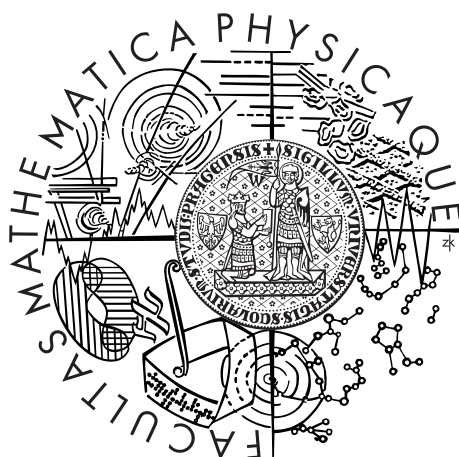


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tomáš Petráš

# Robustnost Markowitzových portfolií

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika  
a ekonometrie

Praha 2014

Rád by som sa poďakoval svojej vedúcej práci, prof. RNDr. Jitke Dupačovej, DrSc., za konzultácie, dobré rady a pripomienky, ústretovosť a čas, ktorý mi venovala, svojej rodine a Libuši za pomoc a podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Robustnost Markowitzových portfolií

Autor: Tomáš Petráš

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá řešením úloh optimalizace portfolia v závislosti na vektoru středních hodnot a variační matici výnosů. Důraz je kladen na úlohy Markowitzova modelu, které úzce souvisí s modernějšími metodami využívajícími rizikové míry VaR a CVaR. V práci jsou zkoumány možnosti robustifikace úloh na základě použité parametrické množiny. Kromě klasického zadání je věnována pozornost také případům, kdy krátké prodeje nejsou povoleny. Jádrem práce tvoří simulační studie, která modeluje dopad nepřesnosti při odhadu vstupních parametrů Markowitzova modelu. Zohledňuje různé druhy averze k riziku a odlišné přístupy při generování odhadů zatížených chybou. Upřesňuje tak tvrzení o převládajícím vlivu odhadu vektoru středních hodnot, které platí jen pro velmi rizikového investora.

Klíčová slova: optimalizace portfolia, Markowitzův model, vliv chyby, robustifikace, vliv averze k riziku

Title: Robustness of the Markowitz portfolios

Author: Tomáš Petráš

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This diploma thesis deals with the problem of portfolio optimization in relation to the mean vector and the variance matrix of yields. The emphasis is put on Markowitz model. In the thesis there are explored some possibilities of robustification based on the used parametric set. Beside the classic formulation of the task our focus is also devoted to the cases in which short sales are not allowed. The core of the thesis constitutes of a simulation study that models the impact of errors in the estimation of the input parameters of Markowitz model. It takes into account different types of risk aversions and different approaches to modelling parameter perturbations. Therefore it specifies the hypothesis of the dominating influence of the mean vector estimate which is valid only for a risk lover.

Keywords: portfolio optimization, Markowitz model, impact of error, robustification, risk aversion influence

Názov práce: Robustnosť Markowitzových portfólií

Autor: Tomáš Petráš

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Táto práca sa zaoberá riešením úloh optimalizácie portfólia v závislosti na vektore stredných hodnôt a variančnej matici výnosov. Dôraz je kladený na úlohy Markowitzovho modelu, ktoré úzko súvisia s modernejšími metódami využívajúcimi rizikové miery VaR a CVaR. V práci sú preskúmané možnosti robustifikácie úloh na základe použitej parametrickej množiny. Okrem klasického zadania je venovaná pozornosť taktiež prípadom, kedy krátke predaje nie sú povolené. Jadro práce tvorí simulačná štúdia, ktorá modeluje dopad nepresnosti pri odhade vstupných parametrov Markowitzovho modelu. Zohľadňuje rôzne druhy averzie k riziku a odlišné prístupy pri generovaní odhadov zaťažených chybou. Spresňuje tak tvrdenie o prevládajúcom vplyve odhadu vektora stredných hodnôt, ktoré platí iba pre veľmi rizikového investora.

Kľúčové slová: optimalizácia portfólia, Markowitzov model, vplyv chyby, robustifikácia, vplyv averzie k riziku

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Úlohy optimalizácie portfólia</b>	<b>4</b>
2.1	Markowitzov model . . . . .	4
2.2	Všeobecný model . . . . .	4
2.3	Viackriteriálna formulácia . . . . .	6
2.4	„Mean - VaR“ model . . . . .	8
2.5	„Mean - CVaR“ model . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Robustifikácia úloh optimalizácie portfólia</b>	<b>11</b>
3.1	Úlohy s neznámou strednou hodnotou . . . . .	11
3.1.1	Intervalový tvar množiny stredných hodnôt . . . . .	11
3.1.2	Elipsovité tvar množiny stredných hodnôt . . . . .	12
3.2	Úlohy s neznámym vektorom stredných hodnôt a variančnou maticou	14
3.2.1	Intervalový tvar množiny variančnej matice . . . . .	14
3.3	Úlohy s neznámou hustotou . . . . .	15
3.4	Úlohy s neznámym diskretným rozdelením . . . . .	17
3.5	Odhad parametrov . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Simulačná štúdia</b>	<b>20</b>
4.1	Modelovanie chyby odhadu . . . . .	21
4.2	Dáta . . . . .	22
4.3	Postup a výsledky . . . . .	23
4.3.1	Výsledky pre klasický model chyby . . . . .	24
4.3.2	Výsledky pre alternatívny model chyby . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Záver</b>	<b>29</b>
	<b>Prílohy</b>	<b>30</b>
	<b>Literatúra</b>	<b>32</b>
	<b>Zoznam obrázkov</b>	<b>33</b>
	<b>Zoznam tabuliek</b>	<b>34</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Myšlienka investovania kapitálu do rôznych oblastí za účelom jeho zachovania a zhodnotenia hlboko presahuje hranice dvadsiateho storočia. Už Bernoulli (1738) vo svojej práci o Petrohradskom parodoxe poukazuje na význam diverzifikácie rizika:

„ ... je rozumné rozdeliť majetky, ktoré čelia menšiemu riziku na viacero častí ako ich riskovať všetky spoločne.“

*Daniel Bernoulli*

Avšak až o takmer dvesto rokov neskôr Markowitz (1952) vo svojom článku *”Portfolio Selection”* prvýkrát matematicky definuje problém optimalizácie portfólia. Takto zvolený prístup sa stal hlavným nástrojom pri hľadaní vhodného rozdelenia investícií v ekonómii a finančnom sektore. Taktiež našiel uplatnenie aj v disciplínach, akými sú religionistika alebo psychológia.

V našej práci sa zaoberáme problematikou Markowitzovho modelu a jeho robustifikácie. Teoretickú časť práce tvoria Kapitoly 2 a 3. V druhej kapitole skúmame súvislosť Markowitzovho modelu s modernejšími prístupmi k optimalizácii portfólia, založenými na rizikových mierach VaR a CVaR. Riešenie úlohy Markowitzovho portfólia je závislé na vstupných parametroch, ktoré často nie sú vopred presne známe. Tu vzniká priestor pre robustifikáciu skúmaného modelu, ktorá je popísaná v tretej kapitole. Tá pokrýva nielen problematiku klasického zadania úloh optimalizácie portfólia s povolenými krátkymi predajmi, ale venuje sa tiež prípadom, kedy takéto predaje nie sú možné. Obsah štvrtej kapitoly je inšpirovaný nasledujúcim odporúčaním Ziemba (2003):

„ Stredné hodnoty sú zďaleka najdôležitejšou časťou rozdelenia výnosov, špeciálne ich smer. Teda musíte dobre odhadnúť budúce stredné hodnoty, ináč sa rýchlo vydáte zlým smerom, ktorý obyčajne vedie k strate alebo slabej výkonnosti. “

*William T. Ziemba*

S týmto názorom sa môžeme stretnúť vo viacerých článkoch a publikáciách zaoberajúcich sa odhadom parametrov úloh optimalizácie portfólia. Avšak vyššie spomenuté odporúčanie je vhodné iba pre špeciálny typ vysoko rizikového investora. Našou snahou bolo toto odporúčanie zovšeobecniť. Vo štvrtej kapitole nájdeme popis a výsledky simulácie, na základe ktorej sme skúmali vplyv parametra averzie voči riziku na výkonnosť portfólia. Súčasťou práce je kód použitý pri simulácii, ktorý je priložený na samostatnom CD.



# Kapitola 2

## Úlohy optimalizácie portfólia

Existuje viacero možných matematických formulácií problému optimalizácie portfólia. V tejto kapitole sa zameriame na najpoužívanejšie, popíšeme si ich tvar a poukážeme na ich vzájomnú súvislosť.

### 2.1 Markowitzov model

Markowitzov model optimalizácie portfólia patrí medzi základne spôsoby, ako matematicky formulovať problém optimálneho zloženia nejakého portfólia.

Uvažujme  $n$ -rozmerný reálny náhodný vektor výnosov portfólia  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)^\top$  so strednou hodnotou  $\mu \in \mathbb{R}^n$  a variančnou maticou  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{r} \sim (\mu, \Sigma)$  a váhový vektor  $x$  taký, že  $x \in \mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}_n^\top x = 1\}$ , špeciálne ak predpokladáme nezápornosť, potom  $x \in \mathcal{X}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}_n^\top x = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ . Optimalizačnú úlohu v tvare:

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \{\mu^\top x - \lambda x^\top \Sigma x\} = - \min_{x \in \mathcal{X}} \{\lambda x^\top \Sigma x - \mu^\top x\} \quad (2.1)$$

nazývame úlohou Markowitzovho modelu. Hlavnou myšlienkou, čo je zrejmé z formulácie problému, je maximalizácia očakávaného výnosu, ktorý je kompenzovaný jeho varianciou. Parameter  $\lambda > 0$  predstavuje averziu investora k riziku. V prípade, ak od prípustnej množiny nepožadujeme nezápornosť  $x$ , je (2.1) úlohou hľadania viazaného extrému, ktorú sme schopní riešiť pomocou Lagrangeovej funkcie. V prípade, že krátke predaje nie sú povolené, nájdenie optimálneho riešenia nie je tak jednoduché ako v predchádzajúcom prípade. Pri jeho hľadaní sa najčastejšie používajú algoritmy kvadratického programovania Hamala (1972).

### 2.2 Všeobecný model

Všeobecnejším prístupom k problematike hľadania vhodného portfólia je úloha založená na optimalizácii úžitkovej funkcie. Nech  $U(x)$  je nejaká úžitková funkcia

a  $W_0 \in \mathbb{R}$ ;  $W_0 > 0$  počiatočná hodnota kapitálu investora, potom úlohu:

$$\max_{x \in \mathcal{X}} Z(x) = \max_{x \in \mathcal{X}} \mathbf{E} [U(W_0 x^\top \mathbf{r})] \quad (2.2)$$

budeme nazývať *všeobecným modelom* optimalizácie portfólia. Pri znalosti rozdelenia náhodného vektora  $\mathbf{r}$  patrí úloha (2.2) do skupiny úloh jednostupňovej stochastickej optimalizácie. V špeciálnom prípade, ak  $U(\cdot)$  je kvadratická úžitková funkcia:

$$U(y) = c_2 y^2 + c_1 y + c_0,$$

je riešenie úlohy (2.2) závislé iba na vektore stredných hodnôt  $\mu$  a variančnej matici  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [U(W_0 x^\top \mathbf{r})] &= c_2 W_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mathbf{E} r_i r_j + c_1 W_0 x^\top \mu + c_0 = \\ &= c_2 W_0^2 \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \text{cov}(r_i, r_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \mu_i \mu_j \right) + c_1 W_0 x^\top \mu + c_0 \\ &= c_2 W_0^2 x^\top (\Sigma + \mu \mu^\top) x + c_1 W_0 x^\top \mu + c_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Z výsledného tvaru strednej hodnoty (2.3) vyplýva, že úloha (2.2) je v prípade kvadratickej úžitkovej funkcie úlohou kvadratického programovania.

V prípade, že  $U(x)$  je negatívne exponenciálna úžitková funkcia, teda  $U(x) = 1 - \exp\{-ax\}$  s parametrom  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  a vektor výnosov  $\mathbf{r}$  má  $n$ -rozmerné normálne rozdelenie, potom:

$$\begin{aligned} Z(x) &= 1 - \mathbf{E} [\exp\{-aW_0 x^\top \mathbf{r}\}] = \\ &= 1 - \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -aW_0 x^\top r - \frac{1}{2} (r - \mu)^\top \Sigma^{-1} (r - \mu) \right\} dr. \end{aligned}$$

Položme  $y := -aW_0 x$  a  $C = (2\pi)^{n/2} |\Sigma|^{1/2}$ , potom:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (r - \mu)^\top \Sigma^{-1} (r - \mu) + r^\top y \right\} dr = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (r - \mu - \Sigma y)^\top \Sigma^{-1} (r - \mu - \Sigma y) + y^\top \mu + \frac{1}{2} y^\top \Sigma y \right\} dr = \\ &= \exp \left\{ \frac{1}{2} y^\top \Sigma y + y^\top \mu \right\} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (r - (\mu + \Sigma y))^\top \Sigma^{-1} (r - (\mu + \Sigma y)) \right\} dr = \\ &= C \exp \left\{ \frac{1}{2} y^\top \Sigma y + y^\top \mu \right\}. \end{aligned}$$

Teda úloha (2.2) je ekvivalentná s optimalizačnou úlohou:

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \left\{ 1 - \exp \left\{ \frac{1}{2} a^2 W_0^2 x^\top \Sigma x - aW_0 x^\top \mu \right\} \right\}. \quad (2.4)$$

Keďže exponenciálna funkcia je rýdzo rastúca, potom optimalizačná úloha (2.4) je ekvivalentná, čo do polohy maxima s úlohou v tvare:

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \mu - \frac{1}{2} a W_0 x^\top \Sigma x \right\}, \quad (2.5)$$

čo je úloha Markowitzovho modelu, kde výraz  $1/2aW_0$  predstavuje parameter  $\lambda$  z úlohy (2.1) a teda averziu investora k riziku. Z toho vyplýva, že averzia je závislá na hodnote parametra  $a$  a počiatocnom kapitále investora  $W_0$ .

## 2.3 Viackriteriálna formulácia

Teória viackriteriálnej optimalizácie ponúka možnosť na zjednotenie rôznych prístupov k problému optimalizácie portfólia. Základom je *viackriteriálna úloha*, ktorú môžeme vo všeobecnosti definovať ako:

$$\text{”min”}_{x \in X} \mathbf{f}(x), \quad (2.6)$$

kde  $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_K(x))^\top$  je vektorová funkcia so zložkami  $f_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pre  $j = 1, \dots, K$  a  $X \subset \mathbb{R}^n$  je nejaká neprázdna množina. V nami skúmanom prípade má funkcia  $\mathbf{f}$  tvar:

$$\mathbf{f}(x) = (-\mu^\top x, x^\top \Sigma x),$$

čo znamená, že sa snažíme o minimalizáciu rozptylu a maximalizáciu strednej hodnoty. Iba vo výnimočných prípadoch existuje riešenie, ktoré by bolo optimálne aj pre minimalizačnú a zároveň aj maximalizačnú časť. Preto sa zavádza pojem *eficientného riešenia*.

**Definícia 1.** *Nech  $X \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdna množina. Povieme, že  $x^* \in X$  je eficientné riešenie úlohy viackriteriálneho programovania (2.6) ak neexistuje  $x \in X$  také, že  $\mathbf{f}(x) \leq \mathbf{f}(x^*)$  a  $\mathbf{f}(x) \neq \mathbf{f}(x^*)$ .*

Takto definované eficientné riešenie hrá dôležitú úlohu pri hľadaní vzťahov medzi viackriteriálnou úlohou (2.6) a jej modifikovanými formami, ktoré vzniknú metódou takzvanej *skalarizácie* a  *$\varepsilon$ -obmedzení*. Bližšie sa na tieto vlastnosti pozrieme v nasledujúcich tvrdeniach.

**Veta 1.** *Nech  $t \in \mathbb{R}^K; t \geq 0$  a  $\bar{x}$  je optimálnym riešením úlohy:*

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^K t_i f_i(x). \quad (2.7)$$

*Ak  $t > 0$  alebo  $\bar{x}$  je bodom ostrého minima úlohy (2.7), potom  $\bar{x}$  je eficientným riešením úlohy viackriteriálneho programovania (2.6).*

*Dôkaz:* Označme ako  $g(x) := \sum_{i=1}^K t_i f_i(x)$  a predpokladajme pre spor, že  $\bar{x}$  nie je eficientným riešením, teda  $\exists \hat{x} \in X$  také, že  $\mathbf{f}(\hat{x}) \neq \mathbf{f}(\bar{x})$ , pre ktoré platí

$\mathbf{f}(\hat{x}) \leq \mathbf{f}(\bar{x})$ . Ak  $t > 0$  resp.  $\bar{x}$  je bodom ostrého minima, potom  $g(\hat{x}) < g(\bar{x})$  resp.  $g(\hat{x}) \leq g(\bar{x})$ , čo je spor s predpokladom, že  $\bar{x}$  je bodom minima resp. ostrého minima úlohy (2.7). □

Problém v tvare (2.7) budeme označovať ako úlohu v skalarizovanom tvare.

**Veta 2.** *Nech  $X \subset \mathbb{R}^n$  je neprázdna konvexná množina a  $f_1, \dots, f_K$  sú konvexné funkcie na  $\mathbb{R}^n$ . Ak  $\bar{x}$  je eficientné riešenie úlohy (2.6), potom existuje kladné  $t \in \mathbb{R}^K$  také, že  $\bar{x}$  je optimálne riešenie úlohy (2.7).*

*Dôkaz:* Viac Dupačová a kol. (2002), odst. II.3, str. 125, veta 3.1.5. □

Okrem skalarizácie môžeme úlohu (2.6) transformovať pomocou  $\varepsilon$ -obmedzení nasledujúcim spôsobom. Zvoľme  $j \in \{1, \dots, K\}$  a  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{K-1}$ , potom sa budeme zaujímať o optimalizačnú úlohu v tvare:

$$\min_{x \in X} \{f_j(x) : f_i(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, K\}. \quad (2.8)$$

Označme množinu prípustných riešení (2.8) ako  $X_\varepsilon := \{x \in X : f_i(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, K\}$ .

**Veta 3.** *Nech  $X_\varepsilon$  je neprázdna, potom platí:*

1. *Ak  $\hat{x}$  je jediné optimálne riešenie úlohy (2.8), potom  $\hat{x}$  je eficientné riešenie úlohy (2.6).*
2. *Ak  $\hat{x}$  je eficientné riešenie úlohy (2.6), potom existuje  $\varepsilon \in \mathbb{R}^{K-1}$  také, že  $\hat{x}$  je optimálne riešenie úlohy (2.8).*

*Dôkaz:* 1. Nech pre spor  $\hat{x}$  nie je eficientným riešením úlohy (2.6) teda  $\exists y \in X$  také, že  $\mathbf{f}(y) \neq \mathbf{f}(\hat{x})$ , pre ktoré platí  $\mathbf{f}(y) \leq \mathbf{f}(\hat{x})$ . Potom  $f_k(y) \leq f_k(\hat{x})$  pre  $k = 2, \dots, K$ , čiže  $y \in X_\varepsilon$  a taktiež  $f_1(y) \leq f_1(\hat{x})$ , čo je spor s predpokladom, že  $\hat{x}$  je jediné optimálne riešenie (2.8).

2. Ak  $\hat{x}$  je eficientným riešením úlohy (2.6), potom pre každé  $y \in X$  také, že  $\mathbf{f}(y) \neq \mathbf{f}(\hat{x})$  existuje  $\ell \in \{1, \dots, K\}$ , pre ktoré  $f_\ell(y) > f_\ell(\hat{x})$ . Položme  $\varepsilon = (f_2(\hat{x}), \dots, f_K(\hat{x}))^\top$ , potom pre  $y \in X$  také, že  $\mathbf{f}(y) \neq \mathbf{f}(\hat{x})$  platí: buď  $f_1(y) > f_1(\hat{x})$  alebo  $y \notin X_\varepsilon$ . Teda  $\hat{x}$  je optimálnym riešením úlohy (2.8). □

Vráťme sa k pôvodnej úlohe optimalizácie portfólia. Ako už bolo spomenuté, v prípade viackriteriálneho prístupu riešime úlohu:

$$\min_{x \in X} x^\top \Sigma x, \min_{x \in X} -\mu^\top x. \quad (2.9)$$

Skalarizáciou tejto úlohy pri vhodnej voľbe parametra  $t = (\lambda, 1)$  sa opäť stretávame s úlohou Markowitzovho modelu (2.1). Aplikáciou prístupu  $\varepsilon$ -obmedzení dostávame opätovne úlohy:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{x^\top \Sigma x : \mu^\top x \geq \mu_0\}, \quad (2.10)$$

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \{\mu^\top x : x^\top \Sigma x \leq \sigma_0\}. \quad (2.11)$$

Úloha (2.10), v ktorej minimalizujeme rozptyl (riziko) za podmienky na strednú hodnotu (očakávaný výnos), je často označovaná ako „Mean-Variance“ problém. Zamerajme sa na vzájomný vzťah „Mean-Variance“ problému a Markowitzovho modelu. Našou snahou bude dokázať, že obe úlohy sú, čo do polohy optimálneho riešenia, ekvivalentné.

Nech  $\hat{x}$  je riešenie úlohy (2.1), potom podľa vety 1 platí, že  $\hat{x}$  je eficientným riešením úlohy (2.9) a z druhej časti vety 3 vyplýva, že existuje  $\mu_0$  také, že  $\hat{x}$  je riešením (2.10). Ak  $\hat{x}$  je riešením (2.10), potom je taktiež riešením úlohy:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{c x^\top \Sigma x : \mu^\top x \geq \mu_0\}, \quad (2.12)$$

pre  $c \in \mathbb{R}; c > 0$ . Ak  $\Sigma$  je pozitívne definitná matica ( $\Sigma \succ 0$ ), potom funkcia  $c x^\top \Sigma x$  je rýdzo konvexná a množina  $\{x \in \mathcal{X} : \mu^\top x \geq \mu_0\}$  je konvexná. Z toho vyplýva, že úloha (2.12) má jediné riešenie, a teda podľa prvej časti vety 3 platí, že  $\hat{x}$  je eficientným riešením úlohy (2.9).

Ak  $\hat{x}$  je eficientným riešením úlohy (2.9), potom podľa vety 2 existuje  $t \in \mathbb{R}^2; t > 0$  také, že  $\hat{x}$  je riešením úlohy:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{c t_1 x^\top \Sigma x - t_2 \mu^\top x\}$$

a teda aj úlohy:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ c \frac{t_1}{t_2} x^\top \Sigma x - \mu^\top x \right\}.$$

Ak položíme  $c := \lambda t_2 / t_1$ , potom  $\hat{x}$  je riešenie úlohy (2.1). Tým sme dokázali požadovanú ekvivalentnosť „Mean-Variance“ problému a Markowitzovho modelu v prípade, že  $\Sigma$  je pozitívne definitná. V ďalších častiach našej práce sa viackrát stretne s dvojicou úloh, ktorých ekvivalencia bude založená na rovnakom princípe ako v dokazovanom prípade.

## 2.4 „Mean - VaR“ model

Optimalizáciu portfólia môžeme založiť taktiež na miere rizika VaR. Pre dané  $x \in \mathcal{X}$  a  $\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \geq 0$  si definujeme stratovú funkciu  $\psi(x, \alpha)$  ako:

$$\psi(x, \alpha) = P(-x^\top \mathbf{r} \leq \alpha) = \int_{-x^\top \mathbf{r} \leq \alpha} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

kde  $p$  predstavuje združenú hustotu náhodného vektora  $\mathbf{r}$ . Ak zápornú hodnotu

z  $x^\top \mathbf{r}$  nazveme stratou, potom podmienka  $-x^\top \mathbf{r} \leq \alpha$  predstavuje stratu portfólia s váhami  $x$ , ktorá je zhora obmedzená hodnotou  $\alpha$ . Potom mieru rizika  $\text{VaR}_\beta(x)$  definujeme ako:

$$\text{VaR}_\beta(x) = \min \{ \alpha : \psi(x, \alpha) \geq \beta \},$$

kde  $\beta \in (0,1)$ . Predpokladajme, že  $\mathbf{r}$  má  $n$ -rozmerné normálne rozdelenie s vektorom stredných hodnôt  $\mu$  a variančnou maticou  $\Sigma$ , teda  $\mathbf{r} \sim N(\mu, \Sigma)$ . Platí:

$$\mathbf{P}(-x^\top \mathbf{r} \leq \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha + x^\top \mu}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}\right),$$

kde  $\Phi$  je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia, potom  $\text{VaR}_\beta(x)$  sa dá vyjadriť ako:

$$\text{VaR}_\beta(x) = \min \left\{ \alpha : \Phi\left(\frac{\alpha + x^\top \mu}{\sqrt{x^\top \Sigma x}}\right) \geq \beta \right\} = \xi_\beta \sqrt{x^\top \Sigma x} - x^\top \mu,$$

kde  $\xi_\beta = \Phi^{-1}(\beta)$ . Optimalizácia portfólia založená na rizikovej miere  $\text{VaR}_\beta(x)$  má, za podmienky normality, tvar:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{ \text{VaR}_\beta(x) \} = \min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \xi_\beta \sqrt{x^\top \Sigma x} - x^\top \mu \right\}. \quad (2.13)$$

V prípade, že  $\xi_\beta \geq 0$  ( $\beta \in (1/2, 1)$ ) a  $\Sigma \succ 0$  je funkcia  $\xi_\beta \sqrt{x^\top \Sigma x}$  konvexná, pretože je zložená z rastúcej a rýdzokonvexnej funkcie. Z toho vyplýva, že ak  $\xi_\beta \geq 0$ ,  $\Sigma \succ 0$ , potom úloha (2.13) je ekvivalentá s:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \sqrt{x^\top \Sigma x} : x^\top \mu \geq \mu_0 \right\} \quad (2.14)$$

z rovnakých dôvodov aké boli uvedené pri dokazovaní ekvivalentnosti Markowitzovho a „Mean-Variance“ problému v kapitole 2.3. Keďže odmocnina je rastúca funkcia, potom úloha (2.14) je ekvivalentá s „Mean-Variance“ problémom a tým pádom sú si ekvivalentné (za predpokladu normality) aj úlohy Markowitzovho modelu a „Mean-Var“ modelu.

## 2.5 „Mean - CVaR“ model

Ďalšou z rozšírených rizikových mier je miera CVaR, ktorá má oproti miere VaR lepšie teoretické vlastnosti, akými sú napríklad spojitosť v parametri  $\beta$  alebo subaditivita. CVaR je definovaná nasledujúcim spôsobom:

$$\text{CVaR}_\beta(x) = \mathbf{E}[-x^\top \mathbf{r} \mid -x^\top \mathbf{r} \geq \text{VaR}_\beta(x)] = \frac{1}{1-\beta} \int_{-x^\top \mathbf{r} \geq \text{VaR}_\beta(x)} -x^\top \mathbf{r} p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Rockafellar a Uryasev (2000) ukázali, že problém hľadania  $\text{CVaR}_\beta(x)$  je možné previesť na konvexnú minimalizačnú úlohu  $\text{CVaR}_\beta(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha)$ , kde:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}} [-x^\top \mathbf{r} - \alpha]^+ p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Takto dostávame úlohu optimalizácie portfólia založenú na rizikovej miere CVaR v tvare:

$$\min_{x \in X} \text{CVaR}_\beta(x) = \min_{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha). \quad (2.15)$$

Platí:  $(x^*, \alpha^*)$  je optimálnym riešením pravej strany úlohy (2.15) práve vtedy, keď  $x^*$  je optimálnym riešením ľavej strany úlohy (2.15). Špeciálne, ak  $\mathbf{r} \sim N(\mu, \Sigma)$  a  $\beta \in (1/2, 1)$ , potom pre  $\text{CVaR}_\beta(x)$  platí (pozri Rockafellar a Uryasev (2000)):

$$\text{CVaR}_\beta(x) = \kappa_\beta \sqrt{x^\top \Sigma x} - x^\top \mu.$$

Vo všeobecnom prípade, napr. ak vektor  $\mathbf{r}$  má neštandardné rozdelenie, môžeme funkciu  $F_\beta(x, \alpha)$  aproximovať na základe náhodného výberu z daného rozdelenia. Nech  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots, \mathbf{r}^T$  je náhodný výber, potom na základe toho, že výberový priemer je konzistentným odhadom strednej hodnoty, môžeme použiť pri dostatočne veľkom rozsahu výberu  $T$  aproximáciu:

$$F_\beta(x, \alpha) \approx \alpha + \frac{1}{(1 - \beta)} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [-x^\top \mathbf{r}^t - \alpha]^+. \quad (2.16)$$

# Kapitola 3

## Robustifikácia úloh optimalizácie portfólia

V 2. kapitole sme sa oboznámili s rôznymi prístupmi k optimalizácii portfólia. Každý z týchto prístupov, od Markowitzovho modelu až po CVaR model, je ovplyvnený parametrami strednou hodnotou  $\mu$  a variančnou maticou výnosov  $\Sigma$ . V reálnom živote sa často stretávame so situáciou, keď o hodnotách týchto parametrov máme iba čiastočnú informáciu. To nás privádza k myšlienke robustifikácie úloh optimalizácie portfólia prezentovanej v práci Fabozzi a kol. (2010).

Nech  $\theta \in \mathbb{R}^k$  je presná hodnota parametrov úlohy, potom čiastočná znalosť o ich hodnote bude reprezentovaná ako  $\theta \in \Theta$ , kde  $\Theta \subset \mathcal{B}^k$ <sup>1</sup> je parametrická množina zostrojená na základe vhodného odhadu  $\hat{\theta}$ . V tejto kapitole sa zameriame na riešenie úlohy v závislosti na tvare parametrickej množiny  $\Theta$ . Hlavná myšlienka, na ktorej postavíme robustifikáciu, je založená na hľadaní optimálneho riešenia v najhoršom možnom prípade v závislosti na  $\Theta$ .

### 3.1 Úlohy s neznámou strednou hodnotou

Uvažujme úlohu optimalizácie portfólia s neznámym vektorom stredných hodnôt  $\mu$  ( $\theta = \mu$ ) a známou variančnou maticou  $\Sigma$ . Na základe voľby parametrickej množiny  $\Theta_\mu$  sa dá k riešeniu tejto úlohy pristupovať viacerými možnými spôsobmi.

#### 3.1.1 Intervalový tvar množiny stredných hodnôt

Prirodzenou voľbou parametrickej množiny  $\Theta_\mu$  je nejaký vhodný interval. Keďže parametrický vektor  $\mu$  je viacrozmerný, tak k jeho konštrukcii môžeme pristupovať cez intervaly jeho zložiek. Teda  $\Theta_\mu$  volíme ako:

---

<sup>1</sup> $\mathcal{B}^k$  - k-rozmerná borelovská sigma-algebra



$$\Theta_\mu = \{\mu : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, n\},$$

kde  $\delta_i$  má v prípade znalosti rozdelenia  $\mathbf{r}$  súvis s intervalovým odhadom  $\mu$ , alebo ak rozdelenie  $\mathbf{r}$  nie je bližšie známe, tak vďaka centrálnej limitnej vete s asymptotickým intervalovým odhadom. Príslušná úloha optimalizácie portfólia má potom tvar:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \Sigma x : \min_{\mu} \mu^\top x \geq \mu_0, |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, n \right\}. \quad (3.1)$$

Podmienka na minimálny zisk sa dá upraviť takto:

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \{ \mu^\top x : |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i, i = 1, \dots, n \} &= \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_i - \text{sign}(x_i) \delta_i) x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_i x_i - |x_i| \delta_i) = \hat{\mu}^\top x - \delta^\top |x|, \end{aligned}$$

kde  $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^\top$ . Teda úloha (3.1) je potom ekvivalentná s:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{ x^\top \Sigma x : \hat{\mu}^\top x - \delta^\top |x| \geq \mu_0 \}. \quad (3.2)$$

V prípade, že nie sú povolené krátke predaje, teda  $x \in \mathcal{X}^+$ , sa dá úloha (3.1) vyjadriť ako:

$$\min_{x \in \mathcal{X}^+} \{ x^\top \Sigma x : (\hat{\mu} - \delta)^\top x \geq \mu_0 \}. \quad (3.3)$$

Kedže funkcia  $\delta^\top |x| - \hat{\mu}^\top x$  resp.  $\delta^\top x - \hat{\mu}^\top x$  je konvexná, potom môžeme rovnakým spôsobom ako v časti o viackriteriálnej formulácii ukázať, že úloha (3.2) resp. (3.3) je ekvivalentná s:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{ \lambda x^\top \Sigma x - \hat{\mu}^\top x + \delta^\top |x| \} \quad \text{resp.} \quad \min_{x \in \mathcal{X}^+} \{ \lambda x^\top \Sigma x - \hat{\mu}^\top x + \delta^\top x \}.$$

Člen  $\delta^\top |x|$  resp.  $\delta^\top x$  môžeme interpretovať ako averziu investora k chybe odhadu  $\mu$  pričom veľkosť rizika, ktorú je investor schopný akceptovať, je vyjadrená parametrom  $\delta$ .

### 3.1.2 Elipsovité tvar množiny stredných hodnôt

V predchádzajúcom prípade sme sa zamerali na odhad  $\mu$  po zložkách. V tejto časti sa pokúsime o odhad celého vektora  $\mu$ . Konštrukciu množiny  $\Theta_\mu$  založíme na štatistike  $(\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu})$ , ktorá má vo všeobecnom prípade asymptoticky

$\chi^2$ -rozdelenie o  $n$  stupňoch voľnosti. Teda ak zvolíme množinu  $\Theta_\mu$  ako:

$$\Theta_\mu = \{\mu : (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \chi^2\},$$

potom pri vhodne zvolenej hodnote  $\chi^2$  dostávame asymptotický intervalový odhad parametrického vektora  $\mu$ . Optimalizačná úloha portfólia vzhľadom k elipsovitej parametrickej množine má tvar:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \Sigma x : \min_{\mu} \mu^\top x \geq \mu_0, (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \chi^2 \right\}. \quad (3.4)$$

Pre  $x \in \mathcal{X}$  uvažujme nasledujúcu optimalizačnú úlohu:

$$\min_{\mu} \{ \mu^\top x : (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \chi^2 \}. \quad (3.5)$$

Kedže úloha (3.5) má lineárnu účelovú funkciu s kvadratickým obmedzením v tvare nerovností, potom je (3.5) konvexnou úlohou a taktiež symetrickou úlohou nelineárneho programovania (*SNLP*). V prípade úloh *SNPL* platí, že ak existuje riešenie lokálnych podmienok optimality, potom toto riešenie spĺňa aj globálne podmienky optimality Dupačová a Lachout (2011). Na základe Lagrangeovej funkcie úlohy (3.5):

$$L(\mu, \nu) = \mu^\top x - \nu \left( (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) - \chi^2 \right)$$

a podmienok optimality:

$$\nabla_{\mu} L(\mu, \nu) = x + 2\nu(\Sigma^{-1}\mu - \Sigma^{-1}\hat{\mu}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu^* = \hat{\mu} - \frac{\Sigma x}{2\nu},$$

komplementarity a prípustnosti:

$$(\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) - \chi^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\nu^* = \frac{\sqrt{x^\top \Sigma x}}{\chi} \geq 0,$$

dostávame riešenie lokálnych podmienok optimality  $(\mu^*, \nu^*)$  úlohy (3.5), a tým pádom aj optimálne riešenie úlohy (3.5) v tvare:

$$\mu^* = \hat{\mu} - \chi \Sigma x / \sqrt{x^\top \Sigma x}$$

a prislúchajúcu účelovú funkciu:

$$\hat{\mu}^\top x - \chi \sqrt{x^\top \Sigma x}.$$

Z toho vyplýva, že úloha (3.4) je ekvivalentná s:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \Sigma x : \hat{\mu}^\top x - \chi \sqrt{x^\top \Sigma x} \geq \mu_0 \right\}. \quad (3.6)$$

Zamerajme sa teraz na funkciu  $g(x) := \chi\sqrt{x^\top \Sigma x} - \hat{\mu}^\top x + \mu_0$ . Zaujímá nás, či  $g(x)$  je konvexnou funkciou, pretože v kladnom prípade by sme úlohu (3.6), ktorá je v tvare  $\varepsilon$ -obmedzení, mohli transformovať na jej skalarizovaný tvar, ako sme to urobili už na viacerých miestach tejto práce.

Pri dokazovaní konvexnosti využijeme fakt, že funkcia so spojitými druhými parciálnymi deriváciami je konvexná na konvexnej množine práve vtedy, keď jej Hessova matica je pozitívne semidefinitná Dupačová a Lachout (2011). Z toho vyplýva, že ak dve funkcie majú rovnaké Hessove matice a jedna z nich je konvexná, potom aj druhá funkcia je konvexná. V našom prípade bude konvexnou funkciou  $h(x) := \chi\sqrt{x^\top \Sigma x}$ . Keďže Hessove matice  $g(x)$  a  $h(x)$  sú totožné, potom aj funkcia  $g(x)$  je konvexná. Z toho vyplýva, že úloha (3.6) je ekvivalentná s:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \{x^\top \Sigma x - \hat{\mu}^\top x + \chi\sqrt{x^\top \Sigma x}\}. \quad (3.7)$$

Ekvivalentnosť úloh (3.6) a (3.7) je založená na rovnakom princípe ako ekvivalentnosť Markowitzovho a „Mean-Variance“ problému. Rovnaké závery ako v prípade vyššie spomenutých úloh s prípustnou množinou  $\mathcal{X}$  môžeme vyvodit' aj v prípade obdobných úloh s prípustnou množinou v tvare  $\mathcal{X}^+$ .

## 3.2 Úlohy s neznámym vektorom stredných hodnôt a variančnou maticou

Zamerajme sa na úlohy, v ktorých okrem vektora stredných hodnôt  $\mu$  nepoznáme ani presnú hodnotu parametra variančnej matice  $\Sigma$ , teda  $\theta = (\mu, \Sigma) \in \Theta_{(\mu, \Sigma)}$ . Opäť podľa voľby množiny  $\Theta_{(\mu, \Sigma)}$  dostávame rôzne tvary úloh.

### 3.2.1 Intervalový tvar množiny variančnej matice

Pri konštrukcii parametrickej množiny  $\Theta_{(\mu, \Sigma)}$  môžeme predpokladať, že  $\Theta_{(\mu, \Sigma)} = \Theta_\mu \times \Theta_\Sigma$ . Prirodzenou voľbou  $\Theta_\Sigma$ , podobne ako v prípade vektora stredných hodnôt, je intervalová množina. Nami zvolená intervalová množina bude v tvare:

$$\Theta_\Sigma = \{\Sigma : \underline{\Sigma} \preceq \Sigma \preceq \bar{\Sigma}\}^2,$$

kde  $\underline{\Sigma}, \bar{\Sigma}$  sú pozitívne semidefinitné matice. Potom optimalizačný problém môžeme vzhľadom k množine  $\Theta_\Sigma$  definovať ako:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \max_{\Sigma \in \Theta_\Sigma} x^\top \Sigma x : \min_{\mu \in \Sigma_\mu} \mu^\top x \geq \mu_0 \right\}. \quad (3.8)$$

---

<sup>2</sup> $A \preceq B$  označuje, že matica  $A - B$  je pozitívne semidefinitná

Kedže  $\Sigma \preceq \bar{\Sigma}$ , potom pre  $x \in \mathcal{X}$  platí:  $x^\top(\Sigma - \bar{\Sigma})x \geq 0$  a teda  $x^\top \bar{\Sigma}x \geq x^\top \Sigma x$ . Z toho vyplýva, že problém 3.8 môžeme preformulovať ako:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \bar{\Sigma}x : \min_{\mu \in \Sigma_\mu} \mu^\top x \geq \mu_0 \right\}. \quad (3.9)$$

V prípade, že zvolíme intervalový resp. elipsovité tvar množiny parametra  $\Theta_\mu$  dostávame úlohu:

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \bar{\Sigma}x : (\hat{\mu} - \delta)^\top |x| \geq \mu_0 \right\} \quad (3.10)$$

resp.

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ x^\top \bar{\Sigma}x : \hat{\mu}^\top x - \chi \sqrt{x^\top \Sigma x} \geq \mu_0 \right\}. \quad (3.11)$$

V prípade, kedy krátke predaje nie sú povolené má úloha 3.10 tvar:

$$\min_{x \in \mathcal{X}^+} \left\{ x^\top \bar{\Sigma}x : (\hat{\mu} - \delta)^\top x \geq \mu_0 \right\}. \quad (3.12)$$

### 3.3 Úlohy s neznámou hustotou

Úlohy optimalizácie portfólia môžeme robustifikovať nielen na základe neznámej strednej hodnoty alebo variančnej matice, ale taktiež na princípe predpokladu o neznámej hustote vektora výnosov.

V 2. kapitole sme sa venovali modelu optimalizácie portfólia založeného na rizikovej miere CVaR. Teraz sa zoznámime s jeho robustnou verziou. Najprv si definujeme rizikovú mieru RCVaR pre nejaké  $\beta \in (1/2, 1)$  a pre vektor výnosov  $\mathbf{r}$ , o ktorého rozdelení budeme predpokladať, že je spojitý s hustotou  $p(\cdot) \in \Theta_p$ , kde  $\Theta_p$  je známa množina.

$$\text{RCVaR}_\beta(x) = \max_{p(\cdot) \in \Theta_p} \text{CVaR}_\beta(x) \quad (3.13)$$

Predpokladajme, že hustoty z množiny  $\Theta_p$  sú závislé na konvexnej kombinácii známych hustôt  $p(\cdot)_1, \dots, p(\cdot)_L$  odpovedajúcich  $L$  scenárom nasledujúcim spôsobom:

$$\Theta_p = \left\{ \sum_{l=1}^L \lambda_l p(\cdot)_l : \sum_{l=1}^L \lambda_l = 1, \lambda_l \geq 0, l = 1, \dots, L \right\}.$$

Teda  $\Theta_p$  je konvexným obalom konečnej množiny hustôt. Ďalej označme ako:

$$\Lambda := \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^L : \sum_{l=1}^L \lambda_l = 1, \lambda_l \geq 0, l = 1, \dots, L \right\},$$

$$F_\beta^l(x, \alpha) := \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}} [-x^\top \mathbf{r} - \alpha]^+ p_l(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

pre  $l = 1, \dots, L$ . Potom úloha (3.13) má vzhľadom k uvažovanej množine  $\Theta_p^M$  tvar:

$$\begin{aligned} \text{RCVaR}_\beta(x) &= \max_{p(\cdot) \in \Theta_p} \text{CVaR}_\beta(x) = \max_{p(\cdot) \in \Theta_p} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha) = \\ &= \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \left\{ \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}} [-x^\top \mathbf{r} - \alpha]^+ \sum_{l=1}^L \lambda_l p(\cdot)_l(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right\} = \\ &= \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{l=1}^L \lambda_l F_\beta^l(x, \alpha) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \max_{l \in \mathcal{L}} F_\beta^l(x, \alpha). \end{aligned}$$

Posledná rovnosť vyplýva z faktu, že množina  $\Lambda$  je v takzvanom *standardnom tvare* Dupáčová a Lachout (2011), čo znamená, že ak existuje optimálne riešenie úlohy:

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \sum_{l=1}^L \lambda_l F_\beta^l(x, \alpha),$$

potom je jedným z krajných bodov množiny  $\Lambda$ . Pomocou rizikovej miery RCVaR a množiny zmiešaných hustôt  $\Theta_p$  môžeme definovať úlohu optimalizácie portfólia ako:

$$\min_{(x, \alpha) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \max_{l \in \mathcal{L}} \lambda_l F_\beta^l(x, \alpha).$$

Táto úloha je po pridaní pomocného parametra  $\eta$  ekvivalentná s:

$$\begin{aligned} &\min_{(x, \alpha, \eta) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \{ \eta : F_\beta^l(x, \alpha) \leq \eta, l = 1, \dots, L \} = \\ &= \min_{(x, \alpha, \eta) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left\{ \eta : \alpha + \frac{1}{1 - \beta} \int_{\mathbf{r} \in \mathbb{R}} [-x^\top \mathbf{r} - \alpha]^+ p_l(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \leq \eta, l = 1, \dots, L \right\}. \end{aligned}$$

Použitím aproximácie (2.16) funkcie  $F_\beta^l(x, \alpha)$  dostávame:

$$\min_{(x, \alpha, \eta) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left\{ \eta : \alpha + \frac{1}{(1 - \beta)T^l} \sum_{t=1}^{T^l} [-x^\top \mathbf{r}_l^t - \alpha]^+ \leq \eta, l = 1, \dots, L \right\}, \quad (3.14)$$

kde  $\mathbf{r}_l^1, \mathbf{r}_l^2, \dots, \mathbf{r}_l^{T^l}$  je náhodný výber s rozsahom  $T^l$  z rozdelenia s hustotou  $p(\cdot)_l$  pre  $l = 1, \dots, L$ . Využitím ďalšieho pomocného parametra  $u = (u^1, \dots, u^L) \in \mathbb{R}^z$ , kde

$z = T^1 + \dots + T^L$ , môžeme úlohu (3.14) pretransformovať na:

$$\min_{(x,\alpha,\eta,u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^z} \left\{ \eta : \alpha + \frac{1}{(1-\beta)T^l} \mathbf{1}_{T^l}^\top u^l \leq \eta, u_t^l \geq -x^\top \mathbf{r}_t^l - \alpha, u_t^l \geq 0, \right. \\ \left. t = 1, \dots, T^l, l = 1, \dots, L \right\},$$

kde  $u^l = (u_1^l, \dots, u_{T^l}^l)^\top$  pre  $l = 1, \dots, L$ . Keďže popísaný postup je nezávislý na tvare množiny  $\mathcal{X}$ , tak obdobné výsledky platia taktiež v prípade nezápornej prípustnej množiny  $\mathcal{X}^+$ .

### 3.4 Úlohy s neznámym diskretným rozdelením

V predchádzajúcich častiach sme sa venovali úlohám so spojitým rozdelením vektora výnosov  $\mathbf{r}$ . Teraz sa zameriame na diskretný prípad. Predpokladajme, že náhodný vektor  $\mathbf{r}$  môže nadobúdať hodnoty z konečnej množiny  $\{r^i : r^i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, S\}$  s pravdepodobnosťami  $P(r = r^i) = \pi_i$  pre  $i=1, \dots, S$ . Označme ako:

$$G_\beta(x, \alpha, \pi) := \alpha + \frac{1}{1-\beta} \sum_{k=1}^S \pi_k [-x^\top r^k - \alpha]^+ \quad a \quad \pi := (\pi_1, \dots, \pi_S).$$

Pre dané  $x \in \mathcal{X}$  a  $\pi$  môžeme definovať  $\text{CVaR}_\beta(x)$  a  $\text{RCVaR}_\beta(x)$  ako:

$$\text{CVaR}_\beta(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} G_\beta(x, \alpha, \pi),$$

$$\text{RCVaR}_\beta(x) = \max_{\pi \in \Theta_\pi} \text{CVaR}_\beta(x) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \max_{\pi \in \Theta_\pi} G_\beta(x, \alpha, \pi),$$

kde  $\Theta_\pi = \left\{ \pi : \sum_{i=1}^S \pi_i = 1, \pi_i \geq 0, i = 1, \dots, S \right\}$ . Základná úloha optimalizácie portfólia v diskretnom prípade vzhľadom k miere  $\text{RCVaR}$  má tvar:

$$\min_{(x,\alpha) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}} \left\{ \max_{\pi \in \Theta_\pi} G_\beta(x, \alpha, \pi) \right\}. \quad (3.15)$$

Obdobným spôsobom ako v prípade úloh so zmiešaným rozdelením môžeme úlohu (3.15) vyjadriť ekvivalentne ako:

$$\min_{(x,\alpha,\eta,u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s} \left\{ \eta : \max_{\pi \in \Theta_\pi} \left\{ \alpha + \frac{1}{1-\beta} \pi^\top u \right\} \leq \eta, \right. \\ \left. u_k \geq \max\{-x^\top r^k - \alpha, 0\}, k = 1, \dots, S \right\}. \quad (3.16)$$

Predpokladajme, že tvar množiny  $\Theta_\pi$  je pre nejaké  $\pi^0 \in \Theta_\pi$  určený nasledovne:

$$\Theta_\pi^B = \Theta_\pi = \left\{ \pi : \pi = \pi^0 + \delta, \mathbf{1}_s^\top \delta = 0, \underline{\delta} \leq \delta \leq \bar{\delta}, \pi^0 + \underline{\delta} \geq 0 \right\}. \quad (3.17)$$

Hodnotu  $\pi^0$  môžeme voliť ako najpravdepodobnejšiu možnú hodnotu  $\pi$  z  $\Theta_\pi$  alebo ako expertný odhad. Obmedzenie  $\mathbf{1}_s^\top \delta = 0$  implikuje  $\pi_1 + \dots + \pi_S = 1$ . Skúmame podmienku maximalizácie z úlohy (3.17) vzhľadom k novozavedenej množine  $\Theta_\pi^B$ .

$$\max_{\pi \in \Theta_\pi} \left\{ \alpha + \frac{1}{1-\beta} \pi^\top u \right\} = \alpha + \frac{1}{1-\beta} (\pi^0)^\top u + \frac{1}{1-\beta} \gamma^*(u),$$

kde:

$$\gamma^*(u) = \max_{\delta \in \mathbb{R}^s} \{ u^\top \delta : \mathbf{1}_s^\top \delta = 0, \underline{\delta} \leq \delta \leq \bar{\delta}, \delta \geq -\pi^0 \}. \quad (3.18)$$

Úloha (3.18) je úlohou lineárneho programovania, teda k nej jednoznačne prislúcha duálna úloha v tvare:

$$\min_{(z, \xi, \omega, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s} \{ \bar{\delta}^\top \xi + \underline{\delta}^\top \omega - \pi_0^\top \nu : \mathbf{1}_s z + \xi + \omega + \nu = u, \xi \geq 0, \omega \leq 0, \nu \leq 0 \}. \quad (3.19)$$

Podľa silnej vety o dualite Dupačová a Lachout (2011) platí, že úloha (3.18) má riešenie práve vtedy, keď úloha (3.19) má riešenie a optimálne hodnoty oboch úloh sa rovnajú. Označme hodnotu optimálneho riešenia úlohy (3.19) ako  $\varphi^*(u)$ , potom úloha (3.16) je ekvivalentná s:

$$\min_{(x, \alpha, \eta, u) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s} \left\{ \eta : \alpha + \frac{1}{1-\beta} (\pi^0)^\top u + \frac{1}{1-\beta} \varphi^*(u) \leq \eta, \right. \\ \left. u_k \geq -x^\top r^k - \alpha, u_k \geq 0, k = 1, \dots, S \right\}. \quad (3.20)$$

Pomocou duálnej úlohy (3.19) môžeme problém (3.20) pretransformovať do nasledujúceho konečného tvaru, v ktorom minimalizujeme  $(x, u, z, \alpha, \eta, \xi, \omega, \nu)$  cez množinu  $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ :

$$\min \left\{ \eta : \alpha + \frac{1}{1-\beta} (\pi^0)^\top u + \frac{1}{1-\beta} (\bar{\delta}^\top \xi + \underline{\delta}^\top \omega - \pi_0^\top \nu) \leq \eta, \mathbf{1}_s z + \xi + \omega + \nu = u, \right. \\ \left. u_k \geq -x^\top r^k - \alpha, u_k \geq 0, \xi \geq 0, \omega \leq 0, \nu \leq 0, k = 1, \dots, S \right\}. \quad (3.21)$$

Platí, že  $x^*$  je optimálnym riešením úlohy (3.15) práve vtedy, keď je optimálnym riešením úlohy (3.21).

### 3.5 Odhad parametrov

V prípade intervalového resp. eliptického tvaru množiny  $\Theta_\mu$  sme sa snažili popísať spôsobom, ako vhodne voliť pomocné parametre  $\delta$  resp.  $\chi^2$  priamo v príslušných

kapitolách. Taktiež aj v modeloch s rizikovými mierami RVaR a RCVaR je voľba parametrov viacmenej zrejmä. Jedine v prípade, kedy vektor stredných hodnôt patrí do eliptickej množiny a variančná matica do intervalovej množiny, spôsob ako vhodne voliť parametre  $\chi^2$ ,  $\underline{\Sigma}$ ,  $\bar{\Sigma}$  a  $\hat{\mu}$  ostal nejasný.

Riešenie spomenutého problému môžeme založiť na nasledujúcom tvrdení z práce Delage a Ye (2010).

**Veta 4.** *Nech  $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots, \mathbf{r}^T$  je náhodný výber z rozdelenia so strednou hodnotou  $\mu$  a variančnou maticou  $\Sigma$ . Predpokladajme, že nosič tohoto rozdelenia  $\mathcal{S}_r$  je známy a označme ako:*

$$\hat{R} := \sup_{\mathbf{r} \in \mathcal{S}_r} \|\hat{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{r} - \hat{\mu})\|_2,$$

$$\tilde{\Theta}_{\mu, \Sigma} := \left\{ (\mu, \Sigma) : (\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \chi^2, \frac{1}{1+q} \hat{\Sigma} \preceq \Sigma \preceq \frac{1}{1-q-\chi^2} \hat{\Sigma} \right\},$$

kde:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{r}^i, \quad \hat{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T (\mathbf{r}^i - \hat{\mu})^\top (\mathbf{r}^i - \hat{\mu}),$$

sú vektor výberového priemeru a výberová rozptylová matica. Ďalej položíme pre nejaké  $\beta \in (0,1)$ :

$$\bar{\beta} = 1 - \sqrt{1 - \beta},$$

$$\bar{R} = \hat{R} \left( 1 - (\hat{R}^2 + 2) \frac{2 + \sqrt{2 \ln(4/\bar{\beta})}}{\sqrt{T}} \right)^{-1/2},$$

$$\chi^2 = (\bar{R}^2/T) \left( 2 + \sqrt{2 \ln(2/\bar{\beta})} \right)^2,$$

$$q = \left( \bar{R}^2/\sqrt{T} \right) \left( \sqrt{1 - n/\bar{R}^4} + \sqrt{\ln(4/\bar{\beta})} \right).$$

Potom ak platí:

$$T > \max \left\{ \left( \hat{R}^2 + 2 \right)^2 \left( 2 + \sqrt{2 \ln(4/\bar{\beta})} \right)^2, \frac{(8 + \sqrt{32 \ln(4/\bar{\beta})})^2}{(\sqrt{\hat{R}^4 - \hat{R}})^4} \right\},$$

tak

$$P \left( (\mu, \Sigma) \in \tilde{\Theta}_{\mu, \Sigma} \right) \leq 1 - \beta.$$

Z vety 4 vyplýva, že ak budeme voliť  $\chi^2$  a  $\hat{\mu}$  uvedeným spôsobom a  $\underline{\Sigma}$ ,  $\bar{\Sigma}$  položíme rovné:

$$\underline{\Sigma} = \frac{1}{1+q} \hat{\Sigma}, \quad \bar{\Sigma} = \frac{1}{1-q-\chi^2} \hat{\Sigma}, \quad (3.22)$$

potom pravdepodobnosť, že  $(\mu - \hat{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \chi^2$  a súčasne  $\hat{\Sigma} \preceq \Sigma \preceq \bar{\Sigma}$  je väčšia alebo rovná  $1 - \beta$ .



# Kapitola 4

## Simulačná štúdia

V tejto kapitole sa pokúsime preskúmať vplyvu nepresnosti odhadu parametrov strednej hodnoty a variančnej matice v úlohe Markowitzovho modelu na základe simulačného prístupu. Postup, ktorý použijeme bude inšpirovaný prácou Chopra a Ziemba (1993), ktorú obohatíme o zohľadnenie rôznych hodnôt parametra averzie k riziku. Taktiež budeme uvažovať rôzne spôsoby modelovania chyby odhadu.

Pripomeňme si, že úloha Markowitzovho modelu optimalizácie portfólia, kedy krátke predaje nie sú povolené, je definovaná ako:

$$\max_{x \in \mathcal{X}^+} \{\mu^\top x - \lambda x^\top \Sigma x\}, \quad (4.1)$$

kde  $\lambda > 0$  je parameter symbolizujúci averziu investora k riziku. Je zrejmé, že účelová funkcia úlohy (4.1), ktorú budeme označovať ako:

$$Y(x) = x^\top \mu - \lambda x^\top \Sigma x,$$

je závislá na parametroch  $\mu$ ,  $\Sigma$  a  $\lambda$ . Vplyv nepresnosti odhadu strednej hodnoty a variančnej matice pri zvolenej hodnote parametra rizikovej averzie na celkové riešenie budeme porovnávať na základe hodnoty funkcie CEL (cash equivalent loss), ktorú definujeme ako:

$$\text{CEL} = \left| \frac{Y(o) - Y(d)}{Y(o)} \right|,$$

kde bod  $o \in \mathbb{R}^n$  je bodom optimálneho riešenia úlohy (4.1) s východiskovými hodnotami parametrov  $\mu$  a  $\Sigma$  a bod  $d \in \mathbb{R}^n$  je bodom optimálneho riešenia úlohy (4.1) s parametrami  $\mu$  a  $\Sigma$ , z ktorých jeden je zaťažený chybou. Prípady, kedy týmto parametrom je variančná matica, rozdelíme na dve podkategórie: na maticu, v ktorej sú zaťažené chybou iba odhady jednotlivých kovariancií a prípad kedy sú zaťažené chybou iba odhady rozptylov.

## 4.1 Modelovanie chyby odhadu

Dôležitou časťou simulačnej štúdie je princíp generovania parametrov zaťažených chybou. Budeme sa zaoberať dvoma rôznymi prístupmi, a to prístupom použitým v práci Chopra a Ziemba (1993) a prístupom Kaut a kol. (2007). Nech  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  je viacrozmerný náhodný výber z nejakého rozdelenia. Označme  $\beta$  ľubovoľnú zložku strednej hodnoty alebo variančnej matice tohoto rozdelenia a  $\hat{\beta}$  resp.  $\bar{\beta}$  ako východiskový odhad  $\beta$  resp. odhad zaťažený chybou konštruovaný na základe výberu  $\mathbf{X}$ .

Modelovanie chyby použité v práci Chopra a Ziemba (1993) je založené na nasledujúcom vzťahu medzi  $\bar{\beta}$  a  $\hat{\beta}$ :

$$\bar{\beta} = \hat{\beta} \left( 1 + \varepsilon \frac{\delta}{100} \right), \quad (4.2)$$

kde  $\varepsilon$  je hodnota vygenerovaná z normovaného normálneho rozdelenia a  $\delta$  parameter veľkosti chyby odhadu. Východisková hodnota parametra  $\beta$  je volená na základe vhodnej štatistiky, z čoho vyplýva obmedzenie takto zvoleného prístupu, ktorý nereflektuje variabilitu použitej štatistiky. V špeciálnom prípade, keď východisková hodnota je nulová, je odhad zaťažený chybou taktiež nulový.

Preto vyššie popísaný prístup obohatíme o metódu navrhovanú v práci Kaut a kol. (2007). Jej základom je využitie tzv. „pohyblivých okienok“, ktoré konštruujeme ako výber z náhodného výberu  $\mathbf{X}$ . Konkrétne ak  $\mathbf{X}_j$  symbolizuje  $j$ -te okienko, potom  $\mathbf{X}^j := (X_j, \dots, X_{j+m-1})^\top$  pre  $j = 1, \dots, J$ ,  $m \doteq n/2$  a  $J = n - m + 1$ . Použitím „pohyblivých okienok“ modelujeme odhad zaťažený chybou ako:

$$\bar{\beta} = \hat{\beta} + \varepsilon \frac{\delta}{100} \Delta, \quad \Delta = \max_{j=1, \dots, J} \hat{\beta}_j - \min_{j=1, \dots, J} \hat{\beta}_j, \quad (4.3)$$

kde  $\hat{\beta}_j$  sú odhady parametra  $\beta$  založené na  $\mathbf{X}_j$  pre  $j = 1, \dots, J$ ,  $\varepsilon$  je hodnota vygenerovaná z normálneho normovaného rozdelenia a  $\delta$  parameter veľkosti chyby odhadu. Takto definovaný *alternatívny* prístup (4.3) netrpí nedostatkami *klasického* prístupu (4.2). Aplikovaním jedného z popísaných postupov na:

- zložky vektora  $\hat{\mu}$  dostávame odhad strednej hodnoty  $\bar{\mu}$  zaťažený chybou,
- mimodiagonálne prvky matice  $\hat{\Sigma}$  dostávame odhad variančnej matice  $\bar{\Sigma}_{cov}$  s odhadmi kovariancií zaťaženými chybou,
- diagonálne prvky matice  $\hat{\Sigma}$  dostávame odhad variančnej matice  $\bar{\Sigma}_{var}$  s odhadmi rozptylov zaťaženými chybou.

## 4.2 Dáta

Z predchádzajúcej podkapitoly vyplýva, že základom modelovania odhadov parametrov zaťažených chybou je ich východiskový odhad. V simulácii budeme pracovať s dvoma rôznymi hodnotami východiskových odhadov.

V prvom prípade budú ich hodnoty prebraté z práce Chopra a Ziemba (1993), ktorá sa zaoberá dátovým súborom obsahujúcim mesačné výnosy desiatich náhodne vybraných akciových titulov *Dow Jones Industrial Average* indexu v období od 1.1.1980 do 1.12.1989. Konkrétne ide o nasledujúce tituly:

**AA** - *Aluminum Company of America*,  
**AXP** - *American Express Company*,  
**BA** - *The Boeing Company*,  
**CVX** - *Chevron Corporation*,  
**KO** - *Coca-Cola Company*,  
**DD** - *E. I. du Pont de Nemours and Company*,  
**3M** - *Minnesota Mining and Manufacturing*,  
**PG** - *Procter and Gamble Company*,  
**SR** - *Sears Roebuck and Company*,  
**UTX** - *United Technologies Corporation*.

Na základe uvedených dát bola v Chopra a Ziemba (1993) určená hodnota  $\hat{\mu}$  ako vektor výberového priemeru a  $\hat{\Sigma}$  ako výberová kovariančná matica<sup>1</sup>. Musíme poznamenať, že v Chopra a Ziemba (1993) sú uvedené iba hodnoty  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\Sigma}$  bez zdrojových dát, čoho dôsledkom je, že pri modelovaní chyby sa musíme obmedziť iba na klasický spôsob (4.2).

Táto skutočnosť nás motivovala k použitiu druhej skupiny dát<sup>2</sup>, ktorá obsahuje rovnaké akciové tituly z rovnakého časového obdobia ako v prvom prípade, až na titul *Sears Roebuck and Company*, ktorý je nahradený titulom *The Goodyear Tire & Rubber Company* - GT. Dôvodom takéhoto postupu je zánik spoločnosti *Sears Roebuck and Company*, čo spôsobuje obmedzenia pri získavaní informácií o historických výnosoch spoločnosti. Na základe údajov o mesačných výnosoch<sup>3</sup> uvedených titulov sme určili odhady  $\hat{\mu}$  a  $\hat{\Sigma}$ , ktoré sú veľmi podobné odhadom z Chopra a Ziemba (1993) (až na prvky prislúchajúce titulu GT).

---

<sup>1</sup>konkrétne hodnoty sú uvedené v prílohe v tabuľke 5.1 a tabuľke 5.3

<sup>2</sup>konkrétne hodnoty sú uvedené v prílohe v tabuľke 5.2 a tabuľke 5.4

<sup>3</sup>určené na základe mesačných uzavieracích cien, ktoré boli očistené o dividendy, získané z [www.finance.yahoo.com](http://www.finance.yahoo.com)

### 4.3 Postup a výsledky

Priebeh modelovania môžeme rozdeliť do dvoch častí. V prvej časti sa zameriame na replikovanie štúdie Chopra a Ziemba (1993), ktorú obohatíme o skúmanie vplyvu parametra averzie investora k riziku  $\lambda$ . Budeme skúmať:

- dopad chyby pri odhade strednej hodnoty  $\mu$ ,
- dopad chyby pri odhade kovariancií  $\sigma_{i,j}$  pre  $i \neq j, i, j = 1, \dots, 10$ ,
- dopad chyby pri odhade rozptylov  $\sigma_i^2$   $i = 1, \dots, 10$ .

Skúmanie dopadu vybraného parametra bude prebiehať tak, že na základe náhodne vygenerovanej veličiny  $\varepsilon$  zo vzťahu (4.2) určíme jeho odhad zaťažený chybou. Pri generovaní použijeme rôzne hodnoty parametra  $\delta \in \{0,05; 0,10; 0,15; 0,20\}$ , čím zohľadníme rôznu závažnosť chyby odhadu. Pomocou odhadu zaťaženého chybou zrátame hodnotu výrazu CEL<sup>4</sup>, pričom hodnoty ostatných parametrov volíme ako východiskové (nezaťažené chybou). Tento postup iterujeme 100-krát pre rôzne  $\lambda$ , čím dostávame sto (rôznych) hodnôt CEL, z ktorých určíme priemernú hodnotu. Hodnoty parametra  $\lambda$  volíme z množiny  $\{0,02; 0,2; 1; 2\}$ , kde hodnota 0,02 odpovedá hodnote použitej v práci Chopra a Ziemba (1993).

Druhá časť štúdie bude prebiehať veľmi podobným spôsobom ako prvá. Rozdiel bude iba v použití druhej skupiny dát, čo nám umožní modelovanie chyby oboma spomenutými spôsobmi (4.2) a (4.3).

---

<sup>4</sup> Pri určovaní hodnoty CEL sa môžeme stretnúť s problémom, že riešenie minimalizačnej úlohy (4.1) existuje, avšak použitý algoritmus ho nie je schopný nájsť pre nejakú vygenerovanú hodnotu  $\bar{\Sigma}$ . Toto zlyhanie je dôsledkom silnej neregularity matice  $\Sigma$ . V takom prípade generujeme nové hodnoty  $\bar{\Sigma}$  až pokiaľ použitý algoritmus nájde riešenie .

### 4.3.1 Výsledky pre klasický model chyby

V Tabuľke 4.1 vidíme získané hodnoty parametrov  $CEL_{\bar{\mu}}$ ,  $CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$  a  $CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$  získané zo stonásobného klasického modelovania chyby pri odhade stredných hodnôt, rozptylov a kovariancií, pre rôzne averzie k riziku  $\lambda$  a veľkosti chyby  $k$ . Východiskové hodnoty parametrov použité pri modelovaní chyby boli prebraté z práce Chopra a Ziemba (1993).

	$\lambda=0,02$	$\lambda=0,2$	$\lambda=1$	$\lambda=2$
k=0,05				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$5,41 \cdot 10^{-3}$	$8,50 \cdot 10^{-4}$	$2,21 \cdot 10^{-5}$	$5,43 \cdot 10^{-6}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$6,75 \cdot 10^{-4}$	$3,75 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^{-3}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$	$1,73 \cdot 10^{-3}$	$9,74 \cdot 10^{-4}$	$9,26 \cdot 10^{-4}$
k=0,10				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$2,37 \cdot 10^{-2}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$	$8,53 \cdot 10^{-5}$	$2,10 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$2,57 \cdot 10^{-3}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$9,70 \cdot 10^{-4}$	$8,53 \cdot 10^{-3}$	$4,92 \cdot 10^{-3}$	$4,64 \cdot 10^{-3}$
k=0,15				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$5,25 \cdot 10^{-2}$	$7,54 \cdot 10^{-3}$	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$4,62 \cdot 10^{-4}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$5,55 \cdot 10^{-3}$	$4,70 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^{-2}$	$2,70 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$2,70 \cdot 10^{-3}$	$2,16 \cdot 10^{-2}$	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$
k=0,20				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$8,46 \cdot 10^{-2}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$3,34 \cdot 10^{-4}$	$8,09 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$9,71 \cdot 10^{-3}$	$8,74 \cdot 10^{-2}$	$5,72 \cdot 10^{-2}$	$5,51 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$4,21 \cdot 10^{-3}$	$2,71 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-2}$

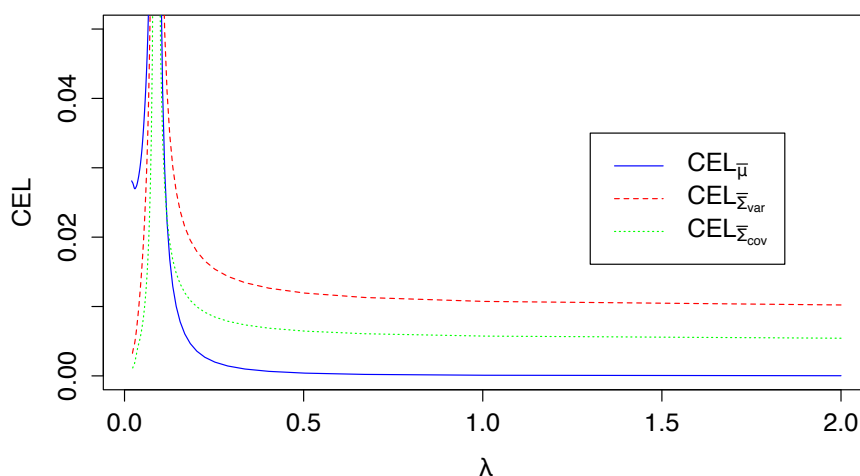
Tabuľka 4.1: Priemerné hodnoty CEL, klasický model chyby, pôvodné dáta.

Zo získaných výsledkov je zrejmé, že veľkosť dopadu chyby pri odhade skúmaných parametrov je závislá na hodnote parametra  $\lambda$ . Taktiež závažnosť chyby odhadu  $k$  ovplyvňuje výslednú priemernú hodnotu CEL, avšak pomer medzi CEL jednotlivých parametrov pre danú hodnotu  $\lambda$  je rádovo rovnaký.

Pre silne rizikového investora ( $\lambda=0,02$ ) je najdôležitejší, čo do presnosti, odhad strednej hodnoty výnosov zložiek portfólia, približne desaťkrát menej dôležitý je odhad rozptylov výnosov a približne dvadsaťkrát menej dôležitý je odhad kovariancií. Toto odporúčanie sa zhoduje s odporúčaním Chopra a Ziemba (1993).

Odlišná situácia nastáva v prípade stredne rizikového, vyváženého a konzervatívneho investora ( $\lambda=0,2$ ;  $\lambda=1$  a  $\lambda=2$ ), pre ktorého je najdôležitejší presný odhad rozptylov a dvakrát menej odhad kovariancií výnosov zložiek portfólia. Odhad parametra strednej hodnoty je pre stredne rizikového, vyváženého a konzervatívneho investora približne päťkrát, stopäťdesiatkrát a päťstokrát menej dôležitý ako odhad rozptylov.

Presnejšiu predstavu o vplyve parametra averzie  $\lambda$  si môžeme urobiť taktiež na základe grafu z Obr. 4.1, ktorý zobrazuje priemerné hodnoty  $CEL$  pre jednotlivé skúmané parametre s 10% mierou chyby odhadu ( $k=0,1$ ) v závislosti na  $\lambda$ .



Obr. 4.1: Graf závislosti  $CEL$  na averzii k riziku pre  $k=0,1$ , klasický model chyby.

Z grafu vidíme, že k zmene poradia významnosti parametrov dochádza približne pre  $\lambda=0,1$ . Od hodnoty  $\lambda=0,5$  je hodnota  $CEL$  viacmenej konštantá.

### 4.3.2 Výsledky pre alternatívny model chyby

Ako už bolo spomenuté v druhej časti štúdie, využijeme oba dostupné spôsoby modelovania chyby na nami získaných východiskových parametroch. V Tabuľke 4.2 vidíme priemerné hodnoty parametrov  $CEL_{\bar{\mu}}$ ,  $CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$  a  $CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$  získané zo stonásobného klasického modelovania chyby pri odhade strednej hodnoty, rozptylov a kovariancií, pre rôzne averzie k riziku  $\lambda$  a veľkosti chyby  $k$ .

Získané hodnoty sa rádovo vôbec nelíšia od hodnôt (pozri Tabuľka 4.1) z prvej časti simulácie z čoho vyplýva, že nami odhadnuté hodnoty východiskových parametrov majú rovnaký vplyv na výsledok simulácie ako východiskové parametre použité v práci Chopra a Ziemba (1993). Jedným z dôsledkov tohoto zistenia je, že môžeme porovnávať výsledky z prvej časti, v ktorej používame klasické modelovanie chyby s výsledkami alternatívneho modelovania chyby, ktoré sú zobrazené v Tabuľke 4.3.

	$\lambda=0,02$	$\lambda=0,2$	$\lambda=1$	$\lambda=2$
k=0,05				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$6,40 \cdot 10^{-3}$	$9,18 \cdot 10^{-4}$	$2,18 \cdot 10^{-5}$	$5,27 \cdot 10^{-6}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$8,04 \cdot 10^{-4}$	$3,74 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^{-3}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$2,52 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	$9,43 \cdot 10^{-4}$
k=0,10				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$2,51 \cdot 10^{-2}$	$3,49 \cdot 10^{-3}$	$8,40 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$3,32 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-2}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$	$1,07 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$9,10 \cdot 10^{-3}$	5,01E-03	$4,69 \cdot 10^{-3}$
k=0,15				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$5,36 \cdot 10^{-2}$	$7,74 \cdot 10^{-3}$	$1,85 \cdot 10^{-4}$	$4,52 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$6,97 \cdot 10^{-3}$	$4,67 \cdot 10^{-2}$	$2,84 \cdot 10^{-2}$	$2,70 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$4,34 \cdot 10^{-3}$	$2,22 \cdot 10^{-2}$	$1,28 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$
k=0,20				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$8,62 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$3,30 \cdot 10^{-4}$	$7,93 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$9,93 \cdot 10^{-3}$	$8,65 \cdot 10^{-2}$	$5,71 \cdot 10^{-2}$	$5,50 \cdot 10^{-2}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$6,74 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-2}$

Tabuľka 4.2: Priemerné hodnoty CEL, klasický model chyby, nové dáta.

Z Tabuľky 4.2 vyplývajú rovnaké doporučenia pre odhad skúmaných parametrov ako z Tabuľky 4.1, ktoré boli diskutované v predchádzajúcej časti štúdie.

Zamerajme sa na Tabuľku 4.3, v ktorej sú zobrazené priemerné hodnoty parametrov  $CEL_{\bar{\mu}}$ ,  $CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$  a  $CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$  získané zo stonásobného alternatívneho modelovania chyby. Opätovne bol skúmaný vplyv parametra averzie k riziku  $\lambda$  a veľkosti chyby  $k$ .

	$\lambda=0,02$	$\lambda=0,2$	$\lambda=1$	$\lambda=2$
k=0,05				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$5.13 \cdot 10^{-3}$	$6.55 \cdot 10^{-4}$	1.52E-05	3.28E-06
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$6.56 \cdot 10^{-5}$	$5.74 \cdot 10^{-4}$	$3.99 \cdot 10^{-4}$	$3.86 \cdot 10^{-4}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$2.42 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$	$1.21 \cdot 10^{-3}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$
k=0,10				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$1.91 \cdot 10^{-2}$	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$6.40 \cdot 10^{-5}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-3}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$1.02 \cdot 10^{-2}$	$5.29 \cdot 10^{-3}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$
k=0,15				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$4.03 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$5.96 \cdot 10^{-4}$	$5.59 \cdot 10^{-3}$	$3.96 \cdot 10^{-3}$	$3.84 \cdot 10^{-3}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$2.75 \cdot 10^{-3}$	$2.02 \cdot 10^{-2}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$
k=0,20				
$CEL_{\bar{\mu}}$	$6.73 \cdot 10^{-2}$	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$2.61 \cdot 10^{-4}$	$6.04 \cdot 10^{-5}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{var}}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$1.12 \cdot 10^{-2}$	$8.03 \cdot 10^{-3}$	$7.80 \cdot 10^{-3}$
$CEL_{\bar{\Sigma}_{cov}}$	$4.79 \cdot 10^{-3}$	$2.99 \cdot 10^{-2}$	$1.84 \cdot 10^{-2}$	$1.74 \cdot 10^{-2}$

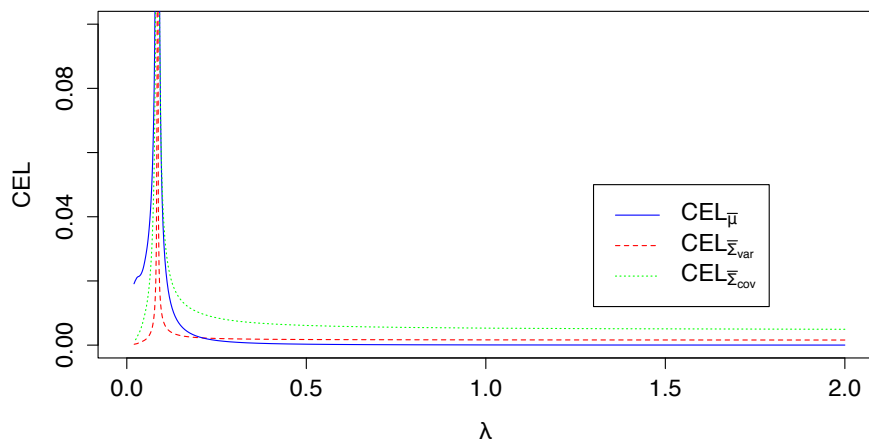
Tabuľka 4.3: Priemerné hodnoty CEL, alternatívny model chyby.

Ako vidíme, tak aj pri použití alternatívneho spôsobu modelovania chyby je vplyv parametra averzie  $\lambda$  na výsledky zřejmý, o čom sa môžeme taktiež presvedčiť pomocou grafu zobrazenom na Obr. 4.2.

V prípade silne rizikového investora ( $\lambda=0,02$ ) by mal byť kladený dôraz na čo najlepšie odhadnutie parametra strednej hodnoty výnosov. Ten má približne pätnásobne väčší vplyv na hodnotu CEL ako odhad rozptylu a pätnásťnásobne väčší vplyv ako odhad kovariancie výnosov zložiek portfólia.

Stredne rizikový, vyvážený a konzervatívny investor, by sa mal zamerať na odhad parametrov kovariancie. Tie majú asi dvojnásobne väčší dopad na CEL ako odhad rozptylov a pätnásobne, stonásobne a päťstonásobne väčší dopad ako odhad strednej hodnoty výnosov zložiek portfólia.





Obr. 4.2: Graf závislosti CEL na averzii k riziku pre  $k=0,1$ , alternatívny model chyby.

Pri porovnaní výsledkov klasického modelu chyby s výsledkami alternatívneho modelu zistíme, že prístup založený na klasickom modelovaní kladie dôraz na presnosť odhadu parametrov kovariancie narozdiel od prístupu založenom na alternatívnom modelovaní chyby, ktorý preferuje odhad rozptylov výnosov zložiek portfólia. Tento rozdiel, ako bolo uvedené v podkapitole o modelovaní chyby odhadu, je spôsobený zohľadnením variability pri alternatívnom modelovaní.

Celkový záver vyplývajúci zo simulačnej štúdie sa dá zhrnúť nasledujúcim spôsobom. Odhad vektora stredných hodnôt odporučený prácou Chopra a Ziemba (1993) je najdôležitejší iba v špeciálnom prípade vysoko rizikového investora. V ostatných prípadoch, kedy uvažujeme model pre stredne rizikového, vyváženého a konzervatívneho investora, je podľa spôsobu modelovania chyby najdôležitejší čo do presnosti odhadu, odhad kovariancií resp. odhad rozptylov výnosov zložiek portfólia.

# Kapitola 5

## Záver

V našej práci sme sa zaoberali úlohami optimalizácie Markowitzovho portfólia. Poukázali sme na vzájomnú súvislosť Markowitzovho modelu s modelmi založenými na rizikových mierach VaR a CvaR ako aj so všeobecným modelom. V rámci teoretickej časti sme sa taktiež venovali vplyvu neúplnej informácie o parametri vektora stredných hodnôt a variančnej matice výnosov na riešenie úlohy. Neúplnosť sme reprezentovali parametrickými množinami, akými sú elipsovité alebo intervalová množina alebo, vo všeobecnejšom prípade, vhodnou množinou hustôt resp. množinou pravdepodobností. Okrem klasického tvaru optimalizačných úloh sme preskúmali aj úlohy, v ktorých krátke predaje nie sú povolené. Dospeli sme k záveru, že v nami študovaných prípadoch toto obmedzenie nemá veľký dopad na robustifikáciu úloh.

Za najväčší príspevok našej práce považujeme obsah štvrtej kapitoly, ktorá sa venuje skúmaniu významnosti odhadu stredných hodnôt, rozptylov a kovariancií výnosov jednotlivých zložiek portfólia v závislosti na miere averzie k riziku a spôsobu modelovania chyby. Z dosiahnutých výsledkov vyplýva, že často zaužívaný názor o dôležitosti odhadu vektora stredných hodnôt je platný iba v prípade silne rizikového investora. V ostatných prípadoch by mal byť kladený dôraz hlavne na odhad kovariancií, ktorý sa ukazuje byť najvýznamnejší v prípade alternatívneho prístupu k modelovaniu chyby. Ten je pri konečnom výbere preferovaný pred klasickým spôsobom, keďže lepšie odzrkadľuje charakter dát použitých pri modelovaní.

# Prílohy

## Príloha A - použité dáta

	AA	AXP	BA	CVX	KO	DD	3M	PG	SR	UTX
AA	78.0	27.3	30.7	12.2	12.1	31.2	26.7	10.8	23.1	37.0
AXP	27.3	71.5	45.7	15.8	25.3	33.9	27.4	22.7	44.1	40.7
BA	30.7	45.7	100.8	19.2	25.8	28.0	26.2	21.9	39.2	54.2
CVX	12.2	15.8	19.2	74.3	2.9	21.4	11.7	11.1	11.9	27.0
KO	12.1	25.3	25.8	2.9	35.9	14.9	16.8	20.1	21.0	21.5
DD	31.2	33.9	28.0	21.4	14.9	47.3	24.7	19.4	32.0	31.9
3M	26.7	27.4	26.2	11.7	16.8	24.7	33.8	19.8	26.4	28.8
PG	10.8	22.7	21.9	11.1	20.1	19.4	19.8	31.8	22.6	22.1
SR	23.1	44.1	39.2	11.9	21.0	32.0	26.4	22.6	64.1	39.7
UTX	37.0	40.7	54.2	27.0	21.5	31.9	28.8	22.1	39.7	67.4

Tabuľka 5.1: Výberová kovariančná matica, pôvodné dáta.

	AA	AXP	BA	CVX	KO	DD	3M	PG	GT	UTX
AA	78.5	27.7	31.3	11.6	11.8	31.6	26.8	11.0	38.8	37.2
AXP	27.7	72.3	46.9	15.4	24.4	34.1	27.5	23.0	35.7	40.8
BA	31.3	46.9	102.7	18.8	25.5	28.5	26.7	22.1	30.1	54.5
CVX	11.6	15.4	18.8	73.6	3.3	21.4	11.3	11.2	10.3	27.3
KO	11.8	24.4	25.5	3.3	36.6	14.5	16.2	20.6	16.3	20.8
DD	31.6	34.1	28.5	21.4	14.5	47.7	24.9	19.3	30.6	32.1
3M	26.8	27.5	26.7	11.3	16.2	24.9	33.9	19.8	29.4	29.0
PG	11.0	23.0	22.1	11.2	20.6	19.3	19.8	31.4	16.2	21.9
GT	38.8	35.7	30.1	10.3	16.3	30.6	29.4	16.2	81.8	35.8
UTX	37.2	40.8	54.5	27.3	20.8	32.1	29.0	21.9	35.8	67.9

Tabuľka 5.2: Výberová kovariančná matica, nové dáta.

	AA	AXP	BA	CVX	KO	DD	3M	PG	SR	UTX
$\bar{X}$	1.56	1.95	1.91	1.58	2.16	1.60	1.49	1.62	1.41	1.45

Tabuľka 5.3: Výberový vektor stred. hodnôt, pôvodné dáta.

	AA	AXP	BA	CVX	KO	DD	3M	PG	GT	UTX
$\bar{X}$	1.56	1.93	1.90	1.36	2.17	1.60	1.48	1.56	1.91	1.45

Tabuľka 5.4: Výberový vektor stred. hodnôt, nové dáta.

## Príloha B - obsah priloženého CD

CD priložené k práci obsahuje:

- Diplomovú prácu vo formáte *pdf*.
- Použité dáta vo formáte *xls* a *csv*.
- Zdrojové kódy programu R použité pri simulácii.

# Literatúra

- BERNOULLI, D. (1738). *Specimen theoriae novae de mensura sortis*. Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae.
- CHOPRA, V. K. a ZIEMBA, W. T. (1993). The effect of errors in means, variances and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, **19**(2), 6–11.
- DELAGE, E. a YE, Y. (2010). Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research*, **58**(3), 395–612.
- DUPAČOVÁ, J. a LACHOUT, P. (2011). *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress. ISBN 978-80-7378-176-7.
- DUPAČOVÁ, J., HURT, J. a ŠTEPÁN, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, volume 75. Kluwer Academic Publishers. ISBN 1-4020-0840-6.
- FABOZZI, F. J., HUANG, D. a ZHOU, G. (2010). Robust portfolios: contributions from operations research and finance. *Annals of Operations Research*, **176**, 191–220.
- HAMALA, M. (1972). *Nelineárne programovanie*. ALFA, 1 edition.
- KAUT, M., VLADIMIROU, H., WALLACE, S. W. a ZENIOS, S. A. (2007). Stability analysis of portfolio management with conditional value-at-risk. *Quantitative Finance*, **7**, 397–409.
- MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, **7**(1), 77–91.
- ROCKAFELLAR, R. T. a URYASEV, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, **2**, 21–41.
- ZIEMBA, W. T. (2003). *The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability, and Wealth Management*. Research Foundation of CFA Institute. ISBN 0-943205-65-4.

# Zoznam obrázkov

4.1	Graf závislosti $CEL$ na averzii k riziku pre $k=0,1$ , klasický model chyby. . . . .	25
4.2	Graf závislosti $CEL$ na averzii k riziku pre $k=0,1$ , alternatívny model chyby. . . . .	28

# Zoznam tabuliek

4.1	Priemerné hodnoty CEL, klasický model chyby, pôvodné dáta. . .	24
4.2	Priemerné hodnoty CEL, klasický model chyby, nové dáta. . . . .	26
4.3	Priemerné hodnoty CEL, alternatívny model chyby. . . . .	27
5.1	Výberová kovariančná matica, pôvodné dáta. . . . .	30
5.2	Výberová kovariančná matica, nové dáta. . . . .	30
5.3	Výberový vektor stred. hodnôt, pôvodné dáta. . . . .	31
5.4	Výberový vektor stred. hodnôt, nové dáta. . . . .	31