mezi průměrné žáky. Tyto skutečnosti je třeba vzít v úvahu při interpretaci výsledků výzkumu, zejména při porovnání obou tříd a při charakteristice úloh vytvořených žáky třídy 3 a její obecné interpretaci. Celkový počet účastníků experimentu (46 žáků ve 2 třídách) nepovažujeme za dostatečný pro zobecnění závěrů na další jednotlivce nebo třídy, na druhou stranu celkový počet 168 vytvořených úloh považujeme za dostatečný pro možnost identifikace některých tendencí a společných znaků vytvořených úloh.

Realizace experimentu proběhla ve dvou třídách, které měly obdobnou historii. Obě třídy absolvovaly 2 roky výuky podle stejného vzdělávacího programu. Před realizací předexperimentu a experimentu jsme se domnívali, že 2 společné roky budou dostačující pro harmonizaci vstupních podmínek a pro možnost porovnání tvorby úloh v obou třídách. Analýza vytvořených úloh ale ukázala, že velké množství úloh bylo založeno na matematických modelech a poznatcích pocházejících z dřívějších let, kdy žáci navštěvovali různé základní školy nebo víceletá gymnázia. Přestože tato výchozí situace je pro obě třídy stejná, je třeba tuto skutečnost vzít v úvahu při interpretaci shodných znaků vytvořených úloh jako znaků matematické kultury dané třídy, protože jejich zdrojem nemusí být nutně výuka v posledních dvou letech, ale předchozí znalosti získané v rámci jiných tříd. Tato myšlenka zároveň ukazuje možné obtíže při snaze o využití žákovské tvorby úloh pro charakteristiku matematické kultury dané třídy, protože je obtížné identifikovat všechny skutečnosti, které tvorbu úloh ovlivňují. Skutečnost, že žáci téměř nepoužili poznatky z posledních let, může také ukazovat buď na určité zpoždění schopnosti tvořit úlohy oproti schopnosti úlohy řešit, nebo na fakt, že během posledních dvou let studia neměli žáci inspiraci pro tvorbu úloh v rámci těchto situací.

Obě situace jsme vybrali tak, aby byly dostatečně inspirativní pro tvorbu úloh, navzájem co nejvíc odlišné, a aby bylo možné na jejich základě vytvořit úlohy odpovídající předpokládaným běžným matematickým modelům. Analýza předexperimentu a experimentu potvrdila očekávaný potenciál těchto situací pro tvorbu různorodých úloh. Přestože měli žáci v zadání explicitně uvedeno, že mají vytvořit vždy snadnou a obtížnou úlohu pro svoje spolužáky, neudělali to vždy. Podle naší zkušenosti vytvořili žáci často druhou úlohu jako obtížnější, ale ne obtížnou pro svoje spolužáky. Část úloh odpovídá spíše matematickým modelům, které mají (by měli) žáci mít dávno osvojené (výpočet obsahu čtverce apod.). Nová látka se ve vytvořených úlohách vyskytla jen v malém množství úloh (např. jednoduchý nebo složený úrok u třídy 2). Domníváme se, že zadání experimentu nenavedlo dostatečně žáky k tomu, aby vytvářeli úlohy cíleně pro své spolužáky. Část vytvořených úloh by mohla být zadána i mladším žákům, některé dokonce i na 1. stupni.

Zařazení tvorby snadné a obtížné úlohy k dané situaci bylo motivováno snahou přimět žáky k použití širšího repertoáru poznatků než v případě, kdy bychom je nechali tvořit pouze jednu úlohu. Tato myšlenka se ukázala jako správná, protože v obtížných úlohách jsme celkově identifikovali víc matematických modelů než ve snadných úlohách.

Na druhou stranu se domníváme, že spíš než pro spolužáky tvořili žáci úlohy snadné a obtížné pro ně samé. Jelikož žáci nebyli v posledních dvou letech studia nijak připravováni na tvorbu úloh, jsme přesvědčeni o tom, že jejich úlohy vycházejí zejména z jejich zkušenosti s řešením úloh. Zejména snadné úlohy jsou v mnoha případech řešitelné jednoduchou úvahou a postup jejich řešení (a často i samotné řešení) je patrný na první pohled.

Naším cílem nebylo ověřit skutečnost, zda je obtížná úloha reálně obtížná pro spolužáky. Z tohoto důvodu jsme nezadali vytvořené úlohy k vyřešení jiným žákům stejné věkové kategorie a při našich úvahách o reálné obtížnosti vytvořených úloh se opíráme o naši zkušenost s výukou matematiky na nižším stupni víceletých gymnázií a výzkumy týkající se matematické kultury žáků 2. stupně ZŠ při řešení úloh, které jsme realizovali v letech 2008 – 2010. Pokud by cílem výzkumu bylo zkoumat schopnost žáků vytvořit obtížné úlohy nebo diagnostikovat dovednosti obtížné pro žáky, bylo by možné např. připravit situaci, kde budou žáci tvořit 3 úlohy - jednu zcela snadnou, kterou podle jejich názoru vyřeší každý, jednu obtížnou, kterou vyřeší jen nejlepší žáci, a jednu takovou, kterou nevyřeší nikdo. Kontext takové situace by měl odpovídat kontextu, ve kterém se žáci setkali se zkoumanými dovednostmi. Pro provedení analýzy našeho experimentu nebylo třeba mít k dispozici žákovská řešení úloh.

Výzkumná situace tedy splnila svůj účel v tom, že nám umožnila získat dostatečné množství různorodých úloh, jejichž matematické modely vycházejí z mnoha oblastí matematiky na základní škole. Analýza těchto úloh na základě námi vytvořeného pojetí matematické kultury při tvoření úloh umožnila popsat společné a rozdílné znaky úloh vytvořených jednotlivcem, skupinou nebo třídou a ověřit tento přístup na konkrétní výzkumné situaci.

11.2 Žákovská tvorba slovních úloh a její analýza

Zatímco příprava experimentální situace a její analýza a priori nebyla obtížná, hledání vhodného nástroje pro analýzu vytvořených úloh se ukázalo jako velmi obtížné. Naše původní představa o způsobu analýzy vytvořených úloh vycházela z výzkumů založených na analýze úloh pomocí strukturálních proměnných popsaných v kapitole 1.5. Tyto způsoby se ale v našem případě ukázaly jako nedostatečné a nevhodné. Jejich použití je vhodné a účinné v uzavřených situacích tvorby úloh, kde jsou jasně dané podmínky pro tvorbu úloh. Úlohy vytvořené v rámci těchto situací měly omezený malý počet matematických modelů a dalších parametrů. Z tohoto důvodu jsme zařadili do této práce podrobný popis našeho způsobu analýzy předexperimentu, abychom ukázali obtíže, které jsme měli při snaze o analýzu vytvořených úloh pouze pomocí strukturálních proměnných. Při definování strukturálních proměnných a jejich použití při analýze vytvořených úloh jsme narazili zejména na následující obtíže:

1. nemožnost popsat všechny vytvořené úlohy pomocí daných proměnných,
2. nekonkrétnost a neměřitelnost některých proměnných,
3. vzájemná souvislost proměnných,
4. nízká informační hodnota výstupů.

Pomocí strukturálních proměnných jsme tedy nedokázali uspokojivě popsat úlohy, které byly vytvořeny v rámci otevřené situace. Otevřenost naší experimentální situace nás přiměla k vytvoření vlastního způsobu analýzy vytvořených úloh, který vychází z námi definovaného pojetí matematické kultury při tvoření úloh (viz kapitola 8) a jeho konkretizaci do vlastností a proměnných použitých při analýze vytvořených úloh (viz kapitoly 9 a 10). Tento způsob analýzy úloh je kombinací strukturálního přístupu a kvalitativního posouzení vytvořených úloh a představuje jeden z významných výstupů této práce. Domníváme se, že každá situace tvorby úloh vyžaduje zvláštní přístup vycházející z konkrétních okolností situace, a to zejména z pohledu otevřenosti situace tvorby úloh a repertoáru poznatků, které mají autoři úloh k dispozici.

Náš způsob analýzy nám umožnil popsat vytvořené úlohy (viz kapitola 10.5.1) tak, abychom mohli interpretovat charakteristické znaky úloh z pohledu matematické kultury při tvoření úloh. Jsme si zároveň vědomi některých možných rizik našeho pojetí (zejména subjektivita nebo obtížná měřitelnost), jsme ale přesvědčeni, že při komplexním hodnocení jakékoli tvořivé činnosti je jen velmi obtížné využít pouze objektivní kritéria hodnocení. Hodnocení úloh z hlediska kvality poskytuje informace o relevantnosti a kvalitě vytvořených úloh, ale zároveň vykazuje vysokou míru subjektivity. Zejména kritérium zajímavosti úloh a poskytnutí nových informací o situaci lze vyhodnotit jen s vysokou mírou subjektivity. Také stanovení netriviálních matematických poznatků by bylo možné objektivizovat, např. prostřednictvím dotazníku, ve kterém by žáci seřadili dané poznatky podle míry snadnosti jejich použití.

Při analýze úloh z hlediska matematického modelu se jako kritérium s nejvyšší mírou subjektivity jeví stanovení počtu a typu kroků nutných k vyřešení úlohy. Jsme si vědomi toho, že většinu úloh lze řešit více způsoby, a že námi vybraný způsob nemusí vždy odpovídat tomu, který by si vybrali žáci. Všechna kritéria analýzy úloh z hlediska řešitele (řešitelnost, počet úkolů, počet řešení, kontext a délka zadání) považujeme za objektivní nástroje pro popis úloh. Délku zadání a počet úkolů jsme stanovili na základě zadání úlohy, řešitelnost a počet řešení jsme stanovili po vyřešení úlohy. Rozlišení kontextu na čistě matematický a reálný kontext je také zřejmý, obtíže by mohly nastat při snaze rozlišit např. kontext blízký a vzdálený řešiteli.

11.3 Matematická kultura při tvoření slovních úloh

Jedním z hlavních cílů této práce bylo vytvoření pojetí matematické kultury při tvoření slovních úloh. Tento cíl práce byl splněn a toto pojetí je podrobně popsáno v kapitole 8. Na základě výsledků analýzy experimentů můžeme konstatovat, že toto pojetí je relevantní v naší situaci tvorby úloh, protože poskytuje všechny potřebné informace o vytvořených úlohách.

V našem výzkumu jsme stanovili následující hypotézy týkající se matematické kultury při tvoření slovních úloh (viz kapitola 7):

1. Existuje žákovská kultura jednotlivce při tvoření slovních úloh, která souvisí s matematickou úrovní jednotlivce a projevuje se kvalitou vytvořených úloh.
2. Existuje žákovská kultura skupiny při tvoření slovních úloh, která se projevuje shodnými znaky vytvořených úloh v rámci určité skupiny žáků.

Před diskusí k těmto hypotézám je třeba zmínit, že všechny závěry se vztahují k naší konkrétní situaci tvorby úloh a skupině žáků. Jejich zobecnění nebo aplikace na jiné situace tvorby úloh není samozřejmé. Na druhou stranu jsme vytvořili nástroj pro popis vytvořených úloh, který je možné zcela nebo částečně použít v dalších situacích tvorby úloh. Použití objektivních charakteristik vytvořených úloh (např. počet úkolů k vyřešení, délka zadání) je doplněno charakteristikami s vyšší mírou subjektivity (např. zajímavost úlohy, počet kroků při řešení úlohy), čímž poskytuje ucelenější informace o vytvořených úlohách než např. analýza zaměřená pouze na strukturální proměnné.

První hypotéza se týká žákovské kultury jednotlivce při tvoření slovních úloh. Na tuto kulturu nahlížíme za dvou úhlů pohledu - hledisko charakteristiky úloh vytvořených jednotlivcem a hledisko individuálních zvláštností úloh vytvořených jednotlivcem v rámci skupiny úloh vytvořených v rámci dané situace.

Charakteristika úloh vytvořených jednotlivcem umožňuje odpovědět na otázku, jakou úlohu žák vytvořil. Hodnocení kvality popisuje, zda byl žák v dané situaci schopen splnit zadání a jím vytvořená úloha odpovídá stanoveným kritériím kvality. Popis matematického modelu úlohy a popis úlohy z hlediska řešitele potom poskytuje detailní informace o úlohách samotných, které lze využít jako podklad k další analýze úloh. Některé charakteristiky, jako např. kontext, délka zadání nebo počet kroků nutných k vyřešení, naznačují možné obtíže při řešení úloh.

Charakteristiky úloh, které se objevují pouze u jednotlivých úloh nebo autorů, poskytují informaci o originalitě úloh vytvořených jednotlivcem v rámci dané skupiny úloh. V rámci každé situace tvorby úloh se objevily matematické modely, které se buď vyskytly pouze v jedné úloze, nebo více úlohách vytvořených jedním žákem. Jelikož se tyto modely neobjevily v jiných úlohách, lze je považovat za charakteristický znak kultury jednotlivce. Jedná se o poznatky, které byly použity pouze konkrétním jednotlivcem. V jiné situaci tvorby úloh by ale tento znak nemusel charakterizovat jednotlivce, ale celou skupinu, pokud by se daný model objevil v dostatečném množství úloh.

Shrneme-li oba právě uvedené úhly pohledu, můžeme považovat hypotézu o existenci žákovské kultury jednotlivce při tvoření úloh za potvrzenou. Tato kultura se projevila v kvalitě vytvořených úloh v tom, že většina jednotlivců byla schopna vytvořit matematickou úlohu odpovídající zadání situace, a zároveň pestrostí vytvořených úloh vytvořených zejména v rámci situace 1. Jejím dalším projevem jsou individuální zvláštnosti jednotlivých úloh projevující se např. ve způsobu popisu situace, využití obrázku při zadání úlohy, nebo také využitím matematického modelu, který se v ostatních úlohách nevyskytuje.

Analýza vytvořených úloh potvrdila také existenci žákovské kultury skupiny při tvoření úloh, která se projevila shodnými znaky vytvořených úloh. Na základě výsledků analýzy úloh můžeme konstatovat, že schopnost vytvořit smysluplnou matematickou úlohu relevantní v dané situaci je charakteristickým znakem dané skupiny žáků. Výsledky analýzy ukázaly také některé shodné znaky úloh vytvořených žáky jednotlivých tříd (viz kapitola 10.5.4).

Navazující výzkum by mohl vycházet z analýzy vytvořených úloh a zaměřit se na stanovení příčin rozdílů mezi oběma třídami. Domníváme se, že tyto rozdíly mohou souviset buď s různým pojetím výuky matematiky v daných třídách, nebo se schopností žáků řešit úlohy (úrovní v matematice), případně mohou být kombinací obou těchto příčin. Pro studium vlivu způsobu výuky matematiky by bylo vhodné najít dvě třídy, které mají stejnou úroveň v matematice a zároveň vykazují rozdíly v tvorbě úloh. Bylo by také třeba provést důkladnou analýzu výuky matematiky v dané třídě založenou mj. na dlouhodobém pozorování a komunikaci s učitelem a žáky. Navíc by bylo vhodné vybrat takovou třídu, která má po dlouhou dobu stejného učitele matematiky a stabilní kolektiv žáků, aby byly omezeny další okolnosti, které mohou ovlivňovat schopnost žáků tvořit úlohy.

Přestože nebylo cílem našeho výzkumu analyzovat pojetí výuky v daných třídách, osobní kontakt autora práce s učiteli matematiky v těchto třídách umožňuje vyslovit domněnku, že způsob výuky učitele a jeho pojetí matematiky může mít vliv na tvorbu úloh, protože některé charakteristiky vytvořených úloh odpovídají předpokládanému pojetí výuky matematiky jednotlivých učitelů. Jako příklad uvádíme, že vyučující třídy 2 klade velký důraz na geometrii a konstrukční úlohy (kromě matematiky učí také deskriptivní geometrii), a při řešení úloh vytvořených třídou 2 bylo třeba častěji využít konstrukci.

Nástroj pro analýzu vytvořených úloh popsaný v kapitole 8 by bylo také možné použít pro zkoumání vlivu úrovně žáků v matematice na tvorbu úloh. V našem výzkumu počty žáků ve skupinách dobrých, průměrných a slabých žáků neumožňují udělat obecné závěry. Na základě porovnání kvality vytvořených úloh žáky těchto skupin můžeme pouze formulovat hypotézu, že kvalita vytvořených úloh klesá spolu s úrovní žáků v matematice hodnocené prostřednictvím schopnosti řešit úlohy.

Na závěr uvádíme zamyšlení nad vhodností obou situací tvorby úloh pro zkoumání matematické kultury při tvoření úloh. První situace byla pro žáky nestandardní a žáci v ní vytvořili mnohem pestřejší úlohy. Z tohoto důvodu se nám tato situace jeví vhodnější pro zkoumání rozdílů mezi jednotlivci. O existenci kultury skupin může spíš vypovídat druhá „učebnicová“ situace, se kterou se žáci téměř jistě setkali. Pokud se s takovou situací ve třídách dostatečně pracovalo, měly by úlohy vytvořené žáky dané třídy ukazovat charakteristické rysy žákovské kultury a také učitelova pojetí výuky. Je ale možné, že by se tyto společné rysy spíše projevily při řešení úloh.

11.4 Souvislost mezi tvorbou a řešením úloh

Jednou z inspirací pro náš výzkum byly některé výzkumy (viz kapitola 1.6.1), které naznačily možnou souvislost mezi tvorbou a řešením úloh.

Při zadání experimentu byli žáci informováni o tom, že vytvořené úlohy nemusí řešit ani umět vyřešit. Tento přístup jsme zvolili proto, že se domníváme, že jakýkoli náznak toho, že by autoři úloh měli někdy své úlohy umět vyřešit, by měl za následek větší vliv schopnosti autorů řešit úlohy na vytvořené úlohy. Obdobně kdyby tvoření úloh bylo součástí nějaké písemné práce ve škole, autoři úloh by byli opatrnější zejména při tvorbě obtížné úlohy. Pokud by součástí experimentu byla zároveň tvorba úloh a jejich řešení, jednalo by se podle našeho názoru téměř výhradně o výzkum schopnosti řešit úlohy, role tvorby úloh by v takové situaci byla pouze formální. Náš přístup umožnil žákům tvořit úlohy, aniž by byli omezeni vlastní schopností úlohy řešit. Žáci tak měli mnohem větší prostor pro využití poznatků, které sice nemusí být schopni použít při řešení úloh, ale které na druhou stranu považují za relevantní v dané situaci.

Analýza vytvořených úloh ukázala, že zejména v případě otevřené situace, která méně vede žáky k použití „učebnicových“ matematických modelů, tvoří žáci úlohy řešitelné pomocí starších, zřejmě i lépe upevněných poznatků. Toto může ukazovat na určitý rozdíl v aktuální schopnosti tvořit úlohy oproti schopnosti úlohy řešit. Je-li tomu tak, není možné ze schopnosti žáků tvořit úlohy vyvozovat závěry ohledně jejich schopnosti řešit úlohy. Naproti tomu v případě žákům lépe známé situace, v jejímž rámci tvořili žáci často klasické úlohy na vztah celku a částí, byly používány poznatky, které zřejmě byly na obdobných situacích procvičovány.

V tomto vidíme potenciál situací založených na tvorbě úloh pro zjišťování, které matematické modely a které postupy řešení žáci považují za snadné a obtížné. Navíc lze v takové situaci identifikovat matematické modely, které se oproti očekávání ve vytvořených úlohách neobjevují, a lze zkoumat důvody, proč je žáci při tvorbě úloh vynechali. Jako příklad můžeme uvést úlohy založené na vztahu části a celku, které lze vyřešit pomocí soustavy rovnic. Ačkoli bývají často zařazeny v situacích s obdobným kontextem, ve vytvořených úlohách se nevyskytly.

Žáci používali většinou starší a lépe upevněné matematické modely. Široké spektrum těchto modelů a schopnost využívat tyto modely se tak ukazuje jako jedna z klíčových dovedností, kterou by žáci měli mít, aby mohli tvořit úlohy v dané situaci. Jelikož žáci velmi málo používali nové matematické modely, domníváme se, že tvorba úloh ani řešení úloh nemusí samostatně vypovídat o úrovni porozumění studentů určitému matematickému tématu nebo typu úloh. Obě tyto cesty (tvorba a řešení úloh) by se měly navzájem doplňovat a rozvíjení obou dovedností by mělo být součástí výuky matematiky. V souladu s myšlenkami uvedenými v úvodu této práce se domníváme, že ověřování znalostí na základě pouhé schopnosti řešení úloh znamená redukování (školské) matematiky na výuku postupů řešení úloh a ověřování jejich osvojení. Tím se ze školské matematiky stává uzavřený kruh, který je založen a zaměřen na používání určitých postupů, které se žáci často naučí nazpaměť. Tvorba úloh může žákům pomoct k pochopení způsobu, jakým matematické úlohy vznikají, rozvíjet jejich schopnost matematické úlohy vytvářet a vidět v těchto úlohách a situacích matematické zákonitosti.

11.5 Shrnutí

Výzkum matematické kultury při tvoření slovních úloh prokázal existenci matematické kultury jednotlivce a skupiny při tvoření úloh, která má své specifické charakteristiky a projevuje se shodnými a rozdílnými znaky vytvořených úloh. Výzkum také naznačil potenciál aktivit spojených s tvorbou úloh pro zkoumání schopnosti žáků řešit úlohy. Výzkum také naznačil možnost využití těchto aktivit jako diagnostického nástroje pro zkoumání žákovského porozumění matematice.

Jedním z hlavních přínosů této práce je zavedení pojetí matematické kultury při tvoření slovních úloh, jeho interpretace do konkrétních charakteristik vytvořených úloh a ověření tohoto nástroje v konkrétní situaci tvorby úloh. Navazující výzkum by mohl využít toto pojetí pro bližší zkoumání souvislostí mezi tvorbou a řešením úloh nebo mezi tvorbou úloh a způsobem výuky matematiky v dané třídě. Další možnost pro navazující výzkum představuje zkoumání vzájemných vztahů mezi jednotlivými charakteristikami kultury při tvoření úloh, jako např. souvislost kvality komplexnosti vytvořených úloh.

Práce je jedním z výstupů projektu Grantové agentury Univerzity Karlovy (číslo projektu 310 311) a součástí výzkumu v rámci projektu Grantové agentury České republiky (číslo projektu P407/12/1939).

Literatura

BONOTTO, Cinzia. Extending students' understanding of decimal numbers via realistic mathematical modeling and problem posing. In: NOVOTNÁ, Jarmila, Hana MORAOVÁ, Magdaléna KRÁTKÁ a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Proceedings of the 30th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Prague: Charles University in Prague, Faculty of Education, 2006, s. 33 – 40. ISSN 0771-100x.

BROUSSEAU, Guy a Bernard SARRAZY. Glossaire de de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. [online] Dostupný z http://guy – brousseau.com/wp – content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf .

BROUSSEAU, Guy. *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970 – 1990).* Textes rassemblés et préparés par Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland, Virginia Warfield. Grenoble: La pensée sauvage, 1998, 395 s. ISBN 2-859-19-131-3.

BROUSSEAU, Guy. *Úvod do teorie didaktických situací.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2012, 106 s., ISBN 978-80-7290-600-0.

BROUSSEAU, Guy a Jarmila NOVOTNÁ. (2008). La culture scolaire des problèmes de mathématiques. In: SARRAZY, Bernard. *Les didactiques et leurs rapports à l' enseignement et à la formation. Quel statut épistémologique de leurs modèles et de leurs résultats* ? Bordeaux : AFIRSE, IUFM d'Aquitaine – Université Montesquieu Bordeaux IV, LACES – Université Victor Segalen Bordeaux 2. [CD ROM]

BROWN, Stephen I. a Marion I. WALTER. *The Art of problem posing*. Philadelphia, Pa.: Franklin Institute Press, 1983, 147 s. ISBN 08-916-8052-7.

CAMENSISCH, Annie a Serge PETIT. Lire et écrire des énoncés de problèmes. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*. 2005, č. 456. ISSN 0240-5709.

DALÍK, Josef. Numerické metody. In: *Multimediální podpora studia matematiky a deskriptivní geometrie na Fakultě stavební VUT v Brně.* [online] [Cit. 3.1.2009] Dostupný z WWW: http://math.fce.vutbr.cz/vyuka/

CHRISTOU, Constantinos, Nicolas MOUSOULIDES, Marios PITTALIS a Demetra PITTA – PANTAZI. Problem Solving and Problem Posing in a Dynamic Geometry Environment. *The Montana Mathematics Enthusiast*. 2005a, roč. 2, č. 2, s. 125 – 143. ISSN 1551-3440.

CHRISTOU, Constantinos, Nicolas MOUSOULIDES, Marios PITTALIS, Demetra PITTA – PANTAZI a Bharath SRIRAMAN. An empirical taxonomy of problem posing processes. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 2005b, roč. 37, č. 3, s. 149 – 155. ISSN 0044-4103.

CRESPO, Sandra. Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*. 2003, č. 52, s. 243 – 270. ISSN 0013 -1954.

Education Development Center, Inc. Problem Posing. Making Mathematics [online]. [Cit. 27.prosince 2008]. Dostupný z WWW: <http://www2.edc.org/makingmath/handbook/Teacher/ProblemPosing/ProblemPosing.asp>

DOMORADZKI, Stanislaw. *The Growth of Mathematical Culture in the Lvov Area in the Autonomy Period (1870–1920).* History of Mathematics, volume 47.Prague: Charles University, University of Rzeszów, Matfyzpress,2011, 331 s. ISBN 978-80-7378-178-1.

ELLERTON, Nerida F. Children's made-up mathematics problems – a new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*. 1986, č. 17, s. 261 – 271. ISSN 0013-1954.

ENGLISH, Lyn D. Children’s Problem Posing Within Formal and Informal Contexts. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1998, roč. 29, č. 1, s. 83 – 106. ISSN 0021-8251.

FAYOL, Michel, Hervé ABDI a Jean – Emile GOMBERT. Arithmetic Problem Formulation and Working Memory Load. *Cognition and Instruction*. 1987, roč. 4, č. 3, s. 187 – 202. ISSN 0737-0008.

FREUDENTHAL, Hans. *Didactical Phenomenology od Mathematical Structures*. S.l.: Springer, 1986. ISBN 90-277-2261-7.

GONZALES, Nancy A. Problem Formulation: Insights from Student Generated Questions. *School, Science and Mathematics*. 1996, roč. 96, č. 3, s. 152 – 157. ISSN 0036-6803.

HEJNÝ, Milan. Anatómia slovnej úlohy o veku. In Sborník příspěvků konference Matematika v škole dnes a zajtra [online]. [Cit. 30.10.2008] Dostupný z WWW: http://pf.ku.sk/katedry/kmat/data/konferenciasub/prispevky2003.html

HOŠPESOVÁ, Alena, František KUŘINA, Jana CACHOVÁ, Jana MACHÁČKOVÁ, Filip ROUBÍČEK, Marie TICHÁ a Jiří VANÍČEK. Matematická gramotnost a vyučování matematice. Vyd. 1. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, 2011, 231 s. ISBN 978-80-7394-259-5.

CHAPMAN, Olive. Classroom practices for context of mathematic word problems. *Educational Studies in Mathematics*. 2006, roč. 62, s. 211 – 230. ISSN 0013-1954.

IREM de Grenoble. Quel est l'âge du capitaine? *Grand N*. Grenoble: IREM, 1979, č. 19, s. 63 – 70. ISSN 2259-8081.

KANE, Robert B. The Readability of Mathematical English. *Journal of Research in Science Teaching*. 1967, č. 5, s. 296 – 298. ISSN 1098-2736.

KILPATRICK, Jeremy. Problem formulating: where do the good problems come from? In: SCHOENFELD, Alan H. *Cognitive science and mathematics education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1987, s. 123 – 147. ISBN 978-08-98597-9-12.

KOMAN, Milan a Marie TICHÁ. On travelling together and sharing expenses (Examples of investigation of situations). *Teaching Mathematics and its Applications*. 1998, roč. 17, č. 3, s. 117 – 122. ISSN 0268-3679.

KOPKA, Jan. Problem Posing and Learning of Mathematics. In: *Didactics of Mathematics, Proceedings of the Seminar of Doctoral Students.* 1996, Praha: KMDM PedF UK, s. 13 – 15.

KOPKA, Jan. *Hrozny problémů ve školské matematice*. Vyd. 1. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně, 1999, 194 s. Acta Universitatis Purkynianae. ISBN 80-704-4247-6.

KUŘINA, František. Vyučování matematice a modely. *Matematika a fyzika ve škole.* 1978, roč. 8, č. 9, s. 641 – 650, 725 – 735.

KUŘINA, František. Matematická kultura a vyučování matematice. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2010, roč. 55, č. 3, s. 243 – 255. ISSN 0032-2423. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/141963

LAPARRA, Marceline a Claire MARGOLINAS. Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l`analyse de l`enseignement. *Pratiques*.2010, č.145/146, s.141 – 160. ISSN 0338-2389.

LEUNG, Shukkwan S. Mathematical Problem Posing: The influence of task formats, mathematics knowledge, and creative thinking. In: HIRABAYSHI, I., N. NOHDA, K. SHIGEMATSU a F.–L. LIN. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Tokyo: University of Tsukuba, 1993, s. 33 – 40.

LEUNG, Shukkwan S. On the Role of Creative Thinking in Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 1997, roč. 29, č. 3, s. 81 – 85. ISSN 0044-4103.

LEUNG, Shukkwan S. a Edward A. SILVER. The Role of Task Format, Mathematics Knowledge, and Creative Thinking on the Arithmetic Problem Posing of Prospective Elementary School Teachers. *Mathematics Education Research Journal*. 1997, roč. 9, č. 1, s. 5 – 24. ISSN 1033-2170.

LEVINE, John M., Richard L. MORELAND. Culture and socialization in work groups. In: RESNICK, Lauren B., John M. LEVINE a Stephanie D. TEASLEY. *Perspectives on socially shared cognition*. Washington: American Psychological Association, 1991, s. 257 – 279. ISBN 978-15-57983-7-63.

LIN, Pi-Jen. Supporting Teachers on Designing Problem – Posing Tasks as a Tool of Assessment to Understand Students‘ Mathematical Learning. In: HOINES, M.J. a A.B. FUGLESTAD. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen: Bergen University College, 2004, s. 257 – 264. ISSN 0771-100X.

MACHÁČKOVÁ, Jana a Marie TICHÁ. Assessment of knowledge and conceptions through problem posing: The case of fractions. In: NOVOTNÁ, Jarmila *SEMT'07 International Symposium Elementary Maths Teaching.* Prague: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007, s. 178 – 186. ISBN 80-7290-307-8.

Modèle mathématique. *Wikipedia* [online]. 2013 [cit. 2013 – 08 – 06]. Dostupné z: https://fr.wikipedia.org/wiki/Modele_mathematique

NESHER, Pearla. Three determinants of difficulty in verbal arithmetic problems. *Educational studies in mathematics*. 1976, č. 7, s. 369 – 388. ISSN 0013-1954.

NESHER, Pearla, HERSKOVITZ, Sara a Jarmila NOVOTNÁ. Situation Model, Text Base and What Else? Factors Affecting Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics.* 2003, č. 52, s. 151 – 176. ISSN 0013-1954.

NOVÁKOVÁ, Hana. *Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku*. Praha, 2013. Dizertační práce. Univerzita Karlova: Pedagogická fakulta.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2000, 123 s. ISBN 80-729-0011-0.

NOVOTNÁ, Jarmila. Contribution à l'étude de la culture scolaire. Cas de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. In: *Proceedings of CIEAEM 61*. Palermo: Univerzita Palermo, 2009, s. 19 – 31. ISSN 1592 – 4424. Dostupné z: http://www.cieaem.org/?q=node/32

NOVOTNÁ, Jarmila, Guy BROUSSEAU, Jiří BUREŠ a Hana NOVÁKOVÁ. From changing students' "culture of problems" towards teacher change. KOVÁČOVÁ Monika (Ed.), APLIMAT 2012, Bratislava: Faculty of Mechanical Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, s. 763 – 774. ISBN 978-80-89313-58-7.

NOVOTNÁ, Jarmila. a Bernard SARRAZY. Model of a professor's didactical action in mathematics education. Professor's variability and students' algorithmic flexibility in solving arithmetical problem. In BOSCH, Marianna. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Barcelona: FundEmi IQS, 2005, s. 696 – 705.

PEHKONEN, Erki. Using open – ended problems in mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 1995, roč. 27, č. 2, s. 55 – 57. ISSN: 0044-4103.

PITTALIS, Marios, Constantinos CHRISTOU, Nicolas MOUSOULIDES a Demetra PITTA – PANTAZI. A Structural Model for Problem Posing. In: HOINES, M. J. a A. B. FUGLESTAD. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen: Bergen University College, 2004, s. 49 – 56. ISSN 0771-100X.

SARRAZY, Bernard. Sens et situations : une mise en question de l'enseignement des stratégies méta – cognitives en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 1997, roč.17, č. 2, s. 135 – 166. ISSN 0246-9367.

SARRAZY, Bernard. Effects of variability of teaching on responsiveness to the didactic contract in arithmetic problem – solving among pupils of 9 – 10 years. *European Journal of Psychology of Education*. 2002, roč. XVII. č. 4, s. 321 – 341. ISSN 0256-2928.

SEARLE, Barbara W., Paul LORTON a Patrick SUPPES. Structural variables affecting CAI performance on arithmetic word problems of disadvantaged and deaf students. *Educational studies in mathematics*. 1974, roč. 5, s. 371 – 384. ISSN 0013-1954.

SEEGER, Falk, Jörg VOIGT a Ute WASCHESCIO. *The Culture of the Mathematics Classroom*. New York: Cambridge University Press, 1998, viii, 404 p. ISBN 05-215-7798-5.

SEMADENI, Zbigniew. Developing Children´s Understanding of Verbal Arithmetical Problems. In: HEJNÝ, Milan a Jarmila NOVOTNÁ. *Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching*. Prague: Faculty of Education, Charles University, 1995, s. 27-32.

SILVER, Edward A. On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*. 1994, roč. 14, č. 1, s. 19 – 27. ISSN 0228-0671.

SILVER, Edward A. The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 1995, roč. 27, č. 2, s. 67 – 72. ISSN 0044-4103.

SILVER Edward A., MAMONA – DOWNS, Johanna, LEUNG, Shukkwan S. a Patricia A. KENNEY. Posing mathematical problems: an exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1996, roč. 27, č. 3, s. 293 – 309. ISSN 0021-8251.

SILVER, Edward A. Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 1997, roč. 29, č. 3, s. 73 – 79. ISSN 0044-4103.

SILVER, Edward A. a Jinfa CAI. Assessing Students‘ Mathematical Problem Posing. *Teaching Children Mathematics*. 2005, roč. 12, č. 3, s. 129 – 135. ISSN 1073-5836.

SILVER, Edward A.; MAMONA – DOWNS, J.; LEUNG, S.S.; KENNEY, P.A. (1996) Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, no. 3, s. 293 – 309. ISSN 0021-8251.

STAUB, Fritz C. Mathematical classroom cultures: Methodological and theoretical issues. *International Journal of Educational Research*. 2007, č. 46, s. 319 – 326. ISSN 0883-0355.

STEHLÍKOVÁ, Naďa. Charakteristika kultury vyučování matematice. In HOŠPESOVÁ, Alena, TICHÁ, Marie a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. České Budějovice : Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 13 – 47. ISBN 978-80-7394-052-2.

STOYANOVA, Elena. Empowering students‘ problem solving via problem posing: the art of framing „good“ questions. *Australian Mathematics Teacher*. 2000, roč. 56, č. 1, s. 33 – 37. ISSN 0045-0685.

SUPPES, Patrick, Elisabeth F. LOFTUS a Max JERMAN. Problem Solving on a Computer – based Teletype. *Educational studies in mathematics*. 1969, roč. 2, s. 1 – 15. ISSN 0013-1954.

TAO, Terence. Co je dobrá matematika? Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2008, roč.53, č.1, s. 22 – 35. ISSN 0032-2423.

TICHÁ, Marie. Tvoření úloh jako jedna z cest rozvíjení profesní kompetence učitelů. In: UHLÍŘOVÁ, Martina. *Mathematica VI, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis.* Olomouc: Pedagogická fakulta Paedagogica, 2008, s. 264 – 268. ISBN 978-80-244-1963-3.

VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. In: BRUN, Jean *Didactique des Mathématiques*. Delachaux et Niestlé. Lausanne, 1996, 283 s. ISBN 2-603-01030-1

VERSCHAFFEL, Lieven, Brian GREER a Erik de CORTE. *Making sense of word problems.* Exton, PA: Swets & Zeitlinger B.V, 2000, xvii, 203 s. ISBN 90-265-1628-2.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. 2.vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972. ISBN 14-578-72.

ZHOUF, Jaroslav. Tvorba matematických problémů pro talentované žáky. Univerzita Karlova v Praze: Pedagogická fakulta, 2010, 299 s. ISBN 978-80-7290-432-7.

Publikace autora související s tématem disertační práce:

BUREŠ, Jiří. Le phénomène de la dévolution dans les situations didactiques de création d'énoncés de problèmes. *Actes des Doctoriales 2010*. Université de Genève.

BUREŠ, Jiří. Žákovská tvorba úloh na základě reálné situace (analýza variability vytvořených úloh). In LENGYELFALUSY, Tomáš, PITOŇÁKOVÁ, Slávka, HORVÁTH, Peter, (eds.) Cielom vyučovania matematiky je šťastný človek. Žilina: Žilinská univerzita, 2011, s. 245 – 250. ISBN 978-80-554-0393-9.

BUREŠ, Jiří. Obtížnost slovních úloh z pohledu žáků. In AUSBERGEROVÁ, Marie, BASTL Bohumír, LÁVIČKA, Miroslav (eds.) *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*. Plzeň: Vydavatelský servis, 2011, s. 35 – 38. ISBN 978-80-86843-38-4 (CD – ROM).

BUREŠ, Jiří. Tvorba slovních úloh – žákovské interpretace obrázku. In VONDROVÁ, Naďa (ed.) *Dva dny s didaktikou matematiky 2012, sborník příspěvků.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, s. 75 – 78. ISBN 978 – 80 – 7290 – 604 – 8 (CD ROM verze).

BUREŠ, Jiří a Pierre CLANCHÉ. Problem posing as a mathematical activity: the young teachers' perspective. In NOVOTNÁ, Jarmila, MORAOVÁ, Hana (eds.) *Proceedings of Symposium on Elementary Mathematics Teaching.* Prague: Charles University, Faculty of Education, 2009, s. 81 – 88. ISBN 978-80-7290-398-6.

BUREŠ, Jiří a Hana HRABÁKOVÁ. Création d'énoncés de problèmes par les élèves. In *Actes du XXXVe colloque COPIRELEM*. 2008, Bordeaux.

PŘÍLOHY