UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Žákovské obtíže a chyby při úpravách algebraických výrazů

Diplomová práce

Autor práce:	**Bc. Vladimír Bílek**
Studijní program:	Učitelství pro střední školy
Obor studia:	Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy matematika – tělesná výchova
Vedoucí práce:	**doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**

Praha 2014

CHARLES UNIVERSITY IN PRAGUE

FACULTY OF EDUCATION

Department of Mathematics and Mathematical education

Pupils' Problems and Mistakes when Manipulating Algebraic Expressions

Master's Thesis

Author:	**Bc. Vladimír Bílek**
Study programme:	Secondary School Teacher Education
Branch of study:	Training Teachers of General Subjects at Lower and Higher Secondary Schools Mathematics – Physical Education
Supervisor:	**doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.**

Prague 2014

Prohlášení

Tuto práci jsem vypracoval samostatně, veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 1. 12. 2014 ……..………..………………………

Vladimír Bílek

Poděkování

Rád bych poděkoval paní doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za cenné rady a čas, který věnovala vedení mé diplomové práce.

Dále děkuji rodičům, Tereze, Běle a Jiřímu za podporu během studií.

Název:

Žákovské obtíže a chyby při úpravách algebraických výrazů.

Abstrakt:

Práce se zabývá obtížemi a chybami při úpravách algebraických výrazů u žáků na druhém stupni základního vzdělávání a je rozdělena na teoretickou a experimentální část.

Teoretická část se zabývá popisem manipulace s algebraickými výrazy, vybranými výsledky mezinárodních srovnávacích výzkumů a zahraniční studií na téma algebraických výrazů. Významnou část tvoří analýza třech řad učebnic, podle nichž jsou vyučováni žáci účastnící se mého výzkumu. Jako poslední je uvedena klasifikace chyb v úpravách algebraických výrazů.

Jádrem práce je experimentální část, jejímž cílem bylo identifikovat obtíže a chyby žáků při úpravách algebraických výrazů a při práci s nimi. Účastníky výzkumu bylo šest žáků třetího ročníku osmiletého gymnázia a osm žáků devátého ročníku základní školy. Vstupní soubor úloh byl vytvořen v rámci projektu GA ČR Kritická místa matematiky na základní škole. Šetření bylo provedeno individuálně s každým žákem metodou monitorovaných klinických rozhovorů nad řešením testovaných úloh. Získaná data byla kvalitativně zpracována po jednotlivých úlohách. Identifikované chyby byly klasifikovány a významné z nich ilustrovány konkrétními pracemi žáků. V závěrečném shrnutí poznatků jsou dány do souvislosti možné příčiny nejčastějších chyb vzhledem k používaným učebnicím a popsány postřehy z průběhu projektu.

Klíčová slova:

Algebraický výraz, chyby v úpravách, analýza učebnic, TIMSS

Title:

Pupils' Problems and Mistakes when Manipulating Algebraic Expressions

Abstract:

The thesis focuses on mistakes and problems in manipulations with the algebraic expressions occurring to pupils at the second level of Elementary school. The thesis is divided into a theoretical and experimental part.

The theoretical part contains description of manipulations with algebraic expressions, selected results of international comparative surveys, and an analysis of related foreign research. Analysis of three series of textbooks, according to which pupils involved in the experimental project are taught, is essential for understanding of possible origins of their mistakes. The classification of mistakes in manipulations with algebraic expressions is included.

At the core of the work is the experimental part aiming to identify problems and mistakes of pupils when manipulating and working with algebraic expressions. The participants of the research consisted of six third-grade pupils of an eight-year Grammar school (13–14 years old) and eight ninth-grade pupils of an Elementary school (14–15 years old). Test used for my experiment came from the GA ČR project Critical parts of mathematics in primary school. The investigation was carried out individually with each pupil by the method of monitoring clinical interviews over the solution of the test tasks. The obtained data was qualitatively processed by each task. Identified mistakes were classified and the most frequent mistakes were illustrated by specific incorrect solutions of the pupils. In the final summary of my findings, possible causes of the most frequent mistakes are linked to the way algebraic expressions are taught by used textbooks. Insights from the course of the project are provided.

Key words:

Algebraic expression, mistakes when manipulating, textbook analysis, TIMSS

OBSAH

ÚVOD

Z mezinárodních srovnávacích výzkumů TIMSS vyplývá, že matematická gramotnost českých žáků spíše klesá. Jako budoucí učitel chci svou prací přispět ke zkvalitnění výuky na školách a zmíněný zhoršující se trend změnit. Zajímalo mě tedy, jaká je příčina obtíží žáků v problematických tématech. Úpravy algebraických výrazů jsem si vybral ze dvou důvodů. Prvním bylo zjištění, že čeští žáci zaznamenali mezi léty 1999 a 2007 v rámci výzkumu TIMSS velký propad právě v algebře (viz oddíl 1.3.1), a druhým, že úprava algebraických výrazů je zastoupena v široké oblasti školské matematiky, čímž může být vliv této matematické látky rozsáhlejší.

Díky vedoucí své práce jsem měl možnost zapojit se do projektu GA ČR *Kritická místa matematiky na základní škole,* a konkrétně tak přispět svojí prací a získanými výsledky k dosažení jednoho z cílů tohoto projektu, kterým je vyhledání kritických míst, v nichž žáci selhávají. Hlavním cílem mé práce je identifikovat obtíže a chyby žáků druhého stupně základní školy při úpravách algebraických výrazů. K dosažení hlavního cíle jsem práci rozdělil na dvě části, teoretickou a experimentální, s dílčími cíli.

V teoretické části jsou vymezeny potřebné pojmy, krátce popsána manipulace s algebraickými výrazy a vybrány související výsledky z mezinárodních srovnávacích výzkumů a zahraničních studií. Dílčím cílem je analýza třech řad učebnic v oddíle 1.4. Analýza byla provedena z hlediska zavedení racionálních celistvých algebraických výrazů, tedy mnohočlenů. Také jsem se zaměřil na to, jak autoři zavádějí základní operace a úpravy těchto mnohočlenů, a zkoumal jsem použití písmen jako proměnných. Tyto učebnice používají školy, z nichž byli vybráni žáci účastnící se rozhovorů, jejichž výsledky jsou shrnuty ve druhé části práce. Zvláštní pozornost je věnována klasifikaci chyb při úpravách algebraických výrazů (oddíl 1.5), z které vychází hodnocení výsledků v experimentální části.

Jádro práce tvoří experimentální část, v níž je dílčím cílem analyzovat celkem čtrnáct klinických rozhovorů s žáky druhého stupně základní školy. Jsou zde identifikovány a klasifikovány jejich nejčastější chyby, jichž se dopustili při řešení úloh na úpravu algebraických výrazů. V závěrečném shrnutí poznatků jsou nejprve popsány chyby s největší četností v jednotlivých úlohách; mimo jiné je zde naznačena možná souvislost těchto chyb s učebnicemi, které žáci používají, a následně uvedeny některé postřehy z průběhu rozhovorů.

V závěru jsou shrnuty poznatky, které vyplynuly z výsledků analýzy učebnic a rozhovorů s žáky, a doporučení pro výukovou praxi.

Práce je doplněna dvojicí příloh: Příloha A – Zadání úloh hlavní studie a Příloha B – Přepis rozhovoru nad řešením úlohy č. 4 (Sára).

1 Teoretická část

1.1 Vymezení pojmů

V odborné literatuře se uvádí různé definice algebraického výrazu a popisují jeho úpravy či zjednodušení. Nejprve se zaměřím na přehledy matematiky pro základní školy. V knize[1] od autorů Odvárko a Kadleček nenalezneme definici algebraického výrazu, ale pouze mnohočlenu:

> Výrazy $3x$, $-6ab$, $1{,}4k^2lm^2$, y, -29, 6 jsou příklady jednočlenů. Koeficient jednočlenu je číslo. Mnohočlen se nazývá **jednočlen nebo** výraz, který je vyjádřen jako **součet jednočlenů**.

(Odvárko & Kadleček, 2004: s. 66)

V přehledu[2] učiva matematiky od autorky Ženaté jsou definovány nejprve číselné výrazy a poté objasněn pojem proměnná, který se objeví v souvislosti se vzorcem pro objem kvádru:

> Základem aritmetiky jsou čísla a 4 početní výkony, které s nimi provádíme: **sčítání** $+$, **odčítání** $-$, **násobení x(·)**, **dělení** :. Pomocí těchto výkonů dostáváme číselné výrazy.

(Ženatá, 2010: s. 183)

> Čísla ve vzorci zapisujeme **písmeny (proměnnými)**, což provedeme vždy, když chceme **jedním** zápisem zapsat **všechny** výpočty, které se provádějí stejným způsobem. Musíme vědět, že proměnná zapsaná písmenem zastupuje různá čísla nebo čísla s jednotkami.

(Ženatá, 2010: s. 186)

V kapitole *Mnohočleny* autorka definuje pojmy člen, mnohočlen, jednočlen apod. Popisuje i jednotlivé úpravy a operace s mnohočleny – sčítání, odčítání, násobení, dělení, rozklad na součin, vytýkání a vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu či rozdíl druhých mocnin. Ani zde se ale pojem algebraický výraz neobjeví.

> Číslo zapsané číslicemi nebo písmenem, či součin, podíl (zlomek), mocninu, nazýváme **jednočleny**. Součet (rozdíl) několika jednočlenů se nazývá **mnohočlen**.

[1] Odvárko, O. & Kadleček, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus.

[2] Ženatá, E. (2010). *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením*. Benešov: Blug.

Mnohočleny můžeme dále upravovat. K tomu použijeme komutativního a asociativního zákona. Členy vhodně sdružíme a sečteme, např.: $4m^2 - 6mn - 3 - 3m^2 + 4mn =$ $= (4m^2 - 3m^2) + (-6mn + 4mn) - 3 = m^2 - 2mn - 3.$

(Ženatá, 2010: s. 197)

Nahlédneme-li do přehledu[3] středoškolské matematiky, objevíme již přímo definici algebraického výrazu, jeho další dělení a co se rozumí pod pojmem úprava algebraického výrazu:

Algebraický výraz je výraz (zápis) skládající se z čísel a z písmen označujících proměnné, jež jsou spojeny znaky operací sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování, popř. obsahuje též závorky, které určují pořadí provádění naznačených operací.

Každá **proměnná** v algebraickém výrazu zastupuje libovolné číslo z jisté (dané) číselné množiny, jež se nazývá **obor proměnné**.

Algebraické výrazy, v nichž se nevyskytují odmocniny z proměnných, se nazývají **racionální algebraické výrazy**. Dělí se na **racionální celistvé výrazy (mnohočleny)** a **racionální lomené výrazy** vyjádřené zlomky, jejichž čitatelem i jmenovatelem jsou mnohočleny.

(Polák, 2008: s. 120)

Úpravou algebraického výrazu se rozumí provedení sledu operací, jimiž se od daného algebraického výrazu V_1 přejde k jinému algebraickému výrazu V_2, pro který platí $V_1 = V_2$ na společném definičním oboru D obou výrazů V_1, V_2. Tento společný definiční obor se dostane z podmínek, za nichž daný výraz a jeho provedené úpravy mají smysl. Prakticky se zpravidla uvádějí jen tyto podmínky.

Speciálně se **zjednodušením algebraického výrazu** rozumí takové jeho úpravy, po nichž dostaneme výraz s menším počtem členů, závorek, zlomků apod. Jindy se v úlohách o úpravách algebraických výrazů např. požaduje, aby upravený výraz měl tvar součinu, resp. neobsahoval podíl, popř. neobsahoval odmocninu ve jmenovatelích zlomků apod.

(Polák, 2008: s. 122)

[3] Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus.

1.2 Manipulace s algebraickými výrazy

Žák se začíná seznamovat s použitím písmen v matematice již na prvním stupni základního vzdělávání, například při práci s geometrickými útvary, k označení neznámého čísla v různých doplňovačkách, schématech i jednoduchých rovnicích, v zápise obecných vlastností operací s přirozenými čísly, v záhlaví tabulek atd. Do druhého stupně si nese základní představu, co písmena znamenají, vyjadřují, kde se s nimi může setkat a možná i jak s nimi pracovat. Představy by měly být postupně strukturovány, usměrněny a práce s algebraickými výrazy by se měla stát běžnou součástí hodin matematiky.

Práci s písmeny a tedy i s algebraickými výrazy rozdělují z didaktického hlediska Bero a Hejný (1990: s. 144) do třech hladin. Jednotlivé hladiny zde blíže představím.

1. **Modelování**

Jde o nejnižší a zároveň nejdůležitější hladinu jazyka algebry. Jedná se o vyjádření slovního textu symboly, se kterým se setkáme v geometrii při určování délek, obvodů a obsahů, ve slovních úlohách, rovnicích a nerovnicích, přímé a nepřímé úměrnosti, trojčlence atd. Například obvod obdélníka se stranami a a b symbolicky zapíšeme $o = 2(a + b)$, nebo sudé číslo zapíšeme jako $2n$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

Jedním ze způsobů, kterým se žák učí modelovat, je *imitace*. Učitel na obrázku ukáže, že obsah trojúhelníka se určí jako součin délky základny a výšky lomený dvěma a ihned symbolicky zapíše vztah $S = \frac{zv}{2}$. Tím nedal žákovi žádný čas pro jeho vlastní bádání a vytvoření symbolického zápisu, ale předal mu hotový fakt. Žáka při získání nového poznatku nedoprovázely emoce spojené s objevením a radost z vlastního úspěchu. Jak uvádí Bero a Hejný, nový poznatek je pak spíše formálního charakteru, což se často může projevit na jeho kvalitě a trvalosti. Lepším způsobem, z hlediska kvality a trvalosti poznatku, je jeho objevení přímo žákem. K tomu je potřeba, aby učitel při přechodu od nesymbolického zápisu k symbolickému dal žákovi zejména dostatek času. Aby žák sám spatřil výhodu symbolů oproti slovům nebo větám a prožil tak radost z objevu. Podle Bera a Hejného stačí, když učitel žákovo bádání pouze usměrňuje a na konci mu představí, jaké symboly a zápisy jsou například obecně používány.

Pokud je již žák s používáním symbolů lépe seznámen, můžeme jeho vhled do modelování více prohloubit zařazením inverzních úloh. Například je dán rozsáhlejší text, který obsahuje různé informace o školní třídě, např. její rozměry[4], počet oken a dveří včetně rozměrů, velikost a umístění tabule atd. Dále je předloženo několik různých výrazů a žák má například zjistit, že jeden z výrazů vyjadřuje celkový obsah obvodových stěn. Tedy například kolik bychom potřebovali metrů čtverečných tapety na vytapetování třídy. Jiným typem inverzní úlohy je přímo zadaný algebraický výraz, který má žák geometricky modelovat, například $(a+b)^2$.

2. Standardní manipulace

Jak již název napovídá, jedná se o standardní úpravy algebraických výrazů podle známých pravidel a vzorců, kterým se žák postupně učí. Například zjednodušení výrazu $2m + 6m$ na výraz $8m$ nebo vzorec pro druhou mocninu součtu $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$. Úpravy výrazů, zejména ty naučené na druhém stupni základního vzdělávání, by se měly časem stát nadneseně „běžnou rutinou“. V budoucnu se žák setká se složitějšími úlohami, jejichž součástí bude právě úprava výrazu. Bude zapotřebí, aby se více soustředil na hlavní cíl úlohy a postup, jak se dobrat výsledku, popřípadě na složitější úkony, než jsou základní úpravy výrazů. Při řešení by ho úprava výrazu neměla zbytečně brzdit a odvádět jeho pozornost. Příkladem může být žák, který řeší průběh funkce. Než samotný předpis funkce upraví na vhodnější tvar, se kterým by se lépe pracovalo, ztratí většinu času a úlohu nestihne dokončit. Další možnost je, že předpis díky neznalostem úprav nechá v původním tvaru. V následném derivování složitého výrazu je pak větší šance udělat chybu, nemluvě o dalším postupu a časové náročnosti. Obdobně tomu může být u žáka, který rozumí analytické geometrii. V úloze zaměřené na průsečík dvou různoběžných přímek sice ví, že průsečík existuje (geometricky by ho dokonce uměl najít), ale při výpočtech „ztroskotá“ na úpravě výrazů v soustavě rovnic. Těmto problémům samozřejmě chceme předejít a naučit žáky kvalitní standardní manipulaci s výrazy. I zde je tomu obdobně jako u modelování.

Prvním faktorem ovlivňujícím manipulaci je způsob získaných informací. Jednou z možností je transmise, kde učitel žákovi předá informace o pravidlech a ten je „vstřebává“ a procvičuje. Jiná možnost je, že žák sám odvodí obecné pravidlo na základě předešlých zkušeností při řešení úloh. Učitel žáka pouze kontroluje a usměrňuje (například vytvoří sérii cílených úloh, díky kterým by se měl žák dobrat konkrétního závěru). Další možností je kombinace obou dvou, kde jeden ze způsobů převládá.

Druhým, podle P. Bera a M. Hejného zároveň nejdůležitějším, faktorem je opakování a procvičování. Pouze velkým množstvím vyřešených různorodých úloh se práce s výrazy stane samozřejmou. Autoři ale upozorňují na dvě úskalí. Prvním je řešení stereotypních úloh, které

[4] Rozměry mohou být zadány nejprve číslem a poté i proměnnou

může nadané žáky časem snadno otrávit a zbytečně brzdit ve vývoji. Druhým, v podstatě opačným úskalím, je řešení složitějších úloh, jež si nadaní žáci vyžadují. Ti jsou sice motivováni a uspokojováni, ale na úkor slabších žáků, kterým nemůže být věnována dostatečná péče. Snáze se pak mohou uchýlit k memorování či úplnému rezignování na chápání látky. Řešení je několik a na různých úrovních, například školy se zaměřením na matematiku pro nadané děti, rozdělení do skupin podle výkonnosti v rámci jednoho ročníku na jedné škole, práce ve skupinách ve třídě, zařazení asistentů do tříd či vhodný výběr metody výuky na úrovni učitele. Jednu z těchto metod představují i autoři.

Metoda tří cest je založena na volbě obtížnosti cesty, kterou si žák sám volí a díky níž dojde k novému poznatku. Příkladem může být soubor dvaceti cílených úloh (viz Bero & Hejný, 1990: s. 146), jejichž obtížnost se postupně zvyšuje, princip jejich řešení ale zůstává stejný. Do první, nejjednodušší cesty, jsou vybrány počáteční úlohy 1 – 7. Druhou cestu tvoří úlohy ze dvou třetin souboru s tím, že některé jsou vynechány, např. úlohy 2, 4, 5, 8, 10, 12, 13. Třetí, nejstrmější cestu, tvoří úlohy i z konce souboru, např. 3, 9, 11, 15, 18, 19, 20. Tím, že žák jednotlivé úlohy ze souboru vidí, uváží, po jaké cestě se vydá.

3. **Strategická manipulace**

Nejvyšší hladinou v práci s algebraickými výrazy je strategická manipulace. Zde si žák už nevystačí s doposud naučenými pravidly, vzorci a poučkami, které ho dovedly k cíli. Potřebuje něco víc, nápad, myšlenku či objev vhodné strategie postupu. Hranice mezi standardní a strategickou manipulací je pro každého žáka individuální. Nalézt kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2$ je pro žáka sedmého ročníku na hladině strategické manipulace. Pro vysokoškoláka je to však běžná rutina na hladině standardní manipulace. I v našich rozhovorech z druhé části práce se objevila úloha na hladině strategické manipulace. V úloze 8 bylo úkolem určit délku strany čtverce, jehož obsah je vyjádřen výrazem $25x^2 - 10xy + y^2$. To pro žáky osmiletého gymnázia, v té době ještě neznající vzorec pro $(a - b)^2$, bylo velkým problémem.

1.3 Zahraniční výzkumy a studie týkající se úprav algebraických výrazů

Oddíl je věnován vybraným výsledkům mezinárodního srovnávacího výzkumu TIMSS a jednomu zahraničnímu výzkumu v oblasti úprav algebraických výrazů.

1.3.1 Mezinárodní srovnávací výzkumy v matematice

Čeští žáci se již několik let v pravidelných cyklech účastní mezinárodních srovnávacích výzkumů v oblasti matematické gramotnosti. Od roku 1995 je Česká republika zapojena do výzkumu TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study), který je projektem IEA (The International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Testování proběhlo v letech 1995, 1999, 2007 a 2011 u žáků 4. a 8. ročníků[5] základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Oproti některým výzkumům (například PISA) jsou úlohy v testu více zaměřeny na školní vědomosti a dovednosti a žáci často mohou volit mezi čtyřmi až pěti nabídnutými odpověďmi (Tomášek et al., 2008).

Mezinárodní srovnávací výzkumy v matematice nám poskytují možnost sledovat u velkého vzorku žáků různé ukazatele, kromě schopnosti řešit vybrané úlohy i vztah k matematice či matematické sebevědomí. Mezinárodní a národní zprávy nám přinášejí pouze základní informace o výsledcích těchto výzkumů; např. výsledky českých žáků v porovnání s ostatními zúčastněnými zeměmi, porovnání s předchozími ročníky, genderové rozdíly v úspěšnosti atd. „Z hlediska didaktiky matematiky jsou však důležitější než celkové výsledky informace týkající se konkrétních oblastí učiva, jimž je možno přičítat pokles ve výsledcích TIMSS a PISA." (Rendl & Vondrová, 2014: s. 25). To je cílem i této diplomové práce, tedy vyhledat konkrétní obtížná místa v oblasti algebraických výrazů, což je jedním z podtémat oblasti algebry ve výzkumech TIMSS. Z národní zprávy[6] výzkumu TIMSS 2007 vyplývá, že úspěšnost českých žáků mezi léty 1999 a 2007 nejvíce klesla právě v oblasti algebry (Tomášek et al., 2008: s. 11).

Ústav pro informace ve vzdělávání vydal roku 2009 publikaci[7] obsahující uvolněné matematické úlohy výzkumu TIMSS 2007, kde kromě zadání, cíle úlohy a náročnosti autoři uvádějí i četnost jednotlivých odpovědí českých žáků, která je doplněna krátkým komentářem týkajícím se úspěšnosti či možných příčin chybných výsledků. Jako ilustraci představím úlohu M31 (M04-03) včetně četnosti odpovědí českých žáků (správná odpověď je zvýrazněna červenou barvou) a originálního komentáře odborníků (Tomášek et al., 2009: s. 41). Úlohu jsem vybral záměrně, neboť se objevuje i v mnou použitém testu (jako úloha 4) v rámci rozhovorů s žáky (viz oddíl 2.4).

[5] V roce 1999 byli v České republice testováni pouze žáci 8. ročníků.
[6] Tomášek, V., et al. (2008). *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.
[7] Tomášek, V., et al. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník.* Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání.

Úloha M31 (04-03)

$a = 3$, $b = -1$.

Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

A) 15
B) 14
C) 13
D) 9

Odpovědi českých žáků				
Odpověď	**A**	B	C	D
Četnost [%]	**33,8**	5,8	10,4	44,6

V úloze žáci prokazují, že umí dosadit za proměnné do algebraického výrazu, umí provést početní operace ve správném pořadí a umí počítat se zápornými čísly. Úloha neměla příliš vysoké procento úspěšnosti a čeští žáci se nelišili od mezinárodního průměru. V řešení úlohy byly úspěšnější dívky, přičemž rozdíl v úspěšnosti řešení mezi českými dívkami a chlapci je značný. Z nesprávných odpovědí měla nejvyšší četnost odpověď D, žáci chybně dosadili záporné číslo.

(Tomášek et al., 2009: s. 41)

Analýzou výzkumu TIMSS 2007 se podrobněji zabývají Rendl a Vondrová (2014), kteří pomocí sekundární analýzy výsledků českých žáků při řešení úloh TIMSS 2007 identifikovali tzv. *kritická místa v matematice*. Autoři popisují pravděpodobné příčiny obtíží v tzv. *slabých* a *velmi slabých* úlohách, které byly autory vybrány a rozděleny podle následujícího klíče (Rendl & Vondrová, 2014: s. 29):

1. *Velmi slabé* úlohy – úlohy, ve kterých byli čeští žáci podprůměrně úspěšní oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru.
2. *Slabé* úlohy – odchylka úspěšnosti českých žáků je v rozmezí 0 až $+5$ % oproti průměrné úspěšnosti mezinárodního souboru (žáci byli v úlohách průměrní či lehce nadprůměrní).

Nutno podotknout, že průměrná odchylka úspěšnosti českých žáků od úspěšnosti mezinárodního souboru činí + 9,4 %, a pokud bychom vyřadili slabé a velmi slabé úlohy, zvětšila by se na $+13{,}6$ % (Rendl & Vondrová, 2014: s. 29). Představím zde vybranou čtveřici úloh, která se týká algebraických výrazů, včetně procentuální úspěšnosti a poznatků, ke kterým autoři dospěli.

M04-07

Jde o velmi slabou úlohu s úspěšností $24{,}7$ % a odchylkou oproti mezinárodnímu průměru $-1{,}1$ %. Úloha vyžaduje úpravu výrazu $2(x + y) - (2x - y)$, tedy roznásobení dvojčlenu, odečtení dvojčlenu „odstranění znaménka minus před závorkou“ a zjednodušení mnohočlenu.

Zadání i samotné úpravy výrazu zhruba odpovídají testové úloze 1 z oddílu 2.4, kde ovšem nebyly dány žákům žádné možnosti (Úloha 1: Zjednodušte: $x(x+1)-(x+1)$). Navíc v úloze 1 lze postupovat i vytknutím výrazu $x+1$. „Nečastější nesprávné odpovědi odpovídají tomu, že žák nezměnil znaménko u některého členu druhého dvojčlenu.“ (Rendl & Vondrová, 2014: s. 40).

M10-08

Úkolem je vyjádřit obsah obdélníka, který má strany označeny x a $x+2$ (to odpovídá části úlohy 11 a ve své podstatě i úloze 9 z mnou použitého testu). Úspěšnost řešení byla $35{,}5\ \%$ a odchylka oproti mezinárodnímu průměru klesla na $-2{,}8\ \%$. Žáci nejčastěji volili chybnou odpověď x^2+2, a to v $36{,}1\ \%$ případů, což podle autorů odpovídá nesprávnému roznásobení závorky. „Žáci nechápou výraz v závorce jako jeden celek. Můžeme vyslovit domněnku, že úloha by zřejmě měla vyšší úspěšnost, pokud by jako strany obdélníka byla použita „standardní“ písmena a, b.“ (Rendl & Vondrová, 2014: s. 40).

M08-11A a M08-11B

Hlavní činností ve dvojici neuvolněných úloh, zařazených do velmi slabých, je dosazení algebraických výrazů (složených z čísla a proměnné) za dvojici proměnných v jiném algebraickém výrazu. Stejně jako v úloze 6 (částečně i 9, 10 a 11) z mnou použitého testu, nebyly žákům předloženy žádné možnosti. Bohužel nejčastější odpovědi nejsou známé, autoři pouze uvádějí úspěšnost $30{,}7\ \%$, resp. $8{,}8\ \%$ pro úlohu M08-11A, resp. M08-11B a odchylku oproti mezinárodnímu průměru $-2{,}7\ \%$, resp. $-4\ \%$. (Rendl & Vondrová, 2014: s. 37).

M08-08

V této úloze mají žáci zjistit, která ze čtyř nabízených rovnic má řešení pro předem dané hodnoty dvojice proměnných. Obdobně je tomu i u úlohy 5 v mnou použitém testu. V úloze M08-08 byla úspěšnost $36{,}2\ \%$, a s odchylkou oproti mezinárodnímu průměru $-1{,}2\ \%$ tak spadá mezi velmi slabé. Úloha je tzv. neuvolněná, tedy její zadání se nesmí zveřejnit. Proto ji autoři jen opisují.

> Např. by mohla být zadána dvojice $x=3$ a $y=8$ a nabídnuty čtyři rovnice, z nichž jediná je po dosazení hodnot platná. Nejpochopitelnější chybou je záměna x a y při dosazování ($13{,}2\ \%$ žáků): $3x-8y=0$. Avšak nejčastější špatná odpověď ($25{,}4\ \%$) odpovídá tomu, kdy by jako správné řešení byla vybrána rovnice $8x+3y=24$. Zdá se, že žáci nejdříve

dosazují zvlášť číslo x, pak zvlášť číslo y a druhý sčítanec ignorují (jakoby ověřovali vždy jen jednu proměnnou), a dostanou tedy v obou případech číslo 24.

(Rendl & Vondrová, 2014: s. 35)

V závěru studie rozdělují Rendl a Vondrová obtížná místa pro české žáky do dvou širších okruhů. „Jedním z nich jsou různé aspekty algebry, jak ji koncipují úlohy TIMSS, druhou pak úlohy vyžadující využití znalostí o vlastnostech geometrických útvarů ve složitějších výpočtech." (Rendl & Vondrová, 2014: s. 52). Z oblasti algebry autoři poukazují na některé dílčí momenty, které působí žákům potíže; práce se zápornými čísly, zlomky ve výrazech a rovnicích, substituce ve složitějších výrazech, dosazování hodnot z uspořádaných dvojic nebo systematické testování platnosti rovnice vícenásobným dosazováním za proměnné.

Analýza jednotlivých úloh v oddíle 2.4 je zaměřena na identifikaci podobných dílčích momentů, které dělají žákům potíže. V oddíle 2.5 jsou výsledky této práce porovnány se závěry a daty výše vybraných studií.

1.3.2 Zahraniční studie

Žákovskými problémy v úpravách algebraických výrazů se zabývá i J. Vlassis. Výzkum *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'* (v hrubém českém překladu *Ujasnění si významu znaménka minus nebo pružné chápání „zápornosti"*) zde blíže popíši, neboť některé poznatky využiji při analyzování učebnic a rozhovorů z experimentální části této práce.

J. Vlassis uvádí, že článek je zaměřen na druhy koncepčních změn, které nastávají, když žáci začínají pracovat se zápornými čísly v algebraických výrazech a jejich úpravách. Větší důraz byl však podle mého názoru kladen na druhy chyb a nedostatky při objasňování postupu řešení žáky.

Výzkum si kladl tři hlavní otázky:

1. Jak žáci vysvětlují své postupy při zjednodušování mnohočlenu? Ke kterým modelům nebo pravidlům se přiklánějí?
2. Jaký význam přisuzují znaménku minus?
3. Jak silně je zakořeněn žákův poznatek vzniklý z počátečních modelů? Tato otázka si klade za cíl analyzovat odpor ke změnám uvažování u žáků, kteří při úpravě jednak neuspěli (jsou jim připomenuty správné postupy), ale i těch, kteří uspěli (jsou požádáni o názor na chybné postupy jejich spolužáků).

Autorka článku nejprve shrnula trojí význam znaménka minus:

- **Unární (strukturální symbol) –** Znaménko minus je v této souvislosti třeba považovat za „předložku“ objektu, např. menšitel, samotné číslo, formální koncept záporného čísla. (-5).
- **Binární (symbol operace)** – Znaménko se používá ve smyslu odebírání něčeho, symbol pro operaci odčítání, rozdíl mezi dvěma čísly, pohyby na číselné ose.
- **Symetrický (symbol operace)** – Znaménko se používá ve smyslu opaku něčeho, označení inverzní operace, např. záporné znaménko před závorkou $2a-(5-3a)$.

Výsledky výzkumu byly odvozeny z rozhovorů nad řešenými úlohami dvanácti žáků osmých[8] ročníků ve věku 13 – 14 let. Metodika zahrnovala:

1. Výběr vhodných úloh pro testování. Celkem 28 úloh se týkalo pouze úprav dvojčlenů, trojčlenů nebo čtyřčlenů složených z celých čísel a jedné proměnné (například mnohočleny $6y-20+3y-12; 4n-3n$).
2. Plošné testování celkem 133 žáků osmých ročníků na třech školách ve francouzské části Belgie, úkolem testu bylo zjednodušování těchto mnohočlenů.
3. Dvanáct žáků bylo vybráno podle klíče: čtyři žáci se skóre 80 % a vyšším, čtyři žáci se skóre 60 – 70 % a čtyři žáci se skóre 50 % a nižším.
4. Individuální rozhovory s dvanácti vybranými žáky, dotazování se na jejich strategie úprav a význam, jaký přikládají znaménku minus (viz otázky výzkumu).

Žáci účastnící se výzkumu se již setkali se znaménkem minus v oborech $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, kde jim zároveň byly objasňovány základní operace s jejich vlastnostmi a pravidly. Záporná čísla byla zavedena pomocí modelů číselných os či dluhů a zisků. Pro určení hodnoty číselného výrazu se žáci naučili vhodně sdružovat členy, zákon distributivity a poučky; například, že minus a minus dá plus (např. $3-(-2)=5$). O rok později se seznámili s množinou $\mathbb{R}$ a řešením lineárních rovnic s jednou neznámou.

Z rozhovorů s žáky vyplynulo několik typů nežádoucích jevů:

- Žáci si při řešení mnohočlenů představují závorky, které chybně použijí a změní výraz. Například trojčlen $20+8-7n-5n$ si představí jako $20+8-(7n-5n)=28-2n$.

[8] Věk odpovídá žákům sedmých ročníků v českém školství.

Chyba se často objevuje u mnohočlenů, které obsahují po sobě jdoucí dvojici záporných členů.

- I když žáci mají naučené některé poučky a pravidla (například „minus a minus dá plus”), často je neumí správně aplikovat. V praxi to vypadá tak, že mnohočlen $6 - 5a - 3 - 4a$ zjednoduší na $9a - 9$, neboť $-5a$ a $-4a$, tedy minus a minus dá plus, tedy $+9a$.
- Někdy žáci nezjednodušovali mnohočleny zleva doprava, ale zprava doleva. Například výraz $4 - 6n - 4n$ upravují jako $6n - 4n = 2n$. Konečný výsledek je $2n - 4$.
- Chybné sdružování odpovídajících si členů a jejich znamének (výměna členů bez znamének). Ve výrazu $6y - 20 + 3y - 12$ žáci sdruží $6y -$ a $3y$ jako $6y - 3y = 3y$.

Z analýzy testů a rozhovorů vyplynuly dva hlavní druhy koncepčních změn, které je nutné uchopit pro správné zjednodušování mnohočlenů se znaménky minus, ve kterých měli žáci nedostatky:

1. Žáci jsou do jisté míry zmateni tím, co se naučili o přirozených číslech. Je proto nutné uvést na pravou míru a sjednotit jejich chápání znaménka minus u aritmetiky přirozených čísel a u úprav algebraických výrazů.
2. Ani žáci s nejlepšími výsledky neprokázali celostní chápání samotného znaménka minus, které by se mělo odvíjet od většího porozumění a využívání toho, co nazýváme „záporností”.

Při studování koncepčních změn je třeba mít na paměti, že znaménko minus není používáno pouze k označení operace odčítání, ale také k označení záporných čísel.

V závěru článku se autorka přiklání k metodice výuky konceptu „zápornosti“ pomocí slovních úloh zadaných v přirozeném jazyce žáka a postupnému přiřazování symbolu minus k určitým operacím a objektům samotnými žáky. Samotným přiřazováním symbolu minus reálným situacím žáci lépe pochopí jeho význam a naučí se s ním tak i správně pracovat při úpravách.

Podle mého názoru se ze závěru práce dá usoudit, že se autorka přiklání ke konstruktivistickému způsobu výuky, kdy žák objevováním získává nové poznatky a dovednosti, oproti transmisivnímu způsobu výuky, kdy ať učitel nebo i učebnice, předává žákovi informace jako fakta.

1.4 Analýza učebnic z hlediska algebraických výrazů

Oddíl je zaměřen na analýzu třech řad učebnic, které používají ve své výuce školy účastnící se výzkumného projektu v druhé části práce. Podrobněji se zaměřím pouze na učebnice, jejichž obsah souvisí s algebraickými výrazy a jejich úpravami. Cílem analýzy je porovnat přístupy autorů jednotlivých řad učebnic, vyhledat oblasti matematiky, kde se objevují úpravy algebraických výrazů, ukázat modely, které autoři používají při zavádění některých operací s mnohočleny, a konečně zjistit, jaké oblasti matematiky je nutné ovládat pro kvalitní zvládnutí úprav algebraických výrazů.

1.4.1 Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií (Herman a kol.)

Učebnice[9] se používají na Gymnáziu Elišky Krásnohorské v Praze v prvních čtyřech ročnících osmiletého studia. Jednotlivá témata školního vzdělávacího plánu pro matematiku téměř korespondují s názvy učebnic této knižní série. Každá učebnice na začátku obsahuje kapitoly *Na vysvětlenou* a *Úvod*. V kapitole *Na vysvětlenou* jsou uvedeny cíle celé série učebnic, způsob výkladu nové látky, způsob řešení příkladů a kontrola znalostí pomocí úloh, které jsou označeny čtyřmi druhy symbolů (obr. 1).

□ – lze řešit zpravidla zpaměti
* – obtížnější příklad
** – velmi obtížný příklad
■ – zajímavý příklad (podle našeho názoru)

Obr. 1: Značení obtížnosti úloh

Autoři upozorňují, že poznatky v rámečcích by se žáci neměli učit nazpaměť:

> Důležité výsledky výkladu jsou shrnuty ve větách, které jsou graficky vyznačeny rámečky. Nejedná se nám v žádném případě o signál k bezduchému memorování, ale o výzvu, aby se žáci nad obsahem těchto vět důkladně zamysleli a správně je pochopili.

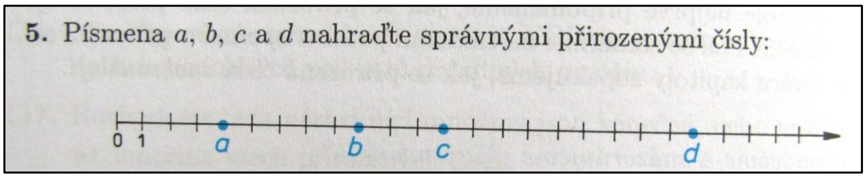
(Herman et al., 2003: s. 7)

[9] Od autorů Herman, J.; Chrápová, V.; Jančovičová, E.; Šimša, J.

Kapitola *Úvod* každé učebnice je věnována ohlédnutí do historie dané látky a motivaci pro učební látku. V poslední kapitole každé učebnice mohou zvídaví žáci řešit úlohy z matematické olympiády.

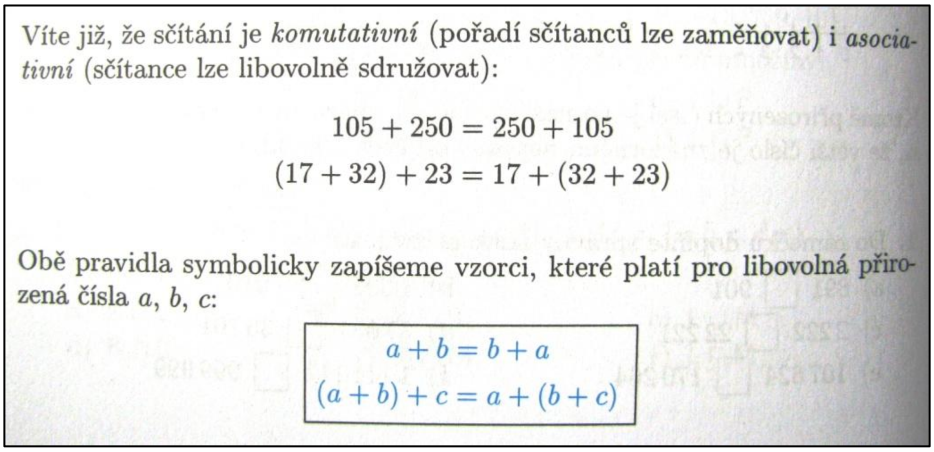
Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování

První kniha[10], nazvaná *Úvodní opakování*, je zaměřena na opakování látky z prvního stupně základního vzdělávání. Cílem je sjednotit a doplnit znalosti žáků, kteří přišli na gymnázium z různých druhů škol. V úvodní kapitole *Číslo a číslice* si žáci zopakují pojmy číslo, číslice a přirozená čísla. Následuje kapitola *Množiny*, která je vzhledem k tématu této práce nezajímavá, neboť bezprostředně nevede k úpravám výrazů, a poté kapitola *Přirozená čísla*, ve které se žáci poprvé setkají s proměnnou a neznámou. V úloze 5 na straně 32 mají žáci za úkol nahradit písmena správnými přirozenými čísly (obr. 2). Jelikož se jedná o neřešenou úlohu, autoři zřejmě předpokládají, že žáci již umějí s proměnnou tímto způsobem pracovat a mají o ní nějakou představu.


5. Písmena a, b, c a d nahraďte správnými přirozenými čísly:

Obr. 2:Nahrazování písmen čísly

Proměnná se objevuje o několik řádků níže, kde je zopakováno, že sčítání přirozených čísel je asociativní a komutativní (obr. 3).


Víte již, že sčítání je *komutativní* (pořadí sčítanců lze zaměňovat) i *asociativní* (sčítance lze libovolně sdružovat):

$$105 + 250 = 250 + 105$$
$$(17 + 32) + 23 = 17 + (32 + 23)$$

Obě pravidla symbolicky zapíšeme vzorci, které platí pro libovolná přirozená čísla a, b, c:

$$a + b = b + a$$
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Obr. 3: Vlastnosti sčítání přirozených čísel zapsané pomocí proměnných

[10] Herman, J., et al. (2005a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování*. Praha: Prometheus.

Na straně 34 v úloze 11 se objevuje neznámá v lineární rovnici (obr. 4). Žáci v této fázi výuky ještě neznají ekvivalentní úpravy rovnic a pojmy související s rovnicemi. Toho si jsou samozřejmě vědomi i autoři, kteří přizpůsobili zadání úlohy a nenapsali například – *Řešte rovnice.*

11. Vypočtěte číslo označené písmenem y:

a) $712 + y = 1\,000$ b) $y + 383 = 678$

c) $1\,457 + y = 10\,000$ d) $y + 544 = 9\,088$

Obr. 4: Písmeno jako neznámá v lineární rovnici

V učebnici se s proměnnou dále setkáme v zobecnění distributivity násobení vzhledem ke sčítání, a to ve tvaru $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, i ve tvaru $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$; druhý tvar pouze ve formě dovětku a menším písmem. V následujících úlohách s číselnými výrazy se však objevují oba tvary.

Za kapitolou *Desetinná čísla* následuje kapitola *Číselné výrazy*, kde si žák zopakuje, co je to číselný výraz, z čeho se skládá a jak se s číselnými výrazy počítá. Na několika příkladech je ukázáno, jaké početní operace mají přednost a jakou roli v zápise hrají závorky. Žákovy poznatky je možné ověřit na velkém množství úloh. Je zde[11] i úloha, která může být pro žáka zajímavější než ostatní úlohy typu *Vypočtěte:* (obr. 5).

∗4. Doplňte do zápisu číselného výrazu $2 \cdot 4 + 24 : 6 - 3$ jednu dvojici kulatých závorek tak, aby měl hodnotu:

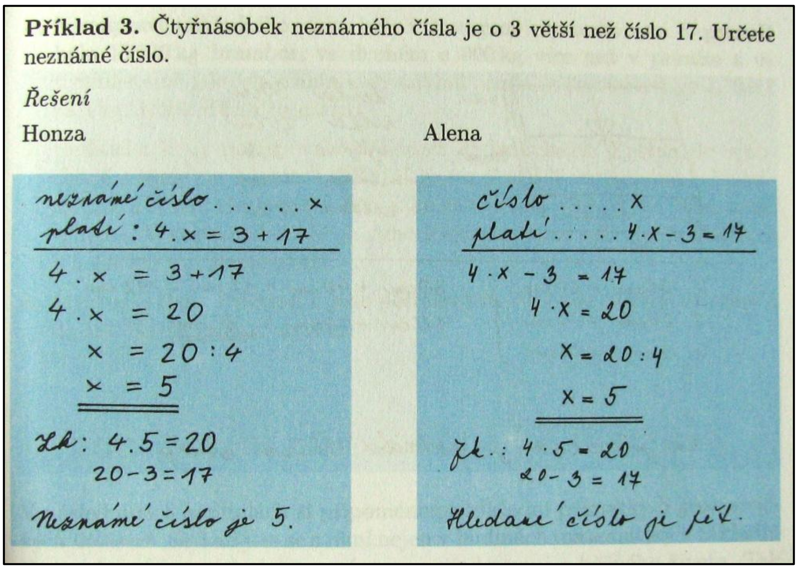
a) 10 b) 13 c) 16

Obr. 5: Nestandardní úloha

Následuje kapitola 6 *Rovnice*. Autoři začínají vysvětlením pojmů rovnice a rovnost, levá a pravá strana rovnice, co znamená řešit rovnici a jak se postupuje při řešení nejjednodušších typů rovnic. Poprvé zde zazní i pojem *neznámá*: „Zápis $x - 2 = 7$ je příkladem *rovnice*. Objevuje se zde neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se neznámá; obvykle se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena.“ (Herman et al., 2005a: s. 54). Pojem proměnná se zatím neobjevuje. Kromě samotných rovnic jsou zde i úlohy, ve kterých má žák ověřit, zdali je dané číslo kořenem rovnice. Žák samozřejmě může rovnici řešit a poté porovnat výsledek s daným číslem. Pokud ale dostane takovou rovnici, kterou řešit neumí, musí již dosadit za proměnnou a určit hodnotu číselného výrazu na pravé, resp. levé straně rovnice. Autoři k tomuto účelu použili

[11] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování, str. 53.

kvadratické rovnice zapsané bez mocnin (žák se s mocninami ještě nesetkal). Například v úloze $x \cdot x + 6 = 5 \cdot x$ z cvičení 4 na straně 57 mají zjistit, která čísla z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ jsou kořeny rovnice. V kapitole *Slovní úlohy* žák kromě řešení rovnic o jedné neznámé tvoří výrazy dle slovního popisu (obr. 6). Ve zbytku učebnice se proměnná ještě objeví u opakování obecných vlastností vedlejších a vrcholových úhlů, kde jsou použita počáteční písmena řecké abecedy.



Příklad 3. Čtyřnásobek neznámého čísla je o 3 větší než číslo 17. Určete neznámé číslo.

Řešení

Honza

neznámé číslo x
platí: $4 . x = 3 + 17$

$4 . x = 3 + 17$
$4 . x = 20$
$x = 20 : 4$
$x = 5$

Zk: $4 . 5 = 20$
$20 - 3 = 17$

Neznámé číslo je 5.

Alena

číslo x
platí . . . . $4 \cdot x - 3 = 17$

$4 \cdot x - 3 = 17$
$4 \cdot x = 20$
$x = 20 : 4$
$x = 5$

Zk.: $4 \cdot 5 = 20$
$20 - 3 = 17$

Hledané číslo je pět.

Obr. 6: Tvorba výrazu dle slovního popisu

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Dělitelnost

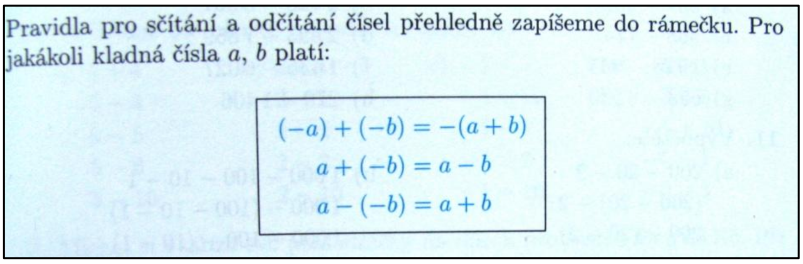
Ve druhé učebnici[12] je pro úpravu algebraických výrazů důležitá zejména kapitola *Společný dělitel*, kde žáci pomocí prvočíselného rozkladu čísla hledají největší společný dělitel několika různých čísel. Tuto dovednost v budoucnu uplatní nejen při vytýkání největšího společného dělitele (čísla) z jednotlivých členů mnohočlenu, ale i při vytýkání společného činitele (čísla i proměnných) z jednotlivých členů mnohočlenu.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Kladná a záporná čísla

Učebnice[13] obsahuje velké množství číselných výrazů; proměnných již výrazně méně, opět zejména v zobecněných vlastnostech nebo pravidlech či v záhlavích tabulek. V jednom z pravidel v opačné podobě se objeví odstranění znaménka minus před závorkou (obr. 7). Pravidlem autoři objasňují sčítání záporných čísel, o odstraňování znaménka minus před závorkou se zde nemluví. Zároveň žákovi připomínají, že proměnné a a b jsou jakákoli kladná

[12] Herman, J., et al. (2003). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Dělitelnost*. Praha: Prometheus.
[13] Herman, J., et al. (2004a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Kladná a záporná čísla.* Praha: Prometheus.

čísla. V následujících úlohách se sice objeví znaménko minus před závorkou, ale jelikož jde o číselné výrazy, je postup žáků takový, že určí hodnotu výrazu v závorce a tím ji i odstraní.



Pravidla pro sčítání a odčítání čísel přehledně zapíšeme do rámečku. Pro jakákoli kladná čísla a, b platí:

$$\boxed{\begin{aligned} (-a) + (-b) &= -(a + b) \\ a + (-b) &= a - b \\ a - (-b) &= a + b \end{aligned}}$$

Obr. 7: V pravidlech se objevuje znaménko minus před závorkou

Stejně je tomu i v kapitole *Číselné výrazy*, kde jsou opět obecně připomenuty vlastnosti operací s celými čísly a podrobněji vyložena funkce závorek v zápise číselného výrazu. Hlavní činností celé kapitoly je určování hodnoty číselných výrazů.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Racionální čísla. Procenta

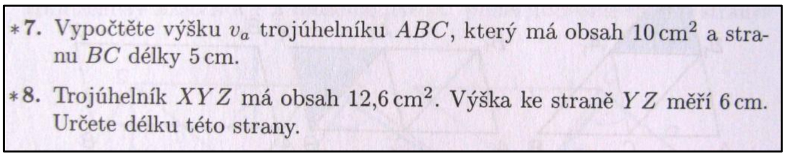
První učebnice[14] pro sekundu je zaměřena na kompletní výklad o racionálních číslech a jejich elementární aritmetiku. Písmena lze nalézt například v úlohách, kde se mají v některé části zlomku nahradit čísly tak, aby zlomek splňoval dané vlastnosti (například byl roven deseti). Tradičně nalezneme písmena v zobecněných vlastnostech některých operací, jak tomu bylo i v předešlých číselných oborech.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky

S algebraickými výrazy se žáci výrazněji setkají v učebnici[15] věnované geometrii. Učebnice se zabývá nejprve vlastnostmi trojúhelníků a čtyřúhelníků, kde se setkáme s proměnnými v zápisech obecných vlastností těchto objektů (součet velikostí vnitřních úhlů, trojúhelníková nerovnost atd.). Kapitola *Obsahy*[16] je věnována obsahům zmíněných útvarů. Obsah trojúhelníka autoři odvozují pomocí papírových modelů a rovnoběžníků, díky kterým žáci objeví vzorec pro obsah $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a$, kde a je strana a v_a příslušná výška. Jedná se o spojení algebraického výrazu s jeho geometrickou interpretací. Tyto modely jsou propedeuticky užitečné pro budoucí odvozování druhých mocnin dvojčlenů a jiných algebraických vzorců. V následujících úlohách se objevuje zjišťování obsahu trojúhelníka dosazením do vzorce za proměnné. Pouze poslední

[14] Herman, J., et al. (2004b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Racionální čísla.* Procenta. Praha: Prometheus.
[15] Herman, J., et al. (2006a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus.
[16] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky, str. 97.

dvojice úloh[17] vyžaduje po žákovi výpočet výšky, resp. délky strany (obr. 8). Obě úlohy jsou označeny jako obtížnější, nezapomeňme, že žák ještě nezná ekvivalentní úpravy rovnic.


∗7. Vypočtěte výšku v_a trojúhelníku ABC, který má obsah $10\,\mathrm{cm}^2$ a stranu BC délky $5\,\mathrm{cm}$.

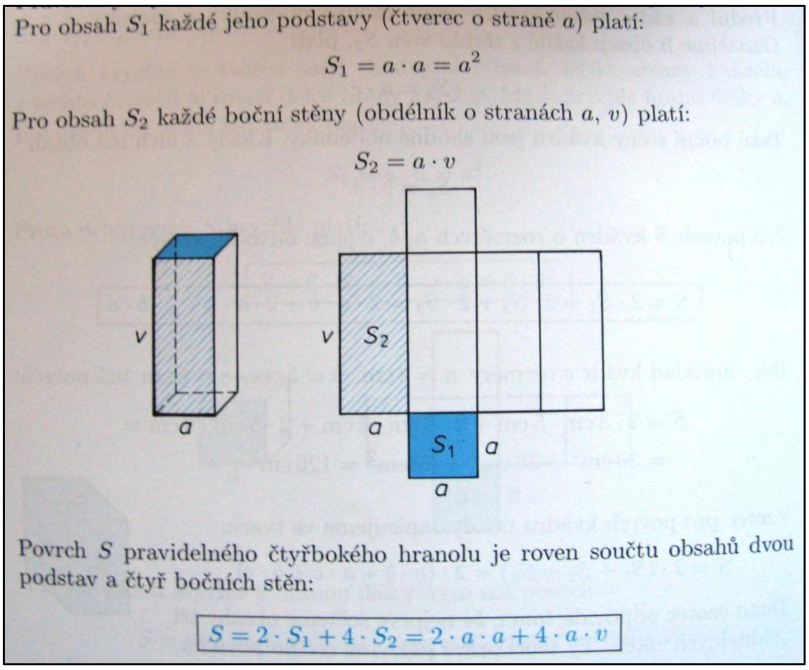
∗8. Trojúhelník XYZ má obsah $12{,}6\,\mathrm{cm}^2$. Výška ke straně YZ měří $6\,\mathrm{cm}$. Určete délku této strany.

Obr. 8: Obtížnější úlohy na určení výšky resp. délky strany trojúhelníku

Obdobně je tomu pro obsah lichoběžníku, pouze v jediné úloze[18] je požadován výpočet výšky. Vyjádření výšky ze vzorce pro obsah trojúhelníku, resp. lichoběžníku se neobjevuje.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Hranoly

Podobně jako v předchozí učebnici i zde[19] jsou geometrické modely spojeny s algebraickými výrazy. Ukáži například odvození[20] vzorce pro povrch pravidelného čtyřbokého hranolu na obr. 9.


Pro obsah S_1 každé jeho podstavy (čtverec o straně a) platí:

$$S_1 = a \cdot a = a^2$$

Pro obsah S_2 každé boční stěny (obdélník o stranách a, v) platí:

$$S_2 = a \cdot v$$

Povrch S pravidelného čtyřbokého hranolu je roven součtu obsahů dvou podstav a čtyř bočních stěn:

$$\boxed{S = 2 \cdot S_1 + 4 \cdot S_2 = 2 \cdot a \cdot a + 4 \cdot a \cdot v}$$

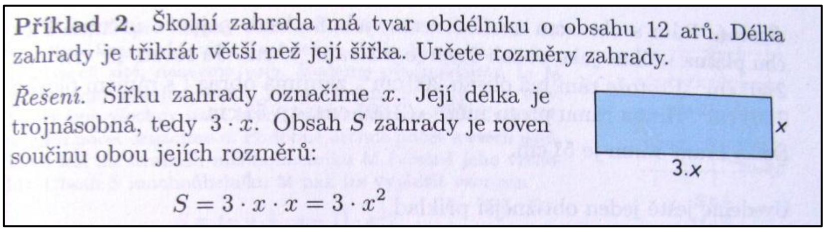
Obr. 9: Algebraické výrazy v geometrii

Žáci opět nejčastěji dosazují čísla za proměnné do vzorců pro objem a povrch a určují hodnoty výrazů. Vyjadřování proměnných ze vzorců se zde neobjevuje.

[17] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky, str. 102, úloha 7 a 8.
[18] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky, str. 110, úloha 16.
[19] Herman, J., et al. (2006b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Hranoly*. Praha: Prometheus.
[20] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Hranoly, str. 40.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy [1]

První učebnice[21] věnovaná přímo výrazům je zároveň poslední učebnicí určenou pro sekundu. První polovina je věnována mocninám a odmocninám. Žáci mají s mocninou již určitou zkušenost z učebnice *Dělitelnost*, přesto zde autoři nový poznatek budují od začátku a objasňují na geometrických modelech. Proměnná se objevuje v obecných pravidlech pro umocňování i odmocňování. Většina úloh pracuje pouze s číselnými výrazy, snad pouze jednou se objeví v úloze 9 na straně 49 proměnná v druhé a třetí mocnině. Žák má pomocí znamének $<$, $>$, = zapsat vztahy mezi čísly x, x^2, x^3, kde x je postupně 5; 0,4; 1; $\frac{9}{10}$. V sedmé kapitole *Mocniny v geometrii* se objevuje příklad[22], kdy žáci počítají rozměry obdélníkové zahrady (obr. 10). Délky stran obdélníku jsou místo čísel zadány proměnnou.


Příklad 2. Školní zahrada má tvar obdélníku o obsahu 12 arů. Délka zahrady je třikrát větší než její šířka. Určete rozměry zahrady.

Řešení. Šířku zahrady označíme x. Její délka je trojnásobná, tedy $3 \cdot x$. Obsah S zahrady je roven součinu obou jejích rozměrů:

$$S = 3 \cdot x \cdot x = 3 \cdot x^2$$

Obr. 10: Úloha zaměřená na schopnost vytvořit výraz

Pokud připustíme, že žák pracuje s naučeným vzorcem pro obsah obdélníka $S = a \cdot b$, pak za proměnnou a, resp. b nedosazuje číslo jako doposud, ale jiný výraz, který následně upraví. Zjednodušení mnohočlenu, konkrétně součet jeho jednotlivých členů, je v příkladu 5 na straně 76. Částí příkladu je určení celkového obsahu tří trojúhelníků, jejichž strana a výška je vyjádřena proměnnou. Jednotlivé obsahy jsou $2 \cdot x^2$, $4 \cdot x^2$ a $3 \cdot x^2$. Výraz pro jejich součet je upraven takto: $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x^2 = 9 \cdot x^2$. Druhá polovina učebnice je věnována výrazům s proměnnými, kterým předchází opakování číselných výrazů. Zejména je zopakováno:

- k čemu slouží v zápise závorky, kdy je lze vynechat;
- jak se počítá hodnota výrazu;
- které operace mají přednost;
- umocňování a odmocňování číselných výrazů;
- pojmenování výrazů (součet, součin, čtvrtá mocnina rozdílu čísel 5 a 2 atd.).

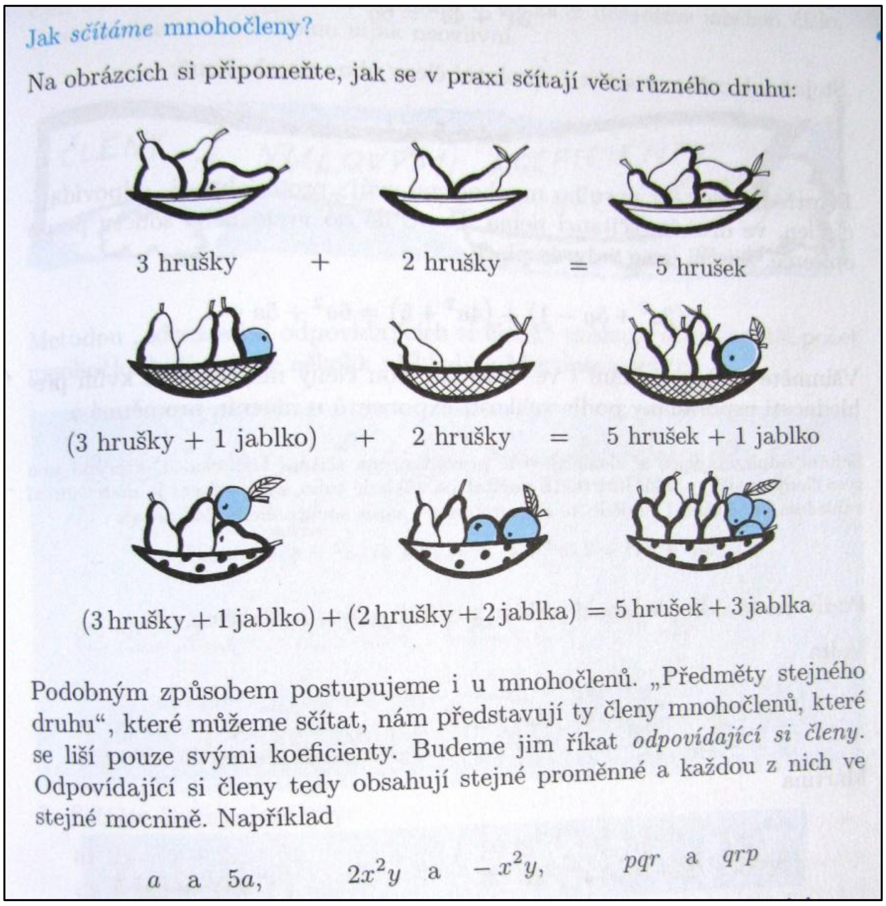
[21] Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus.
[22] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1, str. 75.

Pomocí vzorce pro obvod čtverce $o = 4 \cdot a$ autoři vysvětlují, co je to proměnná a jak vypadají výrazy s proměnnými.

> Pravá strana předchozího vzorce, tj. zápis $4 \cdot a$, je příkladem *výrazu s proměnnou*. Písmeno a se nazývá *proměnná*. Tento název napovídá, že hodnota a se může *měnit* podle toho, s jakým čtvercem pracujeme.
>
> Nahradíme-li v číselném výrazu některé číslo písmenem (třeba i na několika místech), dostaneme **výraz s proměnnou**.

(Herman et al., 2005b: s. 106)

Jako příklady autoři uvádí výrazy ze vzorců z geometrie. Následuje výklad pojmů člen, mnohočlen, jednočlen, koeficient apod. Žáci se také učí zkrácenému zápisu, například $3p^2q$ místo dosud používaného $3 \cdot p \cdot p \cdot q$. Po tomto úvodu autoři přistoupí ke sčítání a odčítání mnohočlenů. Vycházejí z reálného světa, kde se sčítají věci různého druhu, v jejich případě jde o jablka a hrušky (obr. 11).



Jak *sčítáme* mnohočleny?

Na obrázcích si připomeňte, jak se v praxi sčítají věci různého druhu:

3 hrušky + 2 hrušky = 5 hrušek

(3 hrušky + 1 jablko) + 2 hrušky = 5 hrušek + 1 jablko

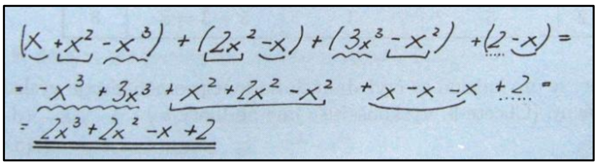
(3 hrušky + 1 jablko) + (2 hrušky + 2 jablka) = 5 hrušek + 3 jablka

Podobným způsobem postupujeme i u mnohočlenů. „Předměty stejného druhu“, které můžeme sčítat, nám představují ty členy mnohočlenů, které se liší pouze svými koeficienty. Budeme jim říkat *odpovídající si členy*. Odpovídající si členy tedy obsahují stejné proměnné a každou z nich ve stejné mocnině. Například

a a $5a$, $2x^2y$ a $-x^2y$, pqr a qrp

Obr. 11: Zavádění sčítání mnohočlenů

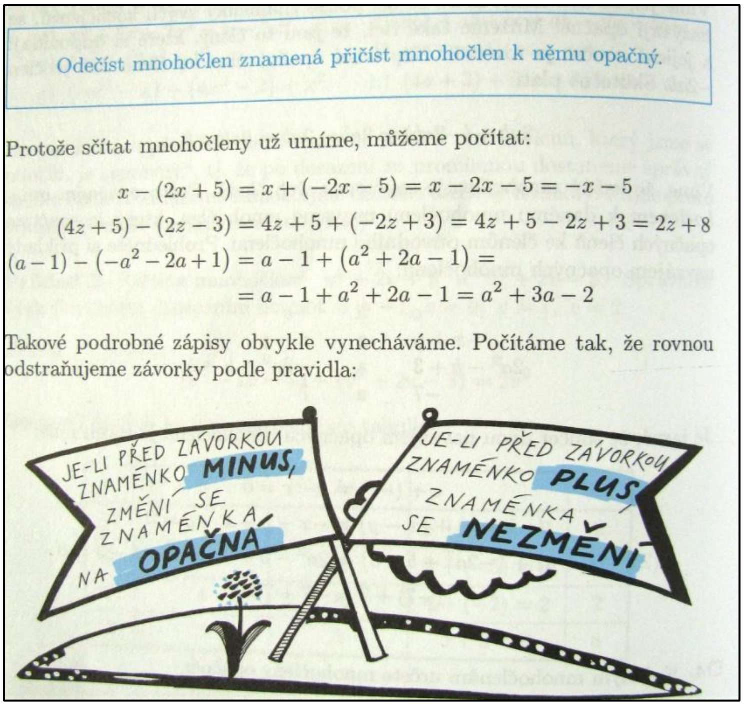
Následuje několik vzorových příkladů a úloh na procvičení. Nejprve jsou sčítány mnohočleny s členy s jednou proměnnou a poté až s více proměnnými i v různých mocninách. Na řešeném příkladu je ukázána *metoda sdružování odpovídajících si členů* (obr. 12).



$$(x + x^2 - x^3) + (2x^2 - x) + (3x^3 - x^2) + (2 - x) =$$
$$= -x^3 + 3x^3 + x^2 + 2x^2 - x^2 + x - x - x + 2 =$$
$$= 2x^3 + 2x^2 - x + 2$$

Obr. 12: Zjednodušení mnohočlenu sdružováním odpovídajících si členů

Některé výsledky úprav jsou ověřeny dosazením číselných hodnot. Odčítání mnohočlenů je vysvětleno pouze algebraicky, a to přes opačný mnohočlen k mnohočlenu. Autoři začínají číselnými výrazy, kde odečíst číslo znamená přičíst k němu číslo opačné, což je žákům již dlouho známo, a to samé se provádí i s mnohočleny (obr. 13).



Odečíst mnohočlen znamená přičíst mnohočlen k němu opačný.

Protože sčítat mnohočleny už umíme, můžeme počítat:

$$x - (2x + 5) = x + (-2x - 5) = x - 2x - 5 = -x - 5$$
$$(4z + 5) - (2z - 3) = 4z + 5 + (-2z + 3) = 4z + 5 - 2z + 3 = 2z + 8$$
$$(a - 1) - (-a^2 - 2a + 1) = a - 1 + (a^2 + 2a - 1) =$$
$$= a - 1 + a^2 + 2a - 1 = a^2 + 3a - 2$$

Takové podrobné zápisy obvykle vynecháváme. Počítáme tak, že rovnou odstraňujeme závorky podle pravidla:

Obr. 13: Odečítání mnohočlenů a odstraňování závorek

Pod obrázkem jsou vzorově řešeny tři příklady běžným způsobem. Násobení mnohočlenů v následující kapitole[23] je již podáno bez příkladů s číselnými výrazy. Žáci se postupně učí násobit dva jednočleny, mnohočlen jednočlenem a mnohočlen mnohočlenem. Autoři ve vzorových příkladech používají názorné šipky. Neobjevují se ještě žádné vzorce pro $(a + b)^2$,

[23] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1, str. 122.

$a^2 - b^2$ apod. Je zde[24] pouze připomenuto, že roznásobení mnohočlenu jednočlenem je spojeno s distributivitou násobení vzhledem ke sčítání. Objevuje se mnoho příkladů i úloh ve tvaru dvojčlen krát jednočlen. Poslední dovedností, kterou se kniha zabývá, je dělení jednočlenu jednočlenem a mnohočlenu jednočlenem. Důraz je kladen na podmínky, pro které hodnoty proměnné má lomený výraz smysl. Dělení mnohočlenu jednočlenem žáci převádí na zlomek, ve kterém následně krátí, a tím dospějí k výsledku.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice

Na začátku učebnice[25] je popsán vztah pojmu neznámá k pojmu proměnná: „Na jedné nebo na obou stranách každé rovnice se objevuje výraz s proměnnou. Proměnná zastupuje neznámé číslo, které je třeba určit. Nazývá se neznámá; nejčastěji se označuje písmenem x. Užívají se však i jiná písmena." (Herman, et al., 2005c: s. 10). Ve zbytku učebnice se řeší rovnice pomocí ekvivalentních úprav, díky kterým zároveň žáci procvičují sčítání, odčítání, násobení a v malé míře i dělení mnohočlenů. Novou dovedností je vytváření algebraických výrazů či rovnic ke kontextu a schopnost vyjádřit neznámou ze vzorce. Tyto i předešlé dovednosti žáci uplatní i v následujících třech učebnicích, kde se setkají s kruhem a válcem, přímou a nepřímou úměrností či trojčlenkou. V oblasti úprav algebraických výrazů zde nenalezneme nic nového.

Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy [2]

Poslední učebnice[26] vydaná pro tercii je věnována algebraickým výrazům. Pouze připomínáme, že žáci účastnící se rozhovorů popsaných ve druhé části práce, se s jejím obsahem ještě nesetkali. Začátek učebnice začíná opakováním, zde konkrétně mocninami v jednoduchých číselných i algebraických výrazech, výkladem pojmu mnohočleny, jejich sčítání, odčítání, násobení a dělení mnohočlenu jednočlenem. Autoři v opakování nepoužívají žádné pomocné modely, velká většina úloh je zadána algebraickým výrazem. Úlohy jsou o něco těžší než v první učebnici[27] *Výrazy 1*. Výklad nové látky nejprve objasní pojem stupeň mnohočlenu a přechází k dělení mnohočlenu mnohočlenem, čímž se zde nebudeme více zabývat. Pro nás zajímavější je následující kapitola *Umocňování mnohočlenů*.

Autoři vycházejí ze znalosti, že každá mocnina je vlastně součin stejných činitelů a že toho lze využít i pro mnohočleny. Vzorově poté vyřeší roznásobením dva příklady, druhou i třetí

[24] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1, str. 123.
[25] Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice*. Praha: Prometheus.
[26] Herman, J., et al. (2006c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2.* Praha: Prometheus.
[27] Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1.* Praha: Prometheus.

mocninu dvojčlenu, načež konstatují, že zápisy jsou velmi zdlouhavé, a proto pro urychlení existují vzorce. Na tento motivační úvod navazuje opět krátké opakování mocnin a vysvětlení, jak se umocňuje mocnina. Autoři opět použijí součin stejných činitelů. Je zde řada úloh na umocnění jednočlenu, který má více proměnných v různých mocninách. Vzorec pro druhou mocninu dvojčlenu autoři vyvodí z trojice příkladů[28] na obr. 14 a poté ho ještě roznásobením zkontrolují.

$$(a+3)^2 = (a+3)\cdot(a+3) = a^2 + \underbrace{3a + 3a} + 9 = a^2 + 6a + 9$$

$$\left(x^3+y\right)^2 = \left(x^3+y\right)\cdot\left(x^3+y\right) = \left(x^3\right)^2 + \underbrace{x^3y + x^3y} + y^2 =$$
$$= x^6 + 2x^3y + y^2$$

$$(uv+2z)^2 = (uv)^2 + \underbrace{2uvz + 2uvz} + (2z)^2 = u^2v^2 + 4uvz + 4z^2$$

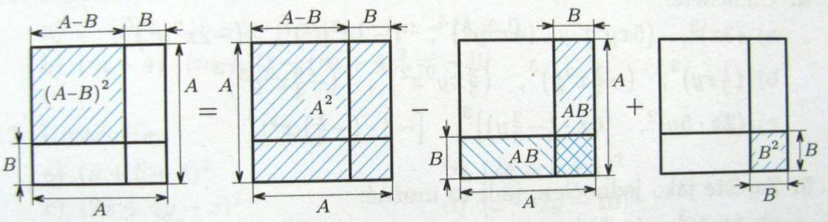
Vidíme, že výsledkem je vždy trojčlen. Jeho „krajní“ členy jsou druhými mocninami původních sčítanců, „prostřední“ člen vzniká sečtením dvou stejných členů.

Obr. 14: Zavedení vzorce pro druhou mocninu součtu

Vzorec pro druhou mocninu rozdílu je již předložen jako fakt a roznásobením se pouze potvrdí jeho platnost. Následují úlohy k procvičení a výklad umocňování mnohočlenů s více členy. Je zde i zmíněno a na příkladech ukázáno sdružování členů uvnitř mnohočlenu, například typu $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2c(a+b) + c^2$. Po algebraicky náročném výkladu autoři zařazují geometrické interpretace dosavadních vzorců. Přehledně je reprezentován vzorec pro $(a-b)^2$ na straně 39, kde jsou jednotlivé členy ve vzorci nahrazeny obrázky (obr. 15).

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

lze potvrdit geometricky. Prohlédněte si „počítání obsahů“ na následujícím obrázku:



Všimněte si, že oba shodné „odčítané“ obdélníky o obsahu AB se „překrývají“ ve čtverci o straně B, který jsme tedy „odečetli“ dvakrát. Proto jsme ho nakonec ještě jednou „přičetli“.

Obr. 15: Geometrická interpretace vzorce $(a-b)^2$

[28] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2, str. 34.

Rozklad mnohočlenů na součin v další kapitole autoři připodobňují k prvočíselnému rozkladu čísel. Žáci nejprve rozkládají jednočleny, například $10x^2y = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y$. Poté jsou dány tři rozložené jednočleny[29] s barevně odlišenými čísly a proměnnými, které mají všechny tři společné, jedná se o největší společný činitel (obr. 16).

$$\begin{aligned} 6x^2y &= 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y &&= 3xy \cdot 2x \\ 3xy^2 &= 3 \cdot x \cdot y \cdot y &&= 3xy \cdot y \\ -12x^3y &= (-1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y &&= 3xy \cdot (-4x^2) \end{aligned}$$

Obr. 16: Hledání největšího společného činitele

Připomenutím distributivity násobení vzhledem ke sčítání autoři přecházejí k vytýkání před závorku a zároveň žákům radí, že nejvhodnější je vytýkat vše, co se dá. Čistě algebraickou záležitostí je vytýkání mnohočlenu z mnohočlenu. Autoři se snaží vhodným postupným vytýkáním v několika příkladech objasnit tuto problematiku. Z výkladu je zřejmé, že jim jde hlavně o žákovo předvídání a vhled do vytýkání. Posledním vzorcem je rozdíl druhých mocnin. Ukázán je na algebraickém roznásobení výrazu $(a + b)(a - b)$. Zajímavá je jeho geometrická interpretace[30], při které žáci vystřihují z čtverce o straně a čtverec o straně b a se zbytkem útvaru dále pracují. Do zbylé části této učebnice jsou zařazeny lomené výrazy, kterými se v této práci nezabýváme.

V dílech určených pro kvartu se vzhledem k úpravám algebraických výrazů nic zásadního neobjevuje, žáci je pouze procvičují při řešení rovnic a jejich soustav, při počítání povrchů a objemů některých těles a ve funkcích.

1.4.2 Matematika 6. – 9. (Šarounová a kol.)

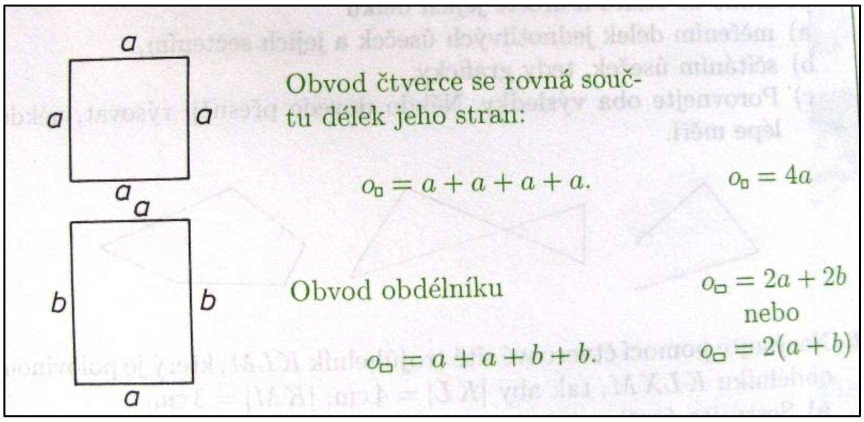
Řadu učebnic pro šestý až devátý ročník od autorského kolektivu vedeného A. Šarounovou používají na ZŠ Angel. Pro každý ročník je vydána dvojice učebnic. V prvních dílech nalezneme motivační předmluvu a návod, jak s učebnicí pracovat. Krychličkami s čísly autorka značí úlohy, které by měly být řešeny společně v hodinách a které přivedou žáky k novým poznatkům, jež budou tvořit základní kameny jejich vzdělávání. Pro zvídavé žáky je v každé učebnici určena předposlední kapitola *Matematická herna*.

[29] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2, str. 43.
[30] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2, str. 53.

Matematika 6

Poprvé se žáci s algebraickým výrazem setkají při opakování sčítání přirozených čísel. Obecné vlastnosti sčítání přirozených čísel jsou zapsány[31] v rámečku proměnnými a, b, c. Obdobně je tomu dále pro násobení a dokonce i dělení. V oddíle 1.16 *Číselné výrazy* je příklad[32] vyžadující výpočet obvodu obdélníkového pozemku, u něhož jsou číselně zadány délky stran. Výpočet je proveden dosazením do obecného vzorce pro obvod obdélníka. Následuje[33] slovní úloha, ve které se v řešení objeví rovnice $x = 2 \cdot 125 + 85$. V obou případech jde o dosazení čísla za proměnnou. Následuje výpočet neznámé z rovnice pomocí úpravy číselného výrazu na pravé straně rovnice. Veškerý výklad a úlohy byly zařazeny jako opakování z prvního stupně.

S algebraickou úpravou se žáci poprvé setkají v rámečku pod větou: „Které vzorce si zapamatujeme?“ (Šarounová et al., 1998: s. 80). Důraz je samozřejmě kladen na geometrii, nikoli na úpravu algebraického výrazu. U obvodu obdélníka jde o vytýkání čísla 2 z výrazu $2a + 2b$ (obr. 17).

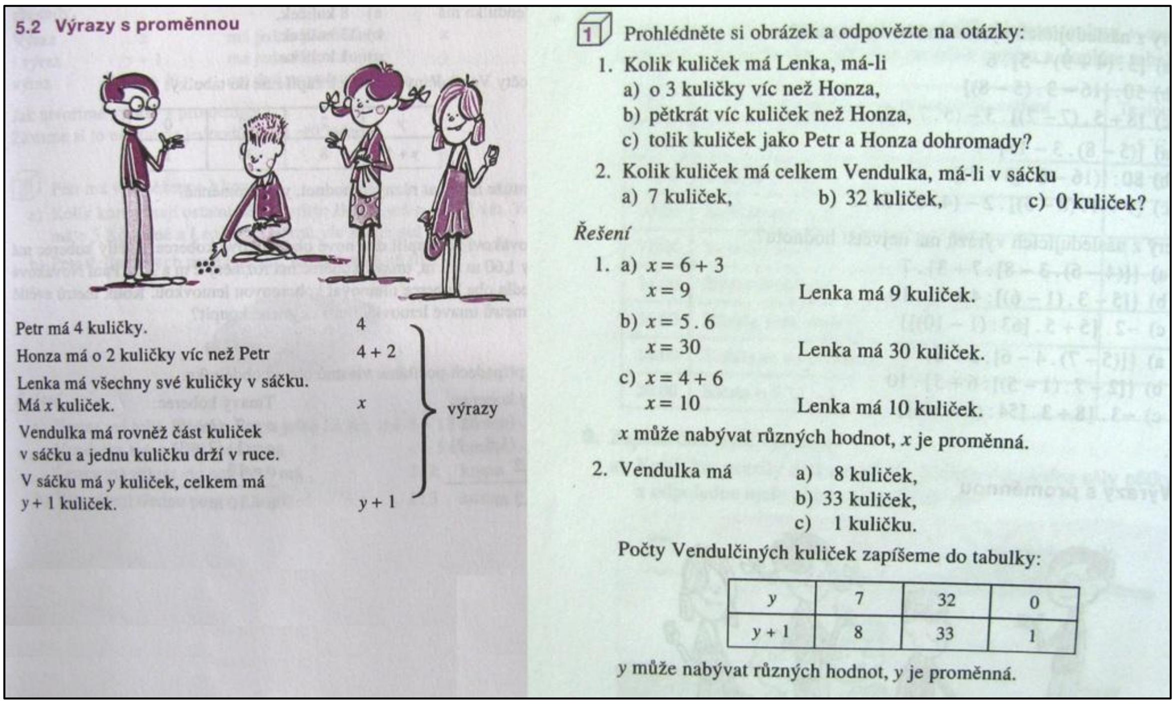


Obr. 17: Úprava algebraického výrazu v geometrii

V páté kapitole[34] *Výrazy* se objevuje pojem výraz: „Naučili jste se provádět početní výkony s čísly celými i desetinnými a dokážete je používat při řešení jednoduchých i složitějších úloh. K zápisu postupu řešení používáte výrazy.“ (Šarounová et al., 1997: s. 54). Následuje několik opakovacích příkladů a úloh na určení hodnoty číselných výrazů, které žáci prováděli i dříve v oborech $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$. Zajímavý je příklad[35], kde v zadání b) autoři popisují úpravu výrazu se závorkami takto: „Při počítání hodnoty výrazu postupně ODSTRAŇUJEME ZÁVORKY a tím

[31] Šarounová, A., et al. (1998). *Matematika 6, 1. díl*. Praha: Prometheus, str. 21.
[32] Matematika 6, 1. díl, str. 51, příklad 1.
[33] Matematika 6, 1. díl, str. 51, příklad 2.
[34] Šarounová, A., et al. (1997). *Matematika 6, 2. díl*. Praha: Prometheus, str. 54.
[35] Matematika 6, 2. díl, str. 55, příklad 4.

výraz ZJEDNODUŠUJEME.“ (Šarounová et al., 1997: s. 56). Následuje několik úloh na upevnění vědomostí a osvojení nových dovedností. Oddíl 5.2 *Výrazy s proměnou* je uveden příkladem[36] o čtyřech dětech, které hrají kuličky (obr. 18).



5.2 Výrazy s proměnnou

Petr má 4 kuličky.	4	výrazy
Honza má o 2 kuličky víc než Petr	$4 + 2$	
Lenka má všechny své kuličky v sáčku. Má x kuliček.	x	
Vendulka má rovněž část kuliček v sáčku a jednu kuličku drží v ruce. V sáčku má y kuliček, celkem má $y + 1$ kuliček.	$y + 1$	

1 Prohlédněte si obrázek a odpovězte na otázky:

1. Kolik kuliček má Lenka, má-li
   a) o 3 kuličky víc než Honza,
   b) pětkrát víc kuliček než Honza,
   c) tolik kuliček jako Petr a Honza dohromady?
2. Kolik kuliček má celkem Vendulka, má-li v sáčku
   a) 7 kuliček, b) 32 kuliček, c) 0 kuliček?

Řešení

1. a) $x = 6 + 3$
   $x = 9$ Lenka má 9 kuliček.
   b) $x = 5 . 6$
   $x = 30$ Lenka má 30 kuliček.
   c) $x = 4 + 6$
   $x = 10$ Lenka má 10 kuliček.

   x může nabývat různých hodnot, x je proměnná.
2. Vendulka má a) 8 kuliček,
   b) 33 kuliček,
   c) 1 kuličku.

   Počty Vendulčiných kuliček zapíšeme do tabulky:

y	7	32	0
$y + 1$	8	33	1

y může nabývat různých hodnot, y je proměnná.

Obr. 18: Vstupní příklad k vysvětlení pojmu proměnná

Z tohoto příkladu se žáci poprvé dozvídají, co je to proměnná, i když už nějakou představu mají z dřívější látky. Za nepříliš šťastný považuji závěr první části řešení, kde se pod $x = 10$ píše, že x může nabývat různých hodnot a že jde o proměnnou. Pro žáka to může být matoucí, neboť pro $x \neq 10$ rovnost splněna není. V tomto případě autoři zjistili, že hledané neznámé číslo je 10. Za vhodnější popis proměnné považuji výsledky druhé části, které jsou shrnuty přehledně v tabulce. Následuje několik příkladů a úloh se zadáním, kdy je něco větší či menší, je něčeho více či méně než něčeho jiného, a žáci mají tyto skutečnosti zapsat pomocí výrazů s proměnnou. Pak přichází na řadu určování hodnoty výrazu s proměnnou. Žák nejprve zapíše algebraický výraz, poté dosadí za proměnnou (zatím pouze jednu), upraví číselný výraz a určí jeho hodnotu. Nové dovednosti si upevňuje jednak v přiložených úlohách, ale i v následující kapitole *Tělesa*, kde se setká například se vzorcem[37] pro povrch kvádru $S_K = 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc$ a jeho upravenou verzí $S_K = 2(ab + ac + bc)$. Do podobných vzorců pak dosazuje za proměnné (už i za více než jednu) a určuje hodnotu výrazu.

[36] Matematika 6, 2. díl, str. 60, příklad 1.

[37] Matematika 6, 2. díl, str. 74.

Matematika 7

V prvním díle učebnice[38] pro sedmý ročník žáci projdou kapitolou *Dělitelnost přirozených čísel*, kde se naučí rozkládat složená čísla na prvočinitele, najít největší společný dělitel či nejmenší společný násobek čísel, což jsou jedny z důležitých dovedností pro budoucí úpravu algebraických výrazů. Ve druhém díle[39] je příklad[40], v jehož řešení lze spatřit dosazování výrazu s proměnnou za jinou proměnnou. Jde o geometrickou úlohu řešící obvod obdélníku, kde jedna strana je dvakrát delší než druhá. „Můžeme psát: $a = 2b$. Obvod obdélníku $o = 2a + 2b$, a tedy $o = 6b$." (Šarounová, Růžičková & Väterová, 1998: s. 15). Dosazení není nijak vysvětleno. O několik kapitol později žáci začínají řešit složitější lineární rovnice pomocí ekvivalentních úprav. Objevuje se zde mnoho úprav číselných i algebraických výrazů, včetně roznásobování závorek, ovšem pouze číslem, nikoli proměnnou. Bez bližšího popisu zde žáci zjednodušují mnohočleny sčítáním i odčítáním jejich vnitřních členů, například v úloze[41] požadující určení délky a šířky obdélníkové zahrady. Výraz $x + (x + 15) + x + (x + 15)$ zjednoduší na $4x + 30$. Nebo v úloze,[42] kde postupně upravují výraz $20x + 30(120 - x)$ na $20x + 3600 - 30x$, a dále na $-10x + 3600$.

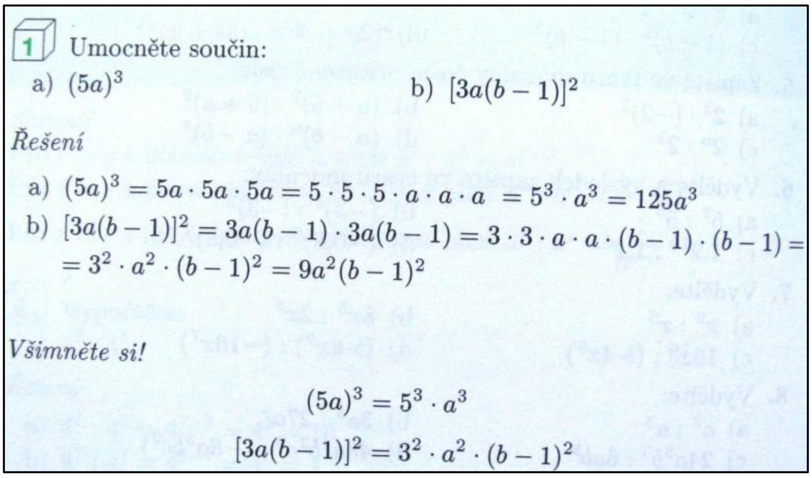
Matematika 8

V osmém ročníku výuka[43] začíná druhou mocninou a druhou odmocninou v číselných výrazech. V celém výkladu se objevuje buď pouze umocnění či odmocnění jediného čísla nebo umocnění součinu dvou čísel. Ve cvičení na konci této kapitoly jsou i úlohy s umocněním dvojčlenu. Žák zřejmě postupuje tak, že čísla nejprve sečte a pak umocní, což je bezpochyby nejrychlejší postup. Už se ale z učebnice nedozví, že výraz lze přepsat i jinak a poté určit jeho hodnotu. Algebraické výrazy s proměnnou ve vyšších mocninách a jejich úpravy najdeme v kapitole ke konci učebnice. Výklad vyšších mocnin probíhá nejdříve na číselných výrazech a poté se přejde k výrazům algebraickým. Na příkladech je vysvětleno sčítání, odčítání, násobení i dělení jednočlenů s různým počtem proměnných v různých mocninách. Neobjevuje se zde umocnění dvojčlenu na druhou. O to překvapivější je následující cvičení, kde například nalezneme: „14. Vypočtěte: a) $\frac{3x^3(x-1)^4}{x^2(x-1)}$." (Šarounová et al., 1999b: s. 91). To se na první pohled jeví jako velký skok v obtížnosti. Ovšem výsledek na konci učebnice je uveden v této

---

[38] Šarounová, A., et al. (1999a). *Matematika 7, 1. díl*. Praha: Prometheus.
[39] Šarounová, A., Růžičková, J. & Väterová, V. (1998). *Matematika 7, 2. díl*. Praha: Prometheus.
[40] Matematika 7, 2. díl, str. 15, příklad 4.
[41] Matematika 7, 2. díl, str. 151, příklad 3.
[42] Matematika 7, 2. díl, str. 152, příklad 4.
[43] Šarounová, A., et al. (1999b). *Matematika 8, 1. díl*. Praha: Prometheus.

podobě: „ a) $3x(x-1)^3$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.“ (Šarounová et al., 1999b: s. 124). Autoři předpokládají, že žák je s výsledkem spokojen a nijak dál se jím nezaobírá, neboť umocňovat dvojčlen na třetí ještě neumí. Potvrzuje to i vstupní příklad na obr. 19 následujícího oddílu 6.4 *Mocnina součinu a podílu*[44].



1 Umocněte součin:

a) $(5a)^3$ b) $[3a(b-1)]^2$

Řešení

a) $(5a)^3 = 5a \cdot 5a \cdot 5a = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a = 5^3 \cdot a^3 = 125a^3$

b) $[3a(b-1)]^2 = 3a(b-1) \cdot 3a(b-1) = 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot (b-1) \cdot (b-1) =$
$= 3^2 \cdot a^2 \cdot (b-1)^2 = 9a^2(b-1)^2$

Všimněte si!

$$(5a)^3 = 5^3 \cdot a^3$$
$$[3a(b-1)]^2 = 3^2 \cdot a^2 \cdot (b-1)^2$$

Obr. 19: Umocňování výrazu pomocí rozkladu na prvočinitele

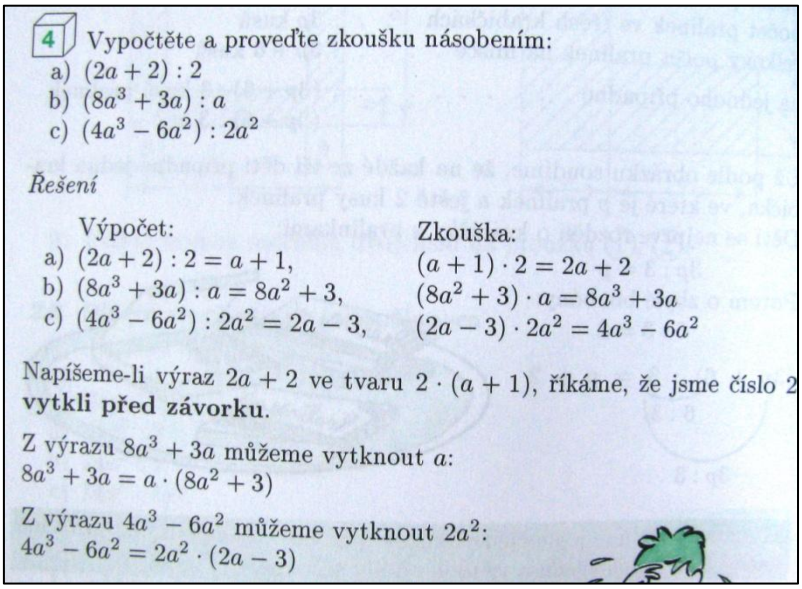
Autoři se pro výklad této látky neomezili pouze na umocňování jednočlenů, nýbrž použili i složitější výrazy pro žákovo lepší pochopení.

Druhý díl učebnice[45] pro osmé ročníky ihned navazuje na dosavadní dovednosti v oblasti výrazů. V kapitole 2 *Výrazy* nalezneme v úvodu definice: „Výrazy, v nichž se vyskytují pouze reálná čísla, **jsou číselné výrazy**.“, „Výrazy obsahující alespoň jednu proměnnou jsou **algebraické výrazy**.“ (Šarounová et al., 1999c: s. 10) a „Výraz zapisujeme v nejjednodušším tvaru (s nejmenším možným počtem členů). Říkáme, že **výrazy zjednodušujeme**.“ (Šarounová et al., 1999c: s. 8). Následuje několik příkladů a úloh na zjednodušování výrazů a součet mnohočlenů, který je podrobněji vyložen pomocí slovní úlohy. Odčítání mnohočlenů je opět ukázáno nejprve na číselném a až poté na algebraickém výrazu. V obou případech autoři použijí opačný člen k mnohočlenu, což je vysvětleno o několik řádků dříve. Žáci by měli použít postup ilustrovaný na příkladu $(x+2)-(x-6)=(x+2)+(-x+6)=x+2-x+6=8$.

K násobení mnohočlenů autoři použili geometrické modely. Postupují od součinu reálných čísel přes součin jednočlenů, součin mnohočlenu a jednočlenu až po součin dvou mnohočlenů. Vše ilustrují na příkladu[46] o výpočtu obsahu čtyř obdélníků. Je zde opět zmíněna distributivita

[44] Matematika 8, 1. díl, str. 92, příklad 1.
[45] Šarounová, A., et al. (1999c). *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus.
[46] Matematika 8, 2. díl, str. 27, příklad 1.

násobení. Nezapomeňme, že žáci mají již zkušenost s násobením mnohočlenu číslem z ekvivalentních úprav rovnic. Geometrický model je použit i pro druhou mocninu dvojčlenu, kde je úkolem zapsat co nejjednodušším způsobem obsah čtverců, jejichž strany jsou určeny dvojčleny a jednočleny. Shrnutí jednotlivých vzorců je doplněno řadou úloh i s geometrickým podtextem. K vytýkání jednočlenu před závorku se žáci dostanou přes dělení dvojčlenu jednočlenem v příkladu[47] 4 na obr. 20, za kterým následuje vysvětlení pojmu *rozklad na součin*, který je připodobněn k rozkladu čísel na prvočinitele.



4 **Vypočtěte a proveďte zkoušku násobením:**

a) $(2a+2):2$

b) $(8a^3+3a):a$

c) $(4a^3-6a^2):2a^2$

Řešení

Výpočet:	Zkouška:
a) $(2a+2):2=a+1$,	$(a+1)\cdot 2=2a+2$
b) $(8a^3+3a):a=8a^2+3$,	$(8a^2+3)\cdot a=8a^3+3a$
c) $(4a^3-6a^2):2a^2=2a-3$,	$(2a-3)\cdot 2a^2=4a^3-6a^2$

Napíšeme-li výraz $2a+2$ ve tvaru $2\cdot(a+1)$, říkáme, že jsme číslo 2 **vytkli před závorku.**

Z výrazu $8a^3+3a$ můžeme vytknout a:
$8a^3+3a=a\cdot(8a^2+3)$

Z výrazu $4a^3-6a^2$ můžeme vytknout $2a^2$:
$4a^3-6a^2=2a^2\cdot(2a-3)$

Obr. 20: Zavedení vytýkání před závorku u dělení dvojčlenu jednočlenem

Poslední dovedností, kterou se žák naučí pro úpravy výrazů, je postupné vytýkání. Opět je vyložena na názorném příkladu. Ve zbylé části učebnice, zejména v kapitole *Rovnice*, si žák své dovednosti upevňuje řešením velkého množství úloh, mezi nimiž se vyskytuje i několik podobných, jako v testu našeho experimentálního projektu.

Matematika 9

První díl učebnice[48] se po krátkém úvodním opakování geometrie opět věnuje algebraickým výrazům. Tentokrát se již nezačíná číselnými výrazy, ale opakováním dříve naučených úprav algebraických výrazů jako například zjednodušování součtu, rozdílu a součinu mnohočlenů, vytýkání, rozklad na součin apod. V příkladu, kde žáci mají násobit mnohočleny a poté výsledek ověřit dosazením čísla za proměnnou, se autoři zmiňují o vlastnostech tohoto ověřování.

[47] Matematika 8, 2. díl, str. 38, příklad 4.
[48] Šarounová, A., et al. (1999d). *Matematika 9, 1. díl*. Praha: Prometheus.

Hodnota daného i výsledného výrazu je pro $x = -1$ stejná. Tím jsme ověřili správnost výsledku pro $x = -1$. Je však třeba si uvědomit, že jsme tím neověřili a ani dosazováním nemůžeme ověřit správnost výsledku pro libovolné číslo x.

(Šarounová et al. 1999d: s. 16)

Následuje velké množství příkladů a úloh, po kterém autoři přecházejí k lomeným výrazům, kde žák uplatní své dosavadní zkušenosti s úpravou mnohočlenů zejména při krácení a určování podmínek, za kterých má lomený výraz smysl. V této fázi výuky skončili žáci, se kterými jsme prováděli rozhovory, proto i rozbor této řady učebnic zde ukončíme.

1.4.3 Matematika 6. – 9. (Cihlář & Zelenka)

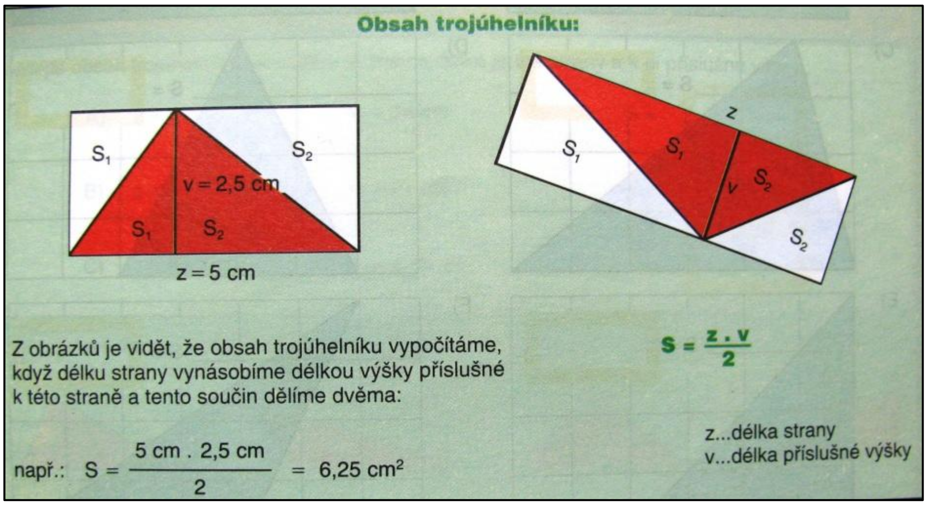
V první řadě je nutné podotknout, že jde o řadu *pracovních učebnic*, které používají na ZŠ Rakovského. Žáci píší své řešení přímo do učebnice, nejčastěji do předtištěných žlutých okének, v ostatních případech označují, doplňují, spojují, rýsují apod. Pro každý ročník byly vydány dva díly, kde pouze první díl obsahuje výčet symbolů, které zjednodušují práci s učebnicí. Obdélníkem se zeleným podkladem a vykřičníkem je označen výkladový text k zapamatování. Obtížnost úloh je číslována od jedné do deseti, čím těžší úloha, tím vyšší číslo. Většinu výsledků lze zkontrolovat na konci učebnice.

Matematika pro šestou třídu

První díl učebnice[49] nezačíná komplexním opakováním znalostí z prvního stupně, jak tomu bylo u předchozích řad, ale rovnou kapitolou *Dělitelnost*. Žáci zde pracují s číselnými výrazy v různých doplňovačkách a při řešení slovních úloh. Autoři využívají i geometrické modely ve čtverečkované síti, na kterých ukazují různé násobky čísel. Poznatky jsou po několika úlohách shrnuty a zapsány jako poučky s vykřičníkem. V poučkách se často objevují různá schémata či obrázky, proměnné se v zápisech objevují zřídka. Ty jsou použity až v následující kapitole *Mnohoúhelníky,* v zobecněných vlastnostech trojúhelníka a vzorci pro obsah pravoúhlého trojúhelníka. Žákům je předložen vzorec a oni do něho dosazují čísla místo proměnné, načež určují hodnotu číselného výrazu. V úlohách jsou u stran trojúhelníků napsány pouze jejich číselné hodnoty, nikoli označení. Následují konstrukční úlohy trojúhelníků, kde jsou již strany i úhly značeny písmeny. Poté se autoři vracejí zpět k obsahům, ale teď již pro obecný trojúhelník.

[49] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995a). *Matematika pro šestou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna.

Je zde[50] uveden vzorec i s dosazením konkrétních hodnot za proměnné (obr. 21). Nelze přehlédnout zlomek, jehož výklad se objevuje až v následující kapitole *Racionální čísla*.



Obr. 21: Algebraické výrazy v geometrii

S úpravou algebraického výrazu se žáci setkají o několik stran dále u zjednodušení vzorce pro obvod rovnoběžníku „$o = a + b + a + b$; $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$; $o = 2 \cdot (a + b)$." (Cihlář & Zelenka, 1995a: s. 56), po kterém následuje několik úloh zaměřených na správné dosazení do správných vzorců. V následující kapitole *Racionální čísla* jsou všechny operace jako sčítání, odčítání, násobení a dělení zapsány pouze příklady s číselnými výrazy. To je rozdíl oproti předchozím dvěma řadám, které používaly pro obecné postupy proměnné. Mnohem zajímavěji jsou zde objasněny vlastnosti těchto operací. Pomocí tabulek má žák například objevit asociativitu sčítání i násobení. Asociativita pro sčítání[51] je na obr. 22. To, že se jedná o asociativitu, se v učebnici již nepíše, autoři zřejmě předpokládají, že informaci žákovi předá učitel.

Vypočítejte neznámé hodnoty v tabulce:

a	b	c	(a + b) + c	a + (b + c)	(a + c) + b
$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$			
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$			

Prohlédněte si výsledky úlohy a vyvoďte závěr!

Obr. 22: Použití proměnných v záhlaví tabulek

[50] Matematika pro šestou třídu, 1. díl, str. 49.
[51] Matematika pro šestou třídu, 1. díl, str. 76.

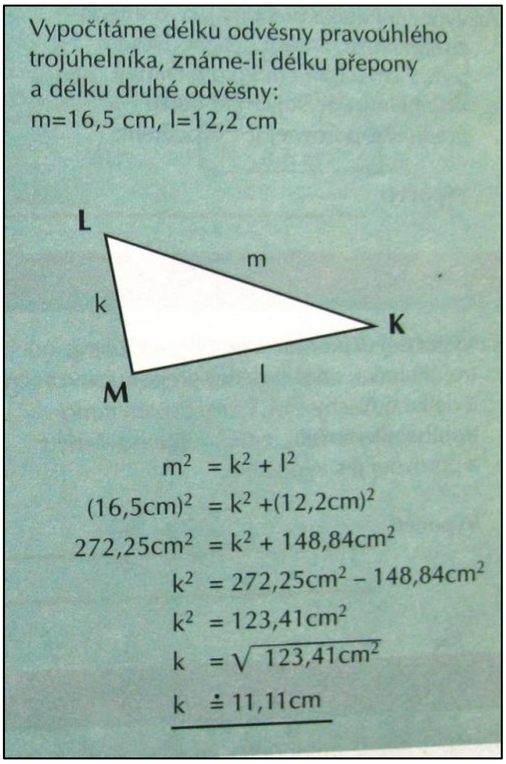
Distributivita násobení vzhledem ke sčítání je již žákovi předložena jako fakt, který má pouze ověřit. Druhý díl učebnice[52] začíná povrchy a objemy těles. Hned na šesté straně je výčet obecných vzorců pro povrch tří různých hranolů. U každého je i obrázek s číselnými délkami stran, které jsou v dalším kroku dosazeny za proměnné, a následně je určena hodnota výrazu. Na stejnou činnost je zaměřeno i několik následujících úloh. Zajímavější je úloha[53], kde je několik různých útvarů složených z osmi jednotkových krychliček a úkolem žáka je určit povrch jednotlivých útvarů. Naskýtá se zde několik možností. Žák si může například jednotlivé čtverečky značit a sčítat na prstech ruky. Může si ale také napsat složitější číselný výraz, upravit ho a určit jeho hodnotu. To, jak žák skutečně postupuje, se ale z učebnice nedozvíme. Ve zbylé části učebnice nejčastěji žáci dosazují za proměnné do obecných geometrických vzorců a řeší jednoduché lineární rovnice.

Matematika pro sedmou třídu

Kapitola *Mocniny a* Pythagorova věta, prvního dílu učebnice[54], začíná stejně jako některé kapitoly v minulých učebnicích. Žákům je na zeleném podkladu označeném vykřičníkem předloženo a na geometrických modelech a číselných výrazech vysvětleno, co je to druhá mocnina, základ a exponent. Objevují se zde i blíže nepopsané vzorce „$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$." (Cihlář & Zelenka, 1994a: s. 28). Opět následují početní úlohy na procvičení. Obdobně je tomu i pro třetí mocninu, druhou a třetí odmocninu. Tyto poznatky jsou následně využity ve výkladu Pythagorovy věty, kdy například délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku autoři určí tak, že dosadí do vzorce[55] $m^2 = k^2 + l^2$, kde m je přepona, číselné hodnoty za přeponu a odvěsnu a následně upravují rovnici (obr. 23). Předpokládají tedy, že žák již umí s rovnicemi tohoto typu pracovat. Jako nevhodné v postupu považuji dosazování číselných hodnot společně s jednotkou obsahu „cm^2" a označení přepony písmenem „m". Skutečnost, že „m" v prvním řádku označuje proměnnou a například ve třetím nikoli, může být pro žáka matoucí. Všechny následující úlohy jsou podobného charakteru, kdy žák použije vzorec a dosazuje do něho, některé úlohy má navíc ověřit konstrukcí trojúhelníka. V některých případech musí určit i obsahy složitějších útvarů, kde již pracuje se složitějšími výrazy.

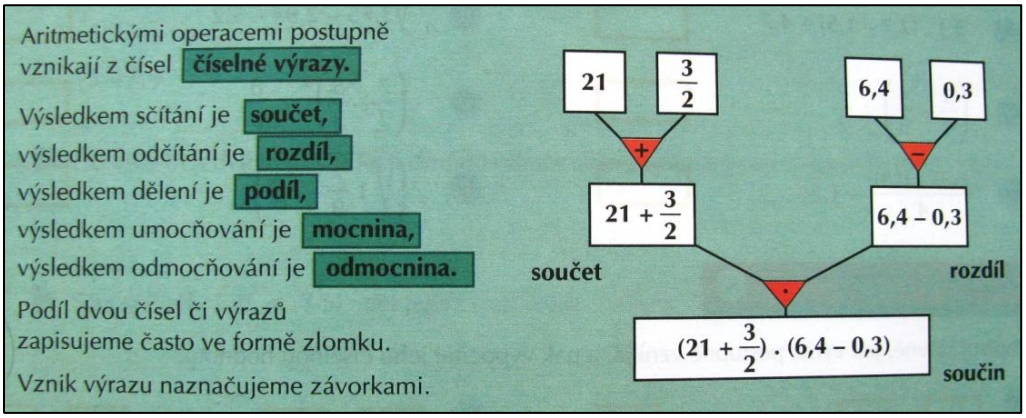
---

[52] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995b). *Matematika pro šestou třídu, 2. díl.* Praha: Fortuna.
[53] Matematika pro šestou třídu, 2. díl, str. 8, úloha 6.
[54] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1994a). *Matematika pro sedmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna.
[55] Matematika pro sedmou třídu, 1. díl, str. 37.



Obr. 23: Postup pro určení délky odvěsny

Kapitolou *Výrazy, posloupnosti a funkce* začíná druhý díl[56]. Bez motivačního úvodu je žákům ihned předloženo[57], jak vznikají číselné výrazy (obr. 24).



Obr. 24: Vznik číselných výrazů zakreslen pomocí schémat

Funkci závorek autoři více než v posledním řádku nepopisují. Následují úlohy, které jsou nejčastěji zadány:

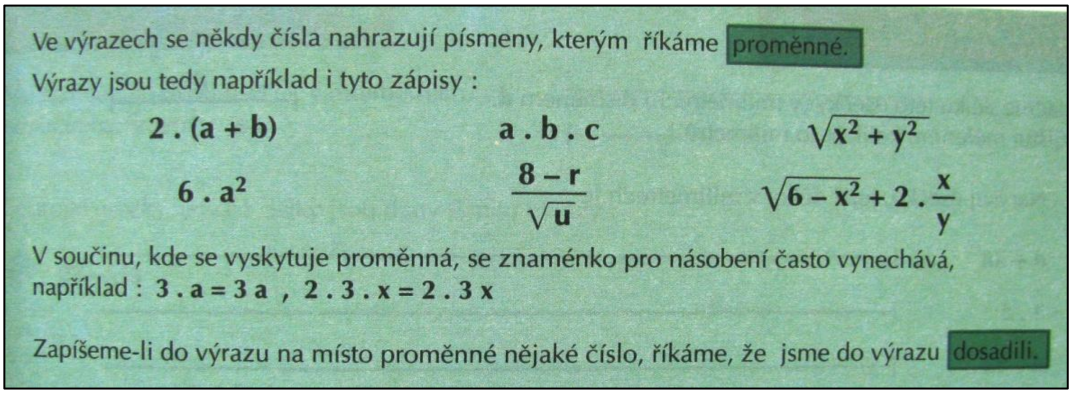
- pomocí podobných schémat z obr. 24

[56] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1994b). *Matematika pro sedmou třídu, 2. díl*. Praha: Fortuna.
[57] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 5.

- slovním popisem výrazu
- složitějšími geometrickými útvary v rovině s označenými délkami stran

Úkolem žáka je vytvořit i několik různých výrazů k jednomu zadání (např. u obvodu nebo obsahu útvaru) a určit jejich číselnou hodnotu. Cílem těchto úloh je získat zkušenosti v práci s číselnými výrazy a uvědomit si, jakou funkci mají závorky v zápise, kde je nutné je napsat a kde to nutné není.

Motivační hrou[58], kde je úkolem do číselného výrazu napsat libovolné množství závorek tak, aby výraz měl co největší, resp. nejmenší hodnotu, autoři uvádějí informace o přednosti operací mocnina a odmocnina před násobením a dělením a před sčítáním a odčítáním. Objasňují tím i nutnost použití závorek v zápisu číselného výrazu. Z mého pohledu náhle je na následující straně objasněn pojem proměnná a dosazení čísla za proměnnou (obr. 25). Jako příklady jsou použity vzorce, které již žáci znají z minulých kapitol.


Ve výrazech se někdy čísla nahrazují písmeny, kterým říkáme **proměnné.**
Výrazy jsou tedy například i tyto zápisy :

$$2 \,.\, (a + b) \qquad a \,.\, b \,.\, c \qquad \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$6 \,.\, a^2 \qquad \frac{8 - r}{\sqrt{u}} \qquad \sqrt{6 - x^2} + 2 \,.\, \frac{x}{y}$$

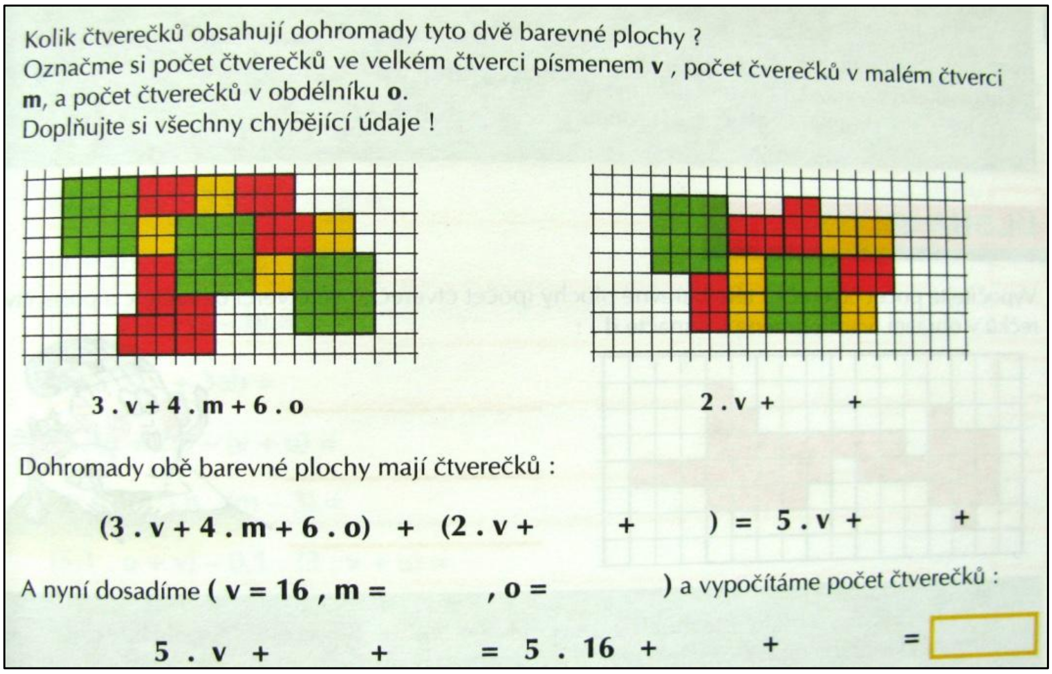
V součinu, kde se vyskytuje proměnná, se znaménko pro násobení často vynechává, například : $3 \,.\, a = 3a$, $2 \,.\, 3 \,.\, x = 2 \,.\, 3x$

Zapíšeme-li do výrazu na místo proměnné nějaké číslo, říkáme, že jsme do výrazu **dosadili.**

Obr. 25: Zavedení pojmu proměnná a dosazení do výrazu za proměnnou

Následující úlohy využívají často geometrické objekty. Například[59] jsou dány různě dlouhé úsečky r a s. Úkolem je narýsovat úsečku $2r - 3s$ nebo $\sqrt{r^2 - s^2}$, aniž by žáci původní úsečky měřili. Sčítání a odčítání mnohočlenů autoři konstruují pomocí geometrického modelu ve čtverečkované síti (obr. 26).

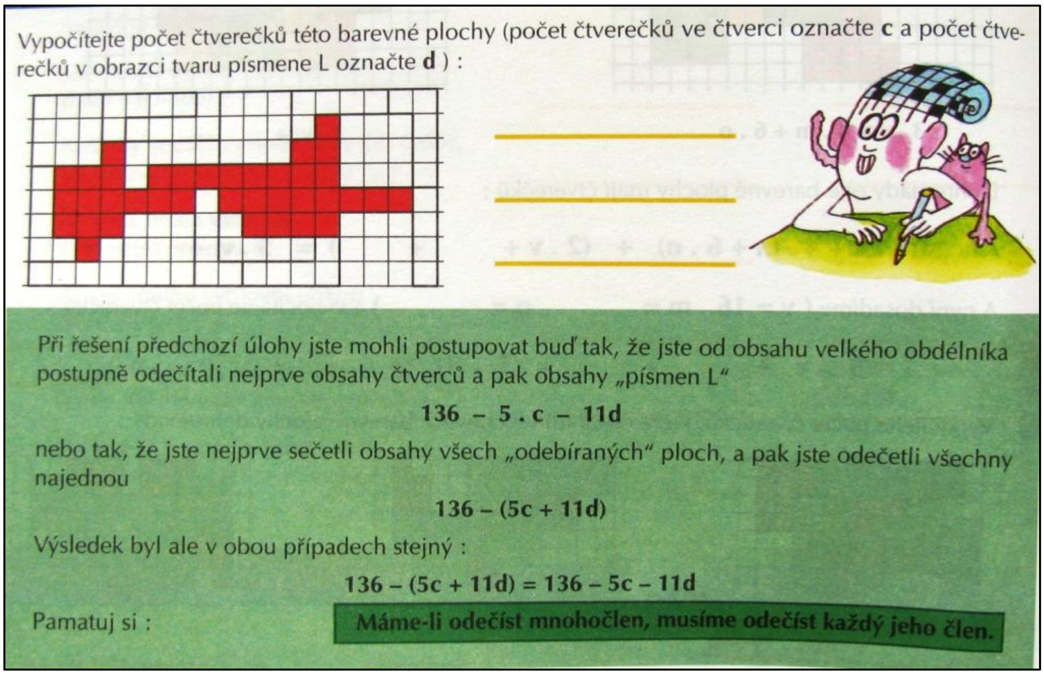
[58] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 12.
[59] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 15.



Obr. 26: Pomocí barevně odlišených útvarů se žáci učí sčítat mnohočleny

Následuje totožná úloha pro tři „barevné plochy“. Žáci získají představu o sčítání mnohočlenů, kde v každém členu je pouze jedna proměnná v první mocnině. Autoři pokračují algebraicky zadanou úlohou[60], kde jsou dány dva dvojčleny či trojčleny, a ty se mají sečíst. Překvapivě se v posledních čtyřech výrazech objevují i členy s dvěma proměnnými či proměnná ve druhé mocnině, například: „E/ $(4rs + 5r^2 + 3s) + (2rs + 5s) =$“ (Cihlář & Zelenka 1994b: s. 19). Těžko říci, jak žáci zareagují na sčítání jednočlenů s různými proměnnými v různých mocninách, to zde vysvětleno zatím není. Autoři zřejmě předpokládají, že látku podrobně vysvětlí učitel. Hned na následující straně se žáci dozvědí, co jsou to mnohočleny: „Vznikají sčítáním a odčítáním jednodušších výrazů, kterými může být reálné číslo, proměnná nebo jejich součiny.“ (Cihlář & Zelenka 1994b: s. 20). Jsou zde napsány příklady dvojčlenu, trojčlenu a čtyřčlenu. Pojem jednočlen se zde překvapivě vůbec neobjevuje. Podle mého názoru zbytečně složitou úlohou[61] má žák objevit, jak se odečítá mnohočlen (obr. 27).

[60] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 19, úloha 24.
[61] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 20, úloha 25.



Vypočítejte počet čtverečků této barevné plochy (počet čtverečků ve čtverci označte **c** a počet čtverečků v obrazci tvaru písmene L označte **d**) :

Při řešení předchozí úlohy jste mohli postupovat buď tak, že jste od obsahu velkého obdélníka postupně odečítali nejprve obsahy čtverců a pak obsahy „písmen L"

$$136 - 5 . c - 11d$$

nebo tak, že jste nejprve sečetli obsahy všech „odebíraných" ploch, a pak jste odečetli všechny najednou

$$136 - (5c + 11d)$$

Výsledek byl ale v obou případech stejný :

$$136 - (5c + 11d) = 136 - 5c - 11d$$

Pamatuj si : **Máme-li odečíst mnohočlen, musíme odečíst každý jeho člen.**

Obr. 27: Úvodní úloha pro zavedení odčítání mnohočlenů

Předpokládám, že alespoň jeden bystrý žák ve třídě zkusí dosadit za proměnné c a d a určí číselnou hodnotu výrazu. Pokud ji porovná s počtem červených čtverečků, bude o jeden čtvereček rozdílná (pravděpodobně má být červený čtvereček nejvíce vpravo bílý). Považuji za nevhodné, aby příklad pro zavedení nové látky obsahoval chybu. Na druhou stranu, pokud učitel chybu správně uchopí, může mít ve výsledku pro žáky přidanou hodnotu.

Podle mě přiměřenou úlohou[62] je uvedeno roznásobování závorek a vytýkání před závorku. Poznatky z úlohy jsou shrnuty na obr. 28.

V předchozí úloze jste asi zjistili, že platí:

$$2 . (a + b) = 2 . a + 2 . b$$

Pamatuj si : **Máme-li násobit mnohočlen, musíme násobit každý jeho člen.**

Při **roznásobování** závorky se výrazem před závorkou násobí každý člen, jestliže se společný činitel ze všech členů umístí před závorku, hovoříme o **vytýkání** před závorku.

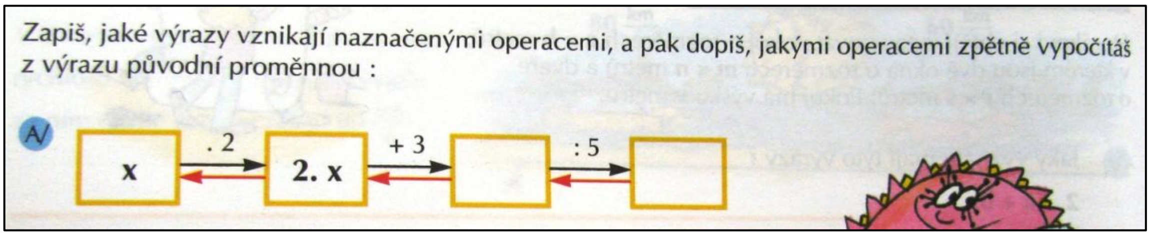
Obr. 28: Současné zavedení roznásobování a vytýkání

Následují série úloh zaměřené na úpravy algebraických výrazů. Z obsahu učebnice je zřejmé, že ze strany učitele je ještě nutné mnoho věcí souvisejících s úpravou algebraických výrazů s žáky

[62] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 20, úloha 26.

probrat. Například narazí-li žák na úlohu: „Upravte výrazy: C/ $\frac{2u^2v}{4u}$ =“ (Cihlář & Zelenka, 1994b: s. 21, úloha 28). Doposud se žáci setkali pouze s úpravami číselných lomených výrazů (s algebraickými pouze u některých geometrických vzorců, které ale neupravovali). Výsledek na konci učebnice „$\frac{uv}{2}$“ (Cihlář & Zelenka 1994b: s. 107) překvapivý není. Ovšem neuvedení podmínek, za kterých má daný výraz smysl, považuji za problematické. Na druhou stranu kladně hodnotím množství slovních úloh, kdy zadaný text obsahuje větší množství proměnných a poté je zapsáno několik algebraických výrazů. Úkolem je slovně zapsat, jaké významy mají jednotlivé výrazy k zadanému kontextu.

Pro vyjádření proměnné z výrazu autoři používají schémata[63] na obr. 29, kde žák nejprve z osamocené proměnné vytvoří pomocí naznačených operací výraz a pak jde cestou zpět.



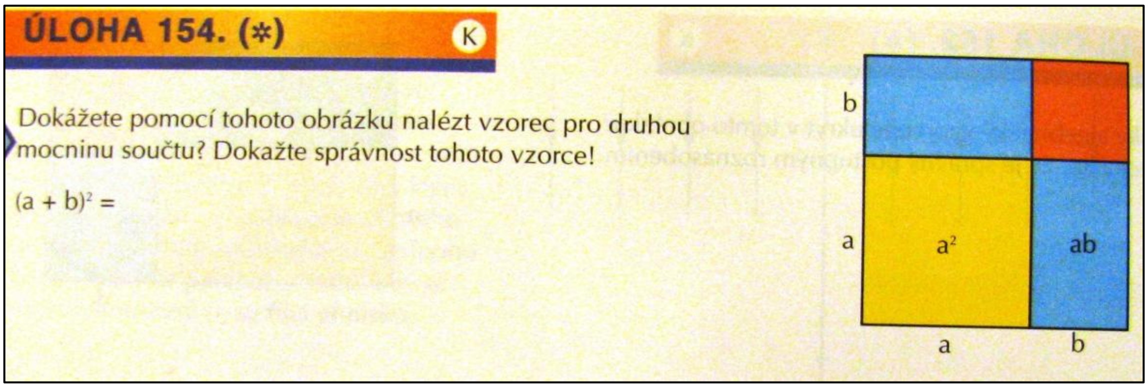
Obr. 29: Vytváření výrazů a vyjadřování proměnné pomocí schémat

Žáci zatím nepracují s rovnicí. Podobná schémata žáci používali i u číselných výrazů. Pomocí nich řeší řadu geometrických úloh vyžadujících například určení délky strany kvádru, jestliže známe jeho povrch a zbylé dvě strany. Tím kapitola o výrazech končí. Autoři se následně věnují geometrii a poté rovnicím, kde výklad začíná nejčastěji vysvětlením se vzorovým příkladem a poté úlohami na procvičování. Jako modely jsou zde použity váhy a dřívější schémata. Je zde[64] popsáno, co se míní pojmem neznámá: „Rovnice je zápis rovnosti dvou výrazů, kde se objevuje neznámé číslo. Toto neznámé číslo je označeno písmenem, kterému říkáme neznámá.“ (Cihlář & Zelenka 1994b: s. 62). Bližší souvislost mezi neznámou a proměnnou zde uvedena není. Žáci poté řeší jednoduché rovnice pomocí ekvivalentních úprav, které byly průběžně předkládány. Zjednodušování mnohočlenů, jejich sčítání i odčítání či roznásobování závorek se objevuje v následujících úlohách s rovnicemi, nerovnicemi a slovních úlohách.

[63] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 26.
[64] Matematika pro sedmou třídu, 2. díl, str. 62.

Matematika 8

Začátek prvního[65] dílu se věnuje algebraickým výrazům v kapitole *Mocniny a odmocniny*. Obdobně jako v minulých dílech autoři k výuce přistupují převážně instruktivně. Nejdříve dají pravidlo, poté vzorový příklad s číselnými výrazy a poté s výrazy algebraickými. Sérií úloh by si měl žák nové pravidlo osvojit. Tímto způsobem je v kapitole vyložena mocnina, mocnina součinu a podílu, sčítání a odčítání členů mnohočlenu se stejným základem a stejným mocnitelem. V učebnici[66] pro sedmý ročník bylo vyloženo totéž pouze pro druhou mocninu, nyní rozšířeno na *n*-tou mocninu. I obecná pravidla jsou již zapsána pomocí proměnných. Všechny úlohy jsou podobného charakteru. Je dán výraz, který se má upravit, popř. se má určit jeho hodnota. Dalším pravidlem je součin a podíl mocnin se stejným základem, kde se již objeví podmínka pro výraz ve jmenovateli. Opět následuje série úloh, která pomalu přejde k tématu převodů jednotek, kde se objevují pouze číselné výrazy. Algebraické výrazy se opět objeví až v kapitole[67] *Výrazy, funkce*. Autoři začínají opakováním úprav číselných výrazů, na což naváží výrazy algebraickými v geometrických úlohách. Právě útvary jako čtverce a obdélníky jsou posléze použity jako modely pro výklad součinu dvou dvojčlenů a druhé[68] mocniny dvojčlenu (obr. 30).



Obr. 30: Použití geometrických modelů k objevení algebraických vzorců

Pro objevení vzorce druhé mocniny rozdílu a tzv. vzorce pro rozdíl čtverců nabádají autoři žáka roznásobením předem daných výrazů. Po několika úlohách kapitolu zakončuje přehled[69], kde jsou shrnuty poznatky o úpravách algebraických výrazů. Zbylá část učebnice je věnována

[65] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995c). *Matematika pro osmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna.
[66] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1994a). *Matematika pro sedmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna.
[67] Matematika pro osmou třídu, 1. díl, str. 55
[68] Matematika pro osmou třídu, 1. díl, str. 72
[69] Matematika pro osmou třídu, 1. díl, str. 76

rovnicím a nerovnicím. Kromě opakování ekvivalentních úprav je zde[70] vysvětleno, jak lze vyjádřit určitou neznámou ze vzorce. Na vzorec je nahlíženo jako na rovnici. Pomocí ekvivalentních úprav je rovnice převedena na potřebný tvar. Žákům by měla pomoci i nakreslená schémata, pomocí kterých již minulý rok vytvářeli výrazy, popř. z výrazu určovali proměnnou.

Ve druhém díle[71] nic nového o úpravách algebraických výrazů nenajdeme. Nalezneme pouze úpravy v úlohách s goniometrickými funkcemi či v úlohách zaměřených na výpočty povrchů a objemů těles.

1.4.4 Shrnutí poznatků

Proměnná a neznámá

Šarounová a kol. Již v rámci opakování látky z prvního stupně se žáci setkávají s různým použitím písmen. S proměnnými pracují zejména v zápisech obecných vlastností operací s přirozenými a celými čísly, v geometrických vzorcích a v záhlavích tabulek. Paralelně se objevuje i neznámá v jednoduchých rovnicích, ať už zadaných algebraicky, či slovní úlohou. Objasnění pojmu proměnná a výraz s proměnnou autoři zařadili již do druhého dílu učebnice pro šestý ročník, kde zároveň začíná práce s výrazy s proměnnou.

Pojem neznámá je objasněn až ke konci druhého dílu učebnice pro sedmý ročník, i když ho lze spatřit i v předchozích dílech. Autoři zřejmě předpokládají, že žáci pojem znají už z prvního stupně.

Herman a kol. V setkávání se s písmeny v učebnicích nevidím oproti Šarounové a kol. velký rozdíl, možná pouze v množství, které je zde o něco větší. Rozdíl lze ale spatřit v pojmu neznámá, který autoři vysvětlují již v první učebnici v rámci opakování rovnic. Oproti tomu pojem proměnná autoři nijak nepoužívají až do jeho vysvětlení společně s výrazy s proměnnou v posledním díle učebnice pro sekundu, přitom s proměnnou běžně pracují od prvních dílů učebnic obdobně jako u Šarounové a kol.

Cihlář a Zelenka. Zde je již patrný větší rozdíl oproti předešlým dvěma řadám učebnic. Písmena, ať ve formě proměnné či neznámé, se zde objevují mnohem méně. Nejvíce v geometrických vzorcích a tabulkách; v rovnicích a zobecněných pravidlech již méně. Je to způsobeno tím, že učebnice je koncipována jako pracovní, takže celkově je zde méně řešených

[70] Matematika pro osmou třídu, 1. díl, str. 90
[71] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1996). *Matematika pro osmou třídu, 2. díl*. Praha: Fortuna.

příkladů i úloh. Celý šestý a polovina sedmého ročníku je zaměřena na dosazování číselných hodnot za proměnné do různých vzorců a následné určení hodnoty číselného výrazu. Obdobně jako u Hermana a kol. se vysvětlení pojmu proměnná objevuje společně s výrazy na začátku druhého dílu učebnice pro sedmý ročník. Ke konci téže učebnice je bez větší propedeutiky objasněn i pojem neznámá, ale spojitost s proměnnou zde popsána není.

Číselné a algebraické výrazy

Šarounová a kol. Autoři téma číselných výrazů zařazují již v rámci opakování látky z prvního stupně a tematický celek výrazů s proměnnými rozdělují na dvě části. První úvodní část je zařazena do druhého dílu učebnice pro šestý ročník, kde výuka po opakování číselných výrazů přejde k výkladu proměnné a výrazu s proměnnou. Žák postupně provádí tyto činnosti:

- určování, zdali jde o číselný výraz či výraz s proměnnou
- čtení výrazu a určení, zdali jde o součet, součin atd.
- vytváření jednoduchých výrazů ke kontextu
- dosazení čísla za proměnnou a určování hodnoty číselného výrazu (i pomocí tabulek)

Po zhruba dvouletém získávání zkušeností z různých oblastí matematiky, například při řešení rovnic pomocí ekvivalentních úprav, se žák s tématem algebraické výrazy setká ve druhém díle učebnice pro osmý ročník. Autoři několik stran pouze opakují činnosti popsané výše, na které plynule naváží mnohočleny a jejich úpravy. Některé z těchto úprav, jako například zjednodušování mnohočlenů a číselné násobení mnohočlenu zná žák již z řešení rovnic. Podobně rozkládání mnohočlenu na součin je připodobněno prvočíselnému rozkladu čísel, se kterým má žák také dřívější zkušenosti.

Důraz je kladen na samotné řešení úloh, nejčastěji zadaných algebraickým výrazem, kterých je zde mnoho. Úpravy mnohočlenů jsou znovu zařazeny na začátek devátého ročníku v rámci opakování a přípravy na lomené výrazy.

Herman a kol. Obdobně jako u Šarounové a kol. se objevuje téma číselných výrazů v opakování látky prvního stupně a tematický celek algebraických výrazů je rozdělen na dvě části. První část tohoto celku je ovšem zařazena až do poslední učebnice pro sekundu (o rok později oproti Šarounové a kol.). Předchází mu stále téma číselných výrazů, které je celkem třikrát opakováno a rozšiřováno v různých[72] učebnicích. Až po třetím opakování autoři přejdou k výrazům s proměnnou, kde žáci postupně provádějí tyto činnosti:

- dosazení čísla za proměnnou a určování hodnoty výrazu (i pomocí tabulek)
- třídění výrazů a popis (jednočlen, mnohočlen, koeficient atd.)
- zjednodušování mnohočlenu, sčítání a odčítání mnohočlenů
- vytváření výrazů ke kontextu a tvoření výrazu podle slovního popisu (ve cvičeních)
- násobení mnohočlenů mnohočlenem
- dělení mnohočlenu jednočlenem

Tyto dovednosti jsou upevňovány zejména při řešení rovnic v následujícím díle, což je obráceně než u Šarounové a kol. O rok později se autoři opět vrací k úpravám algebraických výrazů, kde je vysvětleno dělení, umocňování, rozklad na součin a vytýkání u mnohočlenů.

Cihlář a Zelenka. Autoři do první učebnice nezařadili opakování z prvního stupně, jako tomu je u obou řad výše. Algebraické výrazy se poprvé objevují v geometrických vzorcích pro obvody a obsahy útvarů, které již žáci znají z prvního stupně. Postupně autoři přidávají nové vzorce a žáci se učí dosazovat za proměnnou a určují hodnotu číselného výrazu. Totéž žáci provádějí u přímé a nepřímé úměrnosti, kde se s výrazy také setkají. Geometrické modely jsou využívány i dále, k výkladu mocnin, odmocnin či Pythagorovy věty. Žák tak dosud získal zkušenosti s dosazováním za proměnnou a úpravou jednoduchých číselných výrazů. Řadou instrukcí o tom, co je to například součin, umocňování nebo že mocnění má přednost před násobením, žáci rychle projdou opakováním úprav číselných výrazů. Vyvrcholením je objasnění pojmu proměnná a rychlý přechod na výrazy algebraické ve druhém díle učebnice pro sedmý ročník. Žákům je objasněno sčítání, odčítání a částečně i roznásobování a vytýkání mnohočlenů, které dále používají pro řešení rovnic a nerovnic, obdobně jako u Hermana a kol. Vzorce pro úpravy algebraických výrazů jsou žákům opět modelovány pomocí geometrických útvarů, ale až o rok později. Z celé řady učebnic je patrné, že autoři nechávají mnohem více práce na učiteli než předchozí řady učebnic.

V následujících tabulkách je popsáno, jaké modely jednotliví autoři používají při zavádění operací s mnohočleny. Číslo uvedené v okénku je ročník, ve kterém byla látka vyložena.

---

[72] Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování, str. 49; Kladná a záporná čísla, str. 95; Výrazy [1], str. 97.

Tabulka 1: Zavádění sčítání a odčítání mnohočlenů

		Herman a kol.	**Šarounová a kol.**	**Cihlář a Zelenka**
Zjednodušení mnohočlenu (sčítání či odčítání jednotlivých členů)		7 Poprvé v geometrické úloze jako součet obsahů obdélníků. 7 Pomocí obrázků předmětů (jablka a hrušky), poté řešené algebraické výrazy. Postupně: jedna proměnná, více proměnných, proměnné v různých mocninách	7 Při úpravě výrazu v rovnicích. (jedna proměnná) 8 Ukázkou na číselném výrazu vhodným sdružováním.	Autoři blíže nepopisují. Objasňují až součet mnohočlenů.
Sčítání mnohočlenů obsahující pouze členy s	**jednou proměnnou v první mocnině**	Autoři blíže nepopisují.	8 Řešená slovní úloha na určení vzdálenosti mezi objekty. Objasnění komutativity a asociativity sčítání v oboru ℝ. Vhodným sdružování jednotlivých členů do skupin	7 Pomocí částečně řešeného příkladu s geometrickými útvary na čtverečkované síti, společně s algebraickým zápisem.
	jednou proměnnou v různých mocninách	7 Algebraicky zadané a řešené příklady. Ukázána metoda sdružování odpovídajících si členů.	8 Algebraicky zadané a řešené příklady. (proměnná pouze v druhé mocnině)	8 Uvedená pravidla a dva vzorové algebraicky zadané příklady. Poté úlohy.
	více proměnnými v prvních mocninách	7 Řečeno již u modelu jablek a hrušek. Sčítat můžeme členy, které se liší pouze svými koeficienty.	8 Autoři popisují rovnou pro více proměnných v různých mocninách.	Autoři blíže nepopisují. (7 Úlohy se ale objevují již po zavedení sčítání mnohočlenů s členy s jednou proměnnou v první mocnině.)
	více proměnnými v různých mocninách	7 Řečeno již u jablek a hrušek. Sčítat můžeme členy, které se liší pouze svými koeficienty.	8 Uplatnění komutativnosti a asociativnosti sčítání. Sdružováním do vhodných skupin. Řešené příklady.	Autoři blíže nepopisují. (8 Úlohy se objevují po zavedení sčítání mnohočlenů s členy s jednou proměnnou v různých mocninách)
Odčítání mnohočlenů		7 Algebraicky zadané a řešené příklady. Přes přičítání opačného členu.	8 Algebraicky zadané a řešené příklady. Přes přičítání opačného členu.	7 Výpočtem obsahu útvaru ve čtverečkované síti dvěma způsoby. Odečítání mnohočlenu popisují jako odečtení každého jeho členu.

Tabulka 2: Zavádění násobení mnohočlenů

Násobení	Herman a kol.	Šarounová a kol.	Cihlář a Zelenka
Mnohočlenu jednočlenem (roznásobování závorky)	7 Nejprve násobí jednočlen jednočlenem poté dvojčlenem. Připomenutí komutativnosti a asociativity násobení. Poté řešené algebraické příklady. Používají názorné šipky.	7 Při ekvivalentních úpravách rovnic. Roznásobování závorky pouze číslem. 8 Příklad na obvod obdélníka. Používají názorné šipky. (V příkladu se roznásobuje číslem, v následujících úlohách i proměnnou.)	7 Příklad vyžadující zápis obvodu obdélníka různými způsoby. Ve vzoru úpravy výrazu jsou použity pomocné šipky. (V příkladu se roznásobuje pouze číslem, v následujících úlohách i proměnnou.)
Mnohočlenu mnohočlenem	7 Slovní návod k roznásobení + vzorové roznásobení dvou dvojčlenů a dvojčlenu s trojčlenem.	8 Příklad na obsah obdélníka s délkami stran označených proměnnými. Použité šipky. (Ukázka i pro dvojčlen krát trojčlen.)	8 Neřešená úloha na obsah obdélníka s délkami stran označených proměnnými. Bez bližšího popisu a vysvětlení.
Vzorec $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$	8 Algebraickým roznásobením tří příkladů. Poté zobecnění. Geometrická interpretaci ukázána později.	8 Postupně přes obsahy čtverců o různých stranách, geometricky i početně znázorněno.	8 Neřešená úloha na obsah čtverce o straně $a+b$ s barevně rozlišenými oblastmi.
Vzorec $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$	8 Dán obecný vzore, který je ověřen roznásobením. Geometrická interpretaci ukázána později.	8 Algebraicky odvozeno přes $(a+(-b))^2$.	8 Neřešeným algebraickým roznásobením mnohočlenu mnohočlenem.
Vzorec $\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$	8 Řešeným algebraickým roznásobením výrazu $(a+b)(a-b)$. Ukázka geometrické interpretace pomocí vystřihování papíru.	8 Řešená slovní úloha se shrnutými poznatky.	8 Neřešeným algebraickým roznásobením výrazu $(a+b)(a-b)$.
Vytýkání jednočlenu z mnohočlenu	8 Přirovnání k prvočíselnému rozkladu čísel. Hledání největšího společného činitele jednočlenů.	8 U dělení mnohočlenu jednočlenem. Přirovnání k prvočíselnému rozkladu čísel. Hledání největšího společného činitele jednočlenů.	7 Vysvětleno společně s násobením mnohočlenu jednočlenem jako opačná operace. (Ukázka pouze vytknutí čísla, v úlohách i proměnné)
Vytýkání mnohočlenu z mnohočlenu	Postupným vytýkáním a pomocí vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu.	8 Řešené algebraicky zadané příklady. Přes výraz typu: $x(a+b)+y(a+b)$. Poté postupným vytýkáním a pomocí vzorců pro druhou mocninu dvojčlenu.	Neobjevuje se. Pouze v jedné úloze bez bližšího popisu.

1.4.5 Závěr analýzy učebnic

Autoři všech třech řad učebnic budují algebraické výrazy, zde konkrétně mnohočleny, a jejich úpravy, na třech pilířích:

1. Pilíř – Číselné výrazy
2. Pilíř – Výrazy v geometrii
3. Pilíř – Výrazy v rovnicích a nerovnicích

Na výrazech v geometrii více staví autoři Cihlář a Zelenka, oproti Šarounové a kol. a Hermanovi a kol., kteří inklinují spíše k rovnicím a číselným výrazům. Dále za nutné pro úpravy mnohočlenů považujeme následující znalosti a dovednosti:

- Vlastnosti operací $+, -, \cdot, /$ a umocňování s exponentem z $\mathbb{N}$ na množině $\mathbb{R}$
- Dělitelnost přirozených čísel a prvočíselný rozklad
- Funkce závorek v zápise
- Význam proměnné v zápise
- Dosazení číselných hodnot za proměnné a určování hodnoty číselného výrazu

Poslední dovednost sice přímo nesouvisí s úpravami, ale často je využívána pro jejich kontrolu. Za nejpodrobnější a zároveň nejkvalitnější výklad předešlých znalostí a dovedností a zároveň operací s mnohočleny považuji učebnice autorského kolektivu Herman a kol., čemuž zároveň odpovídá i rozsah a gymnaziální určení celé řady. Za nimi následují učebnice od Šarounové a kol., z kterých, na rozdíl od učebnic předchozích autorů, není zřejmé tak velké zaměření na výkon. Tyto učebnice mohou být díky barevným ilustracím dětem bližší i při podobně velkém množství různorodých úloh. Návaznost a propojenost jednotlivých témat je v obou řadách promyšlená a vhodná. Větší rozdíl, zejména v rozsahu výkladu a množství úloh, je vidět v učebnicích od Cihláře a Zelenky. Některé pojmy a dovednosti se v učebnicích vůbec neobjevují (například postupné vytýkání, pojem koeficient či jednočlen). To se může, zejména u začínajících učitelů, projevit tak, že na vynechané dovednosti a pojmy jednoduše při výkladu zapomenou. Tuto řadu učebnic bych doporučoval spíše jako doplňkové pracovní sešity, v kterých žáci naleznou ještě jinak zadané úlohy než v jejich hlavních učebnicích. Výhodou učebnic je, že do nich žáci mohou přímo psát a učebnice jim zůstávají.

1.5 Klasifikace chyb v úpravách algebraických výrazů

Jedním z cílů učitele je vést žáka k touze po poznání nových skutečností a učení se novým dovednostem. Učitel, jako průvodce žákovou cestou poznávání, by měl být schopen rozpoznat úskalí a nástrahy, které žáka na této cestě potkávají. Žák se při objevování nových, často i při opakování starých dovedností, může dopouštět různých druhů chyb. To je samozřejmě v pořádku a k poznávání to jistě patří; chybami se člověk učí. Důležité ale je, aby chyba, která vznikla, byla včas identifikována a aby se s ní co nejefektivněji pracovalo. Pokud si žák své vlastní chyby nevšimne, může se stát, že se jeho cesta odkloní špatným směrem. Je tedy na učiteli, aby si chyby včas všiml a žákovu cestu korigoval tím správným směrem dříve, než žák po své špatné cestě půjde dál. Vracet se po dlouhé cestě zpět je náročné a zdlouhavé. Efektivita společně s chutí poznávat nové může u žáka značně klesnout. Prvním předpokladem je tedy chybu včas identifikovat. V procesu identifikace chyby lze rozlišit dvě fáze, které mohou, ale nemusí probíhat současně (Kulič, 1971: s. 100):

1. ***Detekce chyby*** – odhalení nesprávnosti odpovědi, zjištění, že výkon je chybný.
2. ***Identifikace chyby v užším slova smyslu***, tj. zjištění, o jakou chybu jde, jak je výkon chybný.

Příkladem může být žákova chybná úprava algebraického výrazu, kdy v jednom z kroků chybně sečetl dvě čísla. Učitel může detekovat chybu například porovnáním žákova výsledku s vlastním výsledkem vzorového řešení. Žákova úprava výrazu je chybná, protože výsledky se neshodují. A poté chybu identifikovat v užším slova smyslu, například porovnáním žákova a vlastního řešení od začátku k samotnému kroku s chybou, kdy žák špatně sečetl dvě čísla. Druhou možností je, že učitel žádný vzor nemá a postupně kontroluje žákův postup. Učitel si všimne, že v jednom kroku žák špatně sečetl dvě čísla, tak nejenže chybu detekuje, ale současně identifikuje v užším slova smyslu jako chybné sečtení dvou čísel.

Abych mohl s chybou efektivně pracovat, je nutné si uvědomit závažnost a druh chyby, kterou jsem identifikoval. Jednu z klasifikací chyb v algebraických úpravách můžeme nalézt v (Bero & Hejný, 1990: s. 155). Tuto klasifikaci zde uvedu pod čísly 1 – 5, protože ji využiji při analýze výsledků v druhé části práce.

1. Numerické chyby

$$6(x+2) = 6x + 14 \quad \text{nebo} \quad \frac{7}{a+b} + \frac{4b}{5a} = \frac{4ab + 4b^2 + 25a}{5a(a+b)}$$

Chyby tohoto typu budu značit zkratkou NumCh. Podle autorů (Bero & Hejný, 1990: str. 156) je jejich příčinou nedostatečná automatizace nižších úkonů. Žák je soustředěn na vyšší, pro něj složitější úkon. Na nižší úkon je vyhrazena jenom malá část jeho soustředění, a jelikož tento úkon ještě není plně automatizován, vznikne chyba.

Příčinami snížení pozornosti či soustředění, se zabývá i Pilous (2014). Rozděluje příčiny na vnější a vnitřní (Pilous, 2014: s. 34). Vnějšími mohou být například únava, nuda či zaměření pozornosti jinam. Vnitřní příčinu nepozornosti může způsobit řešení různých paralelních podúloh. Žáci pak mají tendenci věnovat pozornost spíše podúlohám, které sami považují za obtížnější a klíčové. Z vlastních zkušeností bych ještě za vnější příčinu chyb z nepozornosti uvedl hluk či práci pod časovým tlakem, kdy žák věnuje příliš mnoho pozornosti zbývajícímu času do odevzdání písemné práce. Z těchto poznatků by se dalo říci, že numerické chyby jsou jednou podskupinou chyb z nepozornosti.

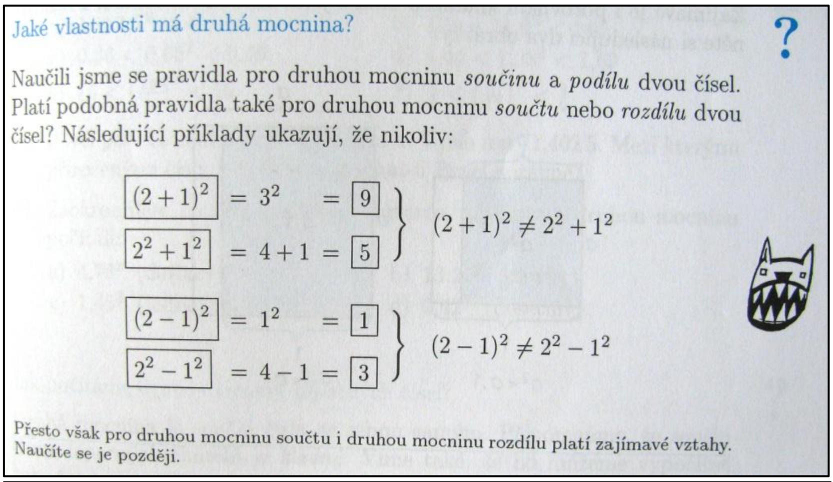
2. Úkonové chyby

$$\left(3 + \sqrt{5}\right)^2 = 9 + 5 \quad \text{nebo} \quad x - (5x - 5) = x - 5x - 5$$

Chybu budu značit zkratkou UkCh. Nejčastější příčinou úkonových chyb je selhání paměťového záznamu (Bero & Hejný, 1990: s. 156). Příčiny jsou mnohé, ale může dojít k tomu, že záznam je uložen v žákově vědomí v podobě tzv. formálního poznatku, který žák získal transmisí ať už od učitele či kamarádů nebo z literatury, kde u vzorce v rámečku stál nápis „Zapamatuj si". Tento poznatek je povrchní a neopírá se o žákovy předchozí zkušenosti. Tudíž je nasnadě, že po nějakém časovém odstupu může tento poznatek začít, dalo by se říci, degenerovat. Poznatek vzniklý jako generický model konstruovaný pomocí izolovaných modelů, by měl být ve vědomí žáka mnohem hlubší a trvalejší, měl by tedy úkonovým chybám více předcházet. Trvalost takového poznatku značně závisí na emocích, jež žák při objevování prožívá. Známé obecné tvrzení říká, že čím jsou při prožitku emoce silnější, tím trvalejší stopu zanechá v naší paměti.

Odpověď na otázku, jak předcházet tvorbě formálních poznatků, je podle Hejného (2004: s. 41–42) jednoduchá. Pokud se chce učitel vyvarovat formálních poznatků u svých žáků, měl by jim poskytnout zejména dostatečné množství času k získání potřebného počtu izolovaných modelů a neukvapit se předkládáním hotových definic, návodů, postupů apod.

Závažnosti úkonových chyb si jsou vědomi i někteří autoři učebnic z oddílu 1.3, a proto na některé přímo upozorňují. Například pro druhou mocninu součtu i rozdílu lze v řadě od autorů Herman a kol. nalézt upozornění hned dvakrát. Poprvé u výkladu druhé mocniny[73] a podruhé při umocňování mnohočlenů[74] (obr. 31).



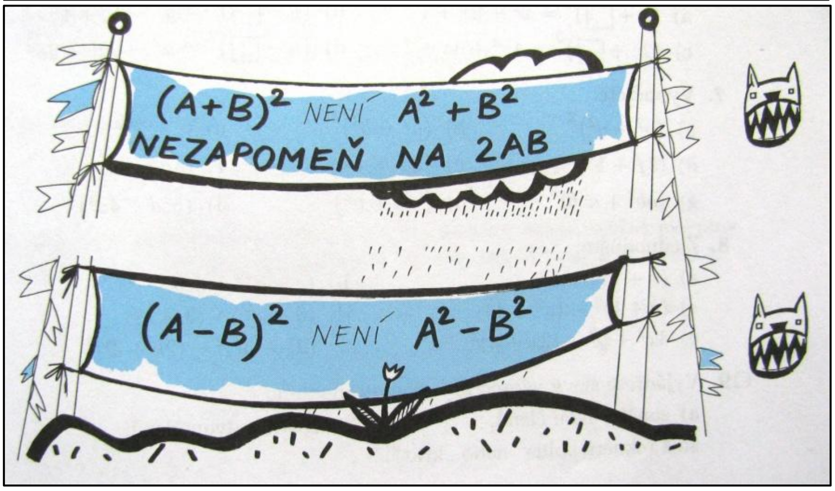
Jaké vlastnosti má druhá mocnina?

Naučili jsme se pravidla pro druhou mocninu *součinu* a *podílu* dvou čísel. Platí podobná pravidla také pro druhou mocninu *součtu* nebo *rozdílu* dvou čísel? Následující příklady ukazují, že nikoliv:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{(2+1)^2} = 3^2 = \boxed{9}\\ \boxed{2^2+1^2} = 4+1 = \boxed{5}\end{array}\right\}\ (2+1)^2 \neq 2^2+1^2$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{(2-1)^2} = 1^2 = \boxed{1}\\ \boxed{2^2-1^2} = 4-1 = \boxed{3}\end{array}\right\}\ (2-1)^2 \neq 2^2-1^2$$

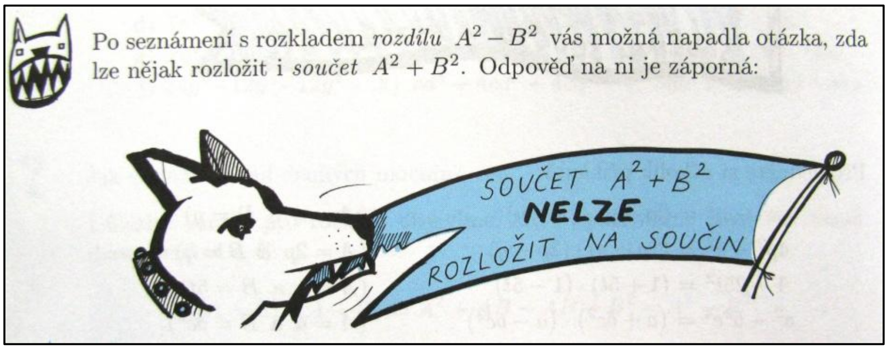
Přesto však pro druhou mocninu součtu i druhou mocninu rozdílu platí zajímavé vztahy. Naučíte se je později.



Obr. 31: Upozornění na chybné umocnění dvojčlenu od autorů Herman a kol.

Na[75] obr. 32 se nejedná přímo o upozornění na konkrétní chybu, které by se žák mohl při úpravách dopustit, ale o předejití možnému použití neexistujícího[76] vzorce pro součet druhých mocnin, který by žák mohl nějakým způsobem upravit například ze vzorce pro rozdíl druhých mocnin, který již zná.

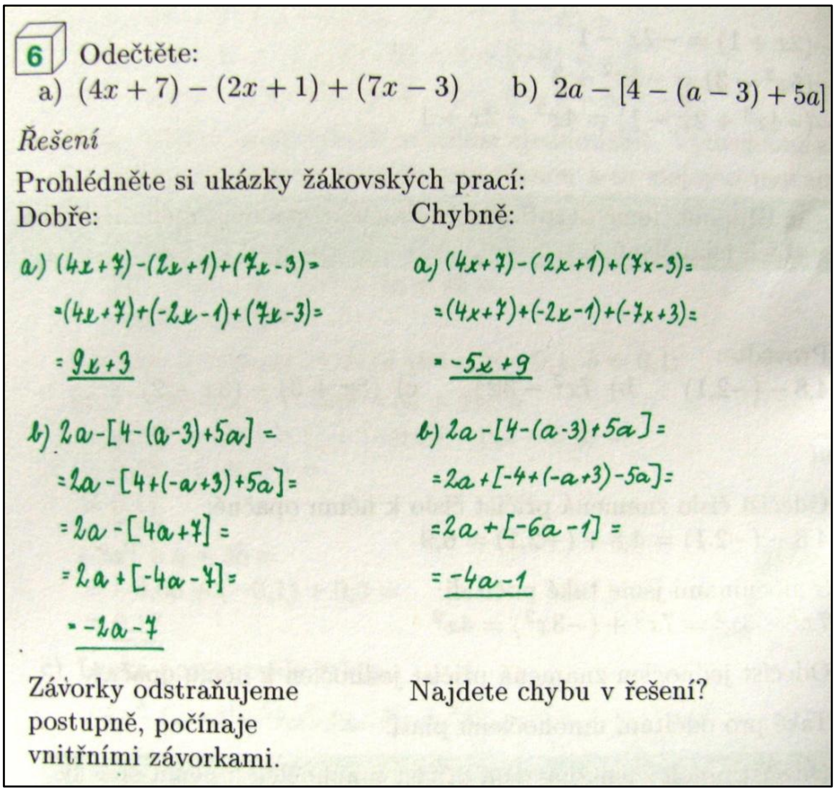
[73] Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus, str. 17.
[74] Herman, J., et al. (2006c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2*. Praha: Prometheus, str. 35.
[75] Herman, J., et al. (2006c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2*. Praha: Prometheus, str. 54.
[76] Uvažujeme pouze vzorce používané na druhém stupni základního vzdělávání. Neuvažujeme metody jako např. metodu vložení pole $\mathbb{R}$ do pole $\mathbb{C}$, kde lze například rozložit polynom $f(x) = x^2 + 1$ na součin dvou kvadratických polynomů.



Po seznámení s rozkladem *rozdílu* $A^2 - B^2$ vás možná napadla otázka, zda lze nějak rozložit i *součet* $A^2 + B^2$. Odpověď na ni je záporná:

Obr. 32: Objasnění existence vzorce pro součet druhých mocnin

V učebnici od autorů Šarounová a kol. je ilustrován[77] dvojí postup při odečítání mnohočlenů, jeden správný a druhý chybný (obr. 33). Úkolem žáka je najít chybu v řešení. Zajímavé je zadání *b)* a jeho chybné řešení, kdy je odstraněno znaménko minus před hranatou závorkou tak, že se změní všechna znaménka uvnitř závorky. Tento postup by mohl uplatnit například žák, který by odečítal mnohočlen tak, jak uvádějí autoři Cihlář a Zelenka: „Máme-li odečíst mnohočlen, musíme odečíst každý jeho člen.“ (Cihlář & Zelenka, 1994b: s. 20) a neuvědomil si, že výraz $-(a-3)$ je člen, jež změníme na $+(a-3)$.



6 Odečtěte:

a) $(4x+7)-(2x+1)+(7x-3)$ b) $2a-[4-(a-3)+5a]$

Řešení

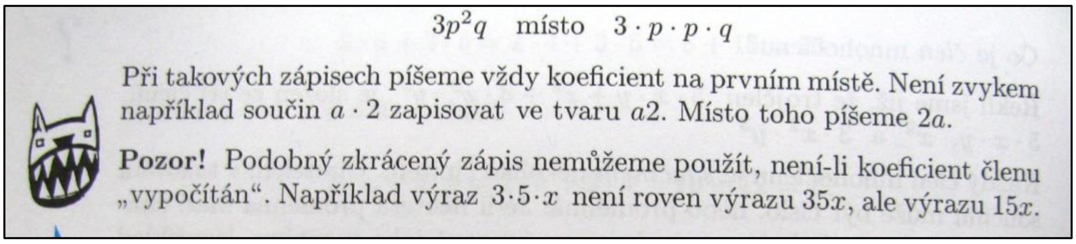
Prohlédněte si ukázky žákovských prací:

Dobře:	Chybně:
a) $(4x+7)-(2x+1)+(7x-3)=$	a) $(4x+7)-(2x+1)+(7x-3)=$
$=(4x+7)+(-2x-1)+(7x-3)=$	$=(4x+7)+(-2x-1)+(-7x+3)=$
$=\underline{9x+3}$	$=\underline{-5x+9}$
b) $2a-[4-(a-3)+5a]=$	b) $2a-[4-(a-3)+5a]=$
$=2a-[4+(-a+3)+5a]=$	$=2a+[-4+(-a+3)-5a]=$
$=2a-[4a+7]=$	$=2a+[-6a-1]=$
$=2a+[-4a-7]=$	$=\underline{-4a-1}$
$=\underline{-2a-7}$	
Závorky odstraňujeme postupně, počínaje vnitřními závorkami.	Najdete chybu v řešení?

Obr. 33: Ukázka chybného odstranění závorek od Šarounové a kol.

[77] Šarounová, A., et al. (1999c). *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus., str. 24.

Poslední upozornění na chybu, které jsem v rámci analýzy učebnic objevil, se týká zkracování zápisu členu. Nalezneme ho v učebnici[78] od autorů Herman a kol. při zavádění pojmu mnohočlen (obr. 34).



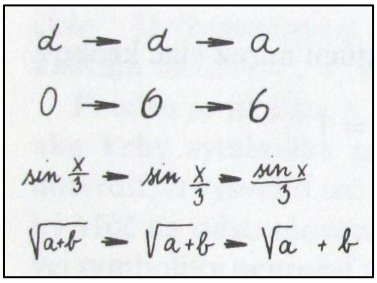
$3p^2q$ místo $3 \cdot p \cdot p \cdot q$

Při takových zápisech píšeme vždy koeficient na prvním místě. Není zvykem například součin $a \cdot 2$ zapisovat ve tvaru $a2$. Místo toho píšeme $2a$.

Pozor! Podobný zkrácený zápis nemůžeme použít, není-li koeficient členu „vypočítán“. Například výraz $3 \cdot 5 \cdot x$ není roven výrazu $35x$, ale výrazu $15x$.

Obr. 34: Upozornění na chybné zkrácení zápisu jednočlenů

3. Grafické chyby

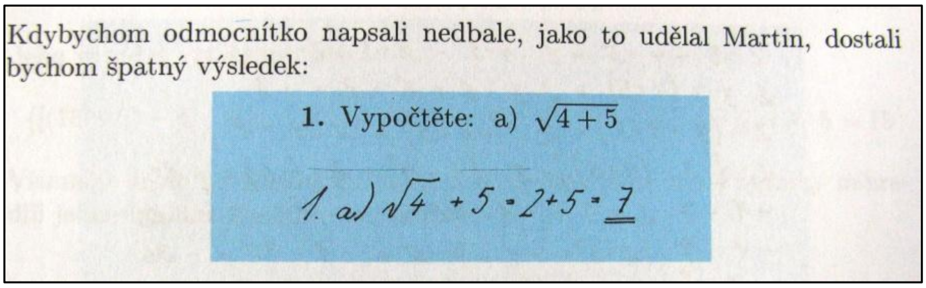


Obr. 35: Postupný vznik grafických chyb

Na obr. 35 je ukázka několika možností vzniku grafických chyb, které budu značit zkratkou GrCh. Jedná se o chyby způsobené nekvalitním matematickým zápisem. Nejedná se pouze o žáky trpící dysgrafií, ale i o běžné žáky, kteří považují matematický zápis za nepodstatný vzhledem k výsledku, či žáky pracující pod časovým tlakem. Ti ve snaze úlohu co nejrychleji dořešit často zápis rychle „naškrábou“, až se v něm sami dopustí chyb v dalším kroku. V horších případech dokonce žák svůj vlastní zápis nepřečte. Příkladem může být žák, který při řešení úlohy velmi nedbale psal, až do výsledku napsal výraz $3q$. Správný výsledek měl být ovšem 39. V úloze, která požadovala úpravu algebraického výrazu, se totiž písmeno q ani neobjevilo. Přitom šlo o žáka chytrého, kterému úpravy algebraických výrazů nedělaly větší problémy.

I tohoto typu chyb si jsou vědomi autoři učebnic. I když úpravám obsahující odmocninu se v této práci nevěnuji, považuji za vhodné toto upozornění na chybu ukázat.

[78] Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus, str. 110.



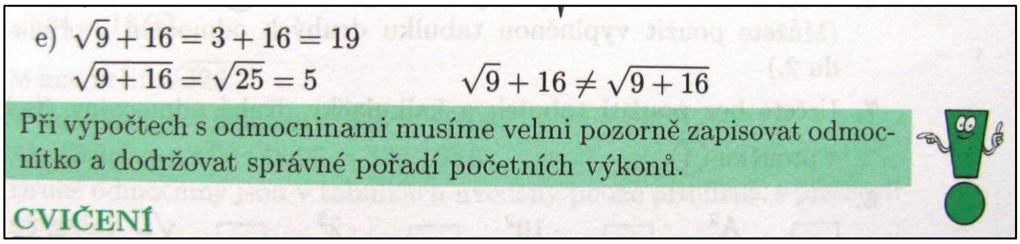
Kdybychom odmocnítko napsali nedbale, jako to udělal Martin, dostali bychom špatný výsledek:

1. Vypočtěte: a) $\sqrt{4+5}$

1. a) $\sqrt{4}+5=2+5=7$

Obr. 36: Nedbalý zápis odmocnítka

Na obr. 36 upozorňují[79] na nedbalost autoři Herman a kol. v kapitole číselné výrazy. Obdobně je tomu u Šarounové a kol. při výkladu druhé odmocniny[80] na obr 37.



e) $\sqrt{9}+16=3+16=19$

$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ $\quad\quad$ $\sqrt{9}+16\neq\sqrt{9+16}$

Při výpočtech s odmocninami musíme velmi pozorně zapisovat odmocnítko a dodržovat správné pořadí početních výkonů.

CVIČENÍ

Obr. 37: Ukázka významu různého zápisu odmocnítka

Chyby způsobené špatnou grafickou úpravou mohou žákovy výsledky značně zhoršit, i když jeho znalosti mohou být kvalitní. Učitel by tedy měl zdůrazňovat důležitost kvality matematického zápisu už od samých počátků.

4. Chyby velkých skoků

$$\frac{x+2}{2x-1}-\frac{3-x}{x+4}=1 \Rightarrow \frac{x^2+6x+4+2x^2-5x+3}{(2x-1)(x+4)}=1$$

Chybu budu značit zkratkou VSCh. Jedná se o chybu, kdy se žák snaží udělat více početních úkonů najednou v jednom kroku. Mezi jednotlivými kroky chybí matematický zápis, žák se snaží vše vyřešit a udržet v paměti, což se často nemusí podařit. V zápise následujícího kroku pak vznikne chyba. Často se této chyby dopouštějí žáci pracující pod časovým tlakem, kteří nechtějí zápisem ztrácet čas. Další skupinou jsou žáci, kteří přecení své vlastní schopnosti. Může sem patřit i případ, kdy se žák chce vytáhnout před ostatními způsobem: „Já už si to rozepisovat nemusím na rozdíl od vás." Náprava této chyby je ze strany učitele jasná. „Rob pokojne, prácu si kontroluj, urob radšej menej, ale bez chýb." (Bero & Hejný, 1990: s. 157).

[79] Herman, J., et al. (2005b*). Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus, str. 100.

[80] Šarounová, A., et al. (1999b). *Matematika 8, 1. díl*. Praha: Prometheus, str. 21.

5. **Strategické chyby**

$$\sqrt{(x+5)(x+5)} = \sqrt{x^2+5x+5x+25} \qquad \frac{2}{(2-x)^2}+\frac{x}{2-x}=\frac{2}{4-4x+x^2}+\frac{x}{2-x}$$

Chybu budu značit zkratkou StrCh. Žák se při řešení úlohy nedívá vpřed, nemyslí na následující dva či tři kroky a cestu, kterou by se měl při řešení ubírat. Soustředí se na úkon, který zvládá a může ihned udělat. Tím se ale může dostat do slepé uličky. Žákovi chybí potřebný nadhled a zkušenost, díky které by mohl předvídat další postup.

> Algebrický výraz možno vnímať dvoma spôsobmi: ako celok (celostné vnímanie), alebo po jednotlivých „zložkách" (atomárne vnímanie). Práve celostné vnímanie, ktoré žiakom často chýba, umožňuje voľbu vhodnej stratégie pri úprave výrazu.

(Bero & Hejný, 1990: s. 157)

6. **Bezradnosti a bloudění**

$$\frac{x^2-3xy+2y^2}{(x-y)^2}=\frac{x^2-3xy+2y^2}{x^2-2xy+y^2}=\frac{(x-y)(x-2y)}{x^2-2xy+y^2}=\frac{x^2-3xy+2y^2}{(x-y)^2}$$

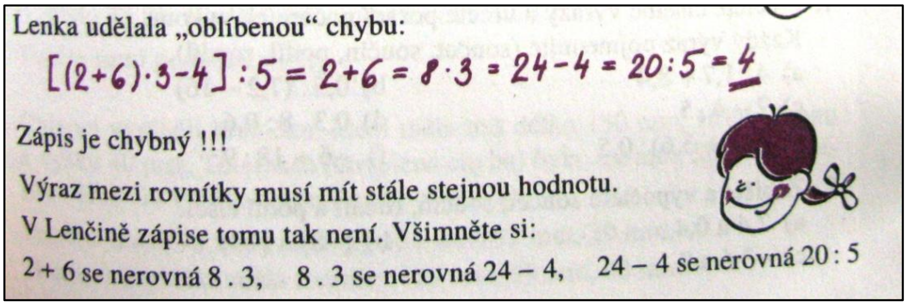
Chybu budu značit zkratkou BBCh. Žákovi se může stát, že v jistém kroku najednou neví, jak pokračovat. Může se to stát například špatnou volbou strategie, pro kterou se rozhodl v minulých krocích, nebo neznalostí potřebného úkonu pro pokračování. Žák je bezradný a úlohu nedokončí. Dalším příkladem je, když se žák po několika krocích dostane do bodu, ve kterém už byl dříve. Cítíme, že žák se nedopustil chyby v tom pravém slova smyslu, spíš nemá potřebný nadhled a zkušenosti jako při volbě správné strategie.

7. **Jiné chyby**

$$\frac{x}{3}+5=7 \Rightarrow x=7-5=2:\frac{1}{3}=6$$

Chybu budu značit zkratkou JCh. Patří sem všechny chyby, které nepatří do chyb předcházejících. Jedním typem může být například chybný zápis dobře myšleného postupu. Žák se soustředí na několik úkonů, které sice správně ve své hlavě provádí, ovšem chybně zapisuje. Výsledek může být správný, ale zápis je chybný. Učiteli, který u žáka kontroluje pouze výsledek, tak může tato chyba zcela uniknout, což pro žáka může mít v budoucnu velmi negativní účinek. Zejména při řešení složitějších úloh je potřeba se v průběhu výpočtu dobře orientovat a mít i možnost vlastní kontroly.

Upozornění na chybný zápis dobře myšleného postupu nevynechali v učebnici ani autoři vedení A. Šarounovou. Zařadili ho do příkladu[81], kde v zadání a) Lenka určuje hodnotu číselného výrazu $[(2+6)\cdot 3-4]:5$ (obr. 38).



Obr. 38: Příklad chybného zápisu dobře myšleného postupu

[81] Šarounová, A., et al. (1997). *Matematika 6, 2. díl*. Praha: Prometheus, str. 55, příklad 4.

2 Experimentální část

2.1 Metodologie

Cílem experimentální části je identifikovat problémy a chyby u žáků druhého stupně základní školy při úpravách algebraických výrazů; tyto chyby klasifikovat a zjistit jejich možnou příčinu. Úlohy použité v mém výzkumu byly vytvořeny v rámci projektu GA ČR *Kritická místa matematiky na základní škole*. Jsou uvedeny v Příloze A. Jejich zadání i charakteristiky jsou uvedeny v oddíle 2.4, kde jsou popsány výsledky rozhovorů s žáky, proto je zde uvádět nebudu.

Metodou sběru dat byly klinické rozhovory, protože v případě písemného řešení by nebylo možné získat dostatečně podrobné informace o obtížích žáků a jejich myšlenkových procesech. Klinické rozhovory byly vedeny tak, že žák řešil jednotlivé úlohy, ke kterým buď v průběhu, či po jejich vyřešení uvedl vlastní slovní komentář či vedl dialog s tazatelem o problémech, postupech a jiných faktech souvisejících s úlohou. Práce každého žáka byla nahrávána na videokameru a poté zpětně analyzována prostřednictvím pořízených přepisů. Pro kvalitní sběr dat bylo úkolem tazatele jednak navození přátelské atmosféry pro žákovu větší sdílnost a také pomoc žákovi při řešeních formou nápovědy.

Nejdříve jsem provedl dva pilotní rozhovory s žáky gymnázia. Jako první test vypracoval Tomáš a ihned po něm Miloš (viz níže v tab. 4). Po těchto rozhovorech jsem si ujasnil, jak budu s žáky pracovat. Důležité byly zejména tyto poznatky z pilotních rozhovorů:

- Je nutné minimalizovat ovlivňování budoucích účastníků rozhovoru žákem, který se již rozhovoru účastnil. To se projevilo v pilotním rozhovoru tak, že odcházející Tomáš po rozhovoru stačil na chodbě přicházejícímu Milošovi říci něco ve smyslu, že to bylo velmi těžké počítání a že to ani nestihl. Tím Miloše velmi rozrušil a tazatel pak ztrácel čas s jeho uklidněním.
- Je nutné upozornit žáky na fakt, že test není známkován, neovlivní jejich dosavadní školní výsledky a ani ho neuvidí nikdo jiný ze školy včetně učitelky matematiky. To dodalo žákům více klidu a otevřenosti.
- Je dobré požádat žáky, aby své myšlenky a postupy zapsali, a když sami uváží, že zápis je chybný, aby zápis jen jednou přeškrtli tak, aby byl stále čitelný. Neměli by zápis přečmárat či úplně vygumovat.
- Je nutné si ujasnit, jak silnou nápovědu či pomoc žákovi poskytnout. Na jednu stranu chce tazatel poskytnout žákovi dostatek času na přemýšlení, na druhou stranu chce získat

co nejvíce dat z co nejvíce úloh. Úkolem tazatele bylo rozpoznat, kdy žák například přemýšlí o problému (poprosit ho o přemýšlení nahlas) a kdy žák pouze sedí a nerozumí zadání.

- Ukázalo se, že 45 minut na vypracování všech úloh testu žákům nestačilo. Bylo proto přidáno ještě zhruba 10 minut z přestávek. Více času by asi nemělo větší smysl, žák již ztrácí soustředěnost a navíc cítí, že ostatní žáci mají přestávku, a to ho znepokojuje.

Protože po pilotních rozhovorech nedošlo k podstatné změně ve způsobu vedení rozhovoru ani v použitých úlohách, zařadil jsem data z pilotních rozhovorů do hlavního výzkumu.

Přehled žáků účastnících se experimentu

Chtěl jsem získat co nejpestřejší vzorek žáků, proto jsem kromě dvou základních škol zvolil i jedno gymnázium. Základním požadavkem na výběr žáků bylo, aby šlo o žáky komunikativní a takové, u nichž lze předpokládat obtíže při úpravách algebraických výrazů.

Gymnázium Elišky Krásnohorské **(**Praha 4 – Michle, Ohradní 55) jsem zvolil proto, že jsem na něm absolvoval povinné praxe v rámci studia na Pedagogické fakultě. Domluva s panem ředitelem i paní učitelkou proběhla velmi rychle. Na projekt mi byla přidělena zasedací místnost, kde jsem natáčel rozhovory. Žáci tercie byli po jednom uvolňováni z hodin matematiky, což dle pana ředitele bylo administrativně jednodušší, než provádět rozhovory mimo školní výuku. Celkem jsem zde provedl šest klinických rozhovorů během čtyř dní.

Ředitel základní školy Rakovského v Praze 12 vyžadoval, aby každý testovaný žák přinesl souhlas o účasti v projektu podepsaný rodiči. Tuto podmínku jsem splnil. Ve spolupráci s učitelkou matematiky jsme vybrali žáky z devátého ročníku, kteří by podle paní učitelky mohli s testem „alespoň trochu pohnout“. Jednalo se celkem o tři žáky, ostatní bohužel nepřinesli podepsaný souhlas. Rozhovory probíhaly v prázdné učebně během výuky matematiky, šlo o jeden rozhovor denně.

Spolupráce s fakultní školou Základní škola a mateřská škola ANGEL v Praze 12 byla velmi snadná a příjemná. Zástupce ředitele mi přidělil volnou místnost, do které mi posílal každou hodinu, ať se jednalo o matematiku či jiný předmět, jednoho žáka. Výsledkem bylo celkem pět rozhovorů během jednoho dne. Stejně jako v minulé škole se jednalo o žáky devátého ročníku.

V každé škole byli po dohodě s paní učitelkou matematiky popřípadě i se zástupcem ředitele (na ZŠ Angel) vybráni žáci podle dosavadních výsledků. Mělo se jednat o průměrné či lehce nadprůměrné žáky v matematice. V libovolném pořadí byli uvolňováni z hodin a posíláni paní učitelkou za mnou do přidělené místnosti. Seznam všech žáků, včetně podrobnějších informací, je uveden v tabulce 3. Jména žáků byla vzhledem k domluvené anonymitě změněna. Přezdívky respektují pohlaví žáka.

Tabulka 3: Jmenný seznam žáků účastnících se projektu.

Jméno	**Škola**	**Ročník**	**Věk**	**Známka z matematiky v 1. pololetí**	**Známka v 2. pololetí**	**Stav žáka v době rozhovoru**
Jana	ZŠ A	9	15	2	2	otevřená, mírně nervózní, často ukvapená
Martin	ZŠ A	9	15	2	1	zpočátku zmatený a nervózní, klidný, otevřený
Petra	ZŠ A	9	15	1	2	klidná, pečlivá, soustředěná, samostatná
Mirek	ZŠ A	9	15	3	2	klidný, soustředěný, otevřený, sdílný
Monika	ZŠ A	9	14	2	3	často se smějící, zbrklá, nesoustředěná, otevřená
Dalibor	ZŠ R	9	15	1	1	klidný, otevřený, upřímný, sdílný
Nela	ZŠ R	9	15	2	2	stydlivá, bojácná, méně sdílná,
Klára	ZŠ R	9	14	2	3	roztržitá, nesoustředěná, bez většího zájmu
Tomáš	G	Tercie (8)	13	1	2	klidný, mírně stydlivý, tichý, samostatný
Miloš	G	Tercie (8)	14	3	3	nervózní, vystresovaný, bojácný
Rudolf	G	Tercie (8)	14	1	2	klidný, upřímný, otevřený, sdílný
Sára	G	Tercie (8)	14	1	1	klidná, pečlivá, samostatná, otevřená
Anna	G	Tercie (8)	13	2	3	klidná, snaživá, otevřená, upřímná
Marie	G	Tercie (8)	14	1	1	snaživá, otevřená, mírně ukvapená

Pozn.: Použité zkratky: G – Gymnázium Elišky Krásnohorské; ZŠ A – ZŠ Angel; ZŠ R – ZŠ Rakovského.

Výkon žáků jednotlivých škol byl samozřejmě ovlivněn látkou, která byla probírána v době testu a několik hodin nazpět (viz tab. 4).

Tabulka 4: Porovnání probíraných témat před a během testování.

	Předchozí látka	**Látka v době testu**
Gymnázium Elišky Krásnohorské	Tělesa – povrchy a objemy	Konstrukční úlohy
ZŠ Rakovského	Lomené výrazy – krácení, rozšiřování, početní operace	Lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli
ZŠ Angel	Operace s mnohočleny	Lomené výrazy – úvod

2.3 Průběh rozhovorů

Každý z žáků dostal předtištěné zadání patnácti úloh na třech listech papíru formátu A4. V zadání jednotlivých úloh bylo dostatek místa na jejich okamžité řešení. Jelikož žáci řešili úlohy během výuky, měli na vyplnění testu maximálně 55 minut, což se i v pilotní studii ukázalo jako nedostačující. Žákovi jsem řekl, že test není nijak známkován a neovlivní jeho současné hodnocení. V případě nejasností se mne jako tazatele může na cokoli zeptat a bude uvítáno, když své písemné postupy slovně popíše či po dokončení úlohy shrne. Někteří žáci spolupracovali více, jiní méně.

Žák, pouze jeho paže a část těla, nikoliv obličej, byl v průběhu své práce nahráván na videokameru. S touto skutečností i se zaručenou anonymitou byl dříve seznámen. Z nahrávek nebyl občas srozumitelný zvukový záznam, proto se zvuk zpomalený na poloviční rychlost, kdy bylo aktérům lépe rozumět, přepisoval do textu s občasným záznamem času. Snadněji se tak mohly analyzovat žákovy komentáře k řešení jednotlivých úloh. Ve výsledku bylo spojeno naskenované řešení konkrétní úlohy s přepisem slovního doprovodu žáka i tazatele dle časové posloupnosti. Následně bylo z řešení zjištěno místo, kde žák udělal chybu, a jeho možná příčina byla konfrontována s přepisem slovního doprovodu. Pokud nebyly nalezeny žádné nebo nejasné shody, byla k analýze použita původní videonahrávka, kde se mohla objevit například gestikulace, z níž bylo možné závěry již vyvodit. Ukázka přepisu jedné úlohy je uvedena v Příloze B.

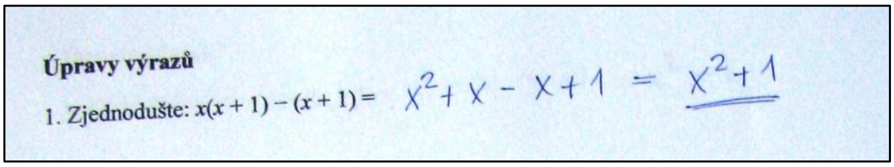
2.4 Výsledky hlavní studie

Jak již bylo řečeno, tazatel mohl žákovi poradit, popřípadě ho navést nebo doporučit žákovi kontrolu jeho výsledku. Žák tedy mohl původně chybně vyřešenou úlohu vyřešit správně. Stalo se ovšem, že i na druhý pokus udělal žák chybu, většinou jiného charakteru. Z tohoto důvodu nemusí součet jednotlivých chyb v tabulkovém přehledu níže odpovídat celkovému počtu chybných řešení úlohy. Pro připomenutí zde uvedu seznam zkratek jednotlivých druhů chyb z oddílu 1.5.

NumCh = Numerická chyba; **UkCh** = Úkonová chyba; **GrCh** = Grafická chyba; **VSCh** = Chyba velkých skoků; **StrCh** = Strategická chyba; **BBCh** = Bezradnosti a bloudění; **JCh** = Jiné chyby

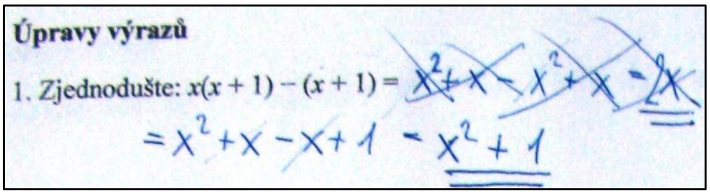
Úloha 1: Zjednodušte: $x(x + 1) - (x + 1) =$

První úloha je vstupním krokem do testu, měla by u žáka navázat určitý pocit jistoty a klidu pro další práci. Zadání je jasné a předpokládal jsem, že žákům nebude dělat velké obtíže, jedině snad znaménko minus před závorkou. Většina žáků se do úlohy pustila, ovšem mnoho udělalo různé chyby. Bez nápovědy úlohu správně vyřešili pouze čtyři žáci, všichni z gymnázia. Nejčastěji žáci chybovali v odstranění druhé závorky (obr. 39).



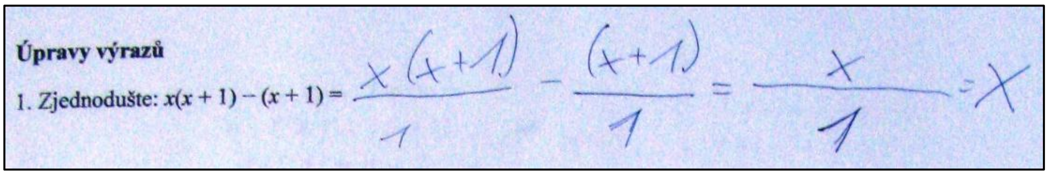
Obr. 39: Petřino řešení úlohy 1

Jana a Klára se dopustily stejné chyby. S největší pravděpodobností nepochopily, které závorky patří k sobě. Výsledkem bylo, že proměnnou x roznásobily obě závorky (obr. 40). Tuto chybu považuji za velmi vážnou. Se závorkami se žáci setkávají již v číselných výrazech a jejich pochopení je důležitým předpokladem pro další výuku.



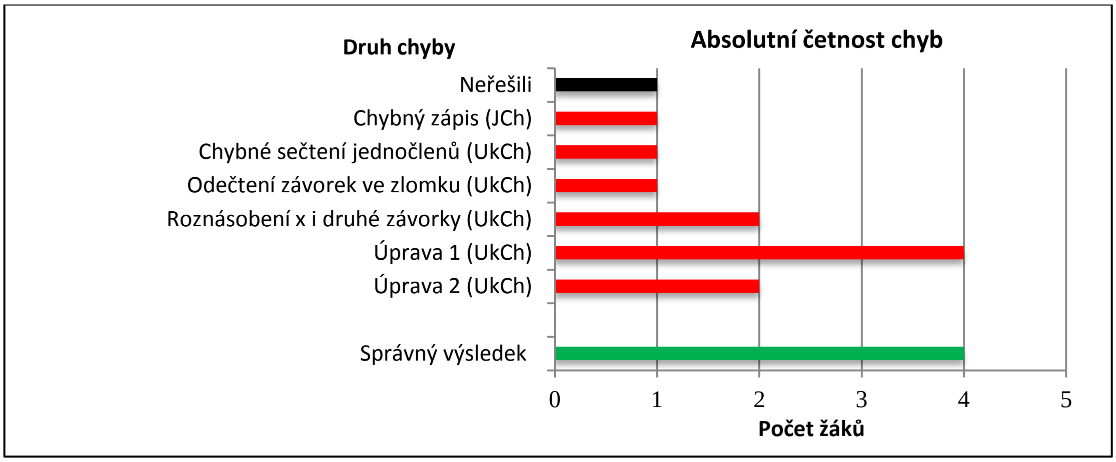
Obr. 40: Chybné chápání závorek u Jany

Velkým překvapením bylo řešení, kde žák převedl zadání na dvojici zlomků, poté odečetl závorky a nakonec zlomek opět odstranil (obr 41). Po opětovném zhlédnutí videonahrávky a celého žákova testu jsem usoudil, že nešlo o žákovy nevědomosti, ale o možné spojení testu s látkou, kterou žáci právě ve výuce probírají, a tou jsou lomené výrazy. Společně se snahou rychle reagovat a úlohu vyřešit se žák uchýlil ke zlomkům. Ty v prvním zápise ještě neznamenají chybné řešení, ale následné odečtení závorek je vážná chyba. To, že nešlo o jeho nevědomosti, dokázal v úloze 6.b, kterou správně vyřešil bez sebemenšího zaváhání.



Obr. 41: Martin byl zřejmě zmaten právě probíranou látkou v hodinách matematiky

Za zmínku ještě stojí fakt, že všichni žáci volili postup roznásobení závorek a zjednodušení mnohočlenu. Ani jeden žák nevolil postup, kdy se z výrazu vytkne $(x+1)$, čímž dostaneme výraz $(x+1)(x-1)$, což je podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin rovno x^2-1. Do volby postupu nelze zahrnout žáky gymnázia, kteří rozklad na součin ani vytýkání ještě neprobírali. To se i v učebnicích obecně vykládá později než roznásobení závorek. Je také možné, že žáci ani o volbě postupu nepřemýšleli. V hodinách zjednodušovali výrazy podobného typu nejčastěji roznásobením, které se dá v úlohách tohoto typu vždy použít. V grafu na obr. 42 je uvedena absolutní četnost jednotlivých chyb, které se vyskytly v první úloze.



Obr. 42: Chyby objevující se v řešeních první úlohy

Pozn.: Úprava 1: $-(x+1) \rightarrow -x+1$; Úprava 2: $x(x+1) \rightarrow x^2+1$.

Úloha 2: Rozložte na součin:

$2x + 4 =$

$x^2 - 5x =$

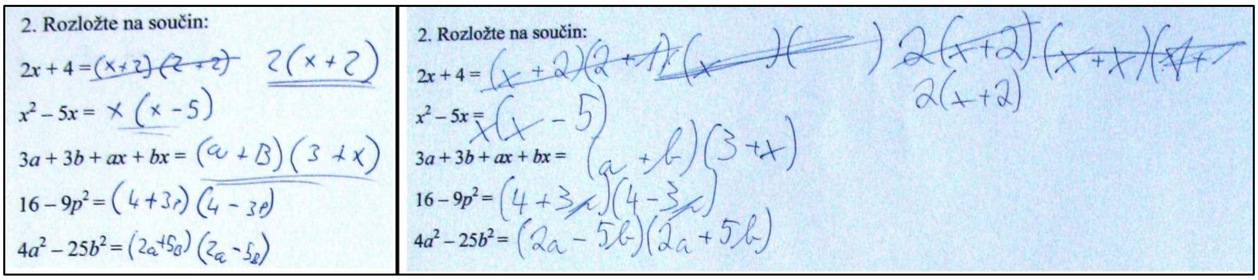
$3a + 3b + ax + bx =$

$16 - 9p^2 =$

$4a^2 - 25b^2 =$

V druhé úloze se po žácích požadovalo rozložit na součin celkem pět výrazů. Žáci z gymnázia tuto látku ještě neprobírali, což potvrdil školní vzdělávací plán i paní učitelka. Pojmu „rozložit na součin“ úplně nerozuměli, ale tušili, že se má „něco násobit“. Objevila se dokonce tři správná řešení u prvního i druhého výrazu, vždy u stejného žáka. Tomáš dokonce částečně rozložil třetí výraz, kdy vytknul číslo 3 z prvních dvou členů a x z třetího a čtvrtého členu. Další úprava ho už nenapadla.

Žáci devátého ročníku obou základních škol již látku probírali. Úlohy z testu by měli mít ještě v čerstvé paměti, což se částečně potvrdilo. Pouze jediná žákyně ze ZŠ Angel vyřešila celou úlohu sama a správně. U ostatních spolužáků z její třídy se objevila zajímavá chyba, díky které se dostali do stavu tápání a bloudění. Tři z pěti žáků si k prvnímu výrazu předepsali dvojici prázdných závorek a poté se do nich snažili doplnit dvojčlen (obr. 25).



Obrázek 1: Mirkovo řešení vlevo a Martinovo vpravo

Po zapsání výrazu $(x + 2)(2 + 2)$ se Mirek na nějaký čas zastavil a bylo patrné, že s ním vnitřně nesouhlasí. Po krátké diskuzi jsem se ho zeptal: „Jsou tam takhle nutný ty dvě závorky?“ Mirek odpověděl: „Není to nutné, může být něco před tím, jako že sem ...“ Načež celou úlohu i ostatní výrazy již sám vyřešil. Stejnou otázku jsem položil i zbylým dvěma žákům, kteří reagovali obdobně. Samozřejmě je původní řešení chybné. Jádro této chyby je ovšem ve volbě strategie, která byla chybná a dostala žáka do slepé uličky. Žáci se přes tuto chybu sami neuměli vrátit zpět a začít znovu. Až po položení otázky si ji uvědomili.

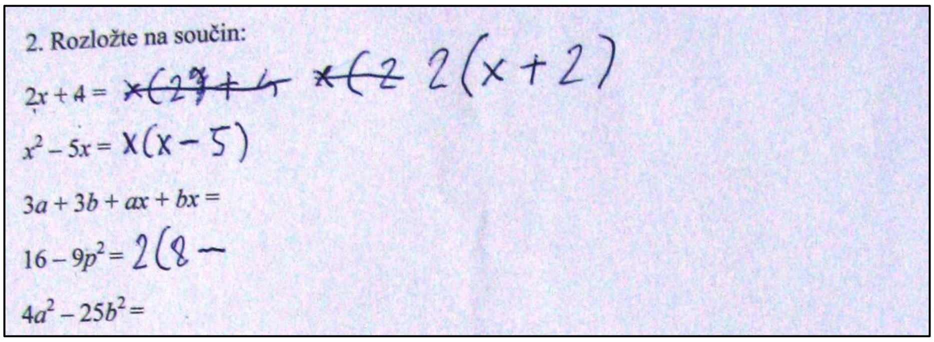
Dospěl jsem k závěru, že volba špatné strategie spočívala v nespojení slovního zadání s prvním výrazem. Pokud se podíváme do učebnice[82] od Šarounové a kol., zjistíme, že žáci nejprve **vytýkají** z dvojčlenu či trojčlenu jednočlen. Příklady i úlohy jsou zadané slovy: „**Vytkněte** před závorku:“ (Šarounová et al., 1999c: s. 38) a v zadání je dvojčlen. Pojem **rozložte na součin** se objevuje o několik stránek dál, převážně u příkladů na postupné vytýkání a použití vzorců,

[82] Šarounová, A., et al. (1999c). *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus.

jejichž výsledek je často právě součin dvou dvojčlenů. Proto se domnívám, že když žáci viděli v zadání „Rozložte na součin“, použili tento paměťový záznam a vznikl problém. Monika nerozložila ani jeden výraz, bylo zřejmé, že vůbec nerozumí zadání a tomu, co se po ní chce. Zpětně jsem se dozvěděl, že žákyně často chybí.

Žáci ze ŽŠ Rakovského dopadli podstatně hůř. Ani jeden ze tří žáků nerozuměl zadání, slovo součin spojovali se sčítáním a celkově nevěděli, co se po nich chce. V učebnici matematiky, kterou používají (viz oddíl 1.4.3) jsem ani jednou nenalezl úlohu se zadáním: *Rozložte na součin*. Autoři ve dvou[83] nalezených úlohách použili: *Upravte na součin*. Přitom pojem rozklad na součin je již použit v první kapitole *Dělitelnost* učebnice[84] pro šestou třídu.

Klára k úloze řekla, že už si to nepamatuje. Totéž řekla Nela, načež první výraz překvapivě správně rozložila. U druhého výrazu už udělala chybu, výraz rozložila na $x(x-4x)$, ale na můj popud, aby to zkontrolovala a zpětně roznásobila, nakonec chybu opravila. S následujícími výrazy si však nevěděla rady.



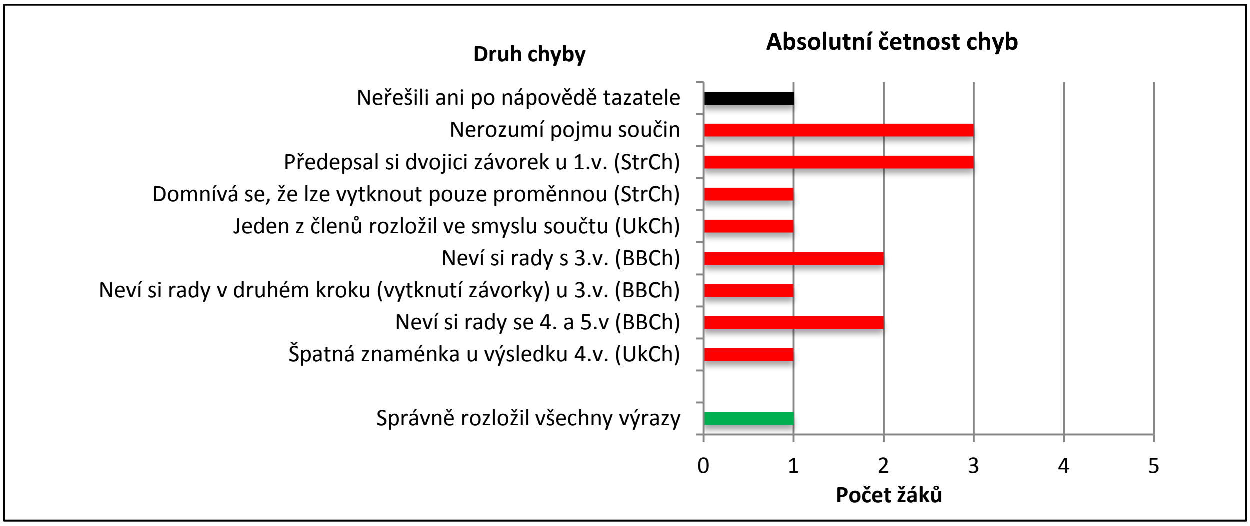
Obr. 43: Daliborovo řešení úlohy 2

Na obr. 43 jsou úlohy řešené Daliborem, který zpočátku nechápal zadání. Na otázku: „Víš co je to součin?“ Odpověděl: „Součin to je jako výsledek?“. Na což jsem reagoval tím, jestli neslyšel pojmy součet, podíl, rozdíl či sčítání. Jelikož Dalibor nereagoval, objasnil jsem mu, že součin je výsledek násobení, a že úloha požaduje zapsat výraz jako „něco krát něco“. Dalibor napsal k prvnímu výrazu $x(2)+4$ a konstatoval: „To by bylo zase čtyři x, to ne.“ S výsledkem vnitřně nesouhlasil, ale přešel k druhému výrazu, který rozložil bezchybně. Na můj popud se vrátil k prvnímu výrazu a začal opět psát $x(2$. Na otázku: „ Musíš jako vytknout vždy to x nebo můžeš i něco jiného vytknout?“ odpověděl: „Právě že jenom to x, protože jinak by mi to vyšlo jenom

[83] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995c). *Matematika pro osmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna, str. 60 a 75.
[84] Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995). *Matematika pro šestou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna.

číslo.“ Načež žák začal řešit čtvrtý výraz, který ovšem nedořešil. Po mé nápovědě, že kdyby u prvního výrazu začal podobně jako u čtvrtého výrazu, pak by první výraz možná rozložil, žák přešel zpět na první výraz a správně ho rozložil. Z rozhovorů jsou patrné velké nedostatky v dané látce a útržkovité vědomosti bez komplexního porozumění.

Na druhé úloze bylo zřejmé, že žáci ze ZŠ Angel několik hodin nazpět tuto látku probírali, tudíž ji oproti žákům ze ZŠ Rakovského lépe zvládli. Jednotlivé chyby jsou zobrazeny v grafu na obr. 44. Nejsou zde zahrnuti žáci z gymnázia, kteří ještě rozklad na součin neprobírali.



Obr. 44: Přehled chyb v řešení druhé úlohy

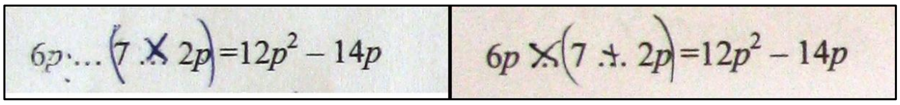
Pozn.: Zkratky 1.v., 3.v., 4.v., a 5.v., značí první, třetí, čtvrtý a pátý výraz v úloze. V grafu nejsou zahrnuti žáci gymnázia.

Úloha 3: Doplňte místo teček znaménko operace. Můžete použít závorky.

$6p \ldots 7 \ldots 2p = 8p + 7$

$6p \ldots 7 \ldots 2p = 12p^2 - 14p$

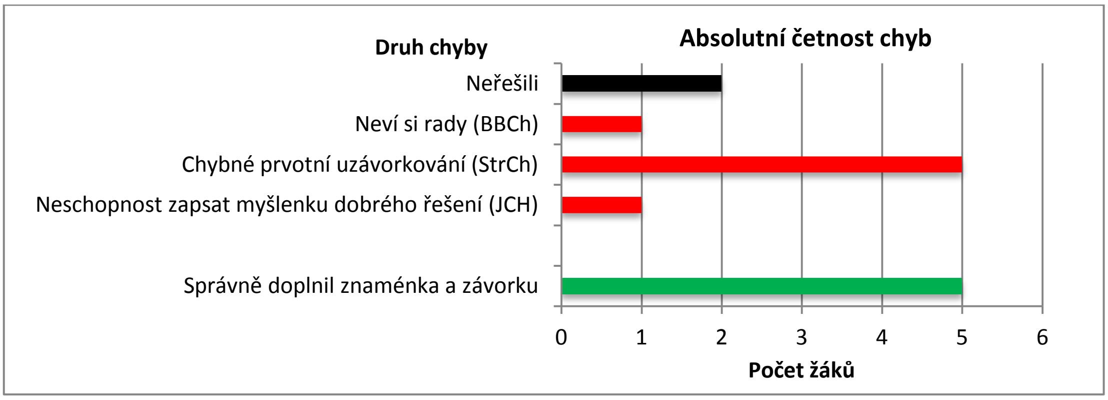
Třetí úloha je inverzního charakteru a má zjistit hloubku žákova vhledu do úprav mnohočlenů. S prvním výrazem si žáci bez větších zaváhání sami poradili a správně doplnili dvojici znamének pro sčítání. Poprvé se objevilo zadání, kde byli žáci stoprocentně úspěšní. Druhý výraz byl již komplikovanější, vyžadoval správné doplnění znamének operací a navíc vhodné doplnění závorek. To zvládli pouze dva žáci gymnázia a tři žáci ze ZŠ Angel.



Obr. 45: Chybné prvotní uzávorkování v podání Rudolfa (vlevo) a Tomáše (vpravo)

V pěti případech, kdy každá škola měla svého zástupce, se objevila chyba, kdy žák umístil do závorek členy 7 a $2p$. Tím se dostal do problému, neboť výraz již pomocí operací nebylo možné správně vytvořit. Většina žáků vyřešila situaci doplněním znaménka pro násobení mezi uzávorkované členy, jako například Rudolf, jehož řešení je na obr. 45 vlevo, nebo Tomáš, který pro změnu doplnil znaménko pro sčítání (obr. 45, vpravo). Žáci se svým řešením nebyli spokojeni a většina si chybu uvědomovala. Bez mé nápovědy ovšem nebyli schopni úlohu vyřešit. Nápovědou nejčastěji bylo, aby se pokusili zaměřit pouze na čísla. Distributivita násobení vzhledem ke sčítání se u číselných výrazů objevuje již v rámci opakování látky z prvního stupně. Žáci si uvědomili jednak distributivitu, ale především komutativitu násobení, která zde, podle mého názoru, byla hlavní příčinou chyb. I sami žáci na konci úlohy potvrdili, že častěji píší hledaný výraz ve tvaru $2p(6p-7)$ oproti $(6p-7)2p$.

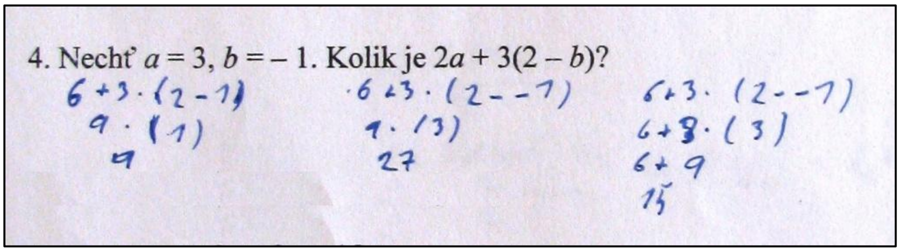
Jelikož se žádné chyby při řešení prvního výrazu nevyskytly, ukazuje graf na obr. 46 pouze problémy spojené s druhým výrazem.



Obr. 46: Problémy objevující se u druhého výrazu.

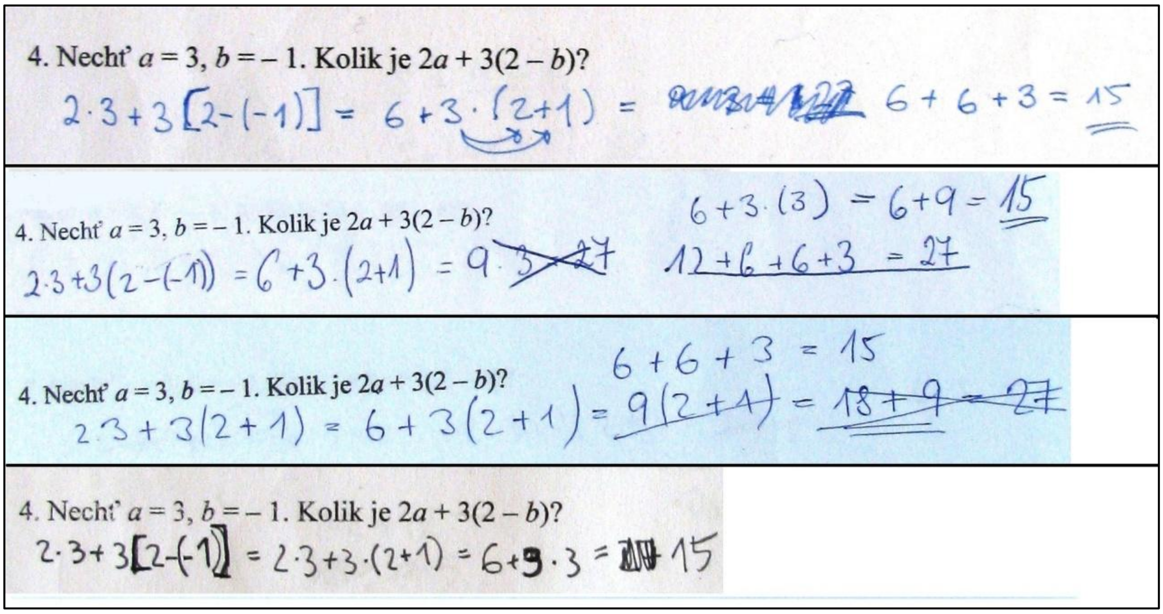
Úloha 4: Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

Předpokládal jsem, že hlavním problémem ve čtvrté úloze bude dosazování záporného čísla za proměnnou b. Této chyby se dopustili pouze Miloš a Nela. Oba se po zpětném přečtení výrazu, který vytvořili, opravili a zapsali již správný výraz (pouze Miloš zapomněl závorky kolem (-1)). Ale i přesto Miloš udělal hrubou chybu při úpravě číselného výrazu, když nedal přednost násobení před sčítáním. Jeho řešení je na obr. 47. V levé části po chybném dosazení i chybné úpravě číselného výrazu dospěl k výsledku 9. V prostředním řešení dosadil správně, ale opět chyboval v úpravě. Poté, co prostřední výsledek společně se mnou kontroloval, si chyby všiml a opravil ji (řešení úplně vpravo).



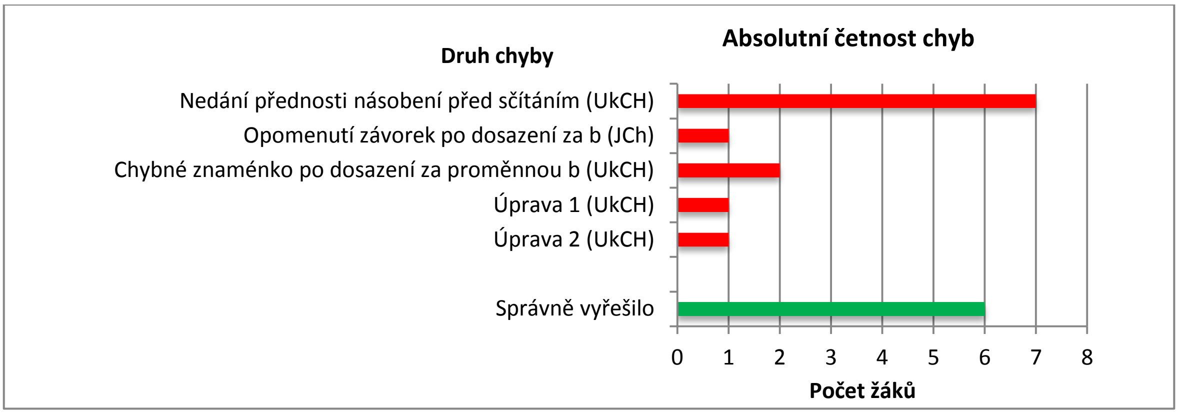
Obr. 47: Tři pokusy o vyřešení v podání Miloše

Zarážející je, že chyby v úpravě číselného výrazu, konkrétně nedání přednosti násobení před sčítáním, se dopustili tři žáci gymnázia i ZŠ Angel a jeden žák ze ZŠ Rakovského, celkem sedm žáků! Na obr. 48 je ukázka dalších čtyř řešení.



Obr. 48: Hrubá chyba při úpravě číselných výrazů

První řešení je Marie, chybný výsledek $9 \cdot 3 = 27$ je sice přeškrtaný, ale přesto čitelný. Pomocnými šipkami u druhého výrazu si pomohla až po zjištěné chybě a závorku raději roznásobila. Klára nejenže udělala stejnou chybu, ale když ji chtěla opravit, roznásobila výraz v závorce číslem 6 i číslem 3 (druhé řešení, podtržený výsledek), to je vážná chyba. Navíc ani při zpětném přeříkání postupu a mém upozornění, že má v řešení chybu, jí nic nebylo podezřelé. Ostatní chybující žáci si po přeříkání postupu chyby všimli a sami ji odstranili. Zbylá řešení Petry a Aničky pouze potvrzují výskyt této chyby, což je zobrazeno v grafu na obr. 49.



Obr. 49: Nejčastější chybou bylo nedání přednosti násobení před sčítáním

Pozn. Úprava 1: $2 - (-1) \rightarrow 2$; Úprava 2: $6 + 3 \cdot (2 + 1) \rightarrow 12 + 6 + 6 + 3$.

Úloha 5: Která rovnice má řešení *x* = 3, *y* = 5?

5*x* + 3*y* = 15

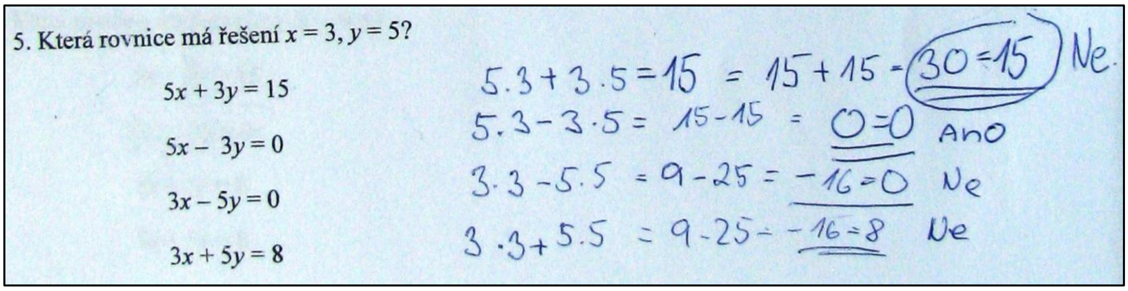
5*x* – 3*y* = 0

3*x* – 5*y* = 0

3*x* + 5*y* = 8

Úloha ověřuje jednak schopnost správně dosadit do rovnice a určit hodnotu číselného výrazu, ale také zjišťuje, jak žák chápe to, že rovnice má řešení (tomu jsem se ale při rozhovorech nevěnoval). Dosazení za proměnné dělalo potíže jen Daliborovi, který se ukvapil a napoprvé dosadil pouze za x, přičemž konstatoval, že první rovnice „má řešení“. Poté, co se mnou znovu prošel zadání a všechny zadané rovnice, si chyby sám všiml a celou úlohu již správně vyřešil.

Devět žáků řešilo úlohu bez písemných poznámek. Označili pouze správnou druhou rovnici, například zakroužkováním či „fajfkou“. Zbylí žáci si pomohli výpočtem hodnoty číselného výrazu z levé strany rovnice, kterou v hlavě porovnali s pravou stranou. Následně označili správnou rovnici. Stejně postupovala i Klára, která ale porovnala hodnotu číselného výrazu a pravé strany rovnice pomocí znaku rovnosti, čímž se dopustila chybného zápisu (obr. 50).



Obr. 50: Chybný zápis dobře myšleného postupu v podání Kláry.

Celkově si žáci v této úloze byli svým počínáním jisti. Je zřejmé, že s dosazováním číselných hodnot do rovnic a určováním, zdali má, nebo nemá rovnice řešení, mají dostatek zkušeností. Výsledkem je 13 správných výsledků s jedním chybným zápisem. Pouze Dalibor se ukvapil a dosadil nejprve pouze za x.

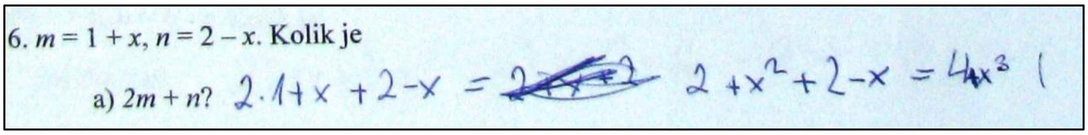
Úloha 6: $\boldsymbol{m = 1 + x, n = 2 - x}$**. Kolik je**

a) $\boldsymbol{2m + n}$**?**

b) $\boldsymbol{2m - n}$**?**

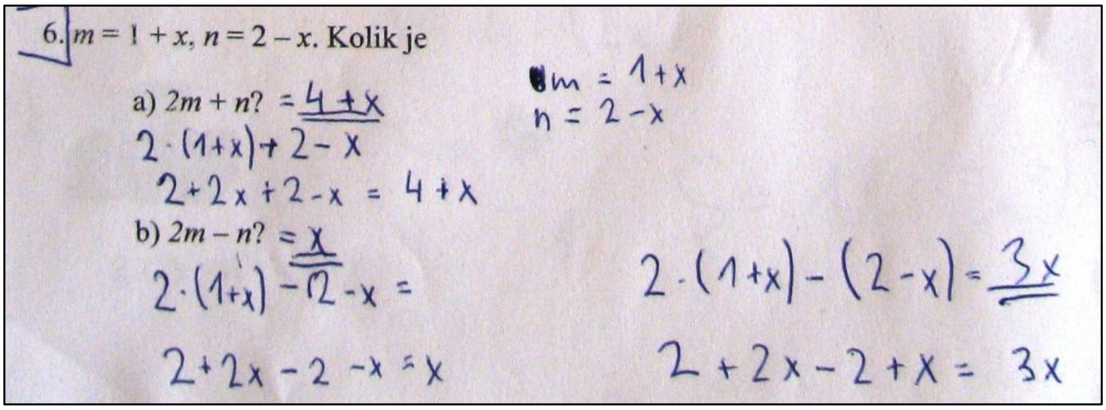
V šesté úloze bylo úkolem dosadit výrazy za proměnné a vzniklý výraz s proměnnou x zjednodušit. Předpokládal jsem, že s prvním výrazem nebudou větší problémy. U druhého výrazu mohlo dělat problém znaménko minus před proměnnou n, což se potvrdilo.

První zadání bezchybně vyřešilo šest žáků, ostatní nejčastěji chybovali ve vynechání závorek po dosazení za m (u proměnné n to nutné nebylo). Po přeříkání vlastního postupu si žáci chyby většinou všimli a následně již úlohu správně vyřešili. Na obr. 51 je řešení Kláry, která taktéž zapomněla na závorku. Zastavila se a část postupu přeškrtala. Poté se zeptala, jestli má číslem 2 násobit 1 i x (u dosazení za m). Reagoval jsem tím, že jsem zopakoval zadání a zeptal se, co si myslí. Odpověděla: „dva krát jedna a dva krát x." V následujícím kroku ovšem napsala $2 + x^2$. Totéž se objevilo i u druhé úlohy. Při zjednodušení výrazu se dopustila další chyby v úpravě x^2 a $(-x)$, z čehož vzniklo x^3.



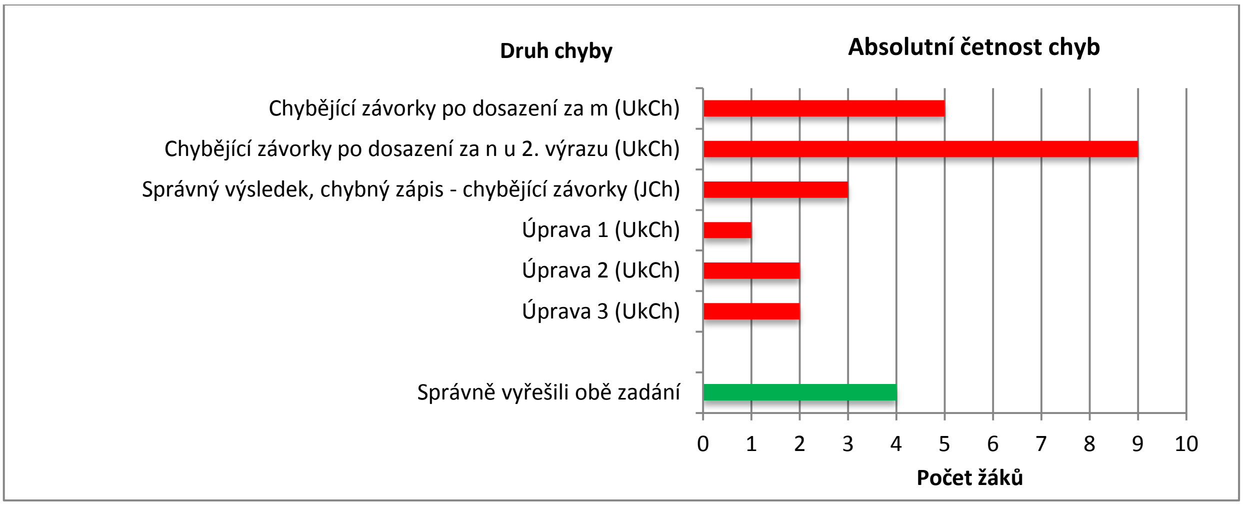
Obr. 51: Petřino řešení úlohy 6

Druhé zadání vyřešilo správně pět žáků. Všichni ostatní, jak jsem předpokládal, chybovali vynecháním závorek v zápise po dosazení za proměnnou n, jako je tomu například v Rudolfově řešení vlevo dole na obr. 52.



Obr. 52: Opomenutí závorek po dosazení za n u druhého výrazu v Rudolfově řešení

Když jsem žáky vyzval, aby si postup znova prošli, nebo jsem přímo upozornil na to, že někde je chyba, většina chybujících žáků si absenci závorek uvědomila. Někteří o jejich nutnosti přesto pochybovali. Například Sára skutečnost vysvětlila tím, že když jsme dosazovali za proměnnou m, závorky nutné byly, protože m jsme násobili dvěma. Proměnná n se ale pouze odčítá, tudíž nevidí důvod, proč by závorky měly být nutné (to, že se jedná o násobení číslem -1, Sáru nenapadlo). Většina žáků se ale přiklonila k tomu, že závorky nutné jsou, neboť se tím změní znaménko u proměnné x. Četnost jednotlivých chyb je zobrazena v grafu na obr. 53.



Obr. 53: Nejčastější chybou byla absence závorek po dosazení za proměnnou n u druhého výrazu

Pozn.: Úprava 1: $x^2 - x \to x^3$; Úprava 2: $2(1 + x) \to 2 + x^2$; Úprava 3: $2x - x \to -x$.

Úloha 7: Platí 2x + 5 = –2. Najděte hodnotu následujících výrazů:

3(2x + 5) =

–1 · (2x + 5) – 1 · (2x + 5) =

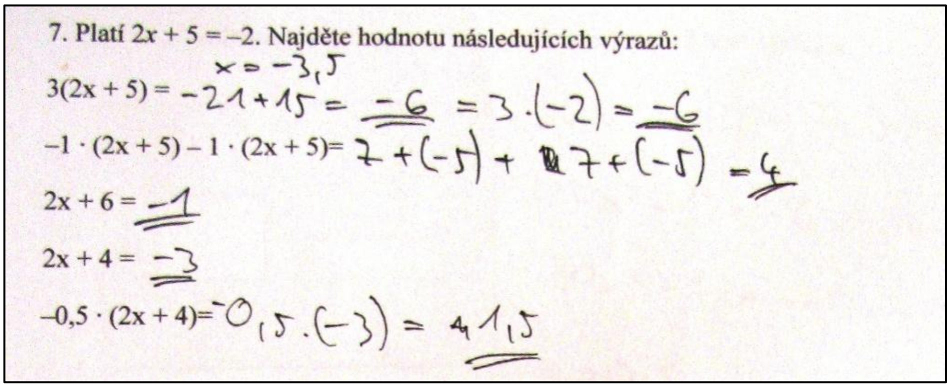
2x + 6 =

2x + 4 =

–0,5 · (2x + 4) =

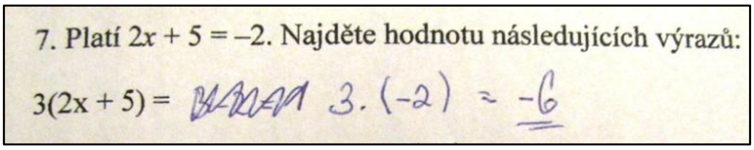
V sedmé úloze jsem předpokládal, že si žáci povšimnou stejného výrazu v zadání i v následujících dvou výrazech, dosadí za výraz v závorce -2 a určí číselnou hodnotu nově vzniklého výrazu. U zbylých výrazů jsem se přikláněl k postupu, kdy žáci nejprve určí hodnotu neznámé x z rovnice v zadání a následně ji dosadí do jednotlivých výrazů.

Jediný, kdo určoval hodnotu neznámé x ze zadání, byl Tomáš, jehož řešení je na obr. 54. Oproti předpokladu navíc dosadil hodnotu neznámé i do prvních dvou výrazů a správně určil jejich hodnotu. Po vyřešení třetího výrazu jsem se Tomáše zeptal, jestli to lze řešit i nějak jinak než dosazováním za x, když v zadání i v prvním výrazu je $2x + 5$. (Zbytečně jsem se unáhlil a Tomášovi tím napověděl, navíc jsem na oba výrazy ukázal prstem.) Tomáše napadlo dosadit přímo hodnotu -2 za výraz $2x + 5$, což ukázal u prvního výrazu. Společně jsme se shodli, že v dosazování si je jistější, a proto zvolil tento postup.



Obr. 54: Tomáš jako jediný vyjádřil neznámou x ze zadání a poté ji dosazoval do výrazů

Ostatní žáci řešili první dva výrazy podle předpokladu, výraz $2x + 5$ nahradili -2 a určili hodnotu číselných výrazů. Pouze Nela a Dalibor měli problém s pochopením zadání, ale stačilo, když jsme ho společně přečetli a navíc jsem objasnil, že mají dán nějaký předpoklad, kterého chtějí využít. U pěti žáků se objevila nečekaná chyba. Po dosazení -2 do prvního výrazu napsali $3 - 2 = 1$ (obr. 55).

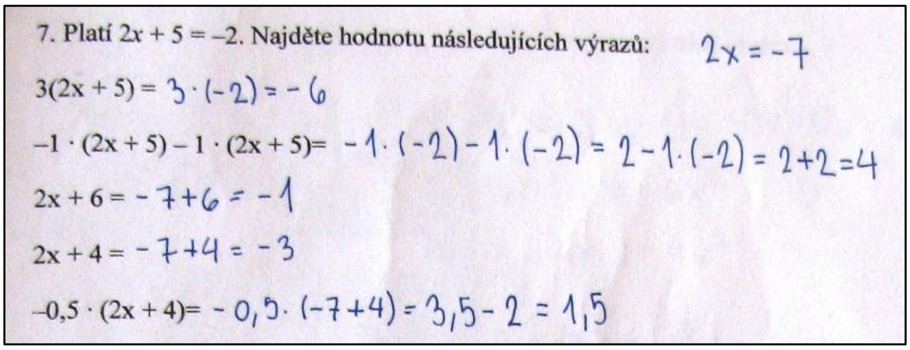


7. Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

$3(2x + 5) = 3 . (-2) = -6$

Obr. 55: Klářino přeškrtané chybné řešení s následnou opravou

Chyba spočívala v dosazení -2 za výraz včetně závorek, tedy za $(2x + 5)$, nikoli pouze za $2x + 5$, čímž vzniklo chybné $3 - 2$. Poslední tři výrazy se od prvních odlišují nepřítomností výrazu $2x + 5$. To se projevilo i na způsobech řešení. Sára první dva výrazy řešila dosazením -2, jakmile se objevil třetí výraz, kde to již přímo nešlo, vyjádřila si ze zadání $2x$, za které do výrazů dosazovala -7 (obr. 56).



7. Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů: $2x = -7$

$3(2x + 5) = 3 \cdot (-2) = -6$

$-1 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (2x + 5) = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 2 - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$

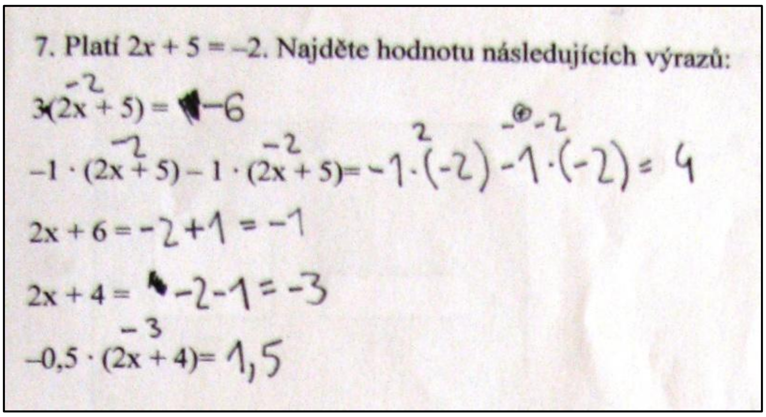
$2x + 6 = -7 + 6 = -1$

$2x + 4 = -7 + 4 = -3$

$-0,5 \cdot (2x + 4) = -0,5 \cdot (-7 + 4) = 3,5 - 2 = 1,5$

Obr. 56: Sářino pečlivé vypracování úlohy

Třetí a čtvrtý výraz řešilo pět žáků porovnáním výrazů s rovnicí v zadání. K rovnici přičetli 1, resp. (-1), čímž na pravé straně rovnice získali výsledky čtvrtého, resp. pátého výrazu. Výpočty provedli v hlavě a zapsali rovnou výsledky, pouze Anička si zapsala mezivýpočet (obr 57).



7. Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

$3(\overbrace{2x + 5}^{-2}) = -6$

$-1 \cdot (\overbrace{2x + 5}^{-2}) - 1 \cdot (\overbrace{2x + 5}^{-2}) = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 4$

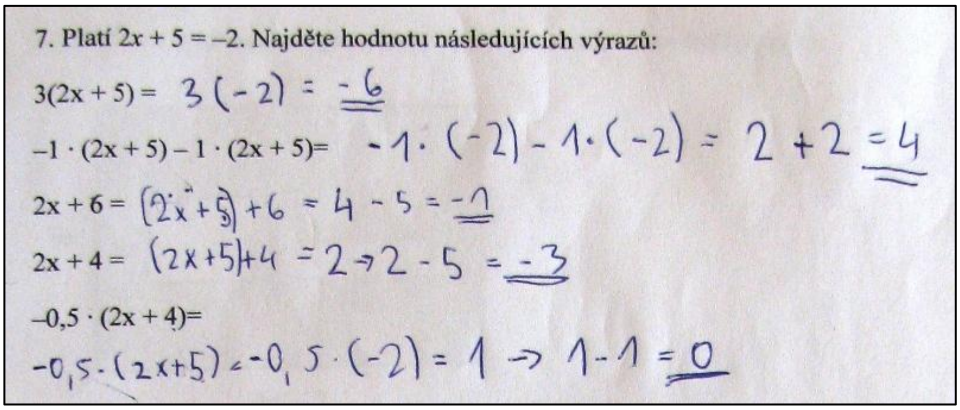
$2x + 6 = -2 + 1 = -1$

$2x + 4 = -2 - 1 = -3$

$-0,5 \cdot (\overbrace{2x + 4}^{-3}) = 1,5$

Obr. 57: Aničky řešení úlohy 7

Správného výsledku u třetího a čtvrtého výrazu se dopočítal i Rudolf, jehož řešení, vzhledem k nekorektním zápisům jsem pochopil až zpětně z opakovaných rozborů (obr. 58). Popíši zde postup řešení u třetího výrazu. Vadilo mu číslo 6, ve kterém se výraz lišil od zadání. V prvním kroku místo $2x$ napsal výraz ze zadání $(2x + 5)$ a přičetl zadaných 6. Číslo 4 vzniklo v následujícím kroku součtem čísel -2 (hodnota výrazu ze zadání) a 6, a poté od čísla 4 odečetl 5, protože 5 navíc přičetl v prvním kroku. Výsledkem je číslo -1. U čtvrtého výrazu použil šipku pro lepší přehled. Stejný postup by byl úspěšný i u posledního výrazu, kdyby poslední jedničku ještě vynásobil číslem $(-\ 0{,}5)$.


7. Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

$3(2x + 5) = 3(-2) = -6$

$-1 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (2x + 5) = -1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 2 + 2 = 4$

$2x + 6 = (2x + 5) + 6 = 4 - 5 = -1$

$2x + 4 = (2x + 5) + 4 = 2 \rightarrow 2 - 5 = -3$

$-0{,}5 \cdot (2x + 4) =$

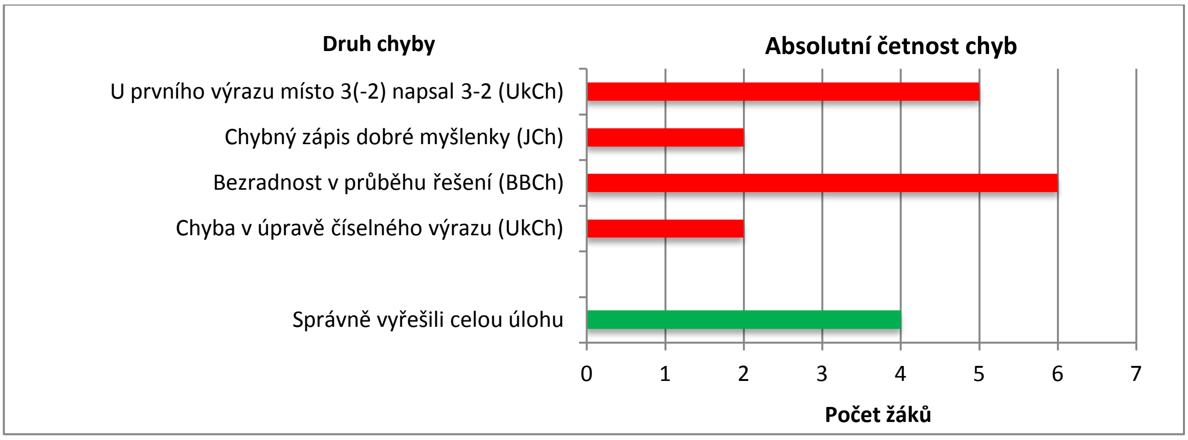
$-0{,}5 \cdot (2x + 5) = -0{,}5 \cdot (-2) = 1 \rightarrow 1 - 1 = 0$

Obr. 58: Zajímavý Rudolfův postup u poslední trojice výrazů

Ostatní žáci měli s třetím a čtvrtým výrazem výraznější problémy. Nevěděli, co dělat a jak postupovat. Po nápovědách, jestli nejde výraz upravit, aby se více podobal výrazu v zadání nebo zda nejde výrazy porovnat, jsem téměř řekl jeden ze způsobů řešení: Co by se stalo, kdyby v zadání chtěli mít místo čísla 5 číslo 6. U Nely následovala chyba v úpravě rovnice; když chtěla vyjádřit x, napsala $2x = -2 + 5$ (bylo vidět, že je unavená, znuděná a nemá velký zájem dál spolupracovat, proto jsem řešení ukončil a zkusil přejít na další úlohu). Ostatní žáci třetí a čtvrtý výraz vyřešili.

Všech dvanáct žáků, jež se dopracovalo k výsledku čtvrtého výrazu, také správně určilo hodnotu posledního výrazu. Devět z nich si všimlo, že hodnotu -3 čtvrtého výrazu lze přímo dosadit do pátého výrazu. Snadno tak získali výraz $(-0{,}5) \cdot (-3) = 1{,}5$.

Z grafu na obr. 59 je zřejmé, že žáci nejčastěji pociťovali bezradnost při řešení úlohy, ať u zadání úlohy nebo jen počínaje třetím výrazem, a chybovali v prvním výrazu.



Obr. 59: Absolutní četnost chyb v řešení sedmé úlohy

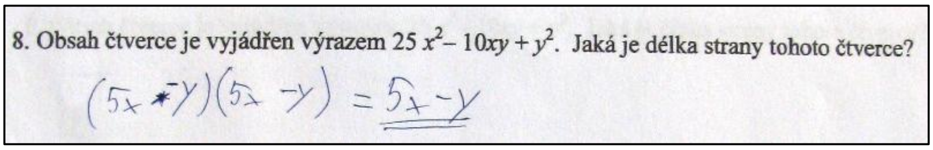
Úloha 8: Obsah čtverce je vyjádřen výrazem $25x^2 - 10xy + y^2$. Jaká je délka strany tohoto čtverce?

Cílem úlohy je objasnit, jestli jsou žáci schopni použít algebraické vzorce v úloze s geometrickým kontextem. Zaměřím se nejprve na žáky gymnázia, kteří v hodinách matematiky vzorce pro druhé mocniny součtu a rozdílu ještě neprobírali[85]. Díky těmto neznalostem bylo jejich řešení úlohy na hladině strategické manipulace. Všichni zadání rozuměli, ale nevěděli, jak se k délce strany dopracovat. Věděli, že obsah čtverce se vypočítá $S = a \cdot a$, což si někteří zapsali společně s obrázkem. Pokud by byl obsah pouze číslo, uměli by stranu určit, jak někteří konstatovali. Poradil jsem, že hledají výraz, který když vynásobí sebou samým, získají výraz ze zadání. Ať zkusí najít nejprve délku strany pro $S = 25$, což věděli, že je 5. O mnoho dál se ale většinou nedostali. Po delším přemýšlení jsem řešení úlohy ukončil a žák pokračoval v testu dál, aby zbytečně neztrácel čas. Nejblíže správnému výsledku osmé úlohy byl Tomáš, který délku strany čtverce vyjádřil výrazem $5x + \sqrt{-10xy} + y$.

Podle školních vzdělávacích plánů probírali žáci ZŠ Angel algebraické vzorce před několika týdny, oproti žákům ZŠ Rakovského, kteří mají látku zařazenou již o ročník dříve. Zejména z předchozích řešení některých úloh jsem předpokládal, že úloha bude pro žáky obtížná. Žáky jsem nechal úlohu přečíst a dal jim čas na rozmyšlenou. Někteří úlohu sami opustili i po číselné nápovědě či nápovědě, že hledáme výraz, který, když vynásobíme sebou samým, bude stejný jako výraz v zadání. V případech, kdy i po nápovědě žák pouze seděl a nevěděl co dělat, jsem úlohu ukončil.

[85] Potvrdil ŠVP i učitelka matematiky v testované třídě.

Nakonec pouze tři žáci ze ZŠ Angel úlohu řešili a také správně vyřešili. Konkrétně Martin, Mirek a Petra, a není náhoda, že právě tito žáci. Pokud se vrátíme k úloze 2, byli jediní, kteří rozložili na součin všechny výrazy, zejména poslední dva, které mají k zadání osmé úlohy relativně blízko. Martin s Mirkem sice měli v úloze 2 problém u prvního výrazu, kde si předepsali dvojici závorek, ale to jen více ukazuje, jak při rozkladech výrazů přemýšlejí. Pokud je úkolem rozložit výraz, automaticky si pod tím představí, že to bude součin dvojčlenů, což jim v osmé úloze bezpochyby pomohlo.

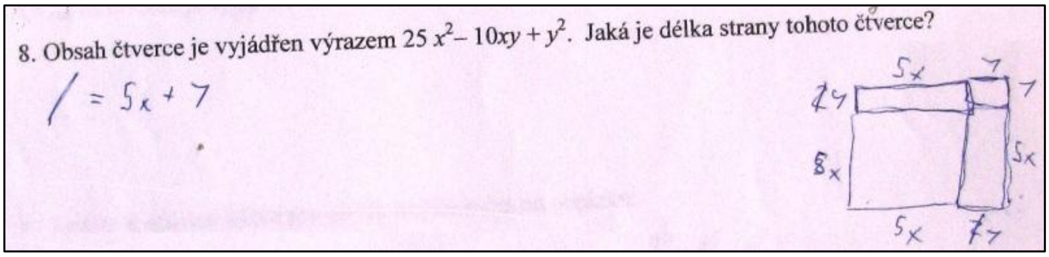

8. Obsah čtverce je vyjádřen výrazem 25 $x^2 - 10xy + y^2$. Jaká je délka strany tohoto čtverce?

$(5x - y)(5x - y) = 5x - y$

Obr. 60: Martinovo řešení úlohy 8

Martin si obdobně předepsal dvojici závorek i zde (obr. 60), protože řekl, že musí udělat součin, jelikož ta strana je odmocnina ze zadaného výrazu. Nejprve se soustředil na první člen výrazu a zapsal $(5x\quad)(5x\quad)$. Následovalo doplnění znamének, ve kterém se nejprve spletl, ale sám chybu ihned opravil. V dalším kroku připsal y. Když ale chtěl vyjádřit délku strany, napsal za součin $= 5x - y$. Této chyby jsem si v průběhu testu bohužel nevšiml, soustředil jsem se již na další úlohu.

Petra řešila úlohu obdobně. Po zapsání součinu dvou závorek byla vyzvána k zjednodušení výrazu, ale nikoli aby ho roznásobila. Odpověděla: „To můžu zapsat jen jednou.“ S čímž jsem souhlasil, neboť jsem předpokládal, že použije mocninu, ale Petra napsala totéž, co Martin na obr. 60. Když byla upozorněna na chybu, řekla, že to může napsat dvakrát. Načež jsem se jako tazatel unáhlil a řekl, že asi chtěla říci „na druhou“, s čímž souhlasila a správně zapsala. Z těchto a jiných nekorektních zápisů je zřejmé, že žáci ještě úplně nerozumí symbolu $=$.


8. Obsah čtverce je vyjádřen výrazem 25 $x^2 - 10xy + y^2$. Jaká je délka strany tohoto čtverce?

/ = 5x + 7

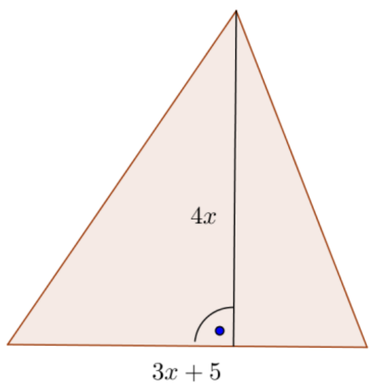
Obr. 61: Geometrická interpretace v Mirkově řešení

Jediný žák použil k nalezení strany čtverce geometrickou interpretaci zadaného výrazu, což mne vnitřně potěšilo. Před řešením přiznal, že na geometrickou interpretaci se již někde „zběžně“

díval (to potvrzuje, že je důležité, aby měl žák kvalitní učební materiály). Začal kreslit velký čtverec se stranou $5x$, poté přikreslil k pravé straně obdélník, k jehož úzké straně připsal $2y$, a nakonec útvar doplnil na čtverec a popsal zbylé části strany (obr. 61). Když jsem se zeptal, jestli jsou strany $2y$ a y stejně dlouhé, sám chybu opravil a vysvětlil, že dvojice obdélníků představuje prostřední člen výrazu. Nakonec jsem ho poprosil, aby výrazem zapsal, jaká je délka strany čtverce. To udělal zajímavým způsobem (obr. 61 vlevo). Zeptal jsem se „Co to je? To je nějaký znak?“ (myslel jsem šikmou čáru úplně vlevo). Odpověděl: „Nevím, já nevím, jak se značí strana.“ Na to jsem odpověděl, že mu rozumím a že mi to tímto způsobem stačí.

Pro mnoho žáků byla úloha na hladině strategické manipulace, proto výsledky do závěrečného shrnutí nebudu započítávat.

Úloha 9: Zapište a upravte výraz pro obsah trojúhelníka na obrázku.



V úloze mne zajímalo, jestli je žák schopen vytvořit výraz pro obsah trojúhelníku, správně ho zapsat a poté ho zjednodušit. Ještě před vytvářením výrazu si tři žáci nebyli jisti, zdali výraz $3x + 5$ patří k celé straně nebo pouze k levé části, kterou odděluje pata výšky. Řekl jsem, že se tím myslí celá strana, a preventivně jsem to řekl i ostatním žákům, když jsem viděl, že nad tím možná přemýšlejí. První problém, který se objevil u šesti žáků, byla neznalost vzorce pro obsah trojúhelníku. Nemuseli napsat přímo vzorec, stačil by výraz či myšlenka, podle které by výraz vytvořili. Někteří tipovali a čekali na moji reakci, Mirek s Rudolfem začali Pythagorovou větou a Petra rovnou řekla, že si vzorečky nepamatuje. Jako příklad ukážu část rozhovoru s Daliborem. Po přečtení zadání následovalo (D=Dalibor, T= tazatel):

D: „Obsah trojúhelníku je $a + b + c$, ne tedy dva krát, ne.“

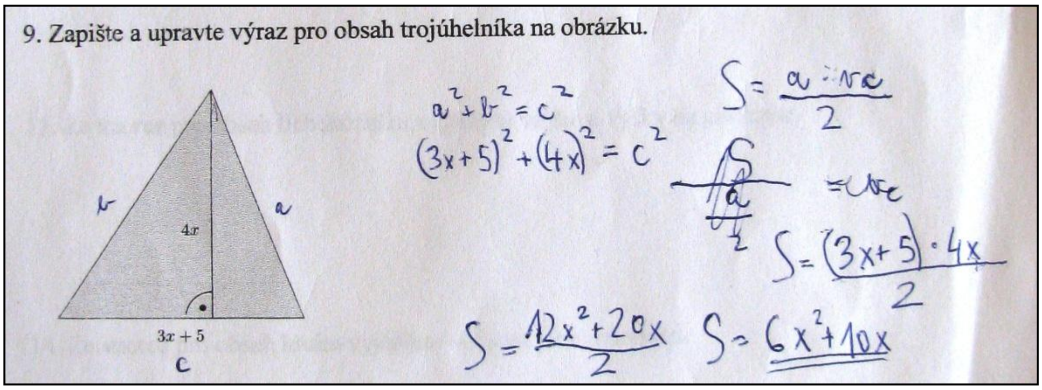
T: „Ještě jednou, pomalu to zkus, nespěchej.“

D: „Já vím, že to má být dva děleno, ale pak to další nevím.“

Byl vyzván, aby své myšlenky napsal. Začal psát $S = 2:($, v čemž jsem ho přerušil a objasnil pojmy základna, výška a sestavil s ním vzorec, na který si částečně vzpomněl. Úprava výrazu, který jsme společně vytvořili, mu obtíže nedělala.

Kláře jsem vzorec pro obsah trojúhelníku také řekl (protože ho nedokázala říct), navíc si pletla výšku se základnou. Když chtěla dosazovat, zeptala se: „A kolik je tady to? To je $8x$?“ Přičemž ukázala na výraz u základny. Na to jsem reagoval pouze objasněním, že jde o základnu. Kláře vadilo, že to je dvojčlen. Pokud by to byl jednočlen, už by to nevadilo. Kláry soustředění během řešení postupně přešlo v záchvat smíchu, což se značně podepsalo na řešení. Bylo vidět, že jí to už nebaví a nezajímá. Úlohu jsme přesto společně dodělali. Chyby, které se objevily po ztrátě koncentrace, nebudou do výsledků zahrnuty.

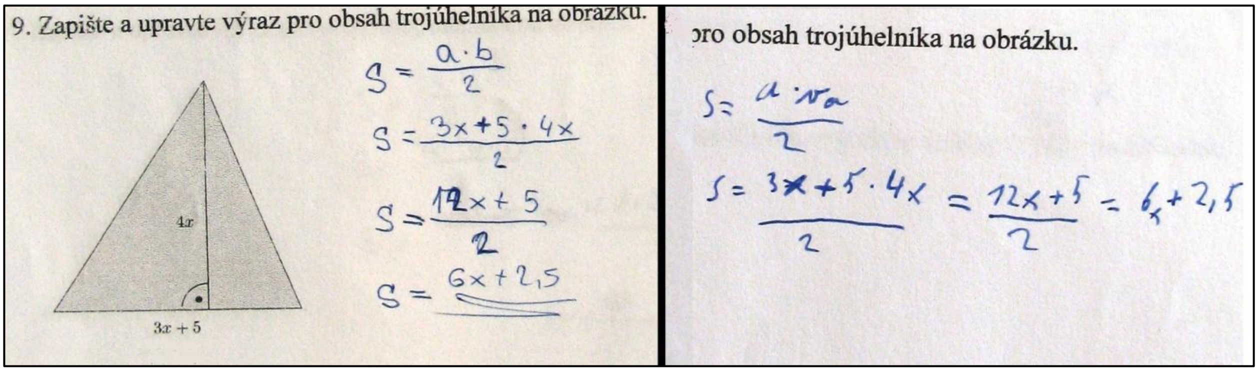
Rudolfovi bylo na začátku řečeno, že výraz $3x + 5$ je celá strana, přesto začal Pythagorovou větou, do které i dosadil. Zeptal jsem se ho, jestli potřebuje, co napsal, a jak se počítá obsah trojúhelníku. Sám si uvědomil, že mu stačí vzorec pro obsah, na který si vzpomněl. Problém nastal, když napsal vzorec a poté si označil strany trojúhelníku (obr. 62).



Obr. 62: Rudolfovo řešení úlohy 9

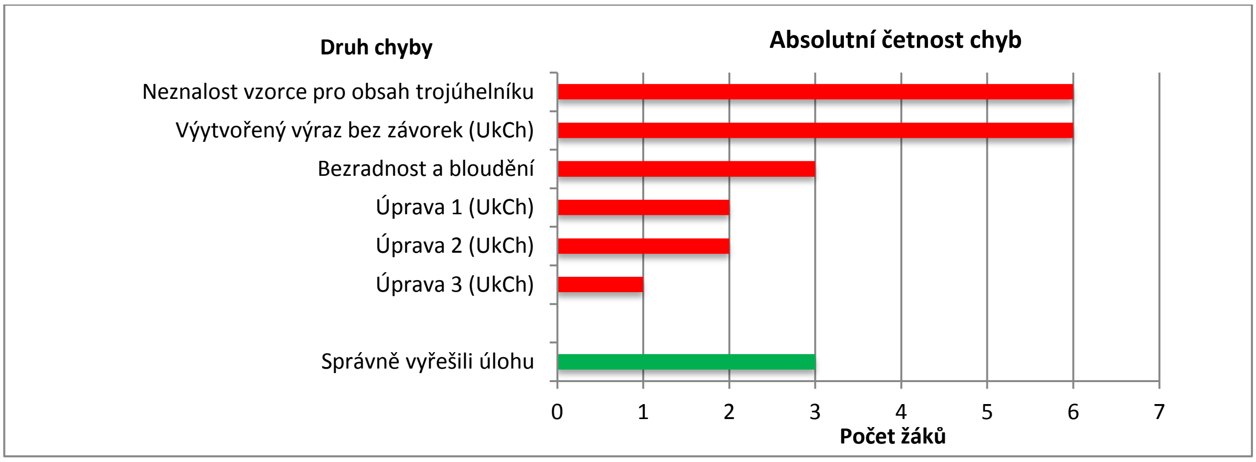
Stranu a ve vzorci si spojil se stranou a v trojúhelníku a výšku v_c s vyznačenou výškou. Díky tomu se „zamotal“ do svého řešení a sám nevěděl, co chce určit. Důvodem byla Rudolfova neúplná znalost vzorce, kdy nevěděl, že stranu násobíme výškou *právě k této* straně. Po objasnění dosadil do vzorce a výraz správně upravil.

Žáci, kteří napsali správný vzorec pro obsah trojúhelníku, nejčastěji chybovali ve vynechání závorek v zápise po dosazení. Velkým překvapením pro mě byla úprava vzniklého výrazu u dvou žáků (obr. 63).



Obr. 63: Chybná úprava výrazu v podání Jany (vlevo) a Miloše (vpravo)

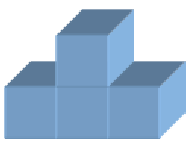
Chybou bylo, že jsem se v případě Miloše ubíral více směrem vysvětlování tomu, jak to má být správně, než zjišťováním důvodu této chyby. Obdobně i u Jany, kde jsem z neznámých důvodů přešel k následující úloze. Z grafu na obr. 64 je zřejmé, že pouze tři žáci byli schopni vyřešit úlohu bez pomoci tazatele.



Obr. 64: Problémy a chyby v řešení úlohy 9

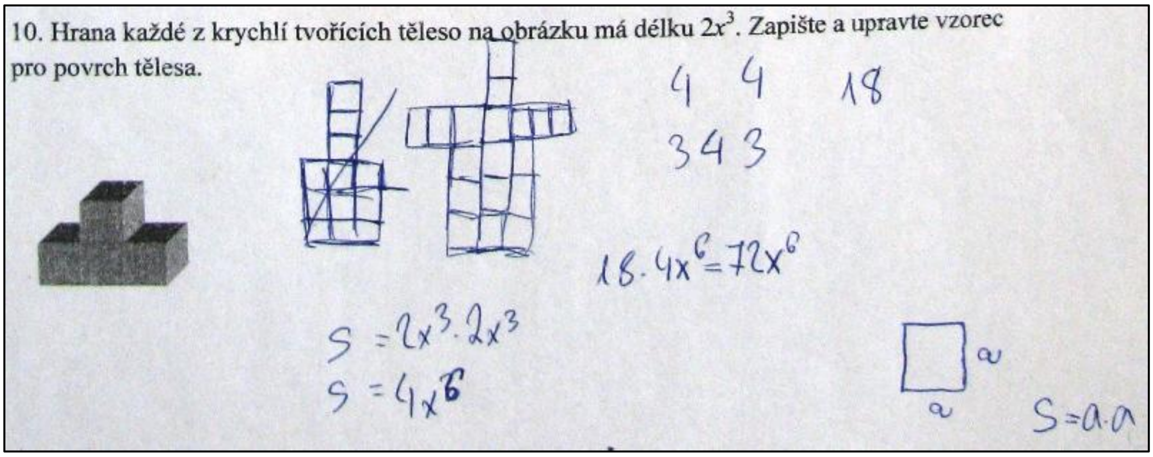
Pozn.: Úprava 1: $12x^2 + 20x \to 32x^3$; Úprava 2: $3x + 5 \cdot 4x \to 12x + 5$; Úprava 3: $\frac{12x^2+20x}{2} \to 12x^2 + 10x$; Bezradnost a bloudění ve třetím řádku není klasifikována jako BBCh, neboť se jednalo o bezradnosti v řešení úlohy jako celku, nikoli v úpravě výrazů.

Úloha 10: Hrana každé z krychlí tvořících těleso na obrázku má délku $2x^3$. Zapište a upravte vzorec pro povrch tělesa.



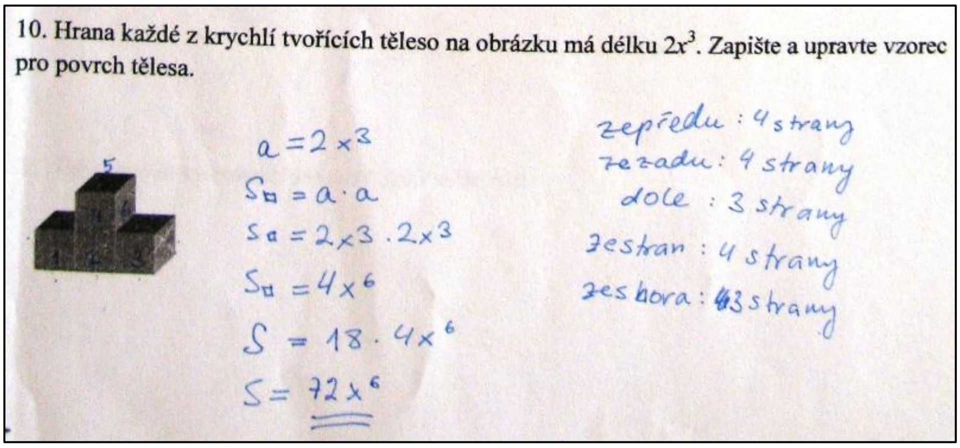
Po předchozí úloze, kde byla délka strany i výšky zadána algebraickým výrazem, jsem předpokládal, že žáci nebudou mít s úlohou větší problémy. Potvrdil se však pravý opak. Šest žáků nevědělo, jak postupovat, byli bezradní. Někteří začali tím, že si nepamatují vzorec, jiní začali počítat objem. Obecně se již u žáků začala projevovat únava a nechuť k dalšímu řešení.

S Nelou jsme úlohu řešili společně, zadání jsem přirovnal k zabalení vánočního dárku a úlohu rozdělil na povrch jedné krychle. Rozuměla povrchu i síti krychle a začala kreslit síť celého tělesa. Útvar, který nakreslila, mne zaskočil (obr. 65). Nijak jsem nereagoval, neboť se to úpravy výrazů přímo netýkalo. Na rozdíl od některých žáků Nela díky obrázku alespoň určila správný počet čtverců, z kterých se povrch tělesa skládá. Úlohu téměř sama dokončila, pouze obsah jednoho čtverce určila chybným výrazem $4x^3$, který po mé výzvě opravila.



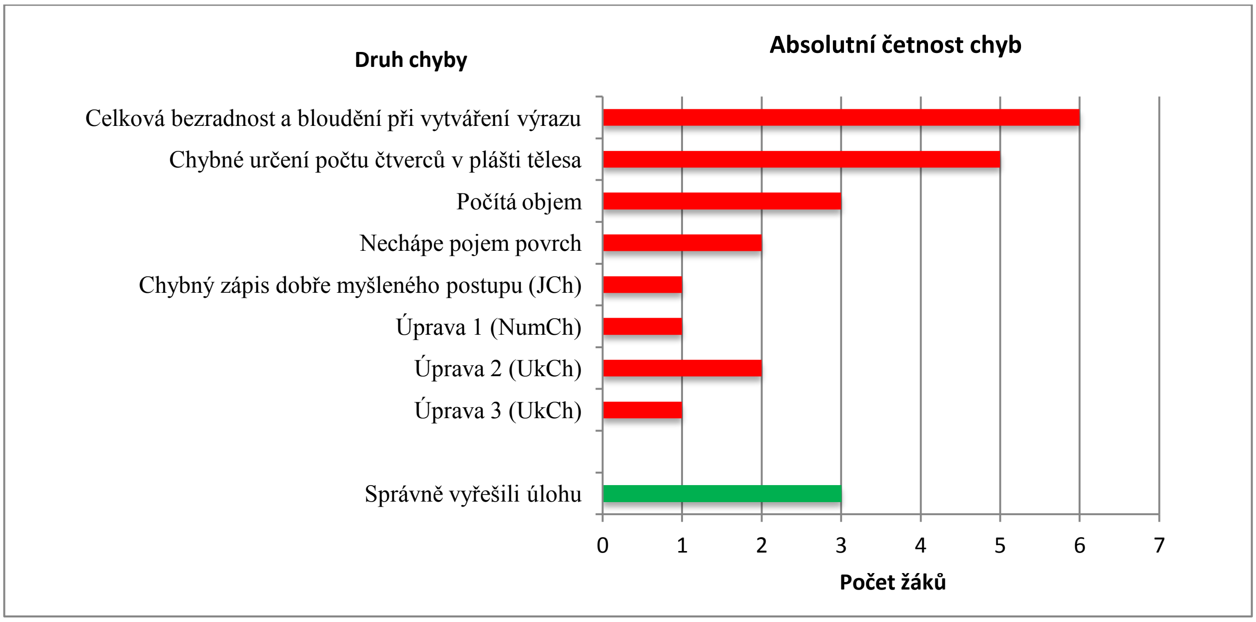
Obr. 65: Síť útvaru zakreslená Nelou

Mariina pečlivost a systematičnost je zřejmá z obr. 66. Nejprve si zapsala potřebné údaje, určila obsah jednoho čtverce a nakonec určovala jejich počet v povrchu tělesa. Posledně zmíněný úkol dělal problém i dalším šesti žákům. Dva se přímo zeptali, jestli mají počítat i spodní část, protože si nebyli jisti. I bez mé odpovědi se přiklonili ke správné variantě. Další dva žáci došli k číslu 21, které vzniklo odečtením tří společných stěn od povrchu čtyř krychlí, tedy $6 \cdot 4 - 3$. Marie se dopočítala k několika chybným údajům, až po mé výzvě si vše začala psát, v čemž přesto chybovala.



Obr. 66: Marie i s pomocí zápisu chybně určila počet čtverců v plášti útvaru

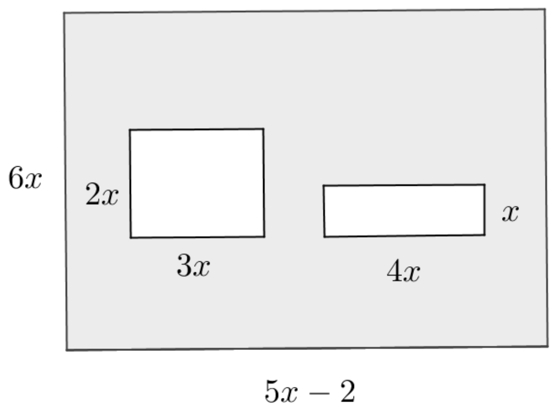
Graf na obr. 67 ukazuje, že samotná úprava výrazů žákům nedělala větší problémy. Hlavní problém byl ve vytvoření správného výrazu.



Obr. 67: Problémy a chyby v řešení úlohy 10

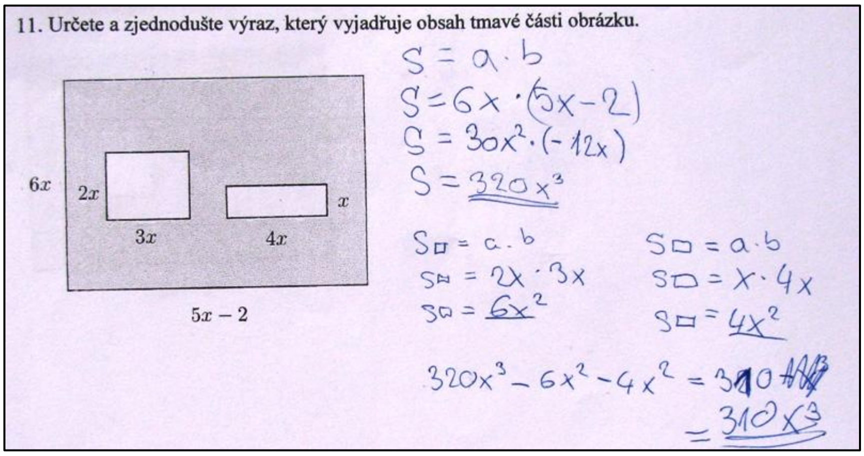
Pozn.: Úprava 1: $18 \cdot 4 \rightarrow 68$; Úprava 2: $2x^3 \cdot 2x^3 \rightarrow 4x^9$; Úprava 3: $2x^3 \cdot 2x^3 \rightarrow 4x^3$

Úloha 11: Určete a zjednodušte výraz, který vyjadřuje obsah tmavé části obrázku.



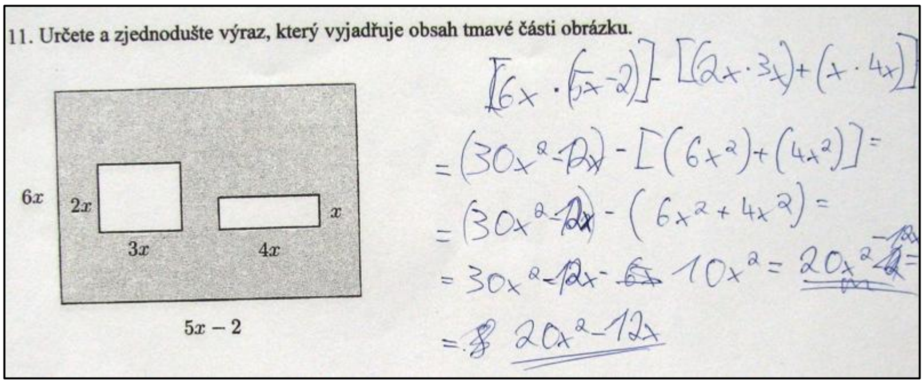
Úloha je převzatá od Durdíkové (2007) a má objasnit, v kterých částech řešení mají žáci obtíže; při vytváření výrazu, při jeho úpravě, popřípadě jaký zvolí postup a zápis výrazu. Při pohledu na zadání a po jednoduché úpravě zjistíme, že nenajdeme hodnotu proměnné x takovou, která by splňovala geometrické charakteristiky obrázku. Neexistuje kladné číslo x, pro které by byla delší strana obdélníku $5x - 2$ skutečně delší než kratší strana $6x$ a než součet $3x + 4x$. Tento fakt ovšem nemá na určení výrazu pro obsah tmavé části vliv.

Úlohu stihlo vypracovat deset žáků, z toho pouze dva žáci z gymnázia bez chyby a bez pomoci tazatele. Všichni žáci rozuměli zadání a zvolili stejný postup; od obsahu největšího obdélníku odečetli obsahy dvou malých. V zápise řešení se žáci již rozdělili do dvou skupin. První početnější skupina si zapsala a zjednodušila tři výrazy pro tři obdélníky (největší obdélník a dvojci malých uvnitř), po jejichž zjednodušení vytvořili čtvrtý výraz pro obsah tmavé plochy. Jana, jejíž postup je na obr. 68, postupovala stejně, ale hned ve druhém kroku zapomněla závorku u výrazu $5x - 2$. Když jsem se zeptal, jestli je výraz dobře zapsán, chybu opravila. Pokračoval jsem otázkou, zda-li je rozdíl mezi původním výrazem a opraveným výrazem. Jana odpověděla: „Jo, je to rozdíl, protože teď to musím roznásobit." Jana zjevně pospíchala a ztrácela koncentraci, což se podepsalo na celém řešení..



Obr. 68: Jana se při řešení úlohy dopustila hned několika chyb

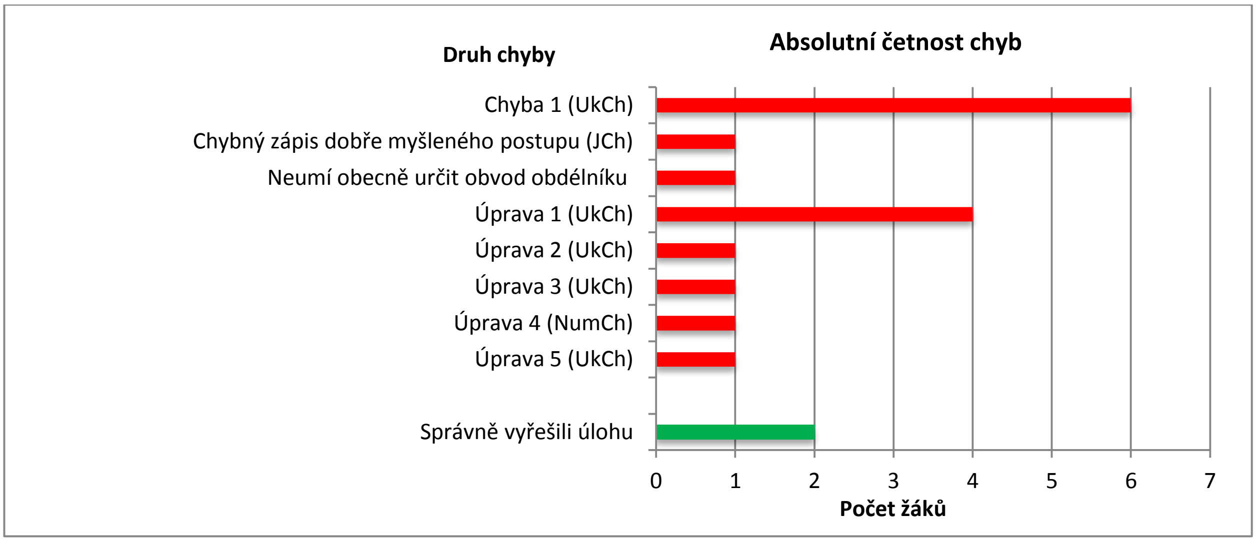
Druhá skupina žáků vytvořila jeden velký výraz přímo pro obsah tmavé plochy, který následně upravovala. Postupoval tak i Martin, jehož řešení na obr. 69 ovlivnila chyba v opomenutí závorek u prvního výrazu $5x - 2$. Po mé výzvě, jestli je to v pořádku, vše opravil. Ostatně nebyl s Janou jediný, kdo se této chyby dopustil.



Obr. 69: Martinův postup

Zmíním ještě průběh řešení Dalibora, který nejprve tvrdil, že obsah obdélníku se počítá podle vzorce $2(a + b)$. Když jsem mu oznámil, že řekl výraz pro obvod, opravil se. Jako první určil obsah největšího obdélníku. Pokračoval obsahem vnitřního levého obdélníku a řekl: „To je čtverec, obdélník, to je čtverec tohle to, myslím tedy. Vypadá to tak." Reagoval jsem otázkou: „Podle čeho to poznáš, jestli je to čtverec?" Dalibor odpověděl: „Má to čtyři strany a hlavně. Já bych potřeboval pravítko, abych si to mohl změřit." Poukázal jsem na výrazy, kterými jsou určeny jeho strany. To už Dalibor řekl, že útvar je obdélník, protože čtverec má strany stejné.

Žáci měli největší problém s vytvořením výrazu podobně jako v úloze 9. Chyb, kterých se žáci dopustili při úpravách výrazů, nebylo mnoho, jak ukazuje graf na obr. 70. Některé z nich bych přisoudil zejména nízké koncentraci a neklidu, způsobeným školním zvoněním na znamení přestávky.



Obr. 70: Největším problémem bylo vytvoření výrazu pro obsah největšího obdélníku.

Pozn.: Chyba 1: Obsah největšího obdélníku žák zapsal výrazem $6x \cdot 5x - 2$; Úprava 1: $2x \cdot 3x \rightarrow 6x$ a podobné úpravy; Úprava 2: $-(4x \cdot x) \rightarrow 4x^2$; Úprava 3: $6x \cdot (5x - 2) \rightarrow 30x^2 \cdot (-12x)$; Úprava 4: $30 \cdot 12 \rightarrow 320$; Úprava 5: $320x^3 - 6x^2 - 4x^2 \rightarrow 310x^3$

Úloha 12: Ze vzorce pro obsah trojúhelníka vyjádřete délku strany.

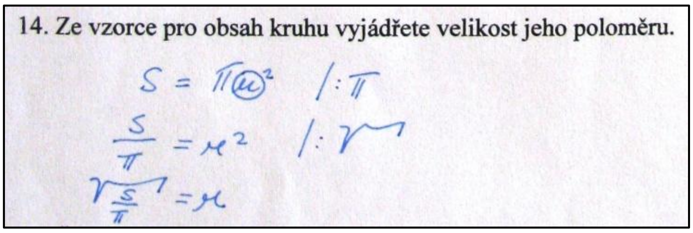
Úloha 13: Ze vzorce pro obsah lichoběžníku vyjádřete velikost výšky na základnu.

Úloha 14: Ze vzorce pro obsah kruhu vyjádřete velikost jeho poloměru.

Úloha 15: Řešte soustavu rovnic: $x + y = 12$, $2x + 5y = 36$.

Cílem série tří po sobě jdoucích úloh bylo zjistit, zda-li je žák schopen vyjádřit neznámou z geometrických vzorců, se kterými se setkal ve výuce. U poslední úlohy jsem chtěl sledovat, jakou metodu řešení žáci zvolí a jestli ji správně aplikují. Buhužel mnoho žáků tyto úlohy nestihlo vypracovat, proto zde pouze shrnu některé jevy. Výsledky těchto čtyř úloh zároveň nebudu zařazovat do celkového srnutí a hodnocení experimentální studie.

Žáci gymnázia neměli s řešením úloh 12 – 14 (pouze ty úlohy, které stihli) téměř žádné problémy. Snadno si vybavili potřebné vzorce a z rovnice vyjádřili neznámou. Marie při upravě rovnice z úlohy 14 nejprve dělila π a poté rovnici odmocnila, což zapsala jako dělení odmocnítkem (obr. 71).


14. Ze vzorce pro obsah kruhu vyjádřete velikost jeho poloměru.

$$S = \pi r^2 \quad /:\pi$$

$$\frac{S}{\pi} = r^2 \quad /:\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{\frac{S}{\pi}} = r$$

Obr. 71: Zápis odmocnění v podání Marie

Žáci základních škol si ve většině případů vzorce nepamatovali, proto jsem jim je řekl, aby je alespoň zkusili upravit. Dalibor s Petrou měli problém s pochopením zadání. Nevěděli, co po nich úloha žádá. Ukážu zde krátký přepis rozhovoru s Petrou, potom co měla již vzorec (úloha 12.).

T: „No a teď se po nás chce, abychom vyjádřili tu délku strany. To je to a.“

P: „Hm.“

T: „Uměla by si to vyjádřit?“

P: „Asi ne.“

T: „Nebo, co to je to vyjádřit? Víš, co se chce vlastně? Nebo nevíš?“

P: „No chtějí prostě, abych zjistila z toho vzorce, jaká je ta strana vlastně. Nebo jakoby to označení pro tu stranu.“

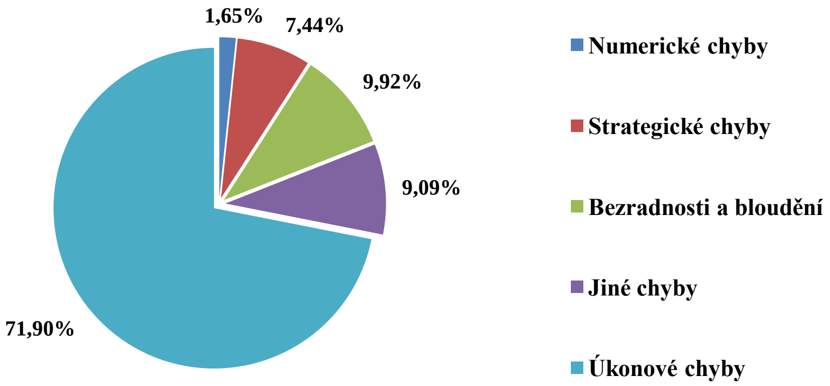
T: „Jako a se rovná něco?“

P: „Ne, to přímo ne. Já nevím.“

Úlohu jsem Petře nakonec začal vysvětlovat přes čísla a fakt, že chceme vyjádřit stranu pomocí výšky a obsahu. Výraz pro délku strany nakonec zapsala.

3 Závěrečné shrnutí poznatků

V oddíle 2.4 jsem postupně analyzoval chyby a problémy objevující se u žáků při řešení úloh, v nichž se objevují algebraické výrazy. Četnost jednotlivých chyb jsem zaznamenal a nejfrekventovanější z nich blíže popsal a doplnil ilustrací reprezentativních žákovských řešení. K roztřídění nalezených chyb u úprav algebraických výrazů jsem použil klasifikaci od P. Bera a M. Hejného (viz oddíl 1.5), díky které se ukázalo, že nejčastěji se žáci dopustili úkonových chyb, téměř ve třech čtvrtinách případů (viz graf na obr. 72).



Obr. 72: Relativní četnost jednotlivých druhů chyb

Pozn.: Do skupiny *Jiné chyby* byly zařazeny pouze *chybné zápisy dobře myšlených postupů*. Žádné další chyby, které by spadaly do této skupiny, nebyly během analýzy úloh zjištěny.

Z grafu na obr. 72 je patrné, že numerické chyby se u žáků téměř neobjevily. Je to způsobeno zejména tím, že v testu bylo málo úprav číselných výrazů a tím, že žáci si jednotlivé kroky při úpravách výrazů zapisovali (to je v pořádku), pak jsem ale nalezenou chybu hodnotil jako úkonovou, protože jsem nespatřil jiný nadřazenější úkon, který by zároveň prováděli mezi jednotlivými kroky. Bezradnost a bloudění alespoň v některé úloze pociťovalo téměř deset procent žáků. Je to způsobeno zejména nedostatkem zkušeností a omezenými znalostmi, u některých možná i únavou a nechutí pracovat. Strategických chyb se dopouštěli žáci, kteří mohli být částečně ovlivněni učebními materiály (úloha 2, kdy si žáci předepsali dvojici závorek u prvního výrazu) nebo neměli potřebné zkušenosti a uchýlili se k řešení, které bylo správnému řešení nejbližší (například úloha 3, kdy pět žáků nesprávně předepsalo závorku).

3.1 Shrnutí výsledků experimentální části

Cílem práce je zjištěné chyby hlouběji popsat, pokusit se najít jejich možné příčiny a porovnat výsledky s výzkumy v oddíle 1.3. Postupně se vrátím k jednotlivým úlohám a konkrétním chybám s největší četností popřípadě závažností na základě vlastního uvážení. Vzhledem k lepšímu porovnání výsledků jednotlivých studií budu úspěšnost žáků v řešení úloh mé studie uvádět v procentech.

Úloha 1 – Úkolem bylo zjednodušit výraz $x(x+1)-(x+1)$. Čtyři žáci provedli následující chybnou úpravu u druhého členu: $-(x+1) \rightarrow -x+1$, což odpovídá i závěrům Rendla a Vondrové (2014) v úloze M04-07 (oddíl 1.3.1), kde podle nejčastější nesprávné odpovědi žáci chybovali při úpravě druhého členu. Pokud bych měl chybu více upřesnit, jde o chybné přidělení znaménka plus nebo minus druhému členu po odstranění závorky. Úspěšnost řešení úlohy českých žáků v rámci TIMSS 2007 byla 24,7 %, což se významně neliší od úspěšnosti mnou zkoumaných žáků (28,6 %), a výsledek tak lze považovat za důvěryhodný.

Příčinou chyby je zřejmě nekvalitní paměťový záznam v kombinaci s možným vlivem výuky číselných výrazů, což je jeden ze závěrů studie od Vlassis (2004) v oddíle 1.3.2. Nemusí se jednat pouze o znaménko minus, ale například i o chápání závorek. V učebnicích od Hermana a kol. je odčítání mnohočlenu uvedeno odčítáním čísel. „Odečíst číslo znamená přičíst k němu opačné" (Herman et al., 2005b: s. 117), (např. $25-12=25+(-12)=13$). Na to autoři navazují větou, že stejné pravidlo platí i pro odčítání mnohočlenů, a uvádějí příklady, kdy se odčítá dvojčlen nebo trojčlen (např. $x-(2x+5)=x+(-2x-5)=x-2x-5=-x-5$). Ihned poté je napsáno, že tento podrobný zápis se obvykle vynechává a počítá se tak, že „rovnou odstraňujeme závorky podle pravidla" (Herman et al., 2005b: s. 118), (viz obr. 13 na straně 29.)

Podle mého názoru by žákům pomohlo, kdyby se autoři při uvedení odčítání mnohočlenu neomezili pouze na odčítání jediného čísla, ale aby do ukázky zařadili i odčítání číselného dvojčlenu či trojčlenu (např. $5-(2+4)=5+(-2-4)=5-2-4=-1$). Možná bychom zjistili, že žáci jsou zvyklí nejprve určit vnitřek závorky a poté odečíst vzniklé číslo, tedy $5-(2+4)=5-6=-1$. Pokud by žáci měli problémy s odstraněním závorky bez zjednodušení jejího vnitřku, nemá smysl přecházet na algebraické výrazy, ale raději podrobně prozkoumat tuto oblast u číselných výrazů.

Dále se domnívám, že je důležité, aby žák sám objevil a přešel z podrobného zápisu přičítání opačného mnohočlenu ke zkrácenému zápisu, kde se „odstraňuje znaménko před závorkou".

Mohli bychom tak předejít formálním poznatkům, které jsou podle Bera a Hejného (1990: s. 156) jednou z příčin úkonových chyb.

Úloha 2 – Úkolem bylo rozložit na součin pět výrazů. Neobjevila se zde chyba, které by se dopustilo významné množství žáků. Objevilo se několik dílčích problémů a chyb spojených s úlohou (např. neznalost pojmu součin, chybná volba strategie v podobě předepsání dvojice závorek, úkonové chyby), které jsou blíže popsané v samotné analýze úlohy od str. 67 práce.

Úloha 3 – V úloze měli žáci doplnit znaménka operací případně závorek do neúplného výrazu. U druhého výrazu se objevila zajímavá chyba, díky které se žáci dostali do slepé uličky. Pět žáků vložilo do závorky druhý a třetí člen $6p\ \dots (7\ \dots\ 2p) = 12p^2 - 14p$, načež se snažilo doplnit znaménka operací. Všichni sice tušili nějaký problém, protože i s různými variantami doplnění znamének se nemohli dobrat správného výsledku, ovšem bez mé nápovědy (zaměření se pouze na čísla) nebyli schopni udělat krok zpět v podobě jiného použití závorek.

Pokud se zaměřím na učebnice, důvodů této chyby může být několik. Žáci se obecně setkávají častěji s výrazy tvaru jednočlen krát dvojčlen, popřípadě trojčlen. V geometrii je obvod obdélníku obvykle psán ve tvaru $o = 2(a + b)$ nebo povrch hranolu $S = 2(ab + ac + bc)$. I u úprav algebraických výrazů se více setkáme s výrazy ve tvaru $x(a + b)$, například ve cvičení[86], kde je úkolem násobit, jsou z dvanácti zadaných výrazů pouze dva ve tvaru $(a + b)x$. Konečně v každé z tří řad, které jsem analyzoval v oddíle 1.4, jsem u látky zaměřené na vytýkání našel větu: *Vytkli jsme **před** závorku*. Přikláním se k tomu, že při prvním pohledu na zadání žáci tušili, že budou muset použít násobení. Vybavili si nejčastější podobné výrazy a uchýlili se k uzávorkování druhého a třetího členu, poté se snažili doplnit znaménka operací. Když byla eliminována proměnná (po nápovědě), číselný výraz již byli schopni vyřešit. Žákům chyběl nadhled.

Úloha 4 – Cílem úlohy bylo zjistit, jestli mají žáci problém s dosazováním čísel za proměnné. Krátce zde připomenu výsledy a závěry k této úloze, která byla použita v testu TIMSS 2007 (oddíl 1.3). Zadání úlohy: a = 3, b = – 1. Kolik je 2a + 3(2 – b)? Byly dány čtyři možnosti (v závorce je uvedena relativní četnost odpovědí českých žáků): A) 15 (33,8 %), B) 14 (5,8 %), C) 13 (10,4 %) a D) 9 (44,6 %). „Z nesprávných odpovědí měla nejvyšší četnost odpověď D, žáci chybně dosadili záporné číslo.“ (Tomášek et al., 2009: s. 41).

[86] Šarounová, A., et al. (1999c). *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus.. str. 30, cv.2.

V mnou vedených rozhovorech se chybného dosazení, konkrétně -1 za proměnnou b, tedy $6 + 3(2 - 1) = 9$, dopustili pouze dva žáci (přibližně 14,3 %). Objevila se ale mnohem závažnější chyba, konkrétně úprava výrazu $6 + 3(2 + 1)$ na výraz $9 \cdot 3$, kdy žák nedal přednost násobení před sčítáním. Chyby se dopustilo po třech žácích gymnázia a ZŠ Angel a jeden žák ze ZŠ Rakovského (50 % účastníků tohoto výzkumu), a jde zároveň o chybu se zhruba 50% výskytem u všech tří škol. Šest žáků dospělo k výsledku 27. Pouze Miloš se dopustil obou chyb, čímž získal $6 + 3(2 - 1) \rightarrow 9 \cdot (1) = 9$. Ve výzkumu TIMSS 2007 by s největší pravděpodobností zakroužkoval odpověď D. Zbylých šest žáků, kterým vyšlo $6 + 3(2 + 1) \rightarrow$ $\rightarrow 9 \cdot (3) = 27$, by začalo hledat chybu ve svém řešení, neboť tato možnost nebyla nabídnuta. Většina z nich by si chyby (přednost operace) všimla, což potvrzuje i moje studie, a zakroužkovala odpověď A. Tím se původní chyba eliminuje.

Výše uvedené výsledky ukazují na důležitost podrobných analýz odpovědí žáků a nabízených možností a na možnou nejednoznačnost interpretace statistických dat. Velice by mne zajímalo, jak by se změnilo procentuální zastoupení odpovědí, pokud by odborníci z TIMSS zařadili do možností číslo 27.

Vědomost, že násobení má přednost před sčítáním a odčítáním, žák získá již na prvním stupni základního vzdělávání. Za příčinu této chyby považuji nízké soustředění a možná koncentrace na předchozí úkon, kterým bylo správné dosazení.

Úloha 5 – Opět se jednalo o dosazování čísla za proměnnou, tentokrát v kontextu rovnic. Z 92,9% úspěšnosti je zřejmé, že žáci neměli s úlohou problémy. Ve většině případů postupovali tak, že dosadili hodnoty za proměnné x a y, určili číselnou hodnotu vzniklého výrazu na levé straně rovnice a tu porovnali s pravou stranou.

Studie Rendla a Vondrové (2014) však ukazuje, že úspěšnost českých žáků v TIMSS 2007 v podobné úloze M08-08 byla pouze 36,2 % (viz oddíl 1.3.1). Odpověď na příčinu velkého rozdílu úspěšnosti v TIMSS 2007 a úspěšnosti v mnou použitém testu lze těžko hledat. Přikláním se k závěru, že žáci v mých rozhovorech mohli být do značné míry ovlivněni předchozí úlohou, kde obdobně dosazovali do výrazu a určovali jeho hodnotu. Druhou možností je, že rovnice v TIMSS 2007 obsahuje dílčí úkony, jako například roznásobení závorek, odčítání mnohočlenu apod., díky kterým mohla úspěšnost klesnout (žák mohl nejprve pravou či levou stranu rovnice chybně upravit a poté až dosadit). Žáci se také mohli dopustit podobné chyby jako v úloze 4.

Úloha 6, 9 a 11 – Jde o podobné úlohy. Úkolem bylo dosadit výraz za proměnnou v jiném výrazu. Výraz byl buď přímo dán (Úloha 6), nebo jej žák musel nejprve vytvořit (Úloha 9 a 11), což dělalo překvapivé problémy. Žáci se nejčastěji dopustili opomenutí závorek po dosazení, což se projevilo chybným výrazem vzhledem k zadání úlohy. Chybný výraz žáci již bez větších problémů upravili. Žáci si chyby všimli až po upozornění. Obecně souhlasili, že pokud budou v zápise závorky, výsledek se změní. Ovšem o jejich nutnosti zdaleka přesvědčeni nebyli.

V úloze 6a byla úspěšnost 42,9 % a v úloze 6b 35,7 %. Celková úspěšnost pro oba výrazy byla 28,6 %. Jde o lepší výsledky než u úloh M08-11A s úspěšností 30,7 % a M08-11B s úspěšností 8,8 % z TIMSS 2007 (Rendl, Vondrová, 2014). Rozdíl v úspěšnosti u druhé úlohy je způsoben zejména tím, že žák po vypracování úlohy 6a diskutoval řešení s tazatelem. Nové zkušenosti se tak mohly přenést do řešení úlohy 6b. Nejčastější chyba, které se žáci v úloze z TIMSS 2007 dopouštěli, není známa. V mé studii se však ukázalo, že žáci nejčastěji opomenuli závorky po dosazení výrazu za proměnnou. V úloze 6a se této chyby dopustilo 35,7 % žáků (chybějící závorky po dosazení za m, u dosazení za proměnnou n nebyly nutné) a v úloze 6b se chyby dopustilo 64,3 % (chybějící závorky po dosazení za n), v podstatě všichni, kteří úlohu 6b chybně vyřešili.

Totožné chyby se žáci dopustili i v úloze 9 s úspěšností řešení 21,4 %, což je v porovnání s úspěšností 35,5 % v úloze M10-08 ze studie Rendla a Vondrové (2014) rozdíl 14,1 %. Rozdíl může být způsoben tím, že v úloze 9 žáci určovali výrazem obsah trojúhelníka, oproti úloze M10-08, kde bylo úkolem určit obsah obdélníka. Nejčastějším problémem žáků byla právě neznalost vzorce pro obsah trojúhelníka (42,9 %) a stejnou relativní četnost mělo i opomenutí závorek u vytvořeného výrazu, tedy $\frac{3x+5\cdot 4x}{2}$ místo $\frac{(6x+5)\cdot 4x}{2}$.

Úspěšností 20 % v úloze 11 a nejčetnější chybou (60 %) v podobě opomenutí závorek při vytváření výrazu pro obsah největšího obdélníku se pouze potvrzují předešlé chyby.

Rendl s Vondrovou (2014) dospěli v úloze M10-08 (díky nejčetnější chybné odpovědi) k závěru, že žáci nejčastěji nesprávně roznásobili závorku. Tento závěr vzhledem k výsledkům vlastní studie nemohu potvrdit, neboť žáci nejčastěji žádnou závorku ani neroznásobovali. V podstatě vytvořili výraz pro obsah útvaru bez závorky a ten zjednodušili.

Uvedu příklad na úloze M10-08: Obdélník má strany označeny x a $x+2$. Žák (v této studii) vytvoří chybný výraz $x \cdot x + 2$ pro jeho obsah, který správně upraví na výsledný $x^2 + 2$. K tomuto výsledku se lze dostat i tak, že žák vytvoří správný výraz $x(x+2)$ pro obsah, ale poté chybně roznásobí závorku a dospěje obdobně k výrazu $x^2 + 2$. Z příkladu je opět jasně zřejmé, jak je detailní analýza žákovských řešení důležitá pro budoucí nápravu chyb.

Možná příčina těchto chyb je dle mého názoru jednoduchá, podobné úlohy se v analyzovaných učebnicích objevují jen velmi zřídka. Žák nejčastěji dosazuje do výrazů za proměnné číselné hodnoty. Navíc se domnívám, že žák plně nechápe funkci závorek.

Úloha 9 i úloha 11 byla zároveň použita v kvantitativní[87] studii Z. Vránové. Autorka dospěla k obdobným problémům a chybám (Vránová, 2014: s. 29 – 33); v žákovských řešeních se objevila záměna vzorce pro obsah s obvodem, neznalost vzorce, opomenutí závorek při dosazení výrazu do vzorce či chyby v úpravách výrazů. Vzhledem k rozsahu výzkumu autorka neuvádí jednotlivé četnosti analyzovaných chyb, které bych mohl porovnat. Lze srovnat pouze celkovou úspěšnost řešení, která je pro[88] úlohu 9 rovna 91,4 % a pro úlohu 11 rovna 88,6% (Vránová, 2014: s. 26). Z úspěšnosti je patrné, jak velký je rozdíl v úspěšnosti řešení u žáků, kteří jsou zhruba o jeden ročník výuky napřed.

Úloha 7 – Byl dán předpoklad v podobě rovnice $2x + 5 = -2$. Úkolem bylo určit hodnotu pěti různých výrazů. Prvním byl výraz $3(2x + 5)$, u kterého si 13 žáků všimlo podobnosti dvojčlenu v závorce se zadáním. Šest žáků tak dospělo k rychlému závěru $3(-2) = -6$. Zbylých pět (tedy 35,7 %) také dospělo k rychlému závěru, ale k jinému výsledku $3 - 2 = 1$. Chyba spočívala v dosazení -2 za výraz včetně závorek, tedy za $(2x + 5)$, nikoli pouze za $2x + 5$, čímž vzniklo chybné $3 - 2$. V průběhu dosazení „zmizelo“ násobení, které v původním výrazu nebylo zdůrazněno symbolem, a po dosazení jej nahradilo znaménko minus. Z postupu lze usoudit, že žáci neměli problém se samotným dosazením, ale s pochopením funkce závorek. Můžeme se tedy zamyslet nad tím, jak by žáci reagovali, pokud bychom upravili rovnici v zadání na $(2x + 5) = -2$.

Původ této chyby může také částečně pramenit z úspornosti zápisu vynecháním symbolu „ $\cdot$ “, na který si žáci ještě úplně nezvykli. Nutno zároveň podotknout, že úlohy tohoto typu se v učebnicích téměř neobjevují.

Úloha 10 – Úkolem bylo určit povrch útvaru složeného ze čtyř krychlí s délkou strany krychle $2x^3$. U žáků se nejčastěji projevila bezradnost a bloudění při vytváření výrazu. Někteří zaměňovali povrch s objemem, jiní nedokázali určit počet menších čtverců v plášti útvaru.

[87] Byli testováni žáci 9. ročníku ZŠ a 1. ročníku SŠ v celkovém počtu 206 žáků.
[88] Úloha 9, resp. 11 mé práce je totožná s úlohou 1, resp. 4 v práci Z. Vránové.

V učebnicích se opět úlohy, kde jsou rozměry geometrického útvaru zadány algebraickým výrazem, často neobjevují.

3.2 Diskuze

Problém závorek

Při opakované analýze jednotlivých řešení úloh a výskytu chyb jsem dospěl k závěru, že jedním z kritických míst v řešení testových úloh je chápání funkce závorek v zápise výrazu. Připomenu významné chyby. V úloze 1 – většina problémů spojená s odstraněním závorek (chybné odstranění znaménka minus před závorkou, chybné roznásobení); Úloha 3 – chybné prvotní uzávorkování; Úloha 4 – chybné upřednostnění operací, které mohly způsobit závorky ve výrazu; Úlohy 6, 9 a 11 – problémy při dosazování výrazu za proměnnou, absence závorek; Úloha 7 – dosazení číselné hodnoty za výraz včetně závorky.

Stručně řečeno si myslím, že žáci v úlohách neměli problém s dosazením „něčeho za něco jiného“ ve smyslu výměny, měli problém se zápisem. Myslím, že krok v úlohách, kde žáci dosadili výraz za proměnnou v jiném výrazu, byl v jejich chápání správný. Chyba vznikla neuvědoměním si vlastnosti nově vzniklého zápisu (jeho operací a závorek) a původního zápisu. Žáci se v tomto kroku nezastavili a nezkontrolovali, jestli vytvořený výraz skutečně vyjadřuje to, co chtěli.

Povědomí o závorkách si žáci nesou již z prvního stupně základního vzdělávání. Příslušné učebnice matematiky sice analyzovány nebyly, ale lze tak usuzovat z výkladu určenému opakování látky z prvního stupně v některých analyzovaných učebnicích, kde se závorky běžně používají. Závorky jsou popisovány jako symbol, který určuje pořadí jednotlivých operací. „Je-li ve výrazu[89] závorka, provádíme nejdříve početní výkony v závorce.“ (Šarounová et al., 1998: s. 52). Obdobně je tomu u autorů Herman a kol. Žáci v této době pracují se závorkami u číselných výrazů, postupují podle pouček, kde nejprve určí vnitřek závorek a pak pokračují dál. Poučky jsou jim opětovně připomínány: „Jestliže jsou ve výrazu závorky, provádíme nejdříve početní výkony v závorkách. Např.: $(4-5)\cdot 3 = -1\cdot 3 = -3$.“ (Šarounová et al., 1997: s. 55).

Žáci tak mohou žít v domnění, že závorky jsou jen něco, co se do číselných výrazů uměle přidává, aby se měnila jejich hodnota. Jejich hlubší význam například ve spojení s geometrií jim na úrovni číselných výrazů vysvětlen pravděpodobně nebyl. Další informací, která je často

[89] Zatím jsou probírány pouze číselné výrazy.

předložena u číselných výrazů, je distributivita násobení vzhledem ke sčítání (u $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$). Ovšem do doby, než se objeví algebraické výrazy, je zákon distributivity téměř nevyužit. Pokud je žákovi dán výraz typu $2 \cdot (3 + 5)$, je jeho následujícím krokem odstranění závorky součtem čísel 3 a 5 na výraz $2 \cdot 8$ (řídí se předchozími poučkami a zkušenostmi). Podobně je tomu pro odčítání výrazu v závorce atd. V geometrii žáci opět dosazují a postupují stále stejně, a to několik ročníků.

Při přechodu k výuce algebraických výrazů se závorky postupně také objevují. Například v zápisech sčítání více mnohočlenů (kde závorky v dalším kroku najednou „zmizí, aniž by se upravil jejich vnitřek“), v zápise zjednodušování mnohočlenu „vhodným sdružením odpovídajících si členů“, při odčítání mnohočlenu se najednou změní znaménko před závorkou na $+$ a zároveň se změní vnitřek závorky. Na žáky to klade velký nárok na koncepční změnu chápání, když se po několik let učili, že nejprve se provádí početní výkony uvnitř závorky, a zde to najednou nelze, neboť jsou uvnitř jak čísla, tak proměnné. Těžko odhadnout, kolik žáků si vzpomene na distributivitu při zavádění násobení mnohočlenu jednočlenem, když ji doposud zřejmě nevyužili.

Problémy způsobené neúplným chápáním závorek mohou u algebraických výrazů působit dojmem, že žák má problémy s chápáním proměnné a že díky proměnné dělá v úpravách chyby. Pokud se zaměřím na zavedení algebraických výrazů v analyzovaných učebnicích, jsou jedním z pilířů číselné výrazy. Například v učebnici[90] od Hermana a kol. je před kapitolou *výrazy s proměnnou* opakováno vše o výrazech číselných, včetně úprav výrazů, kde se nejprve určuje vnitřek závorky.

Samozřejmě že určit vnitřek závorky je jednodušší a rychlejší, ale proč opakovat stále stejnou aritmetiku? Proč raději s žáky nemodelovat geometrickou interpretací výrazu 4^2 a následně $(4 + 2)^2$, kde stejně bude aritmetika procvičována? Nebo častěji roznásobovat závorku zleva i zprava a výsledky porovnávat? Obecně bych zastával používání více způsobů u určování hodnot číselného výrazu, aby žáci měli velké množství modelů, které by byly stavebním prvkem u výrazů algebraických.

Klasifikace chyb v úpravách algebraických výrazů

Konkrétní chyby v řešeních jsem třídil podle klasifikace od P. Bera a M. Hejného (viz oddíl 1.5). Nejčastějším problémem, s kterým jsem se potýkal, bylo rozlišení mezi numerickou a úkonovou

[90] Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus.

chybou. Až po detailním rozboru několika jednotlivých chyb a studiu prací od Pilouse (2014) a Kuliče (1971) jsem dospěl k závěru, podle něhož jsem se při klasifikaci chyb řídil.

Jako *numerické chyby* jsem klasifikoval chyby v základní aritmetice, kterých se žák dopustil současně při provedení jiného hlavního úkonu, který měl (pro žáka) prioritu.

Jako *úkonové chyby* jsem klasifikoval chyby, které vznikly při provádění hlavního úkonu (posouzeno individuálně v každém kroku při řešení), dále chyby (jiné než v základní aritmetice) způsobené vedlejším úkonem nebo chyby v základní aritmetice, kde jsem jiný (nadřazenější) úkon nespatřil.

Samozřejmě že to, co se ve skutečnosti odehrává v žákově mysli, nezjistíme. Často jsem se pohyboval na rozhraní, kam chybu zařadit. Snažil jsem se chyby co nejlépe posuzovat, pro následné zjištění jejich možného původu. Pokud bych měl znovu klasifikovat chyby v úpravách algebraických výrazů, primárně bych je rozděloval do dvou skupin:

1. Chyby vzniklé na vědomé úrovni: Jedná se o chyby v hlavním (pro řešitele prioritním) úkonu, který právě provádí. Podstatou je selhání paměťového záznamu pro daný úkon. Samozřejmostí je, aby řešitel měl o provedeném úkonu alespoň částečný paměťový záznam. Pokud by paměťový záznam neměl, jednalo by se o neznalost. Řešitel se na daný úkol soustředí.
2. Chyby vzniklé na nevědomé úrovni: Jedná se o chyby v úkonu, který je pro řešitele vedlejší (není prioritní). Řešitel se více soustředí na jiný (prioritní) úkon nebo na více úkonů zároveň.

Následně bych pro obě skupiny použil klasifikaci P. Bera a M. Hejného. V rámci didaktiky matematiky bych se primárně zabýval první skupinou, u které bych hledal možné původy chyb a zabýval se jejich nápravou. Druhou skupinu bych přenechal psychologům či jiným odborníkům na problematiku v oblasti „soustředění se na činnost". Společným sdílením poznatků bychom mohli dosáhnout lepších výsledků. V grafu na obr. 72 by to znamenalo, že poměry výskytu jednotlivých druhů chyb by se změnily. Odhaduji, že nejmarkantnější by bylo snížení procentuálního zastoupení úkonových chyb, čímž by zároveň vzrostlo procentuální zastoupení chyb ostatního druhu.

4 Závěr

Hlavním cílem mé práce bylo identifikovat problémy a chyby žáků druhého stupně základního vzdělávání při úpravách algebraických výrazů a při práci s nimi. Dále identifikovat možnou spojitost těchto problémů a chyb s řadou učebnic, podle nichž je matematika v jednotlivých školách vyučována. Nejprve jsem prostřednictvím rozboru jednotlivých řad učebnic matematiky v oddíle 1.4 dospěl k závěrům, jak jednotliví autoři pracují s písmeny ve formě proměnných a jak zavádějí algebraické výrazy včetně základních operací (oddíl 1.4.4). Za nejvhodnější považuji učebnici od Hermana a kol., která svým podrobným výkladem, návazností látky a rozsahem odpovídá gymnaziálnímu určení. Jako doplňkovou bych doporučil učebnici od autorů Cihláře a Zelenky, která je ovšem obsahově výrazně chudší.

Pomocí analýzy písemných řešení úloh žáků v oddíle 2.4 jsem identifikoval nejčetnější chyby zejména při dosazování výrazu za proměnnou do jiného výrazu, vytváření výrazu z geometrického kontextu a odstraňování znaménka minus před výrazem v závorce. Možné příčiny těchto chyb jsou blíže popsány v oddíle 3.1, kde jsou zároveň dány do souvislosti s používanými učebnicemi a výzkumy z oddílu 1.3. Dospěl jsem k závěru, že společným jmenovatelem identifikovaných chyb je chápání funkce závorek v zápise výrazu. V úpravách algebraických výrazů mohou být žáci ovlivněni některými znalostmi z předcházejících číselných výrazů, na což zároveň poukazuje i studie J. Vlassis o znaménku minus. (Příkladem vlivu těchto znalostí je rozhovor s žákyní Sárou v Příloze B, která je v tomto případě uměla správně použít.) U číselných výrazů jsou závorky vysvětlovány jako symbol, kterým dáváme přednost početním operacím. Při určování hodnoty číselného výrazu se jako první určují hodnoty uvnitř závorek. U algebraických výrazů dochází k významnému rozdílu, kdy u většiny případů nelze zjednodušit vnitřek závorky na jednočlen. Tento rychlý přechod v koncepčním chápání závorek může žákům činit potíže u úprav algebraických výrazů, proto bychom se měli pokusit o jeho zmírnění nebo ještě lépe o odstranění. Výuka zaměřená na ucelené chápání funkce závorek od jejich prvního zavedení v číselných výrazech by mohla problém zmírnit.

Z hlediska praktické implikace uvedených zjištění do výuky bych doporučil procvičovat zejména různé druhy úprav číselných výrazů: roznásobování závorek, odčítání a umocňování dvojčlenu bez jeho prvotního zjednodušení s postupným přidáváním proměnné a přechodem na algebraické výrazy. V geometrii bych se zaměřil na určování např. obsahů a obvodů útvarů, jejichž rozměry by zpočátku byly udány čísly (i mnohočleny), poté proměnnými a následně výrazy s proměnnými.

Celý projekt byl pro mne velkou zkušeností, díky které jsem mohl hlouběji nahlédnout do žákova myšlení a samotného řešení úloh a zároveň pozorovat sám sebe v roli tazatele. Při zpětném přehrávání videozáznamů jsem se kriticky zamýšlel nad svým pedagogickým vystupováním, vyjadřováním a schopností rychle reagovat na nečekané události. Z těchto důvodů bych se přikláněl k zařazení podobných projektů i v menším rozsahu do předmětů, které katedra matematiky a didaktiky matematiky na Pedagogické fakultě nabízí, aby všichni studenti mohli tuto cennou zkušenost získat.

Seznam použité literatury

Bero, P. & Hejný, M. (1990). Algebraické výrazy. In M. Hejný, et al., *Teória vyučovanie matematiky 2* (138 –189). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo. ISBN 80-08-01344-3

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1994a). *Matematika pro sedmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-141-5

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1994b). *Matematika pro sedmou třídu, 2. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-186-5

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995a). *Matematika pro šestou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-266-7

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995b). *Matematika pro šestou třídu, 2. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-292-6

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1995c). *Matematika pro osmou třídu, 1. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-265-X

Cihlář, J. & Zelenka, M. (1996). *Matematika pro osmou třídu, 2. díl*. Praha: Fortuna. ISBN 80-7168-280-2

Durdíková, I. (2007). *Mnohočleny v učebnicích v České republice a ve Finsku* [Diplomová práce]. Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/22423/

Hejný, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In M. Hejný, J. Novotná & N. Stehlíková (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, 1. díl*. (23–42). Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-189-3

Herman, J., et al. (2003). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Dělitelnost*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-261-9

Herman, J., et al. (2004a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Kladná a záporná čísla*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-098-5

Herman, J., et al. (2004b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Racionální čísla. Procenta*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-238-4

Herman, J., et al. (2005a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Úvodní opakování*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-080-2

Herman, J., et al. (2005b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 1*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-013-6

Herman, J., et al. (2005c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Rovnice a nerovnice*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-014-4

Herman, J., et al. (2006a). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Trojúhelníky a čtyřúhelníky*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-332-1

Herman, J., et al. (2006b). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Hranoly*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-257-0

Herman, J., et al. (2006c). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií – Výrazy 2*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-064-0

Kulič, V. (1971). *Chyba a učení*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.

Odvárko, O. & Kadleček, J. (2004). *Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-276-7

Pilous, D. (2014). *Vybrané pohledy na žákovskou chybu ve výuce matematiky* [Disertační práce]. Dostupné z https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/151601/

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus. ISBN 978-80-7196-356-1.

Rendl, R. & Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, *24*(1), 22–57.

Šarounová, A., et al. (1997). *Matematika 6, 2. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-059-4

Šarounová, A., et al. (1998). *Matematika 6, 1. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-022-5

Šarounová, A., et al. (1999a). *Matematika 7, 1. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-085-3

Šarounová, A., et al. (1999b). *Matematika 8, 1. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-124-8

Šarounová, A., et al. (1999c). *Matematika 8, 2. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-127-2

Šarounová, A., Růžičková, J. & Väterová, V. (1998). *Matematika 7, 2. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-106-X

Šarounová, A., et al. (1999d). *Matematika 9, 1. díl*. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-127-2

Tomášek, V., et al. (2008). *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0565-2

Tomášek, V., et al. (2009). *Výzkum TIMSS 2007 – Úlohy z matematiky pro 8. ročník*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání. ISBN 978-80-211-0591-1

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in „negativity“. *Learning and Instruction, 14*(5), 469–484.

Vránová, Z. (2014). *Algebraické výrazy v geometrii – žákovské strategie a obtíže*. [Nepublikovaná závěrečná práce rozšiřujícího studia matematiky na PedF UK v Praze. Vedoucí práce N. Vondrová].

Ženatá, E. (2010). *Přehled učiva matematiky s příklady a řešením*. Benešov: Blug. ISBN 978-80-7274-988-1

Příloha A – Zadání úloh hlavní studie

Úpravy výrazů

1. Zjednodušte: $x(x + 1) - (x + 1) =$

2. Rozložte na součin:

$2x + 4 =$

$x^2 - 5x =$

$3a + 3b + ax + bx =$

$16 - 9p^2 =$

$4a^2 - 25b^2 =$

3. Doplňte místo teček znaménko operace. Můžete použít závorky.

$6p \dots 7 \dots 2p = 8p + 7$

$6p \dots 7 \dots 2p = 12p^2 - 14p$

4. Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

5. Která rovnice má řešení $x = 3$, $y = 5$?

$5x + 3y = 15$

$5x - 3y = 0$

$3x - 5y = 0$

$3x + 5y = 8$

6. $m = 1 + x$, $n = 2 - x$. Kolik je

a) $2m + n$?

b) $2m - n$?

7. Platí $2x + 5 = -2$. Najděte hodnotu následujících výrazů:

$3(2x + 5) =$

$-1 \cdot (2x + 5) - 1 \cdot (2x + 5) =$

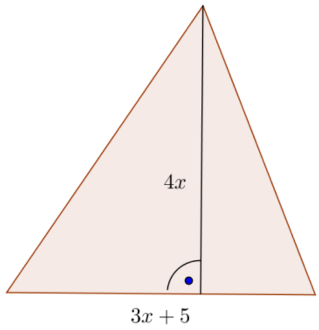
$2x + 6 =$

$2x + 4 =$

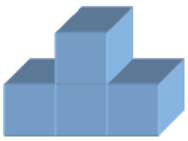
$-0{,}5 \cdot (2x + 4) =$

8. Obsah čtverce je vyjádřen výrazem 25 x^2– 10xy + y^2. Jaká je délka strany tohoto čtverce?

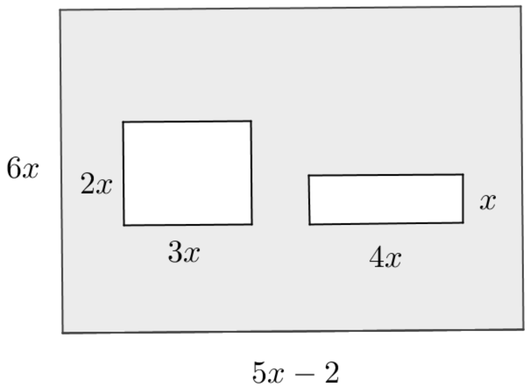
9. Zapište a upravte výraz pro obsah trojúhelníka na obrázku.



10. Hrana každé z krychlí tvořících těleso na obrázku má délku 2x^3. Zapište a upravte vzorec pro povrch tělesa.



11. Určete a zjednodušte výraz, který vyjadřuje obsah tmavé části obrázku.



12. Ze vzorce pro obsah trojúhelníka vyjádřete délku strany.

13. Ze vzorce pro obsah lichoběžníku vyjádřete velikost výšky na základnu.

14. Ze vzorce pro obsah kruhu vyjádřete velikost jeho poloměru.

15. Řešte soustavu rovnic: $x + y = 12$, $2x + 5y = 36$.

Příloha B – Přepis rozhovoru nad řešením úlohy č. 4 (Sára)

Příklad 4 – 5:16

6:24

T27: „Už to máš, koukám.“

Ž23: „Já jsem teď udělala tenhle.“ Příklad 4.

T28: „Jasně tu čtyřku.“

Ž24: „Nad tím budu asi přemýšlet ještě později.“ Příklad 3, druhý řádek.

T29: „Jo. Dobrý.“

Ž25: „Na ten jsem teď nemohla přijít.“

T30: „A tohle máš dobře. Jak si na to šla?“

Ž26: „No, jsem si za to dosadila vždycky, za to a a za to b.“

T31: „Jasně.“

Ž27: „A pak jsem si sem napsala to b jako mínus jedna do té závorky a pak jsme se učili, že když je mínus a mínus jedna, ty dvě mínus za sebou, tak že to dá plus, takže.“

T32: „No jasně, výborně. Hm, to máš dobře, super.“

4. Nechť $a = 3$, $b = -1$. Kolik je $2a + 3(2 - b)$?

$2 \cdot 3 + 3 \cdot [2-(-1)] = 6 + 3 \cdot [2+1] = 6 + 6 + 3 = 15$