Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Jaroslav Rauš

Vícerozměrné míry rizika ve stochastické optimalizaci

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Martin Branda, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2014

Rád bych poděkoval svému vedoucímu RNDr. Martinu Brandovi, Ph.D. za jeho cenné rady, za ochotu a za čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5.12.2014 Bc. Jaroslav Rauš

Název práce: Vícerozměrné míry rizika ve stochastické optimalizaci

Autor: Bc. Jaroslav Rauš

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Práce se zabývá možným zobecněním nejužívanějších měr rizika, Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk, do vyšší dimenze. Nejprve je sepsána teorie p-eficientních bodů dané distribuční funkce, možného zobecnění kvantilu pro vícerozměrný případ. Následně je uveden Prékopův-Vizváriův-Badicsův algoritmus pro hledání p-eficientních bodů v případě náhodného vektoru, jehož nosičem je konečná množina, a navrženo jeho možné zobecnění pro speciální případ. Dále jsou zadefinovány pojmy Multivariate Value-at-Risk a Multivariate Conditional Value-at-Risk a diskutovány některé jejich vlastnosti. Na konec je pak řešena úloha lot-sizingu pro různé časové horizonty.

Klíčová slova: Multivariate Value-at-Risk, Multivariate Conditional Value-at-Risk, p-eficientní bod, problém lot-sizingu

Title: Multivariate risk measures in stochastic optimization

Author: Bc. Jaroslav Rauš

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Martin Branda, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The thesis deals with possible generalization of widely used risk measures, Value-at-Risk and Conditional Value-at-Risk, to the multivariate case. First, the theory of p-efficient points, possible generalization of a quantile, is presented. The Prékopa-Vizvári-Badics algorithm for finding p-efficient points in case of random vectors with finite support is presented and a generalization of the algorithm in special case is proposed. Multivariate Value-at-Risk and Multivariate Conditional Value-at-Risk are defined and some of the properties are discussed. A lot-sizing problem for different time horizons is solved.

Keywords: Multivariate Value-at-Risk, Multivariate Conditional Value-at-Risk, p-efficient point, lot-sizing problem

Obsah

Úvod

Investoři každodenně stojí před množstvím investičních příležitostí. Zisk či ztráta plynoucí z těchto příležitostí je náhodná veličina, která je závislá na investorových rozhodnutích. Cílem investora je volit rozhodnutí tak, aby jeho zisk byl co největší a riziko co nejmenší. Míry rizika se snaží toto riziko kvantifikovat.

Nejrozšířenější mírou rizika je míra Value-at-Risk (VaR). Ta se v literatuře vyskytuje pod názvem kvantil již od 19. století. Míře VaR jsou ovšem stále častěji vytýkány některé její nežádoucí vlastnosti. Zejména se jedná o fakt, že není subaditivní, není konvexní a neposkytuje žádnou informaci o velikosti ztráty přesahující VaR. Často bývá také považována za příliš optimistickou. Zmíněné nežádoucí vlastnosti se snaží vylepšit další z často užívaných měr rizika, Conditional Value-at-Risk (CVaR). Vlastnostmi obou těchto měr se zabývá mnoho článků, zmiňme například [3] či [2].

V 1. kapitole zavedeme obecně pojem míry rizika a vlastnosti, které se u nich zkoumají. Dále pak zavedeme míry VaR a CVaR a shrneme jejich vlastnosti a vztahy.

Náplní 2. kapitoly bude zkoumat otázku možných rozšíření měr VaR a CVaR do vyšších dimenzí. Tato otázka ale naráží na problém definice kvantilu pro náhodné vektory. Sepíšeme proto teorii p-eficientních bodů, které jsou jeho možným zobecněním. Budeme se také zabývat otázkou výpočtu p-eficientníc bodů. Následně zavedeme pojmy Multivariate Value-at-Risk (MVaR) a Multivariate Conditional Value-at-Risk (MCVaR) a budeme zkoumat některé jejich vlastnosti.

Ve 3. kapitole pak aplikujeme některé výsledky na řešení úlohy lot-sizingu pro různé časové horizonty.

1. Jednorozměrné míry rizika

V první kapitole zavedeme dvě nejčastěji užívané míry rizika, Value-at-Risk (dále také jen VaR) a Conditional Value-at-Risk (dále také jen CVaR), a shrneme jejich základní vlastnosti a vztahy. Cílem kapitoly není budovat celou teorii, má mít čistě informativní charakter. Z tohoto důvodu budou všechna tvrzení v této kapitole uvedena bez důkazu, některá z nich ale budou v obecnější formě dokázána v kapitole 2.

1.1 Míry rizika a jejich vlastnosti

Zaveďme nejprve pojem náhodné ztráty. Definice je převzata z [2].

Definice 1.1.1. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $s \in S \subseteq \mathbb{R}^m$ je vektor rozhodnutí, $t \in T \subseteq \mathbb{R}^n$ je náhodný vektor a nechť $f : S \times T \to \mathbb{R}$ je zobrazení takové, že $f(s,t)$ je spojité v s a měřitelné v t a pro všechna $s \in S$ platí*

$$\mathrm{E}\{|f(s,t)|\} < +\infty.$$

Pak řekneme, že $X = f(s,t)$ je náhodná ztráta.

V definici 1.1.1 vektor s reprezentuje portfolio, S reprezentuje možná omezení na rozhodnutí a vektor t reprezentuje budoucí hodnoty několika veličin (například předpověď počasí). Rozdělení t považujeme za známé. X je tedy náhodná veličina, jejíž rozdělení je závislé na s.

Definice 1.1.2. *Nechť G je množina všech náhodných ztrát. A nechť $\rho : G \to \mathbb{R}$ je zobrazení. Potom řekneme, že ρ je míra rizika.*

A nyní zaveďme vlastnosti, které pak budeme v následujících dvou podkapitolách zkoumat u VaR a CVaR. Všechny definice vlastností zavedených v této podkapitole, jejich interpretace a poznámky k nim jsou převzaty výhradně z článků [3] a [5].

Než ale zavedeme první z vlastností, vysvětleme ještě pojem komonotonních náhodných veličin.

Definice 1.1.3. *Řekneme, že dvě náhodné veličiny K, L, které jsou definované na stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, A, P), jsou komotonní, jestliže pro všechna $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ platí*

$$[K(\omega_1) - L(\omega_1)] \cdot [K(\omega_2) - L(\omega_2)] \geq 0.$$

Nechť v této kapitole dále vždy, když nebude řečeno jinak, ρ značí míru rizika ve smyslu definice 1.1.2 a $X, Y \in G$ značí náhodné ztráty ve smyslu definic 1.1.1 a 1.1.2.

Definice 1.1.4. *Nechť pro všechna komotonní X, Y platí*

$$\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y).$$

Pak řekneme, že ρ je komotonně aditivní.

Definice 1.1.5. *Nechť pro všechna X a pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ platí*

$$\rho(X+\alpha) = \rho(X) + \alpha.$$

Pak řekneme, že ρ je ekvivariantní vůči posunutí.

Vlastnost ekvivariance vůči posunutí lze slovy přepsat tak, že zvýšením (resp. snížením) ztráty o hodnotu $\alpha \in \mathbb{R}$ se míra rizika zvýší (resp. sníží) o stejnou hodnotu. Tato vlastnost zaručí, že míra rizika je vyjádřená ve stejných jednotkách jako ztráta samotná.

Definice 1.1.6. *Nechť pro všechna X a pro všechna $\alpha > 0$ platí*

$$\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X).$$

Pak řekneme, že ρ je pozitivně homogenní.

Je-li míra rizika přímo ovlivňována velikostí ztráty, tj. není-li splněna podmínka pozitivní homogenity, měli bychom při výpočtu její budoucí hodnoty brát do úvahy možnost nedostatku likvidity finančních prostředků.

Definice 1.1.7. *Nechť pro všechna X, Y platí*

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

Pak řekneme, že ρ je subaditivní.

Subaditivita je přirozený požadavek, který je volně interpretovatelný tak, že sloučení nevytvoří další riziko. Diskuzi ohledně vlastnosti subaditivity lze nalézt v [5], případně v [7].

Definice 1.1.8. *Nechť F_X je distribuční funkce náhodné ztráty X a F_Y je distribuční funkce náhodné ztráty Y. Pak řekneme, že ρ je monotonní ve smyslu stochastické dominance 1. řádu, jestliže platí implikace*

$$F_X(u) \geq F_Y(u),\ \forall u \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Splňuje-li míra rizika předchozí 4 vlastnosti, nazývá se koherentní. Problematikou koherentních měr rizika se podrobně zabývá článek [5]. Zaveďme formálně i tuto vlastnost.

Definice 1.1.9. *Míra rizika ρ se nazývá koherentní, jestliže je ekvivariantní vůči posunutí, subaditivní, pozitivně homogenní a monotonní ve smyslu stochastické dominance 1. řádu.*

Definice 1.1.10. *Nechť pro všechna X, Y a pro všechna $\lambda \in (0,1)$ platí*

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda) \rho(Y).$$

Pak řekneme, že ρ je konvexní.

S vlastností konvexity pracuje článek [3], zatímco článek [5] pracuje s vlastností subaditivity.

Z tohoto důvodu se nám v dalších podkapitolách budou hodit následující dvě věty.

Věta 1.1.11. *Nechť míra rizika ρ je konvexní a pozitivně homogenní. Pak ρ je také subaditivní.*

Věta 1.1.12. *Nechť míra rizika ρ je ekvivariantní vůči posunutí, konvexní, pozitivně homogenní a má vlastnost stochastické dominance 1. řádu. Potom ρ je koherentní.*

Poznamenejme, že platnost věty 1.1.11 se snadno ověří pouhým rozepsáním definic vlastností konvexity a pozitivní homogenity, věta 1.1.12 pak je jejím přímým důsledkem.

Nakonec zaveďme ještě vlastnost monotonie ve smyslu stochastické dominance 2. řádu a vyslovme její vztah k monotonii ve smyslu stochastické dominance 1. řádu. Tvrzení věty 1.1.14 je převzato z [3].

Definice 1.1.13. *Nechť F_X je distribuční funkce náhodné ztráty X a F_Y je distribuční funkce náhodné ztráty Y. Pak řekneme, že ρ je monotonní ve smyslu stochastické dominance 2. řádu, jestliže platí implikace*

$$\int_{-\infty}^{x} F_X(u)du \geq \int_{-\infty}^{x} F_Y(u)du,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \leq \rho(Y)$$

Věta 1.1.14. *Nechť míra rizika ρ má vlastnost monototnie ve smyslu stochastické dominance 1. řádu. Pak má ρ také vlastnost monotonie ve smyslu stochastické dominance 2. řádu.*

1.2 Value-at-Risk

Základním cílem Value-at-Risk, stejně jako jiných měr rizika, je jediným číslem kvantifikovat celkové tržní riziko obsažené v portfoliu finančních nástrojů.

K VaR se většinou přistupuje způsobem, který je uvažovaný například v článku [3], tedy přístup, ve kterém hodnota VaR vyjadřuje očekávanou maximální ztrátu za dané časové období a na dané hladině významnosti. Matematicky toto lze zapsat následovně.

Definice 1.2.1. *Nechť X je náhodná ztráta, F_X je její distribuční funkce a nechť $\alpha \in [0, 1]$. Potom Value-at-Risk na hladině α definujeme jako*

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mathrm{P}(X \leq x) \geq \alpha\} = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq \alpha\}.$$

Z definice 1.2.1 je zřejmé, že hodnota VaR je příslušným kvantilem.

Shrňme vlastnosti míry VaR. Znění věty 1.2.2 je buď převzato z jednoho z článků [3], [5], nebo je jejich přímým důsledkem, v případě bodu (v) se jedná o důsledek věty 1.1.14. Některá tvrzení budou dokázána v obecnější variantě v následující kapitole.

Věta 1.2.2. *Nechť* $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ *je jako v definici 1.2.1. Potom* $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ *je míra rizika ve smyslu definice 1.1.2, která* *(i) je ekvivariantní vůči posunutí;*

(ii) je pozitivně homogenní;

(iii) je komotonně aditivní;

(iv) je monotonní ve smyslu stochastické dominance 1. řádu;

(v) je monotonní ve smyslu stochastické dominance 2. řádu;

(vi) splňuje rovnost $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(-X)$*;*

(vii) není obecně subaditivní;

(viii) není obecně konvexní.

Přímým důsledkem bodu (vii) věty 1.2.2 pak je fakt, že míra VaR není obecně koherentní.

1.3 Conditional Value-at-Risk

Míra VaR má některé nežádoucí vlastnosti, ty jsou popsány v [6] nebo [7]. Zejména se jedná o fakty, že VaR není subaditivní a neposkytuje žádnou informaci o velikosti ztráty přesahující VaR. Navíc je míra VaR obecně považována za příliš optimistickou.

Popsané nežádoucí vlastnosti pak zlepšuje další z často užívaných měr rizika, Conditional Value-at-Risk. Ta je pro spojitá rozdělení také známa jako střední schodek, pro diskrétní rozdělení se ale může od středního schodku lišit, jak je zmíněno v [6]. Matematicky lze pro obecné rozdělení ztrát CVaR chápat jako vážený průměr VaR a podmíněné očekáváné hodnoty ztrát přesahujích VaR.

Existuje několik různých definic CVaR. My vyjdeme z definice, jak je uvedena v [3].

Definice 1.3.1. *Nechť X je náhodná ztráta a nechť $\alpha \in [0,1]$. Potom Conditional Value-at-Risk na hladině α definujeme jako*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \inf_{x\in\mathbb{R}} \left\{ x + \frac{1}{1-\alpha} \,\mathrm{E}\,[X-x]^+ \right\},$$

kde $[a]^+, a \in \mathbb{R}$, značí kladnou část čísla a.

V článku [4] je pak dokázán následující vztah.

Věta 1.3.2. *Nechť jsou splněny předpoklady definice 1.3.1. A nechť navíc distribuční funkce náhodné veličiny X je hladká. Potom platí*

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X) = \mathrm{E}\,[X | X \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)]\,.$$

Zaměřme se nyní na vlastnosti CVaR. Důkazy příslušných tvrzení lze nalézt v [3] či [4], případně jsou přímým důsledkem vět 1.1.11, 1.1.12. Opět platí, že některá tvrzení budou dokázána v obecnější variantě v následující kapitole.

Věta 1.3.3. *Nechť* $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$ *je jako v definici 1.3.1. Potom* $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$ *je míra rizika ve smyslu definice 1.1.2, která*

(i) je ekvivariantní vůči posunutí;

(ii) je pozitivně homogenní;

(iii) je monotonní ve smyslu stochastické dominance 1. řádu;

(iv) je monotonní ve smyslu stochastické dominance 2. řádu;

(v) má-li X *hustotu, pak* $\mathrm{CVaR}_\alpha(X)$ *splňuje rovnost*

$$\mathrm{E}\,X = (1-\alpha)\,\mathrm{CVaR}_\alpha(X) - \alpha \mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(-X);$$

(vi) je subaditivní;

(vii) je konvexní;

(viii) je koherentní.

Na začátku podkapitoly jsme shrnuli hlavní nedostatky, jež jsou vytýkány míře VaR. Ze znění věty 1.3.3 vidíme, že míra CVaR oproti míře VaR splňuje vlastnosti konvexity a subaditivity, potažmo koherence, navíc CVaR je přímo navržena tak, aby dávala informaci o velikosti ztráty přesahující VaR. Vyjádřeme se ještě k otázce, zda je CVaR méně optimistická míra než VaR.

Odpověď dává bod (i) věty 1.3.4, ta shrnuje základní vztahy VaR a CVaR. Tvrzení věty je převzato z [3].

Věta 1.3.4. *Nechť* X *je náhodná ztráta a* $\alpha \in (0,1)$*. Potom platí*

(i) $\mathrm{CVaR}_\alpha(X) \geq \mathrm{VaR}_\alpha(X)$*;*

(ii) $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sup\{v \in \mathbb{R} : \mathrm{CVaR}_\alpha(X^v) = v\}$ *;*

(iii) je-li X *nezáporná s.j., pak*

$$\left[\frac{\mathrm{E}\,(X^n) - (1-\alpha)\,\mathrm{CVaR}_\alpha\,(X^n)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

2. Mnohorozměrné míry rizika

Cílem této kapitoly bude zobecnit míry VaR a CVaR do vyšších dimenzí. Za tímto účelem nejdříve vybudujeme teorii p-eficientních bodů a následně zavedeme míry Multivariate Value-at-Risk a Multivariate Conditional Value-at-Risk a budeme zkoumat jejich vlastnosti.

2.1 Teorie p-eficientních bodů

Jednou z možností, jak zavést rozšíření kvantilu pro náhodný vektor, je pomocí p-eficientních bodů. V této podkapitole zavedeme tento pojem a budeme zkoumat jeho vlastnosti a možnosti výpočtu. Další užívaný přístup, jak zavést rozšíření kvantilu pro náhodný vektor, je pomocí tzv. hloubkových funkcí, více o tomto přístupu se můžeme dočíst například v [15].

Struktura textu a myšlenky většiny důkazů až do důsledku 2.1.17 jsou založeny na [8]. Jelikož jsou důkazy v literatuře často jen nastíněny, bude většina tvrzení formálně dokázána. Uvedené příklady, protipříklady a ilustrace nejsou převzaty z literatury a jsou tedy příspěvkem autora.

Jednotlivé výsledky této podkapitoly budeme demonstrovat na příkladu 2.1.1, který nyní zavedeme.

Příklad 2.1.1. *Uvažujme náhodný vektor $D = (A, B)$, jehož rozdělení můžeme vidět v tabulce 2.1. Pro jakoukoli uspořádanou dvojici hodnot, která se v tabulce nevyskytuje, je pravděpodobnost jejího nabytí rovna* 0.

	B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6	B=7	B=8	B=9
A=1	0,001	0,002	0,013	0,001	0,008	0,002	0,002	0,016	0,011
A=2	0,003	0,021	0,001	0,011	0,001	0,001	0,001	0,001	0,029
A=3	0,013	0,043	0,011	0,001	0,019	0,012	0,003	0,001	0,032
A=4	0,017	0,002	0,001	0,024	0,031	0,001	0,001	0,021	0,003
A=5	0,001	0,001	0,023	0,001	0,002	0,014	0,011	0,001	0,032
A=6	0,006	0,002	0,001	0,027	0,001	0,003	0,001	0,001	0,065
A=7	0,023	0,001	0,01	0,032	0,023	0,001	0,001	0,087	0,001
A=8	0,034	0,031	0,018	0,015	0,091	0,002	0,001	0,001	0,003
A=9	0,001	0,042	0,012	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,008

Tabulka 2.1: Pravděpodobnosti nabytí daných hodnot pro náhodný vektor D

Definice 2.1.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in (0,1)$, X je reálný náhodný vektor o n složkách a F_X je jeho distribuční funkce. Potom řekneme, že bod x je p-eficientním bodem distribuční funkce F_X, jestliže $F_X(x) \geq p$ a zároveň neexistuje žádný bod $y \in \mathbb{R}^n$ takový, že $y \leq x$, $y \neq x$, pro nějž by platilo $F_X(y) \geq p$.*

V definici 2.1.2 je nerovnost mezi vektory chápána po složkách. Stejným způsobem budeme tyto nerovnosti chápat i ve zbytku této práce.

Všimněme si, že p-eficientní bod skutečně je jistým zobecněním kvantilu, neboť zvolíme-li v 2.1.2 $n = 1$, dostáváme právě definici kvantilu náhodné veličiny.

Příklad 2.1.1 (Pokračování)**.** *Hodnotu p z definice 2.1.2 zvolíme pro účely úlohy jako*

$$p_0 = 0,5.$$

Vzhledem k charakteru a velikosti příkladu není složité si představit (a následně spočítat), jak budou vypadat p_0-eficientní body distribuční funkce náhodného vektoru D. Tyto body existují právě 3, a to

$$d_1 = (8, 5),$$
$$d_2 = (7, 8),$$
$$d_3 = (6, 9).$$

Formální důkaz, že tomu tak skutečně je, bude průběžně prováděn v průběhu této podkapitoly.

Nechť ve zbytku této podkapitoly mají n, X, F_X stejný význam jako v definici 2.1.2. A nechť, je-li Y náhodná veličina a G_Y její distribuční funkce, $G_Y^{(-1)}$ značí příslušnou kvantilovou funkci.

Primárním cílem nyní bude ukázat, že množina p-eficientních bodů je vždy neprázdná, tento výsledek bude zformulován v důsledku 2.1.15. Nejprve ale ve větě 2.1.3 dokážeme, že pro každé X existuje bod, který je omezením zdola všech p-eficientních bodů jeho distribuční funkce.

Věta 2.1.3. *Nechť $p \in (0, 1)$. Označme*

$$l = \left(F_{X_1}^{(-1)}(p), \ldots, F_{X_n}^{(-1)}(p)\right),$$

kde $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ značí příslušné marginální distribuční funkce. Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$ taková, že $F_X(x) \geq p$, platí $x \geq l$.

Důkaz. Volme libovolné $i \in \{1, \ldots, n\}$. A volme $x \in \mathbb{R}^n$ takové, že splňuje $F_X(x) \geq p$. Uvědomme si, že

$$\mathrm{P}\left(X_i \leq x_i\right) \geq \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right),$$

a tedy, vyjdeme-li z předpokladu na volbu x, dostáváme

$$F_{X_i}\left(x_i\right) \geq F_X\left(x\right) \geq p.$$

Vzhledem k vlastnostem kvantilové funkce pak také platí

$$F_{X_i}^{(-1)}\left(F_{X_i}\left(x_i\right)\right) \geq F_{X_i}^{(-1)}\left(p\right) = l_i.$$

Tedy máme

$$l_i \leq \inf\left\{y \in \mathbb{R} : F_{X_i}\left(y\right) \geq F_{X_i}\left(x_i\right)\right\} =: I.$$

Jelikož ve výpočtu infima volba $y = x_i$ zřejmě splňuje

$$F_{X_i}\left(y\right) \geq F_{X_i}\left(x_i\right),$$

dostáváme $l_i \leq I \leq x_i$. □

Poznamenejme, že důkaz věty 2.1.3 je veden tak, jak je tomu v [11].

Příklad 2.1.1 (Pokračování). *Díky větě 2.1.3 můžeme spočíst dolní omezení pro všechny p_0-eficientní body distribuční funkce náhodného vektoru D. Hodnoty marginálních distribučních funkcí náhodných veličin A a B ve skokových bodech můžeme vidět v tabulkách 2.2 a 2.3. Z těchto tabulek je patrné, že dolním omezením pro všechny p_0-eficientní body je bod*

$$d_{DO} = (6, 5).$$

Vidíme, že skutečně platí $d_i \geq d_{DO}$ pro všechna $i \in \{1, 2, 3\}$.

A=1	A=2	A=3	A=4	A=5	A=6	A=7	A=8	A=9
0,056	0,125	0,26	0,361	0,447	0,554	0,733	0,929	1

Tabulka 2.2: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny A ve skokových bodech

B=1	B=2	B=3	B=4	B=5	B=6	B=7	B=8	B=9
0,099	0,244	0,334	0,449	0,626	0,663	0,686	0,816	1

Tabulka 2.3: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny B ve skokových bodech

Nyní zadefinujeme p-úrovňovou množinu a následně budeme zkoumat její souvisost s p-eficientními body.

Definice 2.1.4. *Nechť $p \in (0, 1)$. Potom množinu*

$$Z_p = \{x \in \mathbb{R}^n : F_X(x) \geq p\}$$

nazýváme p-úrovňovou množinou.

Základní vlastnosti Z_p jsou shrnuty v lemmatu 2.1.5, tvrzení lemmatu je převzato z [8], kde ovšem není proveden důkaz, zde jej provedeme.

Lemma 2.1.5. *Nechť $p \in (0, 1)$ a Z_p je p-úrovňová množina příslušná náhodnému vekotru X. Pak Z_p je neprázdná a uzavřená.*

Důkaz. Fakt, že Z_p je neprázdná, je přímým důsledkem předpokladu $p < 1$ a základních vlastností distribuční funkce. Dokažme uzavřenost. Mějme konvergentní posloupnost

$$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq Z_p.$$

Označme

$$z = \lim_{k \to +\infty} z_k.$$

Předpokládejme nejprve, že $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ obsahuje podposloupnost, která je nerostoucí ve všech souřadnicích. Díky jednoznačnosti limity můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ je nerostoucí ve všech souřadnicích. Máme tedy posloupnost bodů, která ve všech souřadnicích konverguje k z zprava. Víme, že F_X je ve všech souřadnicích spojitá zprava a

$$\lim_{k \to +\infty} F_X(z_k) = F_X(z).$$

To ale znamená, že

$$F_X(z) \geq p,$$

a tedy $z \in Z_p$. Nyní nechť

$$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

neobsahuje podposloupnost, která je nerostoucí ve všech souřadnicích. Nechť tuto podmínku nesplňuje i-tá souřadnice. Vzhledem k jednoznačnosti limity můžeme opět bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

je rostoucí v i-té souřadnici a ve všech ostatních souřadnicích je nerostoucí. Označme

$$z_k = (z_{k1}, z_{k2}, \dots, z_{kn}),$$
$$I = \min\{z_{ki} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Pak $I > -\infty$. A jelikož je F_X neklesající a zprava spojitá ve všech souřadnicích, tak pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$F_X(z_{k1}, \dots, z_{k,i-1}, I, z_{k,i+1}, \dots, z_{kn}) \geq p.$$

Navíc posloupnost

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty} = \{(z_{k1}, \dots, z_{k,i-1}, I, z_{k,i+1}, \dots, z_{kn})\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq Z_p$$

je cauchyovská, neboť pro všechna $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ platí

$$\rho_{eukl}(z_{k_1}, z_{k_2}) \geq \rho_{eukl}(\zeta_{k_1}, \zeta_{k_2}),$$

kde ρ_{eukl} značí eukleidovskou metriku. A jelikož $(\mathbb{R}^n, eukl)$ je úplný prostor, je posloupnost

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

konvergentní v $(\mathbb{R}^n, eukl)$, označme příslušnou limitu ζ. Pak ale

$$\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty}$$

je posloupnost nerostoucí ve všech souřadnicích, a tedy z výše uvedeného dostáváme

$$F_X(\zeta) \geq p.$$

A jelikož z faktu, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$z_k \geq \zeta_k,$$

vyplývá

$$z \geq \zeta,$$

tak vzhledem k monotonii F_X ve všech souřadnicích dostáváme, že také

$$F_X(z) \geq p.$$

To ale znamená, že opět platí $z \in Z_p$. Množina Z_p je tedy uzavřená. $\square$

Věta 2.1.6. *Nechť $p \in (0,1)$ a Z_p je p-úrovňová množina příslušná X. Označme x^j, $j \in J$, všechny p-eficientní body F_X, kde J je příslušná indexová množina, a pro každé $j \in J$ definujeme*

$$K_j = x^j + \mathbb{R}^n_+.$$

Pak platí

$$Z_p = \bigcup_{j \in J} K_j.$$

Důkaz. Označme

$$K = \bigcup_{j \in J} K_j.$$

Volme $z \in Z_p$. Je-li z p-eficientní bod, tak $z \in K$. Není-li z p-eficientní bod, tak existuje $\zeta \in Z_p$ takové, že $\zeta \leq z$ a zároveň $\zeta \neq z$. Z věty 2.1.3 navíc víme, že existuje $l \in \mathbb{R}^n$ takové, že $l \leq \zeta$. Definujme množinu

$$Z^{(1)} = \{y \in Z_p : l \leq y \leq z\}.$$

Z definice $Z^{(1)}$ a z lemmatu 2.1.5 víme, že $Z^{(1)}$ je uzavřená a omezená, tedy kompaktní, z výše uvedeného navíc víme, že je neprázdná. Nyní definujme funkci $\xi^{(1)} : Z^{(1)} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$\xi^{(1)}(a_1, \ldots, a_n) = a_1.$$

Potom $\xi^{(1)}$ je funkce spojitá na $Z^{(1)}$, tedy na této množině nabývá svého minima. To ale znamená, že na $Z^{(1)}$ existuje bod $\zeta^{(1)}$, který má minimální 1. souřadnici. Je-li $\zeta^{(1)}$ p-eficientní bod, tak

$$z \in \zeta^{(1)} + \mathbb{R}^n_+$$

a tvrzení platí. Není-li tomu tak, definujme množinu

$$Z^{(2)} = \left\{y \in Z_p : l \leq y \leq \zeta^{(1)}\right\}.$$

Opět víme, že $Z^{(2)}$ je uzavřená a omezená, tedy kompaktní, a neprázdná. Definujme funkci $\xi^{(2)} : Z^{(2)} \to \mathbb{R}$ vztahem

$$\xi^{(2)}(a_1, \ldots, a_n) = a_2.$$

Pak $\xi^{(2)}$ je spojitá, tedy na $Z^{(2)}$ nabývá svého minima. Tedy na $Z^{(2)}$ existuje bod $\zeta^{(2)}$, který má minimální 1. a 2. souřadnici. Je-li $\zeta^{(2)}$ p-eficientní bod, tak

$$z \in \zeta^{(2)} + \mathbb{R}^n_+$$

a tvrzení platí. Není-li tomu tak, analogickým způsobem sestrojíme body $\zeta^{(3)}, \ldots, \zeta^{(n)}$. Z konstrukce vidíme, že $\zeta^{(n)}$ je p-eficientní bod a

$$z \in \zeta^{(n)} + \mathbb{R}^n_+,$$

a tedy $z \in K$. To ale znamená

$$Z_p \subseteq K.$$

Nyní dokažme opačnou inkluzi. Volme $k \in K$. Potom buď k je p-eficientní bod, a tedy přímo z definice platí $k \in Z_p$, nebo existuje p-eficientní bod k' takový, že $k \in k' + \mathbb{R}^n_+$, tedy $k \geq k'$. Z definice opět platí $k' \in Z_p$, tzn.

$$F_X(k') \geq p.$$

Z monotonie funkce F_X ve všech souřadnicích pak dostáváme

$$F_X(k) \geq F_X(k') \geq p,$$

to ale znamená, že $k \in Z_p$. Dokázali jsme tedy

$$K \subseteq Z_p.$$

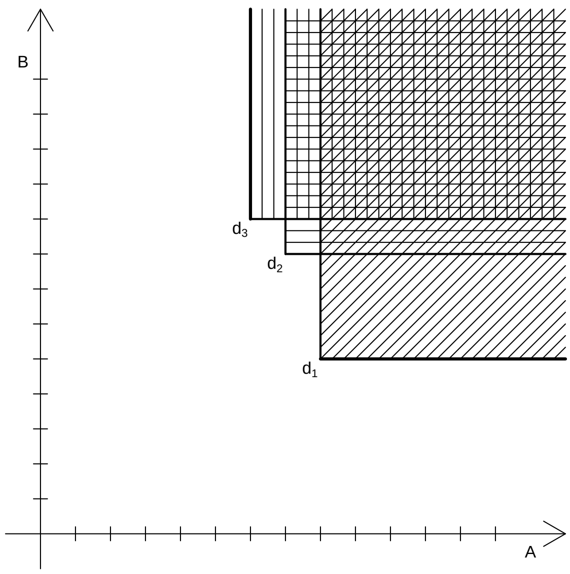
Celkově tedy máme

$$Z_p = K.$$

□

Důkaz věty 2.1.6 je oproti [8] doplněný o důkaz opačné inkluze.

Příklad 2.1.1 (Pokračování). *Věta 2.1.6 dává představu o tvaru p_0-úrovňové množiny Z_{p_0}. Její grafické znázornění můžeme vidět na obrázku 2.1.*



Obrázek 2.1: Grafické znázornění věty 2.1.6 pro příklad 2.1.1, vrcholy d_1, d_2, d_3 jsou p_0-eficientní body distribuční funkce F_D

Nyní budeme chtít ukázat, že podobná reprezentace jako ve větě 2.1.6 platí i pro konvexní obaly. Za tímto účelem uvedeme nejdříve dvě pomocná tvrzení, první z nich není převzaté z literatury.

Lemma 2.1.7. *Nechť x^j, $j \in J$, a K_j, $j \in J$, jsou jako ve větě 2.1.6. A označme*

$$C = \operatorname{conv}\left\{x^j, j \in J\right\}.$$

Potom

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{j\in J} K_j\right) \subseteq C + \mathbb{R}^n_+.$$

Důkaz. C speciálně obsahuje všechny body x^j, $j \in J$, tedy

$$\bigcup_{j \in J} K_j \subseteq C + \mathbb{R}^n_+.$$

A jelikož $C + \mathbb{R}^n_+$ je konvexní množina, tak také

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{j \in J} K_j\right) \subseteq C + \mathbb{R}^n_+.$$

□

Lemma 2.1.8 (Carathéodoryova věta)**.** *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ a $x \in \operatorname{conv}(Q)$. Potom existuje $Q' \subseteq Q$ taková, že $\dim(Q') \leq m + 1$, a platí $x \in \operatorname{conv}(Q')$.*

Důkaz lemmatu 2.1.8 lze nalézt například v [9].

Věta 2.1.9. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2.1.6. A nechť C je jako v lemmatu 2.1.7. Potom platí*

$$\operatorname{conv}(Z_p) = C + \mathbb{R}^n_+.$$

Důkaz. Kombinací věty 2.1.6 a lemmatu 2.1.7 zjistíme, že

$$\operatorname{conv}(Z_p) \subseteq C + \mathbb{R}^n_+.$$

Zbývá tedy ukázat opačnou inkluzi. Volme $z \in \operatorname{conv}(Z_p)$. Z věty 2.1.6 a z lemmatu 2.1.8 víme, že z lze vyjádřit jako konvexní kombinaci bodů množiny

$$\bigcup_{j \in J} K_j$$

takovou, že bude mít nejvýše $n + 1$ členů. Můžeme tedy psát

$$z = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \left(x^{j_i} + y_i\right),$$

kde pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ platí

$$(i)\ \ j_i \in J,$$

$$(ii)\ \ \lambda_i \in [0, 1]\ \ a\ \ \sum_{\mu=1}^{n+1} \lambda_\mu = 1,$$

$$(iii)\ \ y_i \in \mathbb{R}^n_+.$$

Roznásobíme-li závorku v konvexní kombinaci, tak v první sumě dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^{j_i} \in C,$$

jelikož se jedná o konvexní kombinaci p-eficientních bodů, ve druhé pak

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i y_i \in \mathbb{R}^n_+,$$

jelikož pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ jest po složkách

$$\lambda_i y_i \geq 0.$$

Celkově tedy dostáváme

$$C + \mathbb{R}^n_+ \subseteq \operatorname{conv}(Z_p).$$

$\square$

V následující větě dokážeme uzavřenost množiny $\operatorname{conv}(Z_p)$, tato vlastnost bude mít značný význam v důkazu věty 2.1.14.

Věta 2.1.10. *Nechť $p \in (0, 1)$. A nechť Z_p je p-úrovňová množina. Potom množina* $\operatorname{conv}(Z_p)$ *je uzavřená.*

Důkaz. Volme konvergentní posloupnost

$$\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subseteq \operatorname{conv}(Z_p)$$

a označme

$$z = \lim_{k \to +\infty} z_k.$$

Budeme chtít ukázat, že $z \in \operatorname{conv}(Z_p)$. Vzhledem ke konvexitě množiny $\operatorname{conv}(Z_p)$ a vzhleden k lemmatu 2.1.8, můžeme pro každé $k \in \mathbb{N}$ psát

$$z_k = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ik} y_{ik},$$

kde pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí

$$(i)\ \ \lambda_{ik} \in [0, 1] \ \ a \ \ \sum_{\mu=1}^{n+1} \lambda_{\mu k} = 1,$$

$$(ii)\ \ y_{ik} \in Z_p.$$

Jelikož je pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ posloupnost $\{\lambda_{ik}\}_{k=1}^{n}$ omezená podposloupnost $\mathbb{R}$, můžeme z ní podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty vybrat konvergentní podposloupnost $\left\{\lambda_{ik_j}\right\}_{j=1}^{n}$. Označme

$$\lambda_i = \lim_{j \to +\infty} \lambda_{ik_j}.$$

Z věty 2.1.3 víme, že existuje $l \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ platí $l \leq y_{ik}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $l = 0$, neboť uzavřenost množiny je invariantní vůči posunutí. Označme

$$I = \{i \in \{1, 2, \ldots, n+1\} : \lambda_i > 0\}.$$

Pak

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n+1} \lim_{j \to +\infty} \lambda_{ik_j} = \lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ik_j} = 1.$$

Dále pro každé $k \in \mathbb{N}$ jest

$$z_k \geq \sum_{i \in I} \lambda_{ik} y_{ik}.$$

Jelikož v sumě jsou všechny členy nezáporné, dostáváme

$$0 \leq \lambda_{ik} y_{ik} \leq z_k$$

pro všechna $i \in I$ a $k \in \mathbb{N}$. A jelikož $\lambda_i > 0$ pro všechna $i \in I$, tak pro každé $i \in I$ existuje $j_{0i} \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $j \geq j_{0i}$ platí $\lambda_{ik_j} > 0$. Nechť

$$\zeta = \sup \left\{ \frac{z_{kj}}{\lambda_{ik_j}} : j \geq j_0,\ i \in I \right\},$$

kde jsme označili $j_0 = \max \{j_{0i} : i \in I\}$. Protože posloupnost

$$\left\{ \frac{z_{kj}}{\lambda_{ik_j}} \right\}_{j \geq j_0}$$

je konvergentní, dostáváme

$$0 \leq y_{ik_j} \leq \zeta < +\infty$$

pro všechna $i \in I$ a $j \geq j_0$. Množina

$$\{r \in Z_p : 0 \leq r \leq \zeta\}$$

je uzavřená, jelikož se jedná o průnik uzavřených množin (zde jsme využili lemmatu 2.1.5), a navíc omezená, tedy kompaktní. To ale dle charakterizace kompaktních množin znamená, že z každé posloupnosti na této množině lze vybrat konvergentní podposloupnost a každá taková podposloupnost má limitu také v této množině. Nechť

$$\left\{ y_{ik_{j_m}} \right\}_{m=1}^{+\infty}$$

je ona konvergentní podposloupnost. Označme

$$y_i = \lim_{m \to +\infty} y_{ik_{j_m}}.$$

Potom vzhledem k výše uvedenému jest

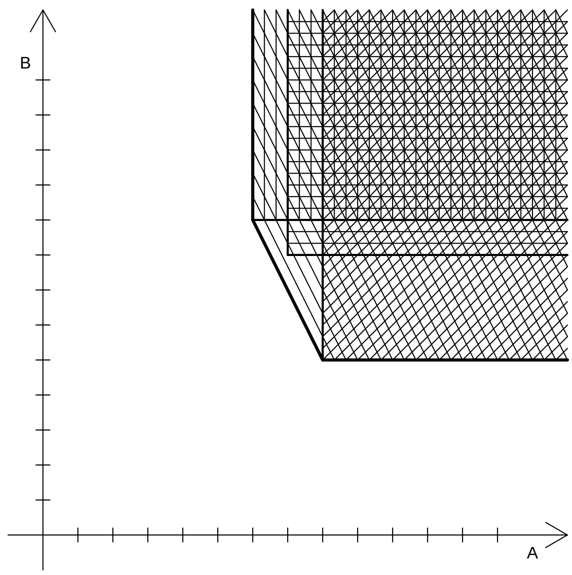
$$z \geq \sum_{i \in I} \lambda_i y_i.$$

To ale je konvexní kombinace bodů ze Z_p, a tedy

$$\sum_{i \in I} \lambda_i y_i \in \operatorname{conv}(Z_p).$$

A tedy z věty 2.1.9 vyplývá, že také $z \in \operatorname{conv}(Z_p)$. □

Příklad 2.1.1 (Pokračování)**.** *Označme množinu C z věty 2.1.9 pro náš případ C_0. Zmíněná věta pak říká, že množiny $C_0 + \mathbb{R}^n_+$ a $\operatorname{conv}(Z_{p_0})$ jsou shodné. Na obrázku 2.2 tuto množinu můžeme vidět jako množinu vyšrafovanou šikmo zleva dolů. Navíc z věty 2.1.10 víme, že tato množina je uzavřená. Všimněme si, že $\operatorname{conv}(Z_{p_0})$ je konvexní polyedrická množina.*



Obrázek 2.2: Grafické znázornění věty 2.1.9

Následující lemmata 2.1.11 a 2.1.12 využijeme k důkazu věty 2.1.14, jejíž důkaz uvedený v [8] sice s platností uvedených tvrzení počítá, ale dokázána nejsou.

Lemma 2.1.11. *Nechť J a x^j, $j \in J$, jsou jako ve větě 2.1.6. Označme*

$$C = \operatorname{conv}\left\{x^j, j \in J\right\}.$$

Potom existuje $l \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $y \in C$ platí $l \leq y$.

Důkaz. Volme $y \in C$. Dle lemmatu 2.1.8 můžeme psát

$$y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^{j_i},$$

kde $j_i \in J$, $\lambda_i \geq 0$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ a $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Dále z věty 2.1.3 víme, že existuje $l_0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $l_0 \leq x^j$ pro všechna $j \in J$. Položme $l = l_0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $l = 0$, neboť tvar konvexního obalu množiny je invariantní vůči posunutí. Pak jsou ale všechny sčítance ve vyjádření y nezáporné, a tedy

$$y \geq 0 = l.$$

□

Lemma 2.1.12. *Nechť $p \in (0,1)$ a Z_p je p-úrovňová množina. A nechť z je krajním bodem množiny* $\operatorname{conv}(Z_p)$*. Potom $z \in Z_p$.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že $z \notin Z_p$. Dle definice krajního bodu z nelze vyjádřit jako konvexní kombinaci jiných bodů ze Z_p. To ale znamená $z \notin \operatorname{conv}(Z_p)$, což je spor s předpokladem. □

K důkazu věty 2.1.14 využijeme také následující lemma 2.1.13, jeho tvrzení je převzato z [10].

Lemma 2.1.13. *Každá neprázdná uzavřená konvexní množina, která neobsahuje žádnou přímku, má alespoň jeden krajní bod.*

Věta 2.1.14. *Nechť $p \in (0,1)$. A nechť Z_p je p-úrovňová množina příslušná náhodnému vektoru X. A nechť x^j, $j \in J$, jsou všechny p-eficientní body distribuční funkce F_X. Potom množina všech krajních bodů konvexního obalu Z_p*

$$\text{ext}\,(\text{conv}\,(Z_p))$$

je neprázdná a navíc platí

$$\text{ext}\,(\text{conv}\,(Z_p)) \subseteq \left\{x^j\right\}_{j\in J}.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.1.5 víme, že Z_p je neprázdná množina, a tedy také $\text{conv}\,(Z_p)$ je neprázdná. Dále z lemmatu 2.1.11 a z věty 2.1.9 víme, že existuje $l \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\text{conv}\,(Z_p) \subseteq l + \mathbb{R}^n_+.$$

To ale znamená, že množina $\text{conv}\,(Z_p)$ neobsahuje žádnou přímku. Z věty 2.1.10 a z lemmatu 2.1.13 pak dostáváme, že $\text{conv}\,(Z_p)$ má alespoň jeden krajní bod. Volme tedy $z \in \text{ext}\,(\text{conv}\,(Z_p))$. Označme

$$\chi = \left\{x^j\right\}_{j\in J}.$$

Pro spor předpokládejme, že $z \notin \chi$. Z lemmatu 2.1.12 víme, že $z \in Z_p$. Pak existuje $j_0 \in J$ takové, že $x^{j_0} \leq z$, $x^{j_0} \neq z$. Pak podle věty 2.1.6 víme, že bod

$$z + \left(z - x^{j_0}\right)$$

náleží do množiny Z_p. A tedy

$$z = \frac{1}{2}x^{j_0} + \frac{1}{2}\left(2z - x^{j_0}\right)$$

je reprezentace bodu z, která je konvexní kombinací dvou různých bodů ze Z_p, to je spor s předpokladem

$$z \in \text{ext}\,(\text{conv}\,(Z_p)).$$

□

Důsledek 2.1.15. *Nechť $p \in (0,1)$. Potom distribuční funkce F_X má alespoň jeden p-eficientní bod.*

Důkaz. Z věty 2.1.14 víme, že konvexní obal p-úrovňové množiny příslušné X má alespoň jeden krajní bod, označme ho z. Dle téže věty je z ale také p-eficientním bodem distribuční funkce F_X. □

Příklad 2.1.1 (Pokračování)**.** *Z důsledku 2.1.15 víme, že existuje alespoň jeden p_0-eficientní bod, což koresponduje s naším příkladem. Dále množina* $\text{conv}\,(Z_{p_0})$ *má právě 2 krajní body, a to*

$$d_1 = (8,5),$$
$$d_3 = (6,9).$$

Z věty 2.1.14 pak víme, že d_1 a d_3 skutečně jsou p_0-eficientní body. Navíc fakt, že bod d_2 není krajním bodem množiny $\text{conv}\,(Z_{p_0})$*, je protipříkladem na otázku, zda ve větě 2.1.14 platí i opačná inkluze.*

Další vlastnost množiny p-eficientních bodů, kterou budeme zkoumat, je konečnost. Tato vlastnost je velmi důležitá pro výpočetní algoritmus, jímž se budeme zabývat později.

Následující věta je zformulována obecněji než je tomu v [8], kde je znění věty jen ve tvaru důsledku 2.1.17, ačkoli myšlenka důkazu zůstala stejná. Záběr věty 2.1.16 navíc může být ještě rozšířen, využili-li bychom věty 2.1.21.

Věta 2.1.16. *Nechť $p \in (0,1)$, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je diskrétní náhodný vektor takový, že splňuje jednu z následujících podmínek:*

(i) X může s nenulovou pravděpodobností nabývat jen konečně mnoha hodnot.

(ii) Pro X, které může v každé složce s nenulovou pravděpodobností nabývat nekonečně mnoha hodnot, označme pro každou náhodnou veličinu X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, množinu těchto hodnot

$$q_i = \{q_{ik}\}_{k=1}^{+\infty}.$$

Nechť žádná z q_i neobsahuje podposloupnost, která je klesající a zároveň konverguje ke konečné hodnotě.

A nechť χ je množina všech p-eficientních bodů distribuční funkce F_X. Potom platí, že χ je konečná množina.

Důkaz. Platí-li předpoklad (i), existuje jen konečně mnoho bodů, které mohou být p-eficientní. A tedy tvrzení platí. Nechť tedy platí předpoklad (ii). Pro spor předpokládejme, že existuje nekonečně mnoho p-eficientních bodů

$$\chi = \left\{x^j\right\}_{j=1}^{+\infty}.$$

Rozlišme dva případy. Nechť nejprve existuje podposloupnost χ, která je neklesající ve všech souřadnicích. Pak ale dle definice žádný bod této podposloupnosti kromě prvního nemůže být p-eficientní, to je spor. Nyní nechť v i-té souřadnici neexistuje podposloupnost χ, která je neklesající. To ale znamená, že existuje podposloupnost

$$\left\{x_i^{j_k}\right\}_{k=1}^{+\infty},$$

která je klesající. Jelikož ale tato podposloupnost musí nutně nabývat jen hodnot z q_i, neboť bychom se jinak opět dostali do sporu s definicí p-eficientního bodu, víme, že

$$\lim_{k \to +\infty} x_i^{j_k} = -\infty.$$

To je ale spor s větou 2.1.3, která říká, že existuje $l \in \mathbb{R}^n$ takové, že pro všechna $j \in \mathbb{N}$ platí $l \leq x^j$. □

Důsledek 2.1.17. *Nechť $p \in (0,1)$. Nechť nosičem X je buď $\mathbb{Z}^n$ nebo $\mathbb{N}_0^n$. Pak existuje jen konečně mnoho p-eficientních bodů distribuční funkce F_X.*

Důkaz. Je-li nosičem $\mathbb{N}_0^n$, tak v žádné souřadnici neexistuje klesající podposloupnost hodnot nosiče. Je-li nosičem $\mathbb{Z}^n$, tak každá klesající podposloupnost hodnot nosiče v libovolné souřadnici není omezená zdola. V obou případech tedy platnost tvrzení plyne z věty 2.1.16. □

Příklad 2.1.1 (Pokračování)**.** *Větou 2.1.16 máme teorií potvrzeno, že skutečně existuje konečně mnoho* p_0*-eficientních bodů, neboť nosičem náhodného vektoru* D *je konečná množina.*

Nyní zavedeme Prékopův-Vizváriův-Badicsův algoritmus (v dalším o něm budeme mluvit jako o PVB-algoritmu) tak, jak je uveden například v [1]. Jedná se o algoritmus s rekurzivním charakterem, který slouží k hledání p-eficientních bodů v případě, že nosičem náhodného vektoru je konečná množina.

Algoritmus 2.1.18 (PVB-algoritmus)**.** *Označme* $X = (X_1, \dots, X_r)$*. Nechť nosičem* X_i*,* $i \in \{1, \dots, r\}$*, je množina*

$$q_i = \{q_{i1}, \dots, q_{ik_i}\},$$

kde jednotlivé hodnoty tvoří rostoucí posloupnost. Označme $Q = q_1 \times \ldots \times q_r$*. A nechť* $p \in (0, 1)$*.*

K0 Dosaď k=0. Jdi na krok K1.

K1 Najdi $q_{1j_1}, \dots, q_{nj_n}$ *takové, že*

$$\begin{aligned} q_{1j_1} &= \min\{y \in \mathbb{R} : F(y, q_{2k_2}, \dots, q_{rk_r}) \geq p\}, \\ q_{2j_2} &= \min\{y \in \mathbb{R} : F(q_{1j_1}, y, q_{3k_3}, \dots, q_{rk_r}) \geq p\}, \\ &\vdots \\ q_{rj_r} &= \min\left\{y \in \mathbb{R} : F\left(q_{1j_1}, \dots, q_{r-1,j_{r-1}}, y\right) \geq p\right\}. \end{aligned}$$

Dosaď $\chi = \{(q_{1j_1}, \dots, q_{rj_r})\}$*. Jdi na krok K2.*

K2 Nechť $k = k + 1$*. Jestliže* $j_1 + k > k_1$*, jdi na krok K4, jinak jdi na krok K3.*

K3 Spočítej všechny p-eficientní body funkce $F(q_{1,j_1+k}, y)$*,* $y \in Q^{r-1}$*, a zruš ty z nich, které dominují alespoň jeden prvek množiny* χ *(*y_1 *dominuje* y_2*, jestliže* $y_1 \geq y_2$*,* $y_1 \neq y_2$*). Nechť* β *je množina všech p-eficientních bodů, které zbudou. Dosaď* $\chi = \chi \cup \beta$*. Jdi na krok K2.*

K4 Algoritmus skončil, všechny p-eficientní body již byly nalezeny.

Uvědomme si, že funkce F v kroku K3 není vždy nutně distribuční funkcí, jelikož pravděpodonost celého prostoru v tomto případě již není 1. Hledání p-eficientních bodů dává ale i tak dobrý smysl, neboť vzhledem ke krokům K1 a K2 je zaručeno, že existuje bod, pro který je hodnota funkce F větší nebo rovna p.

Máme-li tedy $N \in \{1, \dots, n\}$, uvažujme v případě PVB-algoritmu a jeho zobecnění uvedeném v algoritmu 2.1.22 rozšíření definice p-eficientního bodu pro případ všech funkcí $G : \mathbb{R}^N \to [0, 1]$ takových, že mají následující vlastnosti.

(i) G je neklesající ve všech souřadnicích.

(ii) G je spojitá zprava ve všech souřadnicích.

(iii) Existuje $y^0 \in \mathbb{R}^N$ takové, že $G(y^0) \geq p$.

Mějme na paměti toto rozšíření definice a uvědomme si dále u PVB-algoritmu několik faktů.

(i) Z konstrukce je patrné, že bod nalezený v kroku K1 je p-eficientním bodem, který navíc má ze všech p-eficientních bodů minimální 1. souřadnici, dále ze všech p-eficientních bodů s minimální 1. souřadnicí má minimální 2. souřadnici, atd.

(ii) Nechť $p \in (0,1)$, $N \in \{1, \ldots, n\}$, $G : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ je funkce taková, že pro ni je definován pojem p-eficientního bodu. Dále nechť $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0)$ je p-eficientní bod funkce G. Definujme funkci $g : \mathbb{R}^{N-1} \to [0,1]$ vztahem

$$g(x_2, x_3, \ldots, x_k) = G\left(x_1^0, x_2, \ldots, x_k\right).$$

Potom bod $(x_2^0, x_3^0, \ldots, x_k^0)$ je p-eficientní bod funkce g. Toto tvrzení vyplývá přímo z definice p-eficientního bodu.

(iii) Není možné, že v kroku K3 v jakékoli fázi vyřadíme bod, který v této fázi je p-eficientním bodem, neboť ho porovnáváme jen s již nalezenými p-eficientními body. A jelikož procházíme body v dané souřadnici vždy od nejmenšího po největší, nemůže se ani stát, že v množině χ bude bod, který v dané fázi p-eficientním bodem není.

(iv) PVB-algoritmus provede konečně mnoho kroků na konečné množině, tedy skončí v konečném čase.

Celkově je tedy PVB-algoritmus konečný algoritmus, který skutečně nalezne všechny p-eficientní body dané distribuční funkce.

Příklad 2.1.1 (Pokračování). *Jelikož nosičem D je konečná množina, můžeme pro nalezení všech p_0-eficientních bodů v našem příkladu využít PVB-algoritmus. Ten bude probíhat následovně.*

K0 Dosadíme k=0. Jdeme na krok K1.

K1 Spočteme

$$\begin{aligned} 6 &= \min\{y \in \mathbb{R} : F_D(y, 9) \geq p\}, \\ 9 &= \min\{y \in \mathbb{R} : F_D(6, y) \geq p\}. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy $j_1 = 6$ a

$$\chi = \{(6,9)\}.$$

Jdeme na krok K2.

K2 Dosadíme $k = 1$. Jelikož $7 \leq 9$, jdeme na krok K3.

K3 Jediným p_0-eficientním bodem funkce $F_D(7, y)$, $y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, je bod 8. A jelikož bod $(7, 8)$ nedominuje žádný bod z χ, dostáváme

$$\chi = \{(6,9), (7,8)\}.$$

Jdeme na krok K2.

K2 Dosadíme $k = 2$. Jelikož $8 \leq 9$, jdeme na krok K3.

K3 Jediným p_0-eficientním bodem funkce $F_D(8, y)$, $y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, je bod 5. A jelikož bod $(8, 5)$ nedominuje žádný bod z χ, dostáváme

$$\chi = \{(6, 9), (7, 8), (8, 5)\}.$$

Jdeme na krok K2.

K2 Dosadíme $k = 3$. Jelikož $9 \leq 9$, jdeme na krok K3.

K3 Jediným p_0-eficientním bodem funkce $F_D(9, y)$, $y \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, je bod 5. Jelikož ale bod $(9, 5)$ dominuje bod $(8, 5)$, do množiny χ ho nezařadíme. Jdeme na krok K2.

K2 Dosadíme $k = 4$. Jelikož $10 > 9$, jdeme na krok K4.

K4 Konec algoritmu, všechny p_0-eficientní body byly nalezeny.

Vidíme, že tento výsledek odpovídá tomu, co jsme očekávali.

Velkým omezením PVB-algoritmu je, že pracuje jen s náhodnými vektory, které mají konečný nosič. Odvoďme nyní zobecnění algoritmu pro náhodné vektory se spočetným nosičem ve speciálním případě v dimenzi $n = 2$, toto zobecnění není převzato z literatury. Za tímto účelem nejprve dokážeme několik tvrzení. Na konci podkapitoly pak za pomoci protipříkladu ukážeme, že ve vyšších dimenzích již podobná myšlenka ke zobecnění algoritmu využít nelze.

Věta 2.1.19. *Nechť $p \in (0, 1)$ a $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor. Označme*

$$l_i = F_{X_i}^{(-1)}(p),$$

kde $i \in \{1, \ldots, n\}$. A nechť pro příslušné $i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$F_{X_i}(l_i) \neq p.$$

Potom existují $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ taková, že

$$F_X(x_1, \ldots, x_{i-1}, l_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geq p. \tag{2.1}$$

Důkaz. Volme $i \in \{1, \ldots, n\}$. Z vlastností distribuční funkce náhodného vektoru víme, že

$$F_X(+\infty, \ldots, +\infty, l_i, +\infty, \ldots, +\infty) = F_{X_i}(l_i).$$

Vzhledem k definici l_i a vzhledem k tomu, že F_{X_i} je neklesající a zprava spojitá, platí

$$F_{X_i}(l_i) = F_{X_i}(\inf\{y \in \mathbb{R} : F_{X_i}(y) \geq p\}) \geq p.$$

Pak ale z předpokladu

$$F_{X_i}(l_i) \neq p$$

jest

$$F_X(+\infty, \ldots, +\infty, l_i, +\infty, \ldots, +\infty) > p.$$

Označme

$$L = F_X(+\infty, \ldots, +\infty, l_i, +\infty, \ldots, +\infty).$$

Potom z definice limity a z vlastností distribuční funkce víme, že existuje $R \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $r > R$ jest

$$F_X(r, \ldots, r, l_i, r, \ldots, r) \in (p, L].$$

Položme tedy například $x_j = R + 1$ pro všechna $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$. □

Věta 2.1.19 obecně neplatí, není-li splněn předpoklad

$$F_{X_i}(l_i) \neq p.$$

Jako protipříklad můžeme uvažovat příklad 2.1.20. Větu 2.1.19 lze chápat jako doplnění věty 2.1.3.

Příklad 2.1.20. *Mějme náhodný vektor (S, T) takový, že*

$$\mathrm{P}(S = s, T = t) = \frac{1}{16},$$

kde $(s, t) \in \{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, a

$$\mathrm{P}(S = 3, T = t) = \frac{1}{2^{t+2}},$$

kde $t \in \mathbb{N}$. Všech ostatních hodnot náhodný vektor (S, T) nabývá s nulovou pravděpodobností. Volme $p = 0,75$. Spočtěme

$$l_1 = F_S^{(-1)}(p) = 3,$$

$$l_2 = F_T^{(-1)}(p) = 3.$$

Není složité si představit, že v tomto případě existuje právě jeden p-eficientní bod, a to sice bod

$$b_1 = (4, 3).$$

A tedy vidíme, že neexistuje žádný p-eficientní bod, který by v první souřadnici nabýval dolního omezení podle věty 2.1.3. Zároveň lze tedy tento příklad chápat i jako protipříklad na otázku, zda vždy musí nějaký p-eficientní bod tohoto dolního omezení nabývat.

Z věty 2.1.19 vyplývá důsledek pro $n = 2$, který lze chápat jako možné doplnění věty 2.1.16. Podle následujícího tvrzení totiž můžeme sestrojit další možné omezení, které zaručí konečný počet p-eficientních bodů pro diskrétní náhodný vektor.

Věta 2.1.21. *Nechť $p \in (0, 1)$ a $X = (X_1, X_2)$. Označme*

$$l_1 = F_{X_1}^{(-1)}(p),$$

$$l_2 = F_{X_2}^{(-1)}(p).$$

A nechť pro všechna $i \in \{1, 2\}$ platí

$$F_{X_i}(l_i) \neq p.$$

Označme

$$u_1 = \min \{y \in \mathbb{R} : F_X(y, l_2) \geq p\},$$
$$u_2 = \min \{y \in \mathbb{R} : F_X(l_1, y) \geq p\}.$$

Potom existuje omezená podmnožina $\mathbb{R}^2$ taková, že obsahuje všechny p-eficientní body distribuční funkce F_X, kde pro každý p-eficientní bod x platí

$$x \leq u = (u_1, u_2).$$

Navíc platí, že body $x^1 = (l_1, u_2)$ a $x^2 = (u_1, l_2)$ jsou p-eficientními body F_X.

Důkaz. Volme $x = (x_1, x_2)$, p-eficientní bod distribuční funkce F_X. Podle věty 2.1.3 víme, že pro l_1, l_2 platí $l_1 \leq x_1$, $l_2 \leq x_2$. A podle věty 2.1.19 víme, že pro u_1, u_2 platí

$$F_X(l_1, u_2) \geq p,$$
$$F_X(u_1, l_2) \geq p.$$

Pak ale dle definice p-eficientního bodu musí nutně platit $u_1 \geq x_1$ a $u_2 \geq x_2$, jelikož distribuční funkce je neklesající ve všech souřadnicích. Navíc z výše uvedeného a z konstrukce u_1, u_2 vyplývá, že x^1 a x^2 jsou p-eficientní body. Tím je tvrzení dokázáno. □

Jak již bylo naznačeno, větu 2.1.21 lze užít jako nástroj, jak za dodatečných předpokladů zobecnit PVB-algoritmus.

Algoritmus 2.1.22 (Zobecněný PVB-algoritmus)**.** *Označme $X = (X_1, X_2)$ diskrétní náhodný vektor. A nechť $p \in (0, 1)$ a navíc pro všechna $i \in \{1, 2\}$ platí*

$$F_{X_i}\left(F_{X_i}^{(-1)}(p)\right) \neq p.$$

K1 Označ

$$q_{11} = F_{X_1}^{(-1)}(p),$$
$$q_{21} = F_{X_2}^{(-1)}(p)$$

a najdi

$$q_{1k_1} = \min \{y \in \mathbb{R} : F_X(y, q_{21}) \geq p\},$$
$$q_{2k_2} = \min \{y \in \mathbb{R} : F_X(q_{11}, y) \geq p\}.$$

Nechť q_1 je rostoucí posloupnost obsahující všechny hodnoty nosiče X_1 mezi hodnotami q_{11} a q_{1k_1}, q_2 je rostoucí posloupnost obsahující všechny hodnoty nosiče X_2 mezi hodnotami q_{21} a q_{2k_2} (v obou případech včetně krajních bodů). Označ

$$Q = q_1 \times q_2.$$

Jdi na krok K2.

K2 Pomocí PVB-algoritmu najdi všechny p-eficientní body náhodného vektoru X na Q.

Zobecněný PVB-algoritmus skutečně najde v konečném čase všechny p-eficientní body, neboť:

(i) Podle věty 2.1.19 víme, že hodnoty q_{11}, q_{21}, q_{1k_1}, q_{2k_2} existují a vzhledem k tomu, že pracujeme s diskrétním náhodným vektorem, je lze snadno nalézt v konečném čase.

(ii) Z věty 2.1.21 víme, že všechny p-eficientní body náhodného vektoru X náleží do množiny Q.

(iii) Jsou splněny všechny předpoklady PVB-algoritmu.

Zobecněný PVB-algoritmus lze použít například k vyřešení následujících dvou úloh.

Příklad 2.1.23. *Nechť (S, T) je náhodný vektor takový, že $S \sim Po(4)$, $T \sim Po(3)$, a S, T jsou nezávislé náhodné veličiny. A nechť $p = 0,6$. Chceme najít všechny p-eficientní body distribuční funkce $F_{S,T}$. Spočtěme*

$$F_S\left(F_S^{(-1)}(0,6)\right) = 0,629 \neq 0,6,$$

$$F_T\left(F_T^{(-1)}(0,6)\right) = 0,647 \neq 0,6.$$

Jsou tedy splněny všechny předpoklady zobecněného PVB-algoritmu.

K1 Spočteme

$$\begin{aligned} q_{11} &= F_S^{(-1)}(p) = 4, \\ q_{21} &= F_T^{(-1)}(p) = 3, \\ q_{1k_1} &= \min\{y \in \mathbb{R} : F_{S,T}(y, q_{21}) \geq p\} = 7, \\ q_{2k_2} &= \min\{y \in \mathbb{R} : F_{S,T}(q_{11}, y) \geq p\} = 6. \end{aligned}$$

Označme

$$Q = \{4, 5, 6, 7\} \times \{3, 4, 5, 6\}.$$

Hodnoty distribuční funkce $F_{S,T}$ na množině Q můžeme vidět v tabulce 2.4. Jdeme na krok K2.

K2 PVB-algoritmem zjistíme, že hledané p-eficientní body jsou $(4, 6)$, $(5, 4)$ a $(7, 3)$.

	S=4	S=5	S=6	S=7
T=6	0,6078	0,7589	0,8595	0,9171
T=5	0,5761	0,7193	0,8147	0,8692
T=4	0,5127	0,6401	0,725	0,7736
T=3	0,407	0,5082	0,5756	0,6141

Tabulka 2.4: Hodnoty distribuční funkce (S, T) na množině Q v příkladu 2.1.23

Příklad 2.1.24. *Nechť* (S,T) *je náhodný vektor takový, že* $S \sim Po(6)$, $T \sim R\{1,\dots,47\}$ *a* S *a* T *mají závislost ve tvaru Gumbelovy kopuly s parametrem* $\theta = 2$, *tj.*

$$F_{ST}(s,t) = \exp\left(-\sqrt{\left(-\log\left(F_S(s)\right)\right)^2 + \left(-\log\left(F_T(t)\right)\right)^2}\right).$$

A nechť $p = 0,7$. *Chceme najít všechny p-eficientní body distribuční funkce* $F_{S,T}$. *Spočtěme*

$$F_S\left(F_S^{(-1)}(0,7)\right) = 0,744 \neq 0,7,$$

$$F_T\left(F_T^{(-1)}(0,7)\right) = 0,702 \neq 0,7.$$

Jsou tedy splněny všechny předpoklady zobecněného PVB-algoritmu.

K1 Spočteme

$$q_{11} = F_S^{(-1)}(p) = 8,$$

$$q_{21} = F_T^{(-1)}(p) = 33,$$

$$q_{1k_1} = \min\left\{y \in \mathbb{R} : F_{S,T}(y, q_{21}) \geq p\right\} = 11,$$

$$q_{2k_2} = \min\left\{y \in \mathbb{R} : F_{S,T}(q_{11}, y) \geq p\right\} = 39.$$

Označme

$$Q = \{8,9,10,11\} \times \{33,34,35,36,37,38,39\}.$$

Hodnoty distribuční funkce $F_{S,T}$ *na množině* Q *můžeme vidět v tabulce 2.5. Jdeme na krok K2.*

K2 PVB-algoritmem zjistíme, že hledané p-eficientní body jsou $(8,39)$, $(9,35)$, $(10,34)$ *a* $(11,33)$.

	S=8	S=9	S=10	S=11
T=39	0,705	0,779	0,814	0,827
T=38	0,695	0,764	0,795	0,805
T=37	0,684	0,748	0,775	0,784
T=36	0,672	0,731	0,755	0,763
T=35	0,659	0,713	0,735	0,742
T=34	0,645	0,695	0,715	0,721
T=33	0,631	0,677	0,695	0,700

Tabulka 2.5: Hodnoty distribuční funkce (S,T) na množině Q v příkladu 2.1.24

Jak již bylo zmíněno výše, je ještě potřeba odpovědět na otázku, proč jsme zobecnění PVB-algoritmu provedli jen pro dimenzi $n = 2$.

Tímto důvodem je fakt, že ve vyšších dimenzích bychom potřebovali silnější znění věty 2.1.19, totiž zafixování $(n-1)$ souřadnic místo pouze jedné, pak by už ale nerovnost 2.1 v daném znění neplatila. O tom, že požadované tvrzení skutečně ve vyšší dimenzi obecně neplatí se můžeme přesvědčit v příkladu 2.1.25. Myšlenku této věty tedy již v tomto případě nelze využít pro nalezení omezení shora pro všechny p-eficientní body.

S=1	S=2	S=3	S=4	S=5
0,117	0,317	0,500	0,586	1

Tabulka 2.6: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny S z příkladu 2.1.25 ve skokových bodech

T=1	T=2	T=3	T=4	T=5
0,068	0,242	0,320	0,472	1

Tabulka 2.7: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny T z příkladu 2.1.25 ve skokových bodech

U=1	U=2	U=3	U=4	U=5
0,121	0,266	0,378	0,505	1

Tabulka 2.8: Hodnoty distribuční funkce náhodné veličiny U z příkladu 2.1.25 ve skokových bodech

Příklad 2.1.25. *Uvažujme náhodný vektor (S, T, U), který má nezávislé složky. Hodnoty distribuční funkce jednotlivých složek v bodech, kterých nabývají s nenulovou pravděpodobností, můžeme vidět v tabulkách 2.6, 2.7, 2.8. Volme $p = 0,35$. Z tabulek podle věty 2.1.3 snadno zjistíme, že vektor*

$$l = (3, 4, 3)$$

je omezením zdola všech p-eficientních bodů distribuční funkce F_{STU}. Dále podle věty 2.1.19 víme, že existuje p-eficientní bod při zafixování jedné souřadnice. O tom se můžeme snadno přesvědčit přímým výpočtem, jelikož nosičem náhodného vektoru (S, T, U) je konečná množina, a tedy můžeme k výpočtu p-eficientních bodů využít PVB-algoritmus, najdeme body

$$\begin{aligned} b_1 &= (5, 5, 3), \\ b_2 &= (3, 5, 5), \\ b_3 &= (5, 4, 5). \end{aligned}$$

Ovšem při zafixování dvou souřadnic dostáváme

$$\sup \{F_{STU}(t, 4, 3) : t \in \mathbb{R}\} = 0,178 < p,$$

$$\sup \{F_{STU}(3, s, 3) : s \in \mathbb{R}\} = 0,189 < p,$$

$$\sup \{F_{STU}(3, 4, u) : u \in \mathbb{R}\} = 0,236 < p.$$

Zdůrazněme ještě, že příklad byl modelován dokonce za velmi silného dodatečného předpokaldu nezávislosi jednotlivých složek. Za tohoto předpokladu lze důkaz věty 2.1.19 modifikovat tak, že při zafixování $(n-1)$ složek dostaneme platnost nerovnosti pro p^{n-1}. Můžeme se přesvědčit, že všechny výše uvedené hodnoty jsou skutečně větší než číslo $p^2 = 0,1225$. To ale pro další zobecnění PVB-algoritmu není dostatečně silný výsledek.

2.2 Multivariate Value-at-Risk

Zobecnění míry VaR, která byla definována v sekci 1.2, do vyšší dimenze je problém, s nímž se musí nějakým způsobem vypořádat společnosti, které chtějí nabízet zákazníkům různá portfolia produktů a zároveň kontrolovat, zda ztráta všech takových portfolií je najednou se zvolenou pravděpodobností dostatečně malá. Analogickým problémem je případ, kdy máme jen jedno portfolio, které ale chceme zkoumat v různých časových úsecích. Úlohu tohoto typu budeme řešit v kapitole 3. Motivace ke studiu je převzata z [1].

V této podkapitole zavedeme takové zobecnění míry VaR. Toto zobecnění se nazývá Multivariate Value-at-Risk. V následující podkapitole pak pro stejný problém zobecníme také míru CVaR. Po zavedení příslušných pojmů nás bude dále zajímat, do jaké míry je zobecnění dobře definované. To konkrétně znamená, že budeme zkoumat

(i) do jaké míry jsou zachovány některé vlastnosti, které splňuje míra VaR, resp. CVaR, zejména nás budou zajímat vlastnosti pozitivní homogenity a ekvivariance vůči posunutí,

(ii) jestli se skutečně jedná o zobecnění dané míry.

Struktura textu v následujících dvou podkapitolách, stejně jako znění uvedených vět a myšlenky některých důkazů, jsou založené na článcích [1] a [11].

Nyní ale již zaveďme pojem Multivariate Value-at-Risk tak, jak je zavedena v [1] na straně 52 či v definici 1 v [11].

Definice 2.2.1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$, X je n-rozměrný reálný náhodný vektor a F_X je jeho distribuční funkce. Potom pod pojmem Multivariate Value-at-Risk rozumíme množinu všech p-eficientních bodů distribuční funkce F_X.*

Množinu zavedenou v definici 2.2.1 budeme značit MVaR, případně $\mathrm{MVaR}_p(X)$, budeme-li chtít zdůraznit, že se jedná o množinu p-eficientních bodů distribuční funkce F_X.

Nechť ve zbytku kapitoly mají n, $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ a F_X stejný význam jako v definici 2.2.1.

Uvědomme si nyní několik faktů o MVaR.

(i) Jak už bylo zmíněno v sekci 2.1, p-eficientní bod je zobecněním kvantilu. To ale znamená, že v tomto smyslu je MVaR skutečně zobecněním VaR.

(ii) Zatímco cílem VaR je jediným číslem kvantifikovat riziko, MVaR je množina bodů z $\mathbb{R}^n$.

(iii) Vzhledem k tomu, jak je MVaR definovaná, byla řada jejích vlastností dokázána již v předcházející podkapitole.

Nebude-li řečeno jinak, budeme ve zbytku této kapitoly budeme pracovat se zobecněním definic uvedených v sekci 1.1, a to ve smyslu, že místo náhodné veličiny budeme uvažovat náhodný vektor.

Nyní se ale už zaměřme na porovnání vlastností VaR a MVaR. Nejprve ukážeme, že MVaR zachovává vlastnosti ekvivariance vůči posunutí a pozitivní homogenity. Důkazy příslušných dvou vět (2.2.2 a 2.2.3) nejsou převzaty z literatury. Věta 2.2.3 je navíc zformulována obecněji, než je tomu v [11], kde je příslušné tvrzení uvedeno jen pro skalár $\alpha > 0$.

Věta 2.2.2. *Nechť $p \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Pak platí*

$$\mathrm{MVaR}_p\left(X+\alpha\right) = \mathrm{MVaR}_p\left(X\right) + \alpha.$$

Důkaz. Pro každé $\zeta \in \mathbb{R}^n$ platí

$$F_{X+\alpha}\left(\zeta\right) = \mathrm{P}\left(X+\alpha \le \zeta\right) = \mathrm{P}\left(X \le \zeta-\alpha\right) = F_X\left(\zeta-\alpha\right)$$

Volme $z \in \mathrm{MVaR}_p\left(X+\alpha\right)$. Pak víme, že

$$F_X\left(z-\alpha\right) = F_{X+\alpha}\left(z\right) \ge p.$$

A také víme, že neexistuje žádné $y \le z$ takové, že

$$F_X\left(y-\alpha\right) = F_{X+\alpha}\left(y\right) \ge p.$$

To ale znamená, že $(z-\alpha) \in \mathrm{MVaR}_p\left(X\right)$, a tedy také $z \in \left(\mathrm{MVaR}_p\left(X\right)+\alpha\right)$. Odtud dostáváme

$$\mathrm{MVaR}_p\left(X+\alpha\right) \subseteq \left(\mathrm{MVaR}_p\left(X\right)+\alpha\right).$$

Opačná inkluze se ukáže analogicky. □

Věta 2.2.3. *Nechť $p \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, kde navíc pro všechna $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ platí $\alpha_i > 0$. A nechť $*$ značí součin po složkách. Potom platí*

$$\mathrm{MVaR}_p\left(\alpha * X\right) = \alpha * \mathrm{MVaR}_p\left(X\right).$$

Důkaz. Pro každé $\zeta \in \mathbb{R}^n$ platí

$$F_{\alpha*X}\left(\zeta\right) = \mathrm{P}\left(\alpha * X \le \zeta\right) = \mathrm{P}\left(X \le \frac{1}{\alpha} * \zeta\right) = F_X\left(\frac{1}{\alpha} * \zeta\right),$$

kde

$$\frac{1}{\alpha}$$

značí po složkách převrácenou hodnotu. Volme $z \in \mathrm{MVaR}_p\left(\alpha * X\right)$. Pak víme, že

$$F_X\left(\frac{1}{\alpha} * z\right) = F_{\alpha*X}\left(z\right) \ge p.$$

A také víme, že neexistuje žádné $y \le z$ takové, že

$$F_X\left(\frac{1}{\alpha} * y\right) = F_{\alpha*X}\left(y\right) \ge p.$$

To ale znamená, že $\left(\frac{1}{\alpha} * z\right) \in \mathrm{MVaR}_p\left(X\right)$, a tedy také $z \in \alpha * \mathrm{MVaR}_p\left(X\right)$. Odtud dostáváme

$$\mathrm{MVaR}_p\left(\alpha * X\right) \subseteq \alpha * \mathrm{MVaR}_p\left(X\right).$$

Opačná inkluze se ukáže analogicky. □

Vlastnost (vi) věty 1.2.2 lze zobecnit následujícím způsobem, toto zobecnění je převzato z [11].

Věta 2.2.4. *Nechť $p \in (0,1)$. Potom platí*

$$\begin{aligned} -\mathrm{MVaR}_{1-p}(-X) = \{z \in \mathbb{R}^n :\ & \mathrm{P}(X \geq z) \geq 1-p \\ & \textit{a zároveň neexistuje žádné } y \geq z,\ y \neq z,\ \textit{takové, že} \\ & \mathrm{P}(X \geq y) \geq 1-p\}. \end{aligned}$$

Důkaz. Vyjděme z definice množiny

$$-\mathrm{MVaR}_{1-p}(-X)$$

a upravujme:

$$\begin{aligned} & -\mathrm{MVaR}_{1-p}(-X) \\ = & -\{z \in \mathbb{R}^n :\ \mathrm{P}(-X \leq z) \geq 1-p \ \&\ \nexists y \leq z, y \neq z :\ \mathrm{P}(-X \leq y) \geq 1-p\} \\ = & \{z \in \mathbb{R}^n :\ \mathrm{P}(-X \leq -z) \geq 1-p \ \&\ \nexists y \leq -z, y \neq -z :\ \mathrm{P}(-X \leq y) \geq 1-p\} \\ = & \{z \in \mathbb{R}^n :\ \mathrm{P}(X \geq z) \geq 1-p \ \&\ \nexists y \geq z, y \neq z :\ \mathrm{P}(X \geq y) \geq 1-p\} \end{aligned}$$

□

Poslední vlastnost, kterou se budeme v této podkapitole zabývat, je vlastnost komonotonní aditivity. Tuto vlastnost uvedeme ve větě 2.2.6. Předtím ale ještě dokážeme jedno pomocné tvrzení, které lze chápat jako doplnění důkazu věty 2.2.6, který je převzatý z [11].

Lemma 2.2.5. *Nechť $p \in (0,1)$. A nechť X má nezávislé složky, jejichž distribuční funkce jsou spojité a ryze rostoucí. Potom platí*

$$\mathrm{MVaR}_p(X) = \left\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_i = \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i),\ \prod_{i=1}^n \alpha_i = p,\ 0 < \alpha_i < 1 \right\}.$$

Důkaz. Označme

$$M = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : z_i = \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i),\ \prod_{i=1}^n \alpha_i = p,\ 0 < \alpha_i < 1 \right\}.$$

Vzhledem k předpokladům víme, že

$$\mathrm{MVaR}_p(X) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^n F_{X_i}(z_i) = p \right\},$$

$$\mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i) = F_{X_i}^{-1}(\alpha_i).$$

Volme $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathrm{MVaR}_p(X)$. Dle výše uvedeného tedy jest

$$\prod_{i=1}^n F_{X_i}(y_i) = p.$$

Vzhledem k ryzí monotonii a spojitosti F_{X_i} pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ můžeme psát

$$y_i = F_{X_i}^{-1}\left(\frac{p}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} F_{X_j}(y_j)}\right).$$

Položme

$$\alpha_i = \frac{p}{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} F_{X_j}(y_j)},$$

kde $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jest

$$y_i = \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i).$$

A navíc platí

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \frac{p^n}{\left(\prod_{j=1}^{n} F_{X_j}(y_j)\right)^{n-1}} = \frac{p^n}{p^{n-1}} = p.$$

Dostáváme tedy $y \in M$, a tedy také

$$\mathrm{MVaR}_p(X) \subseteq M.$$

Nyní volme $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in M$. Potom

$$\prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(w_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(\mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = p,$$

kde α_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, odpovídá definici M. Odtud vidíme $w \in \mathrm{MVaR}_p(X)$, a tedy

$$M \subseteq \mathrm{MVaR}_p(X).$$

□

Věta 2.2.6. *Nechť $p \in (0, 1)$ a X, Y jsou nezávislé náhodné vektory takové, že jejich jednotlivé složky tvoří systém nezávislých náhodných veličin. Dále nechť distribuční funkce jednotlivých složek obou náhodných vektorů jsou spojité a ryze rostoucí. A nechť pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou X_i a Y_i komonotonní. Potom*

$$\mathrm{MVaR}_p(X+Y) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} \mathrm{VaR}_{\alpha_1}(X_1) \\ \vdots \\ \mathrm{VaR}_{\alpha_n}(X_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{VaR}_{\alpha_1}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathrm{VaR}_{\alpha_n}(Y_n) \end{pmatrix},\ \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = p,\ 0 < \alpha_i < 1 \right\}.$$

Důkaz. Podle lemmatu 2.2.5 víme, že

$$\mathrm{MVaR}_p(X+Y) = \Bigg\{ z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n : z_i = \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i + Y_i),\ \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = p,\ 0 < \alpha_i < 1 \Bigg\}.$$

A podle věty 1.2.2 víme, že v jednorozměrném případě pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$\mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i + Y_i) = \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(X_i) + \mathrm{VaR}_{\alpha_i}(Y_i).$$

Odtud už plyne tvrzení. □

2.3 Multivariate Conditional Value-at-Risk

Zaveďme nyní termín Multivariate Conditional Value-at-Risk, definice 2.3.1 je přepisem definice 2 z [11].

Definice 2.3.1. *Nechť $p \in (0,1)$. A nechť $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je funkce taková, že $\mathrm{E}\psi(X)$ existuje. Označme*

$$D_p(X) = \bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right)$$

a označme uzávěr doplňku $D_p(X)$ jako

$$\mathrm{clo}\left(D_p^C(X)\right).$$

Potom pod pojmem Multivariate Conditional Value-at-Risk rozumíme

$$\mathrm{MCVaR}_p(X) = \mathrm{E}\left[\psi(X) \,|X \in \mathrm{clo}\left(D_p^C(X)\right)\right].$$

Místo Multivariate Conditional Value-at-Risk budeme v dalším psát jen MCVaR, případně $\mathrm{MCVaR}_p(X)$, budeme-li chtít zdůraznit, že se jedná o náhodný vektor X a hladinu p.

V jednorozměrném případě MCVaR tak, jak je zavedený v definici 2.3.1, je zobecněním vyjádření CVaR z věty 1.3.2, neboť v jednorozměrném případě jest

$$\mathrm{clo}\left(D_p^C(X)\right) = Z_p = [\mathrm{VaR}_p(X), +\infty),$$

kde Z_p je příslušná p-úrovňová množina. Mějme ale na paměti, že v tomto smyslu tedy není obecným rozšířením definice 1.3.1, neboť z [2] víme, že vyjádření CVaR z věty 1.3.2 obecně není s touto definicí ekvivalentní.

Nechť ve zbytku této kapitoly má $D_p(X)$ stejný význam jako v definici 2.3.1. Funkci ψ z této definice budeme v dalším, stejně jako je tomu v [11], uvažovat jako váhovou funkci, tj. pro $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,$$

kde pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jest $\lambda_i > 0$ a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Věty 2.3.3 a 2.3.6 jsou v [11] formulovány a dokázány jen pro aproximaci MCVaR ve speciálním případě. Zde je dokážeme obecně. Před každou z těchto vět navíc dokážeme pomocná tvrzení. S platností části lemmatu 2.3.2 počítá i důkaz pro aproximaci v [11], jednotlivé kroky ovšem nejsou uvedeny, lemma 2.3.4 není převzato z literatury.

Lemma 2.3.2. *Nechť $p \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Potom platí*

$$\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right) = \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X\right)\right) + \alpha.$$

Důkaz. Vyjděme z definice

$$D_p\left(X+\alpha\right) = \bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X+\alpha)} \left(s + \mathbb{R}_-^n\right).$$

Z věty 2.2.2 víme, že

$$D_p\left(X+\alpha\right) = \bigcup_{s \in (\mathrm{MVaR}_p(X)+\alpha)} \left(s + \mathbb{R}_-^n\right) = \bigcup_{(s-\alpha) \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}_-^n\right).$$

Položme $s' = s - \alpha$. Potom

$$\begin{aligned} D_p\left(X+\alpha\right) &= \bigcup_{s' \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s' + \alpha + \mathbb{R}_-^n\right) = \bigcup_{s' \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s' + \mathbb{R}_-^n\right) + \alpha \\ &= D_p\left(X\right) + \alpha \end{aligned}$$

Dále, vzhledem k tomu, že výrok

$$z \notin \left(\bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}_-^n\right) + \alpha \right)$$

je ekvivalentní s výrokem

$$(z-\alpha) \notin \bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}_-^n\right),$$

tak platí

$$D_p^C\left(X+\alpha\right) = D_p^C\left(X\right) + \alpha.$$

A vzhledem k faktu, že tvar množiny je invariantní vůči posunutí (formální důkaz by se provedl podobně jako je tomu v lemmatu 2.3.4), tak také

$$\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right) = \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X\right)\right) + \alpha.$$

□

Věta 2.3.3. *Nechť $p \in (0,1)$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$. Potom platí*

$$\mathrm{MCVaR}_p\left(X+\alpha\right) = \mathrm{MCVaR}_p\left(X\right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i.$$

Důkaz. Vyjděme z definice a využijme základních vlastností podmíněné střední hodnoty a tvaru funkce ψ.

$$\begin{aligned} \mathrm{MCVaR}_p\left(X+\alpha\right) &= \mathrm{E}\left[\psi\left(X+\alpha\right) \mid (X+\alpha) \in \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(X_i + \alpha_i\right) \middle| (X+\alpha) \in \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right)\right] \\ &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \middle| (X+\alpha) \in \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right)\right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \\ &= \mathrm{E}\left[\psi\left(X\right) \mid (X+\alpha) \in \operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right)\right] + \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \end{aligned}$$

Z lemmatu 2.3.2 víme, že

$$\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X+\alpha\right)\right)=\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X\right)\right)+\alpha,$$

můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\mathrm{MCVaR}_p\left(X+\alpha\right)&=\mathrm{E}\left[\psi\left(X\right)\mid\left(X+\alpha\right)\in\left(\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X\right)\right)+\alpha\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\\&=\mathrm{E}\left[\psi\left(X\right)|X\in\operatorname{clo}\left(D_p^C\left(X\right)\right)\right]+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i\\&=\mathrm{MCVaR}_p\left(X\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i.\end{aligned}$$

□

Věta 2.3.3 skutečně zobecňuje vlastnost ekvivariance vůči posunutí, neboť pro případ náhodné veličiny bude $\alpha\in\mathbb{R}$, a tedy

$$\sum_{i=1}^{1}\lambda_i\alpha_i=\alpha.$$

Avšak všimněme si, že se jedná o zobecnění této vlastnosti v jiném smyslu, než je tomu ve větě 2.2.2.

Nyní dokážeme dvě pomocná tvrzení, která nám pak umožní dokázat zobecnění vlastnosti pozitivní homogenity.

Lemma 2.3.4. *Nechť $M\subseteq\mathbb{R}^n$, $\alpha>0$. Potom platí*

$$\alpha\operatorname{clo}\left(M\right)=\operatorname{clo}\left(\alpha M\right).$$

Důkaz. Nechť $w\in\operatorname{clo}\left(\alpha M\right)$. A mějme konvergentní posloupnost

$$\left\{w_n\right\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq\alpha M$$

takovou, že

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=w.$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ definujme

$$v_n=\frac{1}{\alpha}w_n.$$

Potom posloupnost

$$\left\{v_n\right\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq M$$

je konvergentní, neboť pro všechna $m,n\in\mathbb{N}$ platí

$$\rho_{eukl}\left(v_m,v_n\right)=\rho_{eukl}\left(\frac{1}{\alpha}w_m,\frac{1}{\alpha}w_n\right)=\frac{1}{\alpha}\rho_{eukl}\left(w_m,w_n\right),$$

a tedy je cauchyovská a prostor $(\mathbb{R}^n,eukl)$ je úplný. Zde ρ_{eukl} značí eukleidovskou metriku. Označme

$$v=\lim_{n\to+\infty}v_n.$$

Pak $v \in \mathrm{clo}\,(M)$ a dostáváme

$$w = \lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha v_n = \alpha \lim_{n\to+\infty} v_n = \alpha v.$$

To ale znamená $w \in \alpha\,\mathrm{clo}\,(M)$. Nyní nechť $z \in \alpha\,\mathrm{clo}\,(M)$. Pak můžeme psát $z = \alpha y$, kde $y \in \mathrm{clo}\,(M)$. Mějme konvergentní posloupnost

$$\{y_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq M$$

takovou, že

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y.$$

Taková posloupnost existuje, neboť $y \in \mathrm{clo}\,(M)$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$z_n = \alpha y_n.$$

Potom posloupnost

$$\{z_n\}_{n=1}^{+\infty} \subseteq \alpha M$$

je konvergentní, neboť pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$\rho_{eukl}\,(y_m, y_n) = \rho_{eukl}\left(\frac{1}{\alpha} z_m, \frac{1}{\alpha} z_n\right) = \frac{1}{\alpha}\rho_{eukl}\,(z_m, z_n)\,,$$

a tedy je cauchyovská a prostor $(\mathbb{R}^n, eukl)$ je úplný. Počítejme

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \alpha y_n = \alpha \lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha y = z.$$

Vyjádřili jsme tedy z jako limitu posloupnosti bodů množiny αM, to znamená $z \in \mathrm{clo}\,(\alpha M)$. □

Lemmatu 2.3.4 nyní využijeme k důkazu následujícího tvrzení.

Lemma 2.3.5. *Nechť* $p \in (0, 1)$, $\alpha > 0$. *Potom platí*

$$\mathrm{clo}\left(D_p^C\,(\alpha X)\right) = \alpha\,\mathrm{clo}\left(D_p^C\,(X)\right).$$

Důkaz. Vyjděme z definice

$$D_p\,(\alpha X) = \bigcup_{s\in \mathrm{MVaR}_p(\alpha X)} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right).$$

Z věty 2.2.3 víme, že

$$D_p\,(\alpha X) = \bigcup_{s\in (\alpha \mathrm{MVaR}_p(X))} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right) = \bigcup_{\frac{s}{\alpha}\in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right).$$

Položme

$$s' = \frac{s}{\alpha}.$$

Potom s využitím faktu

$$\mathbb{R}^n_- = \alpha \mathbb{R}^n_-$$

dostáváme

$$
\begin{aligned}
D_p(\alpha X) &= \bigcup_{s' \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(\alpha s' + \alpha \mathbb{R}^n_-\right) = \bigcup_{s' \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(\alpha \left(s' + \mathbb{R}^n_-\right)\right) \\
&= \alpha \left(\bigcup_{s' \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s' + \mathbb{R}^n_-\right) \right) = \alpha D_p(X)
\end{aligned}
$$

Dále, vzhledem k tomu, že výrok

$$
z \notin \alpha \left(\bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right) \right)
$$

je ekvivalentní s výrokem

$$
\frac{z}{\alpha} \notin \bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(X)} \left(s + \mathbb{R}^n_-\right),
$$

tak platí

$$
D^C_p(\alpha X) = \alpha D^C_p(X).
$$

A podle lemmatu 2.3.4 dostáváme

$$
\mathrm{clo}\left(D^C_p(\alpha X)\right) = \alpha\, \mathrm{clo}\left(D^C_p(X)\right).
$$

□

Nyní dokážeme zobecnění vlastnosti pozitivní homogenity.

Věta 2.3.6. *Nechť* $p \in (0,1)$, $\alpha > 0$. *Potom platí*

$$
\mathrm{MCVaR}_p(\alpha X) = \alpha \mathrm{MCVaR}_p(X).
$$

Důkaz. Vyjděme z definice a využijme základních vlastností podmíněné střední hodnoty a tvaru funkce ψ.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MCVaR}_p(\alpha X) &= \mathrm{E}\left[\psi(\alpha X) \,|\alpha X \in \mathrm{clo}\left(D^C_p(\alpha X)\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \middle| \alpha X \in \mathrm{clo}\left(D^C_p(\alpha X)\right)\right] \\
&= \alpha \mathrm{E}\left[\psi(X) \,|\alpha X \in \mathrm{clo}\left(D^C_p(\alpha X)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Z lemmatu 2.3.5 víme, že

$$
\mathrm{clo}\left(D^C_p(\alpha X)\right) = \alpha\, \mathrm{clo}\left(D^C_p(X)\right),
$$

můžeme tedy psát

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MCVaR}_p(\alpha X) &= \alpha \mathrm{E}\left[\psi(X) \,|\alpha X \in \alpha\, \mathrm{clo}\left(D^C_p(X)\right)\right] \\
&= \alpha \mathrm{E}\left[\psi(X) \,|X \in \mathrm{clo}\left(D^C_p(X)\right)\right] \\
&= \alpha \mathrm{MCVaR}_p(X).
\end{aligned}
$$

□

Všimněme si opět, že věta 2.3.6 není formulována v tak silném znění, jako je tomu u věty 2.2.3.

Jak bylo zmíněno v kapitole 1, jednou z hlavních výhod CVaR oproti VaR je fakt, že má vlastnost subaditivity, potažmo že se jedná o koherentní míru rizika. Tuto vlasnost ale MCVaR obecně nemá. O tomto faktu se můžeme přesvědčit v příkladu 2.3.7, příklad není převzatý z literatury.

	$S_1 = 1$	$S_1 = 2$	$S_1 = 8,3$
$S_2 = 8$	0,07	0,015	0,015
$S_2 = 4$	0,56	0,12	0,120
$S_2 = 1,1$	0,07	0,015	0,015

Tabulka 2.9: Rozdělení náhodného vektoru S v příkladu 2.3.7

	$T_1 = 0,4$	$T_1 = 1,1$	$T_1 = 2$
$T_2 = 5$	0,01	0,18	0,01
$T_2 = 4$	0,0375	0,675	0,0375
$T_2 = 3$	0,0025	0,045	0,0025

Tabulka 2.10: Rozdělení náhodného vektoru T v příkladu 2.3.7

Příklad 2.3.7. *Mějme dva nezávislé náhodné vektory $S = (S_1, S_2)$, $T = (T_1, T_2)$. Jejich rozdělení můžeme vidět v tabulkách 2.9 a 2.10, všech ostatních hodnot z $\mathbb{R}^2$ nabývají s nulovou pravděpodobností. Volme $p = 0,9$. Ve všech případech uvažujeme*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

Jelikož S a T jsou nezávislé vektory s nezávislými složkami, můžeme snadno spočíst sdružené rozdělení $S + T$. Pak například pomocí PVB algoritmu spočteme

$$MVaR_p(S) = \{(8,3; 4)\},$$

$$MVaR_p(T) = \{(1,1; 5)\},$$

$$MVaR_p(S+T) = \{(10,3; 9), (9,4; 12)\}.$$

Odtud už vidíme

$$\begin{aligned}
\operatorname{clo}\left(D_p^C(S)\right) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_1 \geq 8,3\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_2 \geq 4\}, \\
\operatorname{clo}\left(D_p^C(T)\right) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_1 \geq 1,1\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_2 \geq 5\}, \\
\operatorname{clo}\left(D_p^C(S+T)\right) &= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_1 \geq 10,3\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n : z_2 \geq 12\} \\
&\quad \cup \left((9,4; 9) + \mathbb{R}_+^n\right).
\end{aligned}$$

Označme N_{RV} nosič náhodné veličiny RV a

$$K_{RVr} = \left\{\omega : RVr(\omega) \in \operatorname{clo}\left(D_p^C(RVr)\right)\right\}.$$

Zde RV značí obecnou náhodnou veličinu a RVr obecný náhodný vektor. Potom s využitím vlastností podmíněné střední hodnoty a tvaru funkce ψ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathrm{MCVaR}_p(S) = & \frac{1}{2\,\mathrm{P}(K_S)}\left(\sum_{s_1 \in N_{S_1}} s_1\,\mathrm{P}(S_1 = s_1, K_S) + \right.\\ & \left.\sum_{s_2 \in N_{S_2}} s_2\,\mathrm{P}(S_2 = s_2, K_S)\right) = \frac{1}{1,83}(2,145 + 4,0165) = 3,367\\ \mathrm{MCVaR}_p(T) = & \frac{1}{2\,\mathrm{P}(K_T)}\left(\sum_{t_1 \in N_{T_1}} t_1\,\mathrm{P}(T_1 = t_1, K_T) + \right.\\ & \left.\sum_{t_2 \in N_{T_2}} t_2\,\mathrm{P}(T_2 = t_2, K_T)\right) = \frac{1}{1,92}(1,094 + 3,993) = 2,64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{MCVaR}_p(S+T) = & \frac{1}{2\,\mathrm{P}(K_{S+T})}\left(\sum_{k_1 \in N_{S_1+T_1}} k_1\,\mathrm{P}(S_1 + T_1 = k_1, K_{S+T}) + \right.\\ & \left.\sum_{k_2 \in N_{S_2+T_2}} k_2\,\mathrm{P}(S_2 + T_2 = k_2, K_{S+T})\right)\\ = & \frac{1}{0,25}(0,6 + 1,415) = 8,11\end{aligned}$$

Z výše uvedeného snadno dopočteme

$$\mathrm{MCVaR}_p(S) + \mathrm{MCVaR}_p(T) = 6,02.$$

Vidíme, že

$$\mathrm{MCVaR}_p(S+T) > \mathrm{MCVaR}_p(S) + \mathrm{MCVaR}_p(T),$$

tedy se skutečně jedná o požadovaný protipříklad.

Uvědomme si, že z příkladu 2.3.7 víme, že existují náhodné vektory V_1, V_2 takové, že

$$\frac{1}{2}\mathrm{MCVaR}_p(V_1 + V_2) > \frac{1}{2}\mathrm{MCVaR}_p(V_1) + \frac{1}{2}\mathrm{MCVaR}_p(V_2).$$

Tedy z věty 2.3.6 víme, že pak také

$$\mathrm{MCVaR}_p\left(\frac{1}{2}V_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)V_2\right) > \frac{1}{2}\mathrm{MCVaR}_p(V_1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{MCVaR}_p(V_2).$$

To ale znamená, že MCVaR obecně nesplňuje ani vlastnost konvexity.

3. Aplikace

3.1 Formulace úlohy

Uvažujme následující problém.

Mějme cukráře, který si každé ráno peče čerstvé kokosky. Cukrárna má otevřeno každý pracovní den. A majitel stojí před otázkou, jak velké zásoby kokosek si na každý daný den připravit, aby to pro něj bylo co nejvýhodnější.

Z charakteru úlohy je patrných několik poznatků, navíc ještě formulujme několik dodatečných předpokladů a omezení.

- Kokosky napečeme vždy dané ráno před otevřením, tedy čas je uvažován diskrétně, tzn. 1 den je 1 časová jednotka.
- Počet napečených kokosek v daný den je nezáporná celočíselná proměnná.
- Je patrné, že kokosky nelze prodávat po částech, tedy počet prodaných kokosek v daný den je také nezáporná celočíselná proměnná.
- Obecně je možné řešit problém pro nekonečný časový horizont, nás ale budou zajímat jen následující časové úseky.

  $P1$ jen pondělí

  $P2$ pondělí a úterý

  $P3$ pondělí až středa

  $P4$ pondělí až čtvrtek

  Delší časové úseky nebudou z důvodu přílišné paměťové náročnosti v úloze uvažovány.
- Události, které se odehrávají mimo uvažovaný časový úsek, neuvažujeme.
- Kokosky, které v daný den majitel neprodá, může bez dalšího omezení prodávat po celý zbytek uvažovaného časového úseku.
- Budeme předpokládat, že pečení kokosek je nezávislé na přípravě jiných produktů.
- Rozdělení poptávky pro každý den a její závislost mezi jednotlivými dny jsou známé. Z výpočetních důvodů budeme navíc předpokládat, že nosič rozdělení poptávky je omezený shora. K problematice rozdělení poptávky se později vrátíme podrobněji.
- Započetí výrobního procesu s sebou nese samo o sobě dodatečné náklady.
- Existuje výrobní omezení cukrárny, tj. horní omezení na počet napečených kokosek za daný den.

- Budeme předpokládat, že ceny za výrobu, zahájení výrobního procesu a skladování jsou ve všech dnech kladné.

Za těchto předpokladů budeme chtít sestavit výrobní plán tak, aby za podmínky, že pravděpodobnost, že v libovolném časovém horizontu poptávka nepřesáhne počet vyrobených kusů, je najednou dostatečně velká, byly celkové náklady na výrobu a skladování co nejmenší. Poznamenejme, že uvedený problém je dobře znám pod názvem problém lot-sizingu, podrobněji se o něm zmiňuje například článek [12], z něhož je také převzata formulace problému.

Zaveďme značení.

T- Počet časových jednotek, které budeme v úloze uvažovat. V našem případě tedy $T = 1, \ldots, 4$.

M_t- Maximální možný počet jednotek vyprodukovaných v čase $t = 1, \ldots, T$. Nechť $M_t = 15$.

c_t- Cena za vyprodukování jedné jednotky v čase $t = 1, \ldots, T$. Nechť

$$c_t = 12 + \frac{t}{4}.$$

h_t- Cena za uskladnění jedné jednotky mezi časy t a $t+1$, kde $t = 1, \ldots, T$. Nechť $h_t = 2$.

H_t- Cena za uskladnění jedné jednotky mezi časy t a $T+1$, kde $t = 1, \ldots, T$. Tedy

$$H_t = \sum_{i=t}^{T} h_i.$$

k_t- Cena za zahájení výrobního procesu v čase $t = 1, \ldots, T$. Nechť $k_t = 70$.

d_t- Poptávka v čase $t = 1, \ldots, T$ je náhodná veličina, jejíž rozdělení budeme diskutovat níže.

o_t- Horní omezení poptávky v čase $t = 1, \ldots, T$. Nechť $o_t = 19 + t - 1$.

D_t- Celková poptávka do času $t = 1, \ldots, T$. Tedy

$$D_t = \sum_{i=1}^{t} d_i.$$

I_t- Stav zásob v čase $t = 1, \ldots, T$. Budeme uvažovat, že při neuspokojené poptávce nabývá záporných hodnot.

I_0- Počáteční stav zásob, tj. stav zásob v čase $t = 0$. Nechť $I_0 = 0$.

x_t- Počet jednotek vyprodukovaných v čase $t = 1, \ldots, T$.

y_t- Proměnná značící, zda v čase $t = 1, \ldots, T$ započneme výrobní proces, 1, pokud započneme, 0 jinak.

p- Dolní omezení pravděpodobnosti, se kterou v libovolném časovém horizontu poptávka nepřesáhne počet vyrobených kusů. Nechť $p = 0,8$.

Nyní už formálně zaveďme úlohu.

$$\min \sum_{t=1}^{T} (k_t y_t + c_t x_t + H_t x_t) \tag{3.1}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\begin{pmatrix} x_1 & \geq D_1 \\ x_1 + x_2 & \geq D_2 \\ \vdots & \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_T & \geq D_T \end{pmatrix} \geq p \\
&x_t \leq M_t y_t,\ t = 1, \ldots, T \\
&x_t \geq 0 \ \text{ celočíselná},\ \mathrm{t} = 1, \ldots, \mathrm{T} \\
&y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \ldots, T
\end{aligned}$$

V účelové funkci

$$\sum_{t=1}^{T} k_t y_t$$

vyjadřuje náklady spojené se započetím výroby,

$$\sum_{t=1}^{T} c_t x_t$$

vyjadřuje náklady spojené s vlastní výrobou a

$$\sum_{t=1}^{T} H_t x_t$$

vychází z následující aproximace převzaté z [12].

$$\mathrm{E} \sum_{t=1}^{T} h_t \max(0, I_t) \approx \mathrm{E} \sum_{t=1}^{T} h_t I_t = \sum_{t=1}^{T} H_t x_t + C,$$

kde C je konstanta. Tato aproximace vychází z pravděpodobnostního omezení v úloze 3.1. Podmínka $x_t \leq M_t y_t$ vyjadřuje omezení na maximální počet vyrobených kusů v čase $t = 1, \ldots, T$. Ostatní podmínky byly diskutovány výše.

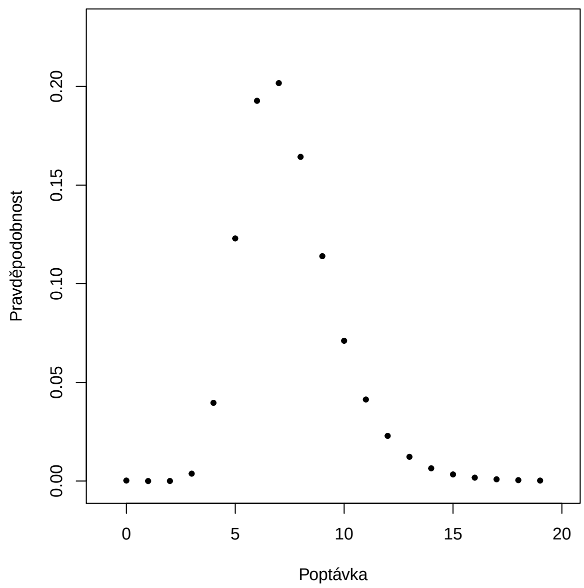
Zbývá definovat rozdělení jednotlivých poptávek. Požadavky, které budeme klást na charakter poptávky jsou, aby byla nezáporná, přitom navíc nabývala bodu 0 s kladnou pravděpodobností, a aby měla „normální“ průběh. Jak již bylo řečeno výše, budeme navíc chtít, aby poptávka byla omezená shora. Toho můžeme docílit například následujícím způsobem. Mějme náhodnou veličinu E, která má log-normální rozdělení s parametry

$$\mu = \frac{19}{10},$$
$$\sigma = \frac{3}{10},$$

parametry byly zvoleny tak, aby dávaly pro řešenou úlohu dobrý smysl. Pak definujme

$$\mathrm{P}\left(d_t = k\right) = F_E\left(k\right) - F_E\left(k-1\right),$$
$$\mathrm{P}\left(d_t = 0\right) = 1 - F_E\left(o_t\right),$$

kde $t \in \{1,2,3,4\}$, $k \in \{1,2,\ldots,o_t\}$ a F_E je distribuční funkce náhodné veličiny E. Vzhledem ke konstrukci se zřejmě jedná o rozdělení pravděpodobnosti, grafické znázornění jednotlivých pravděpodobností můžeme vidět na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Rozdělení náhodné veličiny d_1

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že

$$\{d_i\}_{i=1}^{T}$$

tvoří systém nezávislých náhodných veličin.

Dále si uvědomme, že

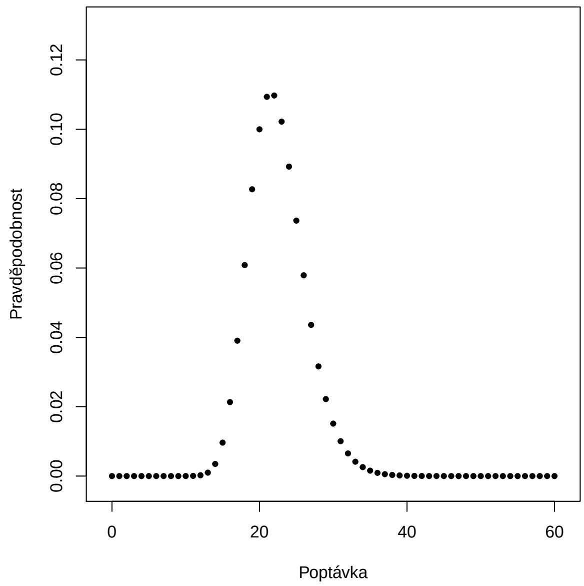
$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(D_1 = i_1, D_2 = i_2, D_3 = i_3, \ldots, D_T = i_T\right)\\
=&\,\mathrm{P}\left(d_1 = i_1, d_1 + d_2 = i_2, d_1 + d_2 + d_3 = i_3, \ldots, d_1 + d_2 + \ldots + d_T = i_T\right)\\
=&\,\mathrm{P}\left(d_1 = i_1, d_2 = i_2 - i_1, d_3 = i_3 - i_2, \ldots, d_T = i_T - i_{T-1}\right)\\
=&\,\mathrm{P}\left(d_1 = i_1\right)\mathrm{P}\left(d_2 = i_2 - i_1\right)\mathrm{P}\left(d_3 = i_3 - i_2\right)\ldots\mathrm{P}\left(d_T = i_T - i_{T-1}\right).
\end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme z důvodu lepších implementačních vlastností prostou substitucí převést na

$$\mathrm{P}\left(D_1 = j_1, D_2 = j_1 + j_2, D_3 = j_1 + j_2 + j_3, \ldots, D_T = j_1 + j_2 + \ldots + j_T\right) \tag{3.2}$$

$$= \mathrm{P}\left(d_1 = j_1\right) \mathrm{P}\left(d_2 = j_2\right) \mathrm{P}\left(d_3 = j_3\right) \ldots \mathrm{P}\left(d_T = j_T\right). \tag{3.3}$$

Známe tedy sdružené rozdělení náhodného vektoru $D = (D_1, D_2, \ldots, D_T)$. Pro lepší představu si marginální rozdělení náhodné veličiny D_3 můžeme prohlédnout na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Rozdělení náhodné veličiny D_3

Zabývejme se nyní otázkou řešení úlohy 3.1. Přímo z definice je patrné, že neuvažujeme-li další podmínky, je množina bodů splňující pravděpodobnostní omezení právě příslušná p-úrovnňová množina. A tedy podle věty 2.1.6 víme, že úlohu můžeme přepsat do tvaru

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[k_t y_t + (c_t + H_t)\, x_t\right] \tag{3.4}$$

za podmínek

$$\begin{aligned} &Ax \in \bigcup_{s \in \mathrm{MVaR}_p(D)} \left(s + \mathbb{R}_+^n\right) \\ &x_t \leq M_t y_t,\ t = 1, \ldots, T \\ &x_t \geq 0 \ \text{ celočíselná},\ \mathrm{t} = 1, \ldots, \mathrm{T} \\ &y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \ldots, T \end{aligned}$$

Zde jsme označili $x = (x_1, \ldots, x_T)'$ a A dolní trojúhelníkovou matici typu $T \times T$, která má pod diagonálou a na diagonále číslo 1. Podle důsledků 2.1.17 a 2.1.15

víme, že $\mathrm{MVaR}_p(D)$ je neprázdná a konečná.

Odtud již je vidět první možné řešení úlohy, totiž vyřešit úlohu

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[k_t y_t + (c_t + H_t)\, x_t\right] \tag{3.5}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
&x_1 \geq s_1 \\
&x_1 + x_2 \geq s_2 \\
&\ \vdots \\
&x_1 + x_2 + \ldots + x_T \geq s_T \\
&x_t \leq M_t y_t,\ t = 1, \ldots, T \\
&x_t \geq 0 \ \text{ celočíselná},\ \mathrm{t} = 1, \ldots, \mathrm{T} \\
&y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \ldots, T
\end{aligned}$$

pro každé $s = (s_1, s_2, \ldots, s_T) \in \mathrm{MVaR}_p(D)$ zvlášť a následně hledat celkové optimální řešení mezi nalezenými dílčími. Tohoto přístupu využijeme v následující podkapitole. Poznamenejme, že tento přístup je vhodný jen v případě, kdy p-eficientních bodů není příliš mnoho.

Dalším možným přístupem, který pro porovnání využijeme také, je přístup, který úlohu 3.5 přeformuluje do tvaru

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[k_t y_t + (c_t + H_t)\, x_t\right] \tag{3.6}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
&Ax - \sum_{j \in J} \lambda_j s^j \geq 0 \\
&\sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \\
&x_t \leq M_t y_t,\ t = 1, \ldots, T \\
&\lambda_j \in \{0, 1\},\ j \in J \\
&x_t \geq 0 \ \text{ celočíselná},\ \mathrm{t} = 1, \ldots, \mathrm{T} \\
&y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \ldots, T,
\end{aligned}$$

kde x a A jsou stejné jako v 3.4 a kde jsme označili

$$\mathrm{MVaR}_p(D) = \left\{s^j\right\}_{j \in J}.$$

Zde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_J)$ je vektor rozhodovacích proměnných, který nám pomůže zjistit, vůči kterému p-eficientnímu bodu má úloha 3.5 optimální řešení. Rozdílem oproti úloze 3.5 je fakt, že řešíme pouze jednu velkou úlohu místo většího počtu menších.

Pro zajímavost ještě porovnáme výsledek úloh 3.5 a 3.6 s výsledkem získaným metodou relaxace množiny přípustných řešení, tedy metodou, ve které proměnné λ_j, $j \in J$, nebudou muset splňovat podmínku celočíselnosti, tj. budeme řešit úlohu

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left[k_t y_t + (c_t + H_t)\, x_t\right] \tag{3.7}$$

za podmínek

$$\begin{aligned}
& Ax - \sum_{j \in J} \lambda_j s^j \geq 0 \\
& \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \\
& x_t \leq M_t y_t,\ t = 1, \ldots, T \\
& \lambda_j \geq 0,\ j \in J \\
& x_t \geq 0 \ \text{ celočíselná, t} = 1, \ldots, \text{T} \\
& y_t \in \{0, 1\},\ t = 1, \ldots, T.
\end{aligned}$$

Problematikou relaxace množiny přípustných řešení se podrobně zabývá článek [13].

3.2 Numerické výstupy

Všechny užité metody a algoritmy byly implementovány v [16], celkově má výpočet pro každý zkoumaný časový horizont následující části

(i) Inicializace proměnných. Zvolíme jednotlivé parametry tak, aby vyhovovaly dané úloze.

(ii) Výpočet sdružené distribuční funkce F_D. Nejprve pomocí implementované funkce *rozd.poptavky*() spočítáme rozdělení náhodných veličin $d_1, d_2 \ldots, d_T$. Funkce *sdr.distr.fce*() pak s využitím vztahu 3.2 spočte sdružené rozdělení náhodného vektoru D, čehož následně využije pro výpočet sdružené distribuční funkce F_D.

(iii) Výpočet p-eficientních bodů. Spočteme pomocí funkce *pef.body*(), která pro výpočet využívá PVB-algoritmu, využíváme tedy předpokladu omezení poptávky shora. Pomocná funkce *najdi.vsechny.pef.body*() je převzata z funkce *plepsuj*(), jejíž zdrojový kód je uveden v práci [14], zbytek funkce *pef.body*() je upraven tak, aby lépe odpovídal řešené úloze.

(iv) Vyřešíme úlohu 3.5. Pro výpočet úloh celočíselného programování je využita funkce *lp*() z knihovny *lpSolve*.

(v) Vyřešíme úlohu 3.6. Pro výpočet úlohy celočíselného programování je opět využita funkce *lp*().

(vi) Vyřešíme úlohu 3.7. Opět využijeme funkce *lp*().

Implementace v [16] bodů (iii), (iv), (v) a (vi) je přiložena v appendix, příloha A pak obsahuje funkce $pef.body()$, $rozd.poptavky()$ a $sdr.distr.fce()$. Poznamenejme, že funkce $sdr.distr.fce()$ z důvodů časové optimalizace algoritmu není implementována pro obecné T, jako příklad uvádíme její verzi pro $T = 3$.

Velkým problémem implementace popsaného algoritmu je velmi velká paměťová náročnost, a to zejména vzhledem k výpočtu sdružené distribuční funkce. Dokonce již pro časový horizont $T = 5$ nebylo při užité výpočetní technice možné alokovat dostatek místa v paměti počítače pro její uložení. To je také důvod, proč ve studii neuvažujeme delší časové horizonty.

Časovou náročnost jednotlivých částí algoritmu v každém z případů můžeme vidět v tabulce 3.1.

	P_1	P_2	P_3	P_4
(iii)	1	1	1	5
(iv)	3	4	3	3
(v)	1	1	2	2
(vi)	1	1	1	1

Tabulka 3.1: Doba běhu ve vteřinách jednotlivých částí algoritmu pro daný časový horizont

Uveďme výsledky optimalizačních úloh v jednotlivých případech.

$P1$ Optimální hodnota účelové funkce je $198,25$. Hodnoty jednotlivých rozhodovacích proměnných x a y můžeme vidět v tabulce 3.2. Příslušný p-eficientní bod je 9.

$P2$ Optimální hodnota účelové funkce je $405,75$. Hodnoty jednotlivých rozhodovacích proměnných x a y, pro něž účelová funkce nabývá svého minima, můžeme vidět v tabulce 3.3. Úlohy 3.5 a 3.6 jsou vztaženy vzhledem k p-eficientnímu bodu $(11, 17)$. Celkem byly nalezeny 3 p-eficientní body.

$P3$ Optimální hodnota účelové funkce je $575,25$. Hodnoty jednotlivých rozhodovacích proměnných x a y, pro něž účelová funkce nabývá svého minima, můžeme vidět v tabulce 3.4. Úlohy 3.5 a 3.6 jsou vztaženy vzhledem k p-eficientnímu bodu $(13, 20, 25)$. Celkem bylo nalezeno 7 p-eficientních bodů.

$P4$ Optimální hodnota účelové funkce je 824. Hodnoty jednotlivých rozhodovacích proměnných x a y, pro něž účelová funkce nabývá svého minima, můžeme vidět v tabulce 3.5. Úlohy 3.5 a 3.6 jsou vztaženy vzhledem k p-eficientnímu bodu $(13, 22, 29, 33)$, poznamenejme, že v úloze 3.5 bylo stejné hodnoty účelové funkce dosaženo i pro další p-eficientní bod $(14, 21, 29, 33)$. Celkem bylo nalezeno 25 p-eficientních bodů.

Při řešení úlohy 3.7 bylo ve všech případech dosaženo stejného výsledku jako v úloze 3.6.

x_1	y_1
9	1

Tabulka 3.2: Optimální hodnoty rozhodovacích proměnných v případě $P1$

x_1	x_2	y_1	y_2
11	6	1	1

Tabulka 3.3: Optimální hodnoty rozhodovacích proměnných v případě $P2$

x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
13	12	0	1	1	0

Tabulka 3.4: Optimální hodnoty rozhodovacích proměnných v případě $P3$

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4
13	9	11	0	1	1	1	0

Tabulka 3.5: Optimální hodnoty rozhodovacích proměnných v případě $P4$

Závěr

Základním námětem práce bylo rozšířit Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk do vyšší dimenze.

V první kapitole jsme zavedli obecně pojem míry rizika a definovali její vlastnosti. Dále jsme pak shrnuli tyto vlastnosti pro dvě v praxi nejužívanější jednorozměrné míry, Value-at-Risk a Conditional Value-at-Risk. Byly zmíněny také vztahy těchto měr.

Ve druhé kapitole jsme sepsali teorii p-eficientních bodů, jednoho z možných rozšíření kvantilu do vyšší dimenze. Jednotlivé výsledky teorie byly ilustrovány na příkladech, protipříkladech a obrázcích. Následně jsme popsali Prékopův-Vizváriův-Badicsův algoritmus pro hledání množiny všech p-eficientních bodů dané distribuční funkce. Hlavním omezením tohoto algoritmu je, že je využitelný jen pro náhodné vektory, jejichž nosičem je konečná množina. Navrhli jsme proto jeho možné zobecnění na spočetné množiny pro speciální případ dvourozměrného náhodného vektoru. V dalších částech druhé kapitoly jsme pak definovali pojmy Multivariate Value-at-Risk a Multivariate Conditional Value-at-Risk tak, jak jsou zavedeny v článcích [1] a [11]. Následně jsme popsali některé jejich vlastnosti, zejména jsme se zaměřili na vlastnosti ekvivariance vůči posunutí a pozitivní homogenity.

Náplní třetí kapitoly pak bylo vyřešení konkrétní úlohy lot-sizingu pro různé konečné časové horizonty a porovnání numerických výstupů jednotlivých úloh stochastického programování. Všechny zkoumané přístupy k problému byly implementovány v [16], největším výpočetním problémem se ukázal být výpočet sdružené distribuční funkce poptávky.

Možným doplněním práce by bylo zkoumat vztah p-eficientních bodů a dalšího možného přístupu ke zobecnění kvantilu, který využívá hloubkových funkcí, viz například [15]. Určitě by také bylo zajímavé se dále zabývat algoritmy pro výpočet p-eficientních bodů.

Seznam použité literatury

[1] Prékopa, András. *Multivariate value at risk and related topics.* Annals of Operations Research 193 (1), 49-69, 2012.

[2] Rockafellar, R. Tyrrel, Uryasev, Stanislav. *Conditional value-at-risk for general loss distribution.* Journal of Banking and Finance 26, p. 1443-1471, 2002.

[3] Pflug, George. *Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk.* Probabilistic Constrained Optimization, Series: Nonconvex Optimization and Its Applications, Vol. 49, p. 272-281, 2000.

[4] Rockafellar, R. Tyrrel, Uryasev, Stanislav. *Optimization of Conditional Value-at-Risk.* Research Report 99-4, ISE Dept. University of Florida, 1999.

[5] Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy, Eber, Jean-Marc, Heath, David. *Coherent Measures of Risk.* Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, p. 203-228, 1999.

[6] Larsen, Nicklas, Mausser, Helmut, Uryasev, Stanislav. *Algorithms for Optimization of Value-at-Risk.* Financial Enginnering, E-commerce and Supply Chain, Applied Optimization Vol. 70, p. 19-46, 2002.

[7] Yoshiba, Toshinao, Yamai, Yasuhiro. *On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall.* Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2002.

[8] Shapiro, Alexander, Dentcheva, Darinka, Ruszczynski, Andrzej. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory, Second Edition.* SIAM, 2014.

[9] Klee, Victor, Danzer, Ludwig, Grünbaum, Branko. *Helly's Theorem and Its Relatives.* Convexity: Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. VII, American Mathematical Society, p. 101-177, 1963.

[10] Rockafellar, R. Tyrrel. *Convex Analysis.* Princeton University Press, 1997.

[11] Lee, Jinwook, Prékopa, András. *Properties and Calculations of Multivariate Risk Measures: MVaR and MCVaR.* Rutcor Research Report, RRR 25-2012, 2012.

[12] Beraldi, Patrizia, Ruszczynski, Andrzej. *A Branch and Bound Method for Stochastic Integer Problems Under Probabilistic Constraints.* Optimization Methods and Software, 17:3, p. 359-382, 2002.

[13] Prékopa, András, Vizvári, Béla, Badics, Tamás. *Programming Under Probabilistic Constraint with Discrete Random Variable.* Rutcor Research Report, RRR 10-96, 1996.

[14] Murgaš, Karel. *Úlohy pravděpodobnostního programování s diskrétním rozdělením.* Diplomová práce na MFF UK v Praze, vedoucí práce Jitka Dupačová, 2010.

[15] Hlubinka, Daniel. *Výpravy do hlubin dat.* Proceedings of ROBUST, 2008.

[16] R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* Vienna, Austria, 2014.

Appendix

```
library(lpSolve)
source("pomocnefce.R")

################################################################
#### NAČTENÍ VOLITELNÝCH PARAMETRŮ ############################

t<- 3 ## casovy horizont
om<- seq(19,19+t-1,by=1) ## horní omezení poptávky v jednotlivých
                         ## dnech (vektor délky t)
p<- 0.8 ## požadovaná hodnota pravděpodobnosti pro
        ## pravděpodobnostní omezení

M<- rep(15,t) ## výrobní omezení v jednotlivých
              ## dnech (vektor délky t)
c<- seq(12.25,12.25+((t-1)/4),by=0.25) ## cena za vyprodukování
                                       ## 1 jednotky
                                       ## v jednotlivých dnech
                                       ## (vektor délky t)
h<- rep(2,t) ## cena za uskladnění 1 jednotky mezi časy
             ## t a t+1 (vektor délky t)
k<- rep(70,t) ## cena za zahájení vyrobního procesu v jednotlivých
              ## dnech (vektor délky t)
mu<- rep(1.9,t) ## parametr mu výchozího log-normalního rozdělení
                ## pro napočítání poptávky v jednotlivých dnech
                ## (vektor délky t)
sigma<- rep(0.3,t) ## parametr sigma výchozího log-normalního
                   ## rozdělení pro napočítání poptávky
                   ## v jednotlivých dnech (vektor délky t)

################################################################
#### VÝPOČET ODVOZENÉHO PARAMETRU #############################

H<- c()
for (i in 1:t){H<- c(H,sum(h[i:t]))}

################################################################
#### VÝPOČET SDRUŽENÉ DISTRIBUČNÍ FUNKCE NÁH. VEKTORU D #######

popt<- rozd.poptavky(t,om,mu,sigma) ## vypočte rozděleni
                                    ## poptávky v jednotlivých
                                    ## dnech
df<- sdr.distr.fce(popt) ## vypočte sdruženou distribučni
                         ## funkci náhodného vektoru D

################################################################
```

```
#### VÝPOČET P-EFICIENTNÍCH BODŮ ##############################

pef<- pef.body()

###############################################################
#### ŘEŠENÍ ÚLOHY 3.5 #########################################

## výpočet matice konstant
if (t==1){
  lp.matrix<- rbind(c(0,1),c(-M,1))
} else{
  lp.matrix<- rbind(cbind(matrix(0,t,t),
                          1*lower.tri(matrix(1,t,t),diag=TRUE)),
                    cbind(diag(-M),diag(rep(1,t))))
}

## průchod cyklem přes všechny p-eficientní body
obj<- -1
for (i in 1:dim(pef)[2]){
  obj.pom<- lp(direction="min",objective.in=c(k,c+H),
               const.mat=lp.matrix,
               const.dir=c(rep(">=",t),rep("<=",t)),
               const.rhs=c(pef[,i],rep(0,t)),
               int.vec=seq(t+1,2*t,by=1),
               binary.vec=seq(1,t,by=1))
  if ((obj[1]<0|obj[1]>obj.pom$objval) & (obj.pom$status==0)){
    obj<- c(obj.pom$objval,obj.pom$solution)
  }
}
## je-li stále obj=-1, tak pro žádný p-eficientní
## bod neexistuje přípustné řešení
if (obj[1]==-1){obj<- "No feasible solution found."} else{
  names(obj)<- c("hodnota uc. fce",paste("y",1:t,sep=""),
                 paste("x",1:t,sep=""))}
obj

###############################################################
#### ŘEŠENÍ ÚLOHY 3.6 #########################################

## výpočet matice konstant
lp.matrix<- rbind(cbind(lp.matrix,
                        rbind(-pef,matrix(0,t,dim(pef)[2]))),
                  c(rep(0,2*t),rep(1,dim(pef)[2])))

obj.pom<- lp(direction="min",
             objective.in=c(k,c+H,rep(0,dim(pef)[2])),
             const.mat=lp.matrix,
             const.dir=c(rep(">=",t),rep("<=",t),"="),
```

```
            const.rhs=c(rep(0,2*t),1),
            int.vec=seq(t+1,2*t,by=1),
            binary.vec=c(seq(1,t,by=1),
                         seq(2*t+1,2*t+dim(pef)[2],by=1)))

if (obj.pom$status==2){obj2<- "No feasible solution found."
}else{
  obj2<- c(obj.pom$objval,obj.pom$solution)
  names(obj2)<- c("hodnota uc. fce",paste("y",1:t,sep=""),
                  paste("x",1:t,sep=""),
                  paste("lambda",1:dim(pef)[2],sep=""))
}
obj2

################################################################
#### ŘEŠENÍ ÚLOHY 3.7 #########################################

obj.pom<- lp(direction="min",
             objective.in=c(k,c+H,rep(0,dim(pef)[2])),
             const.mat=lp.matrix,
             const.dir=c(rep(">=",t),rep("<=",t),"="),
             const.rhs=c(rep(0,2*t),1),int.vec=seq(t+1,2*t,by=1),
             binary.vec=seq(1,t,by=1))

if (obj.pom$status==2){obj3<- "No feasible solution found."
} else{
  obj3<- c(obj.pom$objval,obj.pom$solution)
  names(obj3)<- c("hodnota uc. fce",paste("y",1:t,sep=""),
                  paste("x",1:t,sep=""),
                  paste("lambda",1:dim(pef)[2],sep=""))
}
obj3
```

Přílohy