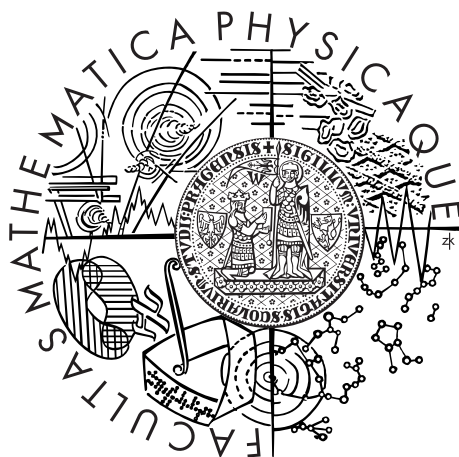


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Rico Gattermann

Nadsvětelný pohyb v obecné relativitě

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2013

Rád bych poděkoval vedoucímu své bakalářské práce, Mgr. Tomáši Ledvinkovi, Ph.D., za pomocné rady a nápady, jakož i za čas, který mi věnoval. Dík patří také mojí rodině za podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 01.08.2013

Název práce: Nadsvětelný pohyb v obecné relativitě

Autor: Rico Gattermann

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Ústav teoretické fyziky

Abstrakt: Ukážeme, jak lze dosáhnout nadsvětelného cestování prostřednictvím Alcubierrovy warpové metriky. V tomto prostoročase je kosmická loď, která je lokálně v klidu, obklopena „bublinou“ pohybující se nadsvětelnou rychlostí. Odvodíme pohybové rovnice pro fotony a hmotné částice a ilustrujeme vlastnosti jejich řešení. Uvidíme, že warpové metriky způsobují frekvenční posuv a lom světla, jež cestuje skrze stěnu bubliny, což ovlivňuje vzhled vnějšího vesmíru z hlediska cestovatele na lodi. Pro nadsvětelné warpové metriky ukážeme existenci horizontů. Diskutujeme, že tenzor energie a hybnosti vytvářející v prostoročase warpový koridor neodpovídá klasickému poli nebo hmotě a i pokusy interpretovat jej za pomoci kvantové fyziky vyžadují extrémní množství hmoty.

Klíčová slova: obecná relativita, nadsvětelný pohyb, warpová metrika

Title: Superluminal motion in general relativity

Author: Rico Gattermann

Department: Institute of Theoretical Physics

Supervisor: Mgr. Tomáš Ledvinka, Ph.D., Institute of Theoretical Physics

Abstract: We show how superluminal travel can be achieved by means of the Alcubierre warp drive. In this spacetime a spaceship locally at rest is surrounded by a „bubble“ moving faster than the speed of light. We derive the equations of motion for photons and massive particles and illustrate properties of their solutions. We will find that warp drives cause frequency shifts and refraction of light passing the bubble wall, which affects the view of the outside universe seen by a traveller on spaceship. As for superluminal warp drives, existence of horizons will be shown. We will discuss that the stress-energy tensor, generating a warp corridor in spacetime, is not related to any classical field or matter, and attempts to interpret it via quantum mechanics resulted in extreme amounts of matter required.

Keywords: general relativity, superluminal motion, warp metric

Obsah

Úvod	2
1 Alcubierrova metrika	3
1.1 Lorentzovy transformace	3
1.2 Nadsvětelný pohyb ve speciální relativitě	5
1.3 Základní pojmy obecné relativity	6
1.4 Nadsvětelný pohyb a obecná relativita	8
1.5 Alcubierrova metrika	10
2 Vlastnosti warpové metriky	13
2.1 Nulové geodetiky	13
2.2 Časupodobné geodetiky	23
2.3 Kauzální struktura	30
3 Omezení a realizace	33
3.1 Rozložení hmoty	33
3.2 Modifikace	34
Závěr	36
Seznam použité literatury	37
Seznam obrázků	38
Přílohy	39
A Vytvoření obrázků	39
B Zakřivení prostoročasu v Alcubierrově metrice	42

Úvod

Speciální relativita přinesla do fyziky spoustu konstruktivních nápadů: spojení prostoru a času, ztotožnění hmoty s energií ($E = m c^2$) a jednotný formalismus elektřiny a magnetismu. Přesto nejvýznamnější je ten *negativní*: zákaz nadsvětelného pohybu.

V obecné teorii relativity tento zákaz platí už jenom v omezeném smyslu. Zakřivením prostoročasu je možné globálně dosáhnout rychlosti větší než rychlost světla $c = 299\,792\,458$ m/s. Jakkoli se tato rychlost může zdát velká, vzhledem k délce lidského života představuje významné omezení např. pro cestování po naší galaxii. Jak v teoretické fyzice tak i v populární literatuře byly vymyšleny způsoby takového cestování, mezi které patří např. červí díry anebo tzv. warpový pohon. V roce 1994 přišel M. Alcubierre s nápadem [1], jak cestování „warpovou rychlostí“ dát do souladu s relativistickou fyzikou. V této práci podrobně ukážeme, jak tento příklad vypadá.

Na začátku si připomeneme omezení nadsvětelného cestování v speciální i obecné relativitě a ukážeme si, v jakém smyslu se při pohybu v Alcubierrově warpovém prostoročase jedná o nadsvětelný pohyb. Potom budeme popisovat pohyby fotonů a hmotných částic, které nám sdílí o vzhled vesmíru z hlediska nadsvětelně cestující warpové bubliny, v jejíž centru se nachází kosmická loď. Budeme se věnovat i kauzalitě v tomto prostoročase a problematice „zapnutí“ i „vypnutí“ warpového pohonu (resp. warpové metriky). Na závěr pak ukážeme, jaké rozložení hmoty by bylo nutné k vytvoření toho prostoročasu, a přesvědčíme se, že ho nedokážeme vyrobit.

1 Alcubierova metrika

1.1 Lorentzovy transformace

Albert Einstein odhalil, že záhada étheru má překvapivé řešení, které dnes chápeme jako principy speciální teorie relativity. V nich hraje rychlost světla c fundamentální roli: Pokud se něco pohybuje rychlostí c vůči některému inerciálnímu systému, mělo by se pohybovat touž rychlostí vůči všem inerciálním soustavám. Abychom vyjasnili, proč je cestování nadsvětelnými rychlostmi ve speciální relativitě nepřipustné, je třeba připomenout některé odlišnosti mechaniky relativistické od mechaniky klasické.

Obě teorie vyžadují použití jistých „správných“ souřadných systémů, ve kterých se mají fyzikální zákony zapisovat. Základním takovým zákonem jsou pravidla inerciálního pohybu hmotných bodů a odsud pak pochází slovní spojení inerciální systém. Protože neexistuje preferovaný inerciální systém, je na místě zkoumat transformace mezi nimi.

V klasické mechanice je přechod mezi inerciálními soustavami, jež se pohybují vůči sobě rychlostí v ve směru osy x , popsán *Galileiho transformacemi*

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.1}$$

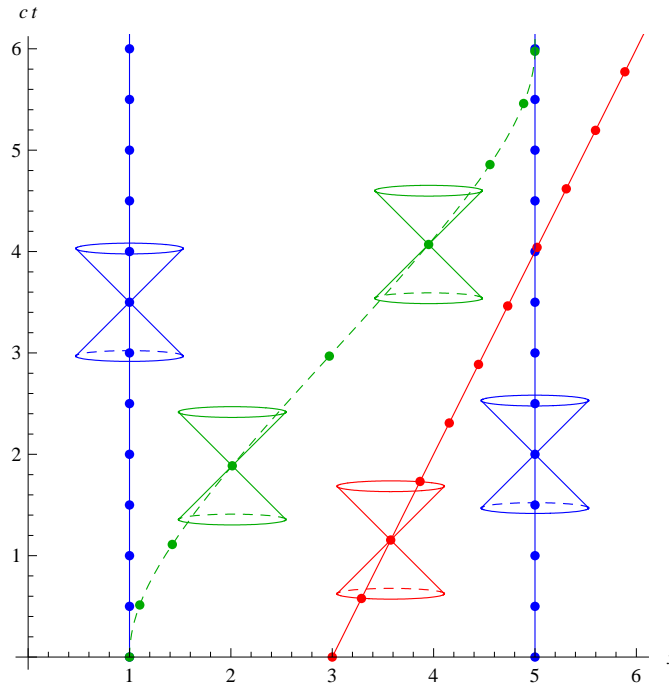
Čas zde vystupuje jako absolutní veličina, časové intervaly jsou tedy klasickými invarianty. Díky konečnosti rychlosti světla mají *Lorentzovy transformace* aplikované ve speciální relativitě jiný tvar:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right), \\ct' &= \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right),\end{aligned}\tag{1.2}$$

přičemž

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\tag{1.3}$$

Chování faktoru γ , který pro $v \rightarrow 0$ dává $\gamma \sim 1 + o(v^2/c^2)$ a naopak pro $v \rightarrow \infty$ roste nade všechny meze, jednak vysvětluje Galileiho transformace jako pomalou limitu Lorentzových transformací, jednak ilustruje fakt, že c představuje mezní rychlost pohybu ve speciální relativitě.



Obrázek 1.1: Prostorčasový diagram – cestování ve speciální relativitě. Na obrázku jsou dva stojící pozorovatelé (modří), jeden se pohybuje konstantní rychlostí $0.5c$ (červený) a jeden cestuje z jednoho místa na druhé (zelený), a to tak, že na začátku i na konci splývá jeho světočára s jedním nebo druhým stojícím pozorovatelem. Světelné kužely zde ukazují přípustné rychlosti pozorovatelů. Značky na světočarách odpovídají plynutí vlastního času pozorovatele.

Vlastnosti transformací chceme znázornit na prostorčasovém diagramu v Obr. 1.1, ve kterém jsou zobrazeny trajektorie (*světočáry*) různých pozorovatelů. Přírůstky světočar udávají rychlost, kterou se pohybují: pohyb po úhlopříčkách odpovídá cestování s rychlostí $\pm c$. „Modří“ pozorovatelé jsou tedy vzhledem ke zvolené soustavě (x, t) v klidu, „červený“ pozorovatel cestuje s konstantní rychlostí $0.5c$. „Zelený“ pozorovatel cestuje mezi pozorovateli v klidu, přičemž je urychlován a brzděn konstantní silou. V diagramu jsou nakresleny *světelné kužely*, jejichž význam si nyní objasníme.

Z Lorentzových transformací se dá odvodit, že v každém (kartézském) inerciálním systému dává stejnou hodnotu výraz

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (1.4)$$

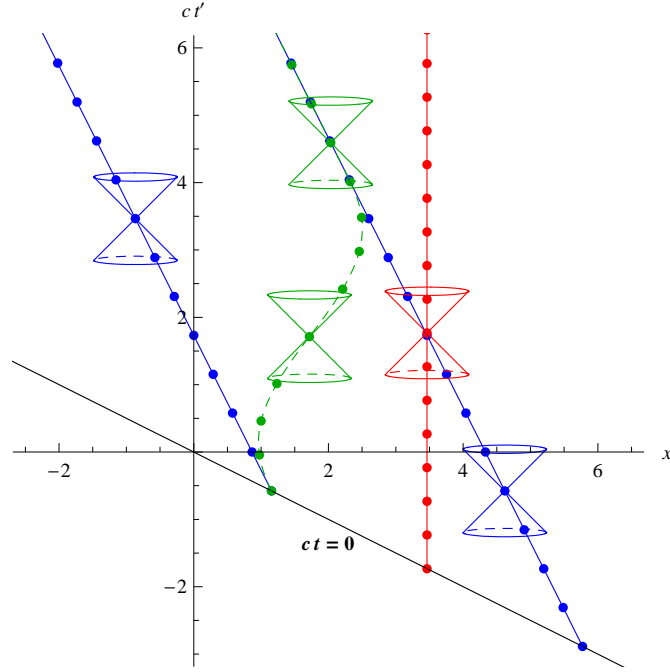
představující tzv. *Minkowského metriku*, pomocí které můžeme měřit prostorčasové délky a skalární součiny vektorů ve čtyřrozměrném prostoru (ct, x, y, z) , aniž by příslušné hodnoty závisely na tom, který z inerciálních systémů k výpočtu ds^2 použijeme. Měří-li modrý pozorovatel interval mezi dvěma prostorčasovými událostmi na své trajektorii, budou prostorové komponenty $dx = dy = dz = 0$, a

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2. \quad (1.5)$$

Pozorovatel měří *vlastní čas* $d\tau$. Takto definovaný vlastní čas je tedy invariantní vůči Lorentzově transformaci. Geometricky poznáme dovolené 4-rychlosti takového pozorovatele, pro kterého lze zavést vlastní čas tak, že jejich vektory leží uvnitř světelného kužele. V Obr. 1.1 jsou vyznačeny stejně dlouhé intervaly vlastního času jednotlivých pozorovatelů pomocí teček. Je patrné, že vlastní časy měřené

v systémech červeného i zeleného pozorovatele (kde $dx' = dy' = dz' = 0$) plynou pomaleji než *souřadnicový* čas t . Z transformací (1.2) plyne, že v systému (x', t') , pohybujícím se rychlostí v vůči (x, t) , je časový rozdíl odpovídající $d\tau$ roven

$$dt' = \gamma(v) d\tau > d\tau. \quad (1.6)$$



Obrázek 1.2: Světočáry pozorovatelů z Obr. 1.1 po Lorentzově transformaci $ct' = \gamma(ct - 0.5x)$, $x' = \gamma(x - 0.5ct)$.

Na Obr. 1.2 vidíme, jak vypadají světočáry v systému (x', t') červeného pozorovatele. Světelné kužely mají stejný tvar jako v původním systému (x, t) — pro body na povrchu platí

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = 0, \quad (1.7)$$

nezávisle na systému. Pojem současnosti je ale relativní – světočáry v původním systému začaly v $t = 0$, počáteční časy t' v novém systému závisí na původních polohách. Vlastní časy jsou pořád stejné: Odečítáním teček vidíme, že „zelený“ pozorovatel potřebuje stejnou dobu $\Delta\tau \approx 4$ k cestování mezi „modrými“ pozorovateli jako v systému (x, t) . Příslušný rozdíl $\Delta t' \approx 4.5$ měřený červeným pozorovatelem je ale menší než $\Delta t \approx 6$ měřený v klidovém systému modrých pozorovatelů (Obr. 1.1).

1.2 Nadsvětelný pohyb ve speciální relativitě

Díky invariantnosti hodnoty a tím i znaménka porostoročasového intervalu (1.4) můžeme intervaly nazývat *časupodobné* ($ds^2 < 0$), *světelné/nulové* ($ds^2 = 0$) nebo *prostorupodobné* ($ds^2 > 0$), pro všechny inerciální systémy. Po vydělení ds^2/dt^2 , je vidět, že pohyb rychlostí $|dx/dt| \lesseqgtr c$ vede k $ds^2 \lesseqgtr 0$. *Podsvětelný* pohyb tedy

představuje časupodobný vektor $dx^\mu = (cdt, dx, dy, dz)$ apod. Pro podsvětelné pohyby definujeme vektor rychlosti pomocí vlastního času:

$$w^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (1.8)$$

Ze závislosti znaménka ds^2 na $|dx/dt| \lesseqgtr c$ je vidět, že vlastní čas lze definovat jen pro světočáry s $ds^2 < 0$, tedy vektor 4-rychlosti je vždy časupodobný. Proto pohyb tělesa je vždy podsvětelný, a to *nezávisle na volbě inerciálního souřadného systému*. Vztah (1.8) ztrácí smysl pro pohyby s rychlostí c , jelikož vektor rychlosti je světelný a proto v „klidovém“ systému neuplyne žádný čas τ ($0 = ds^2 = -c^2 d\tau^2$). Lorentzovými transformacemi nelze přejít do systému pohybujícího se nadsvětelně.

Lorentzovy transformace garantují o něco víc, než jen invarianci prostorčasového intervalu ds^2 : události v časupodobně vzdálených bodech ve všech (transformacemi „dosažitelných“) inerciálních systémech nastanou ve stejném časovém pořadí, tj. dřívější událost mohla způsobit pozdější. Pro prostorupodobně vzdálené události x_A^μ a x_B^μ existuje jak inerciální systém, kde $t_A > t_B$, i takový, kde $t_A < t_B$. Tyto události nemohou souviset, protože nelze rozhodnout, která událost je příčinou a která následkem (porušení *principu kauzality*). Časupodobnost je charakterizována podsvětelným pohybem mezi událostmi, prostorupodobnost pohybem nadsvětelným. Nadsvětelné cestování by umožnilo posílat informace i mezi nesouvisějícími událostmi, což by mohlo vyvolat nevysvětlitelné efekty, jelikož jejich časové pořadí je relativní. Proto nadsvětelný pohyb není možný resp. „nadsvětelný svět“ nesmí interagovat s podsvětelným. Situace v obecné relativitě bude popsána v kapitole 2.3.

Nadsvětelnému a dokonce světelnému pohybu hmotných těles odporují i dynamické rovnice. Obdobou klasického rovnoměrně zrychleného pohybu je ve speciální relativitě tzv. *hyperbolický pohyb* částice s hmotou m , na níž působí konstantní síla f . Rychlost částice urychlené z klidu je pak popsána [10]

$$\frac{v}{c} = \frac{ft}{\sqrt{m_0^2 c^2 + f^2 t^2}}, \quad (1.9)$$

kde m_0 je její (klidová) hmotnost. Pro $t \rightarrow \infty$ jde $v \rightarrow c$. Energie částice je dána výrazem

$$E = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{f^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right). \quad (1.10)$$

V limitě $t \rightarrow \infty$ roste energie nade všechny meze. Ani s nekonečným množstvím dodané energie v podobě konečné síly působící po nekonečně dlouhou dobu ale nepřesáhneme rychlost světla.

1.3 Základní pojmy obecné relativity

V obecné relativitě, jejíž stručný přehled podle [6] [12] následuje, se platnost principů speciální relativity přesouvá z globálního inerciálního systému do *lokálního inerciálního systému*, který existuje v důsledku *principu ekvivalence*. Ten říká, že fyzika v inerciálních a volně padajících systémech by měla být *lokálně*

stejná. Na větších škálách se projeví nehomogenity gravitačního pole. Podobně platí i omezení na podsvětelný pohyb jen lokálně: dva blízcí pozorovatelé v lokálním inerciálním systému se vůči sobě sice mohou pohybovat jen podsvětelnými rychlostmi, pokud ale vhodně definujeme vzdálenost mezi dvěma pozorovateli dostatečně daleko od sebe, pak rychlost, s níž se tato vzdálenost mění, může přesáhnout rychlost světla. To hraje důležitou roli v kosmologii.

Podle Einsteinovy obecné teorie relativity je metrický tenzor, který udává prostoročasový interval

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.11)$$

dynamickou veličinou — $g_{\mu\nu}$ může být funkcí všech prostoročasových souřadnic. Metrický tenzor má stejnou signaturu jako prostoročasový interval ve speciální relativitě. V okolí každé události lze zavést souřadnice, ve kterých bude $g_{\mu\nu} \doteq \eta_{\mu\nu}$. V takovém okolí a v těchto souřadnicích budeme tedy pozorovat, že volné částice se pohybují rovnoměrně přímočaře.

Rovnoměrný přímočarý pohyb je ale jen prvním přiblížením. Princip ekvivalence říká, že volná částice se pohybuje s nulovým zrychlením, v křivém prostoru ale musíme derivaci rychlosti zapsat takovým způsobem, aby vůbec nezáviselo na tom, jaké souřadnice k popisu prostoročasu a fyzikálních dějů v něm použijeme.

V obecných souřadnicích je potřeba nahradit parciální derivaci

$$V^\mu{}_{,\alpha} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} \quad (1.12)$$

tzv. *kovariantní derivací*

$$\nabla_\alpha V^\mu = V^\mu{}_{;\alpha} := V^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} V^\beta. \quad (1.13)$$

Objekt $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ je tzv. *konexe*, a určuje vztah mezi tečnými vektorovými prostory v infinitesimálně vzdálených bodech. V křivém prostoročase ale tuto identifikaci vektorových prostorů nelze provést globálně a výsledek závisí na cestě $x^\mu(s)$, po níž vektor V^μ přenášíme tzv. *paralelním přenosem*

$$V^\mu{}_{;\alpha} \frac{dx^\alpha}{ds} = 0. \quad (1.14)$$

V obecné relativitě kovariantní derivaci zavádíme tak, že $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, což dává

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu} \right). \quad (1.15)$$

Pomocí kovariantní derivace pak můžeme (nezávisle na souřadnicích) říci, že podmínka nulového zrychlení částice zní

$$a^\mu = \frac{D}{d\tau} u^\mu = u^\nu u^\mu{}_{;\nu} = 0, \quad (1.16)$$

kde *absolutní derivaci* podle τ značíme

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \nabla_\nu = u^\nu \nabla_\nu. \quad (1.17)$$

Pohybová rovnice (1.16) zvaná *rovnice geodetiky* je kompatibilní s normalizací

$$u^\mu u_\mu = \text{konst.} \quad (1.18)$$

Rovnice časupodobné geodetiky lze zapsat pomocí derivace podle vlastního času $dx^\mu/d\tau \equiv u^\mu$. Obecnější rovnice je

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0, \quad (1.19)$$

která je na místě např. v situaci, kdy popisujeme světelné (nulové) geodetiky, pro které vlastní čas nemá smysl.

To, že výsledek paralelního přenosu závisí na zvolené cestě, souvisí se skutečností, že kovariantní derivace obecně nejsou komutativní. Rozdíl je dán výrazem

$$V_{\nu;\kappa\lambda} - V_{\nu;\lambda\kappa} = R^\sigma_{\nu\kappa\lambda} V_\sigma, \quad (1.20)$$

kde jsme zavedli *Riemannův tenzor křivosti*

$$R^\sigma_{\nu\kappa\lambda} = -\Gamma^\sigma_{\nu\kappa,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\nu\lambda,\kappa} - \Gamma^\rho_{\nu\kappa} \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} + \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\rho\kappa}. \quad (1.21)$$

Díky symetriím má ve 4 dimenzích 20 nezávislých složek. Kontrakcí dostaneme též *Ricciho tenzor*

$$R_{\alpha\beta} = R^\sigma_{\alpha\sigma\beta} \quad (1.22)$$

jakož i *Ricciho skalární křivost*

$$R = R^\alpha_{\alpha} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (1.23)$$

Tenzor křivosti obsahuje lineárně druhé derivace metrického tenzoru a vystupuje v polních rovnicích obecné teorie relativity. Podle té jsou geometrie a hmota svázány *Einsteinovými rovnicemi*¹

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

kde

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (1.25)$$

se nazývá *Einsteinův tenzor* a $T_{\mu\nu}$ je *tenzor energie a hybnosti*. Gravitační pole je tedy vytvářeno tenzorem energie a hybnosti, který popisuje hmotu a její pohyb. V tomto smyslu tedy nejen gravitační pole určuje geodetický pohyb volných částic, ale skrze deformaci prostoru charakterizovanou Einsteinovým tenzorem i hustotu hmoty, tlaky a toky hybnosti v každém bodě.

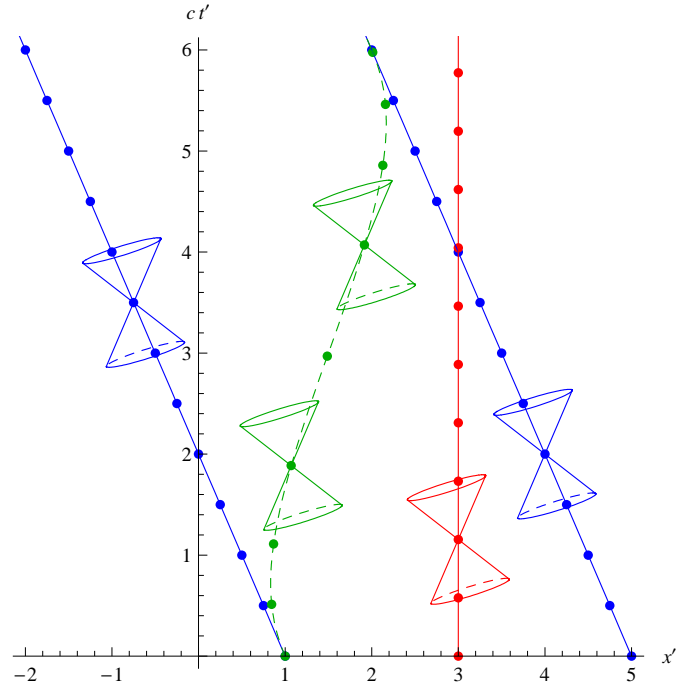
Právě toho využíváme v této práci. Jednak sledujeme na pozadí daného prostoročasu, jak se volné světelné částice a pozorovatelé pohybují, jednak i zkoumáme, jaká hmota by mohla daný prostoročas vytvářet.

1.4 Nadsvětelný pohyb a obecná relativita

Využijeme nyní toho, že v obecné relativitě již nejsme omezeni jen na Lorentzovy transformace, a povšimneme si, jak se liší popis v souřadnicích získaných Galileiho a Lorentzovou transformací. Metrika získaná Galileiho transformací, v níž

¹V těchto rovnicích (i nadále) používáme konvenci $c = 1$, $G = 1$ (gravitační konstanta), jak je zvykem v obecné relativitě.

parametr rychlosti bude převyšovat rychlost světla, bude představovat vnitřní „gravitační“ pole uvnitř Alcubierovy bubliny.



Obrázek 1.3: Světočáry pozorovatelů z Obr. 1.1 po přechodu do souřadného systému $t' = t$, $x' = x - 0.5t$.

Na Obr. 1.3 vidíme, jak se situace změní naproti Lorentzovým transformacím (Obr. 1.2), když použijeme transformace

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Nevyhnutelným důsledkem toho, že nejde o Lorentzovu transformaci, je fakt, že metrický tenzor již není Minkowského $\eta_{\mu\nu}$, což se na obrázku projeví změnou obvyklé (vertikální) orientace světelných kuželů. Něco podobného jsme zvyklí vidat např. u černoděrových prostoročasů, zde (zatím) jde jen o souřadnicový efekt – stále se pohybujeme v Minkowského prostoročase, a naklonění kuželů není způsobeno žádnou hmotou.

Změna tvaru světelných kuželů je dobře vidět v metrice vyjádřené v nových souřadnicích:

$$ds^2 = -dt'^2 + (dx' + v dt')^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.27)$$

Světelné světočáry splňují $ds^2 = 0$, což určuje jejich směr

$$\frac{dx'}{dt'} = -v \pm 1. \quad (1.28)$$

V tomto vztahu není nijak omezena hodnota v . Pokud bychom zvolili $v > 1$, mohl by se klidně modrý pozorovatel na Obr. 1.3 pohybovat s $dx'/dt' > 1$. To, že by ale nešlo o nadsvětelný pohyb, je zřejmé z toho, že celou dobu leží jeho světočára uvnitř světelného kuželu.

Vedlejším důsledkem transformace je fakt, že v těchto souřadnicích přestává být souřadnicový čas t' vlastním časem „stojícího“ (červeného) pozorovatele. Čas $t' = t$ stále odpovídá vlastnímu času modrých pozorovatelů.

1.5 Alcubierrova metrika

Ve speciální relativitě se lokální kauzalita vyjádřená v okolí nějaké události nijak neodlišuje od kauzality na velkých škálách, protože v plochem prostoročasu lze od diferenciálu $ds^2 = 0$ přejít k libovolně velkému intervalu $(\Delta s)^2 = 0$, stále jde o rovnici kuželu. Proto ve speciální relativitě můžeme přijít s kategorickým tvrzením

$$\frac{|\Delta \vec{x}|}{\Delta t} < 1, \quad (1.29)$$

svazujícím například události počátku a konce vesmírné plavby, kde \vec{x} a t představují Minkowského (inerciální) souřadnice.

Vzápětí uvidíme, že v obecné relativitě si lze představit prostoročas, kde \vec{x} a t se skoro všude shodují s Minkowského souřadnicemi, obsahují ale anomálii v podobě „prostoročasového koridoru“ spojujícího dvě události, o nichž lze prohlásit, že

$$\frac{|\Delta \vec{x}|}{\Delta t} > 1. \quad (1.30)$$

Prostoročas nalezený M. Alcubierrem [1] má tvar

$$ds^2 = -dt^2 + (dx - v_s(t)f(r_s) dt)^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.31)$$

Od předcházejícího případu se odlišuje tím, že (souřadnicová) rychlost

$$v_s(t) = \frac{dx_s}{dt} \quad (1.32)$$

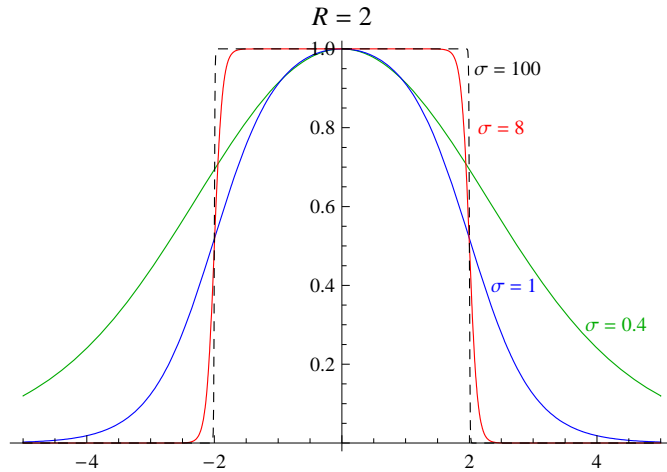
nemusí nezbytně být konstantní. Naopak, předpokládá se, že popisuje dostatečně hladký časový průběh rychlosti cestovatele, který začíná na

$$x(t < t_0) = x_0 \quad (1.33)$$

a skončí na

$$x(t > t_1) = x_1. \quad (1.34)$$

Rychlost tedy vymizí pro $t \notin [t_0, t_1]$.



Obrázek 1.4: Přechodová funkce $f(r_s)$ Alcubierrovy metriky pro různé ostrosti stěny σ . Přechodová funkce spojuje vnitřní „pohybující se“ prostor s vnějším Euklidovským prostorem.

Ve vztahu (1.31) vystupuje ještě výraz $f(r_s)$. Jeho úlohou je rozdělit prostoročas na body blízké světočáře $x_s(t)$, kde $f \sim 1$, a na body vzdálené, kde $f \sim 0$. Můžeme mluvit o bublině o „poloměru“ R , kde R je hodnota, kde $f(R) \sim 1/2$. Konkrétní tvar zvolený Alcubierrem [1] zní

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + R)) - \tanh(\sigma(r_s - R))}{2 \tanh(\sigma R)}. \quad (1.35)$$

Parametr $\sigma > 0$ určuje, jak rychle klesá funkce $f(r_s)$ mimo bublinu na nulu. V limitě $\sigma \rightarrow \infty$ je skoková. V Obr. 1.4 je zobrazena pro různé hodnoty σ . Podle [1] v nadploše $t = \text{konst.}$ „měříme“ vzdálenost Euklidovskou vzdáleností

$$r_s(t) = \sqrt{(x - x_s(t))^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.36)$$

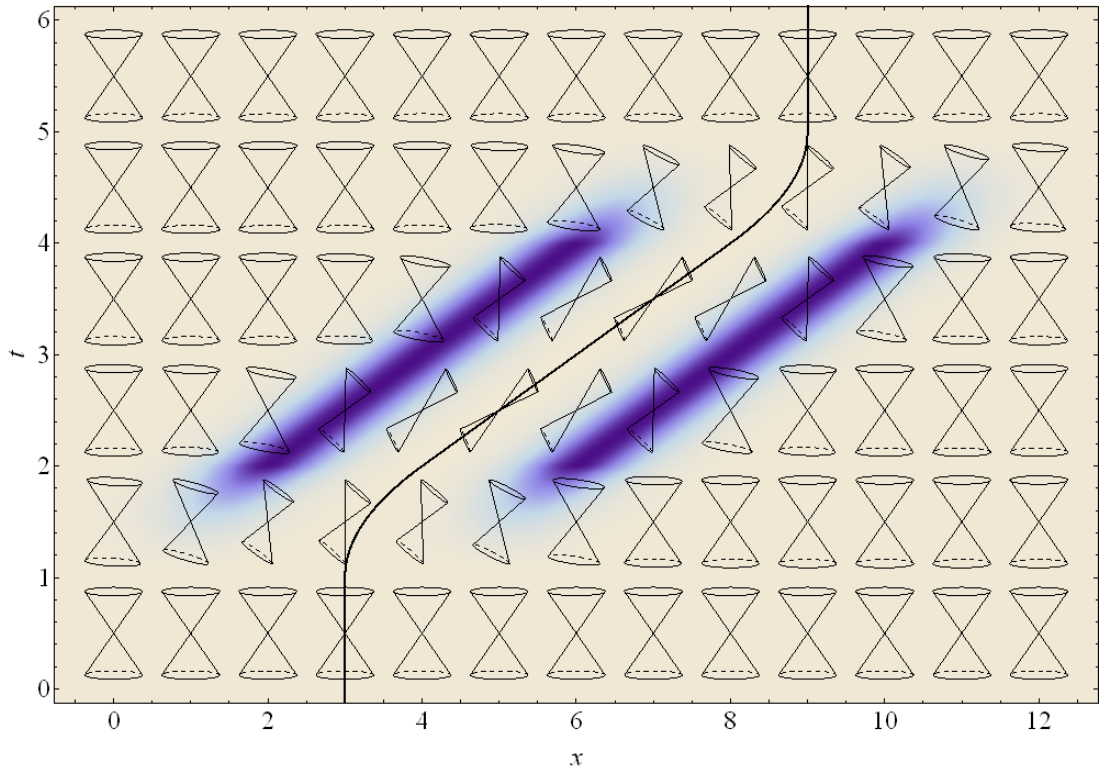
Lze snadno ukázat, že pohyb lodi je skutečně podsvětelný. Zvolíme

$$[x, y, z] = [x_s(t), 0, 0], \quad (1.37)$$

čímž podél světočáry dostáváme

$$ds^2 = -dt^2 + (v_s(t) dt - v_s(t)f(0) dt)^2 = -dt^2. \quad (1.38)$$

Pohyb je časupodobný a souřadnicový čas je totožný s vlastním časem pozorovatele na lodi. Stejný čas měří vzdálený stojící pozorovatel ($dx = dy = dz = 0$), protože vně koridoru funkce $f(r_s)$ rychle vymizí a (1.31) přejde na Minkowského prostoročas [1].



Obrázek 1.5: Trajektorie kosmické lodi a sklon světelných kuželů v Alcubierrově metrice. Lod cestuje od $(x_1, t_1) = (4, 2)$ k $(x_2, t_2) = (8, 4)$ rychlostí $\Delta x / \Delta t > 1$. Přesto vidíme na světelných kuželech, že pozorovatel se celou dobu pohybuje podsvětelnou rychlostí. Stěny bubliny, kde se mění sklon světelných kuželů, jsou obarveny modře. Poloměr bubliny je $R = 2$, tloušťka stěny je charakterizována $\sigma = 1$.

Příklad Alcubierrovy metriky je uveden v Obr. 1.5. Na začátku je loď v klidu, potom cestuje „koridorem“ a po nějaké době se opět ocitne v klidu vzhledem k uvažovanému souřadnému systému. Trajektorie je vyznačena tučnou černou čarou. Ve vzdálenosti $R = 2$ od trajektorie jsou vidět modré oblasti, které představují hodnoty součinu $v_s(t)f'(r_s)$, zvoleného k charakterizaci hranice, protože změna funkce $f(r_s)$, spojující vnitřní a vnější oblast prostoročasu, je tam největší. Hranice není ostrá, jelikož parametr $\sigma = 1$ byl zvolen poměrně malý. Vně bubliny metrika rychle přejde v Minkowského metriku. Světelné kužely uvnitř poloměru R jsou nakloněné, mimo intervalu $t \in (1, 5)$ však máme všude Minkowského prostoročas. (Souřadnicová) Rychlost

$$v = \frac{dx}{dt} = 2 \quad (1.39)$$

v době $t \in (2, 4)$ je nadsvětelná a zdánlivě nefyzikální. Loď ale nikdy neopustí lokální světelné kužely. Pohyb je tedy (lokálně) podsvětelný a neporušuje tím principy relativity.

Obr. 1.5 také jasně ukazuje, že plochy $t = \text{konst.}$ jsou prostorové povahy — žádná událost na ploše $t = \text{konst.}$ neleží uvnitř světelného kuželu jiné události na této ploše. V tomto smyslu přítomnost koridoru nemění charakter t jako časové souřadnice.

Na obrázku je také vidět, že když $v > 1$, nemohou uvnitř bubliny existovat pozorovatelé s konstantní hodnotou souřadnice x — jejich světočára by ležela vně světelného kuželu. S podobnou vlastností se setkáváme u rotujících černých děr v tzv. *ergosféře* [6] [12].

2 Vlastnosti warpové metriky

Geometrii metriky zavedené v předchozí kapitole je nyní třeba popsat. Zvolíme obvyklý způsob, tedy popis pohybu volných částic a fotonů, který bude v důsledku proměnlivosti metriky zakřiven.

2.1 Nulové geodetiky

Světločáry fotonů nám mimo jiné popisují vzhled vesmíru z hlediska lodi. Budeme se proto zabývat šířením světla v prostoru a jeho interakcí s bublinou, přičemž např. budeme zjišťovat frekvenční posuv a existenci horizontů.

Nejprve budeme zkoumat pohyb fotonů jen na ose x . Metrika (1.31) je natolik symetrická¹, že letí-li světlo po x -ové ose, nebude odchýleno ve směru kolmém na pohyb lodi. Jeho světločáru jednoduše určíme z podmínky $ds^2 = 0$ za předpokladů $dy = 0$, $dz = 0$, tj.

$$0 = -dt^2 + (dx - v_s(t)f(r_s) dt)^2, \quad (2.1)$$

což dává

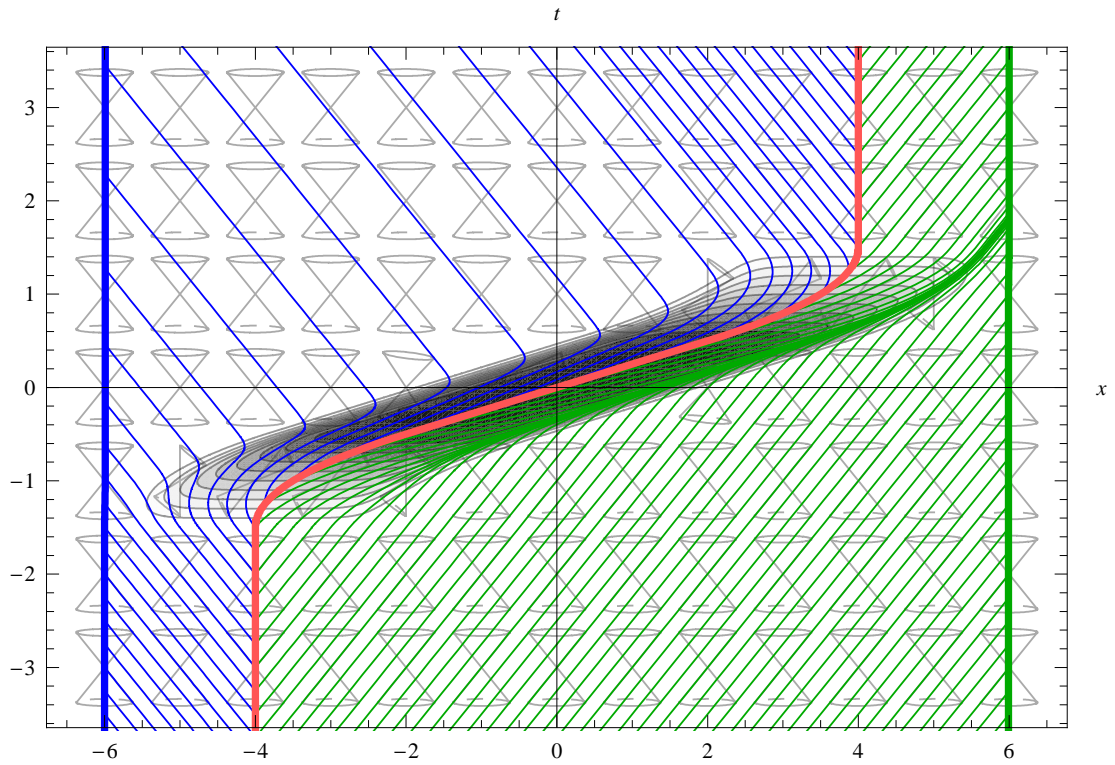
$$\frac{dx}{dt} = v_s(t)f(r_s[x(t)]) \pm 1. \quad (2.2)$$

To je diferenciální rovnice v $x(t)$ s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

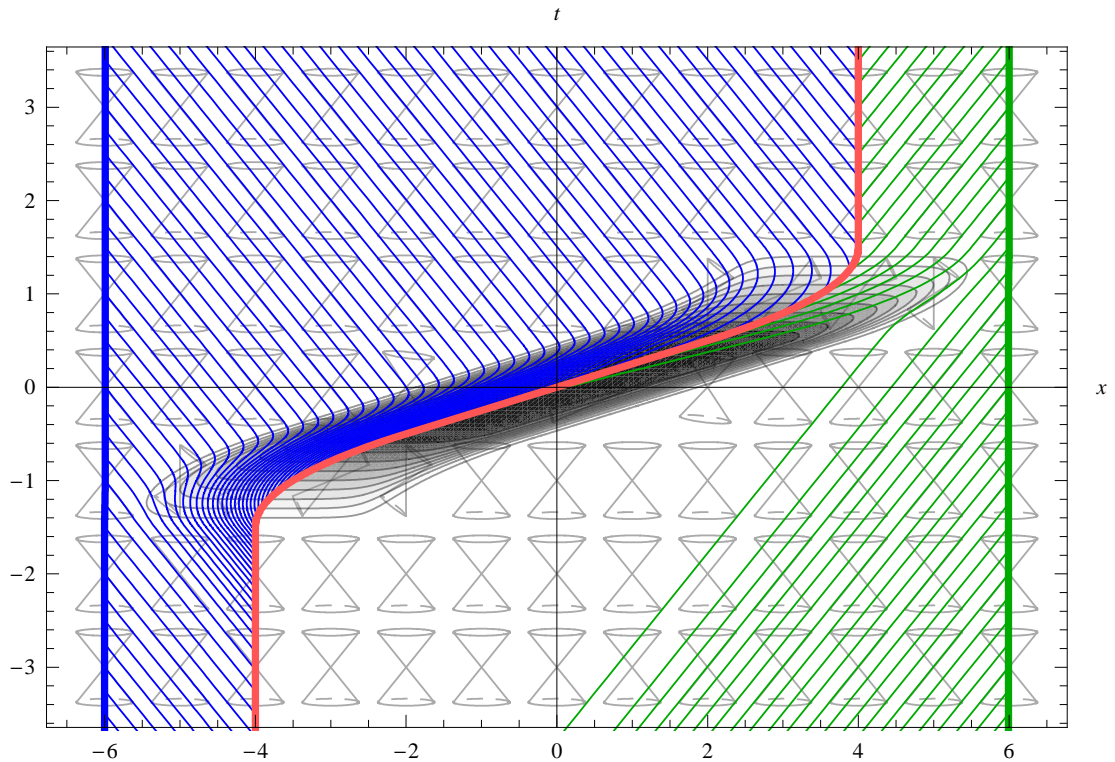
Obr. 2.1 (str. 14) zobrazuje světločáry fotonů vyslaných z lodi k stojícím pozorovatelům (např. planetám) v polohách $x = \pm 6$. Pozorovatel, k jehož planetě loď letí (zelená světločára), nejprve ji pozoruje ve vzdálené minulosti. Z Obr. 2.1a je patrné, že např. fotony vyslané v časech $t_0 \in (-3.5, -1.5)$ procházejí hranicí warpové bubliny. Tam je rozmístěna tzv. exotická hmota (viz kapitola 3.1), jejíž přímou interakci s fotony pro jednoduchost zanedbáme. Fotony dorazí na zelenou planetu ve velmi krátkém intervalu $t_z \in (1.6, 1.8)$. Analogicky v Obr. 2.1b, kde fotony dorazí po stejných časových intervalech, je vidět, že velká část trajektorie lodi $\Delta t_0 > 3$ náleží do intervalu $\Delta t_z = 0.2$. Dění po delší dobu na lodi se tedy odehraje pro „zeleného pozorovatele“ v mžiku.

„Modrý pozorovatel“ zase může podrobně sledovat celý let: při průchodu stěnou bubliny se světločáry fotonů v Obr. 2.1a rozcházejí, tj. světlo doletí po delších intervalech na planetu. Fotony v intervalu $t_0 \in (-1.6, -1.4)$ např. dorazí v časech $t_m \in (2.2, 3.4)$. Obdobně v Obr. 2.1b se zhušťují světločáry vycházející z lodi, které pak skončí na modré planetě po stejných dobách.

¹srov. složky afinní konexe (B.10) a (B.11) v Dodatku B

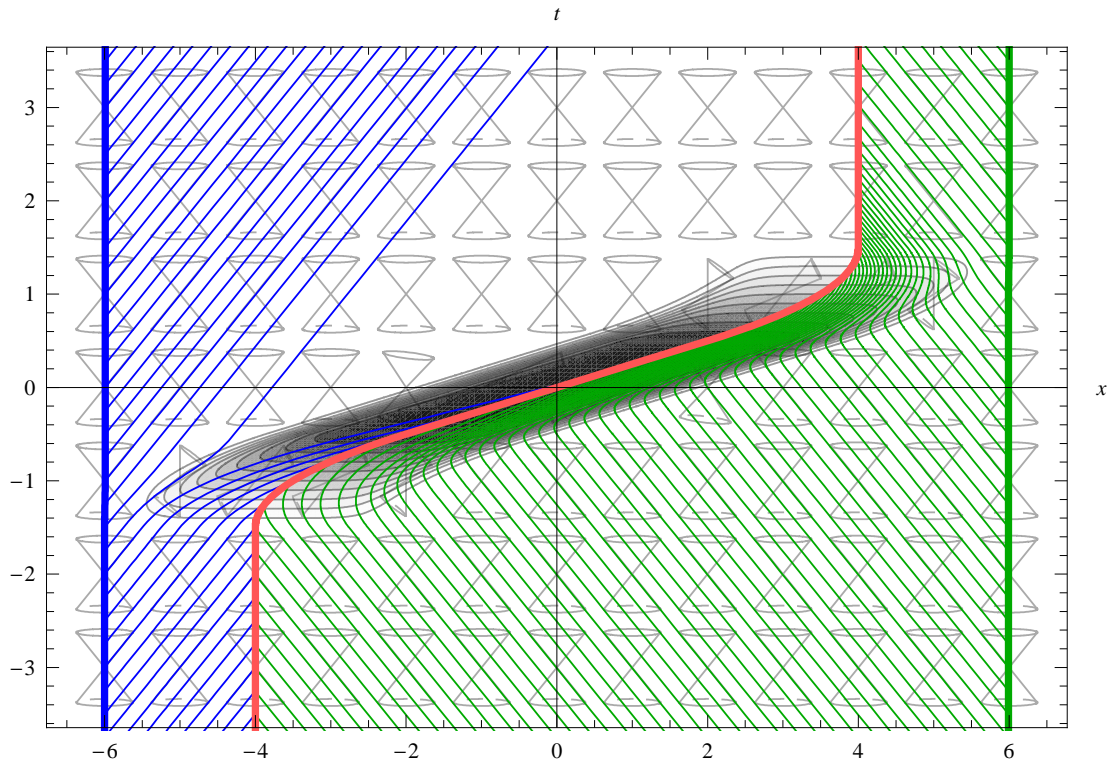


(a) Konstantní frekvence vysílání fotonů z lodi. Co se děje na lodi po delší dobu $t_0 \in (-3.5, -1.5)$, vidí pozorovatel na zelené planetě Z téměř současně v $t_z \doteq 1.7$, což je zjevné ze zhušťujících se světočar fotonů.

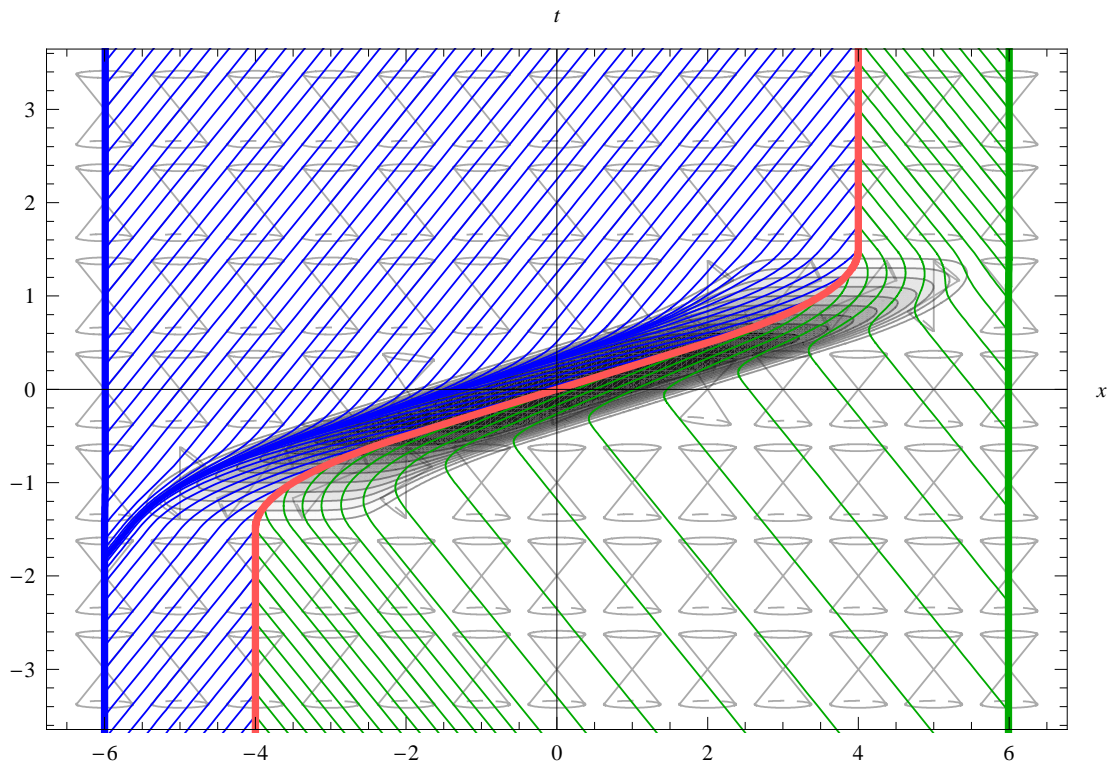


(b) Konstantní frekvence přijímání fotonů na planetách. Pozorovatel na modré planetě M může podrobně sledovat, co se děje na lodi v $t_0 \in (-1.4, -1)$. To je vidět z velkého rozestupu původně zhuštěných světočar u lodi.

Obrázek 2.1: Světočáry fotonů letících po x -ové ose. Tučné čáry představují světočáry lodi (červená) i stojících pozorovatelů (zelená před lodí/modrá za lodí), ostatní čáry zobrazují pohyb fotonů, které vyletí z lodi. Isočáry součinu $v_s(t)f(r_s)$ jsou šedě. Poloměr bubliny činí $R = 1.5$, ostrost hranice $\sigma = 3$. Maximální rychlost lodi v intervalu $t \in (-0.5, 0.5)$ je $v_s = 4$.



(a) Konstantní frekvence vysílání fotonů z planet. Zde se zhušťují světočáry dolétajících fotonů. Delší interval na zelené planetě je vidět na lodi během krátké chvíle.



(b) Konstantní frekvence přijímání fotonů na lodi. Co pozorovatel na modré planetě zažije v mžiku v $t \doteq 0.7$, je vnímáno na lodi v mnohem delším časovém intervalu.

Obrázek 2.2: Světočáry fotonů letících po x -ové ose. Situace je podobná k Obr. 2.1, fotonů však letí od stojících pozorovatelů k lodi. Parametry metriky jsou stejné jako v Obr. 2.1.

Obr. 2.2 (str. 15) znázorňuje, jak procesy na planetách vidí pozorovatel na lodi. Interval $t_m \in (-1.9, -1.7)$ na modré planetě vidí v intervalu $\Delta t_0 > 3$ ($t_0 > 1.5$), tj. velmi podrobně (Obr. 2.2b). Geodetiky vycházející od zelené planety se zhušťují (Obr. 2.2a) u lodi; signály z delšího časového intervalu na planetě tak dorazí na loď skoro současně. Je pozoruhodné, jak je situace podobná Obr. 2.1, protože prostoročas je dynamický a nečekali bychom proto symetrii. Pro naši volbu trajektorie lodi ale nalezneme symetrii při záměně $t \rightarrow -t$, $x \rightarrow -x$.

U jednorozměrného pohybu představovala podmínka $ds^2 = 0$ rovnici, díky níž jsme se vyhnuli řešení rovnice geodetiky a nahradili jsme ji rovnicí (2.2). Konkrétně ze čtyř integračních konstant vystupujících v řešení 1+1 rovnice geodetiky jsme jednu vyloučili podmínkou $ds^2 = 0$ a dvě tím, že jsme vyloučili afinní parametr a nahradili jej souřadnicovým časem.

Pokud neomezíme pohyb fotonů jen na osu x , přibude mnoho integračních konstant v řešení 3+1 rovnice geodetiky, ale žádné nové integrály pohybu. Proto nyní nemáme možnost nalézt 3+1 variantu rovnice (2.2) – soustavu tří rovnic prvního řádu. Jak uvidíme, nejjednodušší verze bude mít po vyloučení afinního parametru podobu soustavy 6 diferenciálních rovnic prvního řádu. Na základě předcházejících úvah bychom očekávali jen pět, ovšem oproti (2.2) budeme znát i energii fotonů.

Řešení pomocí rovnice geodetiky je uvedeno v [2] a [7]. Alternativně zde budeme využívat relativistického Hamiltonova formalismu. Hamiltonián zavádíme [6]

$$H = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu, \quad (2.3)$$

kde $g^{\mu\nu}(x^\alpha)$ je funkcí polohy fotonu a p_μ je jeho 4-hybnost. Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (2.4)$$

$$\frac{dp_\alpha}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}, \quad (2.5)$$

kde λ je afinní parametr. V (2.3) vystupuje inverzní metrika

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_s(t) f(r_s) \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2. \quad (2.6)$$

Hamiltonián má tedy tvar

$$H = \frac{1}{2} \left[p^2 - (p_t + \omega(\vec{x}, t) p_x)^2 \right], \quad (2.7)$$

kde p rozumíme

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (2.8)$$

a ω značíme

$$\omega(\vec{x}, t) = v_s(t) f(r_s[\vec{x}, t]). \quad (2.9)$$

Pro nulové geodetiky platí

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = p^\mu p_\mu = 0, \quad (2.10)$$

což vede na $H = 0$. Podmínka je splněna pro

$$p_t + \omega p_x = \pm p. \quad (2.11)$$

Řešení potom určíme z Hamiltonových rovnic

$$\frac{dt}{d\lambda} = \mp p, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\lambda} = \mp p [\omega, 0, 0] + \vec{p}, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\lambda} = \pm p p_x \nabla \omega, \quad (2.14)$$

přičemž p_t dopočítáme z (2.11), kde zvolíme záporné znaménko, aby částice dle (2.12) letěla do budoucnosti. Derivace podle λ se zbavíme pomocí (2.12), abychom pohyb mohli vyjádřit závislostmi na (neafinním) souřadnicovém čase t , jež se dají fyzikálně lépe interpretovat:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [\omega, 0, 0] + \frac{\vec{p}}{p}, \quad (2.15)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -p_x \nabla \omega. \quad (2.16)$$

Počáteční podmínky zvolíme $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ a

$$p_t(t_0) = -p_0 - \omega(\vec{x}_0, t_0) p_x(t_0), \quad (2.17)$$

$$p_x(t_0) = p_0 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (2.18)$$

$$p_y(t_0) = p_0 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (2.19)$$

$$p_z(t_0) = p_0 \cos \vartheta, \quad (2.20)$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi)$, $p_0 \geq 0$. Speciálně v xy -rovině platí

$$\begin{aligned} z_0 = 0 &\implies (\nabla \omega)_z(t_0) = 0 \implies \left. \frac{dp_z}{dt} \right|_{t_0} = 0, \\ \vartheta = \frac{\pi}{2} &\implies p_z(t_0) = 0 \implies \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Jelikož se v počátečním čase nemění ani z ani p_z , jsou díky tvaru Hamiltonových rovnic (2.15) a (2.16) konstantní během celého pohybu. Podobnou úvahou o y_0 a $p_y(t_0)$ bychom obdrželi speciální případ pohybu po x -ové ose (2.2).

Z rovnic (2.15) a (2.16) je patrné, že pokud $p_x = 0$, nemění se hybnost $\vec{p} = [0, p_y, p_z]$. Pohyb ve směru x je pak určen pouze ω (polohou vůči bublině), pohyb v kolmém směru p_y/p resp. p_z/p , tj. počátečním úhlem výletu. Pro $p_x \neq 0$ se hybnost mění pouze na hranici bubliny, kde ω není konstantní. V oblastech mimo bublinu je $\omega = 0$. Tam přejdou rovnice (2.15) ve známé pohybové rovnice fotonu v Minkowského souřadnicích.

Na hranici bubliny dochází k některým efektům, např. k frekvenčnímu posuvu, které nyní budeme podrobněji diskutovat. Po jejich vyjasnění ukážeme analogicky k Obr. 2.1 a Obr. 2.2, jak se šíří světlo v xy -rovině.

Frekvence světla ν je spojena s jeho energií E známým vztahem $E = h\nu$, kde $h = 6.626... \cdot 10^{-34}$ J s je *Planckova konstanta*. Každý pozorovatel měří jinou energii, v závislosti na své rychlosti \hat{u}^μ [12]:

$$E = -p_\mu \hat{u}^\mu = -p^\mu \hat{u}_\mu. \quad (2.22)$$

Nás zde budou zajímat tzv. *Eulerovští pozorovatelé* (viz kapitola 2.2), kteří mají 4-rychlost

$$\hat{u}_\mu = (-1, 0, 0, 0). \quad (2.23)$$

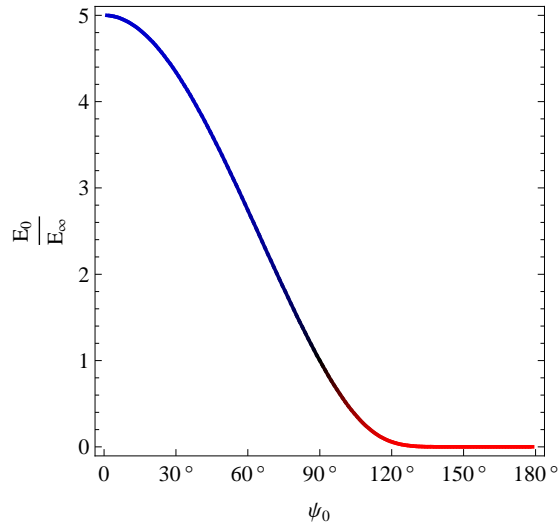
Oni „vidí“ energii

$$E = p^t = g^{t\alpha} p_\alpha = p, \quad (2.24)$$

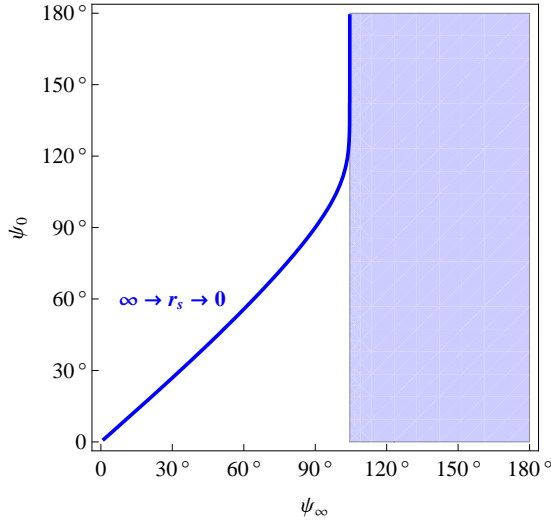
kde jsme v poslední rovnosti využili (2.11). Sledováním trajektorie světla od pozorovatele ve vnějším vesmíru, pohybujícího se rychlostí (2.23), k pozorovateli na lodi, pohybujícímu se touž rychlostí, se dá zjistit, že jimi měřené energie světla E_∞ resp. E_0 jsou různé, tj. dojde k *frekvenčnímu posuvu*, který je zobrazen v Obr. 2.3. Světlo nalétající kolmo na pohyb lodi ($\psi_0 = 90^\circ$) není ovlivněno frekvenčním posuvem — ukázali jsme rovnicí (2.16), že za $p_x = 0$ se nemění žádná z komponent p_i a proto $p = \text{konst.}$ Pro $\psi_0 = 0^\circ$ (vstříc lodi) resp. $\psi_0 = 180^\circ$ Clark et al. [2] ukázali, že

$$\frac{E_0}{E_\infty} = 1 \pm v_s, \quad (2.25)$$

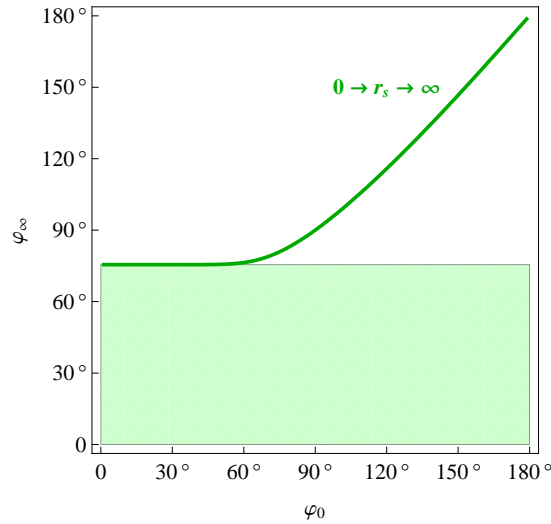
tj. pro $v_s \geq 1$ světlo za lodí nedoletí na loď [2]. Energie světla před lodí se naopak zvýší.



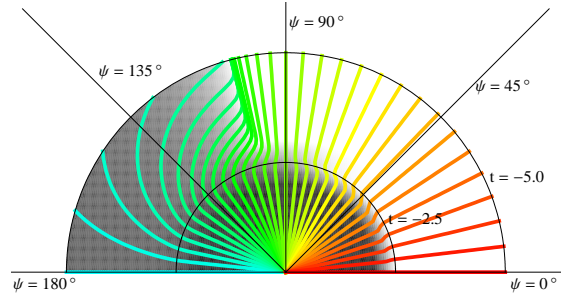
Obrázek 2.3: Frekvenční posuv světla, jež se pohybuje ze vzdáleného (plochého) vesmíru k lodi. Vodorovná osa představuje úhel v xy -rovině, pod kterým světlo dorazí z hlediska pozorovatele na lodi ($\psi_0 = 0^\circ$ vstříc lodi). Na svislé ose je vynesena poměr energie fotonu E_0 , měřené pozorovatelem na lodi, k energii E_∞ , kterou mělo světlo z hlediska vzdáleného stojícího pozorovatele v plochem prostoročase. Barva křivky naznačuje modrý resp. červený posuv. Vepředu tak dorazí světlo s vyšší energií (posunuté k modré/UV), vzadu světlo s menší až nulovou energií (posunuté k červené). Fotony nalétající v kolmém směru nejsou ovlivněny ($E_0 = E_\infty$). Parametry metriky jsou $R = 2.5$, $\sigma = 5$, $v_s = 4$. Pro různé hodnoty v_s viz [2].



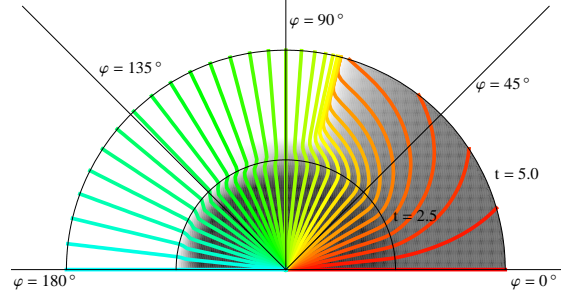
(a) Závislost úhlu ψ_0 na ψ_∞ , které udávají směr pohybu v xy -rovině, ve kterém letí foton od vzdáleného stojícího pozorovatele vně bubliny (ψ_∞) k pozorovateli na lodi uprostřed bubliny (ψ_0). $\psi = 0^\circ$ znamená, že foton přiletá vstříc lodi, tj. proti směru osy x . V kolmém směru pohyb není ovlivněn ($\psi_0 = \psi_\infty = 90^\circ$). Fotony nalétající z vesmíru pod úhlem $\psi_\infty \gtrsim 105^\circ$ (modrá oblast) nedorazí na loď — existuje *horizont* za lodí (pokud $v_s > 0$). Z těchto směrů ($\psi_0 \gtrsim 105^\circ$) jsou na lodi přesto vidět fotony nalétající z vesmíru pod úhlem $\psi_\infty \approx 105^\circ$.



(c) Obrácená situace k Obr. 2.4a: zde fotony jsou vysílány z lodi do vesmíru. Je proto zobrazena závislost $\varphi_\infty(\varphi_0)$, přičemž $\varphi = 0^\circ$ znamená vysílání fotonu v kladném směru osy x . I v tomto případě existuje *horizont*, vyznačený zelenou oblastí: fotony vylétající ve směrech $\varphi_0 \lesssim 60^\circ$ (tj. dopředu pro $v_s > 0$) jsou odchýleny do směru $\varphi_\infty \approx 75^\circ$. Pod úhly $\varphi_0 \lesssim 75^\circ$ vnější pozorovatel nevidí vylétat světlo.



(b) Časový vývoj směrů pohybu fotonů k Obr. 2.4a. Čas t je radiální souřadnicí, rostoucí zvnějšku (minulost) na 0 v počátku, kdy fotony doletí na loď. Úhlová souřadnice ψ odpovídá směru pohybu (nikoli poloze) fotonu (viz Obr. 2.4a) v čase daném poloměrem. Pozadí představuje relativní polohu fotonu vůči bublině popsanou součinem $v_s f(r_s)$, jehož „trajektorie“ prochází daným bodem (t, ψ) v diagramu (bílé = vnějšek bubliny, černé = vnitřek). Fotony nalétající zezadu očividně přicházejí pod úhlem 105° vně bubliny, u kterého vidíme zhuštění čar (horizont). Čára z 180° by „do minulosti“ asi nikdy neopustila bublinu (pokud $v_s = \text{konst.}$), tj. z toho směru zvnějšku nemůže přiletět foton (to je tak kvůli volbě $v_s > 1$ — viz [2]).

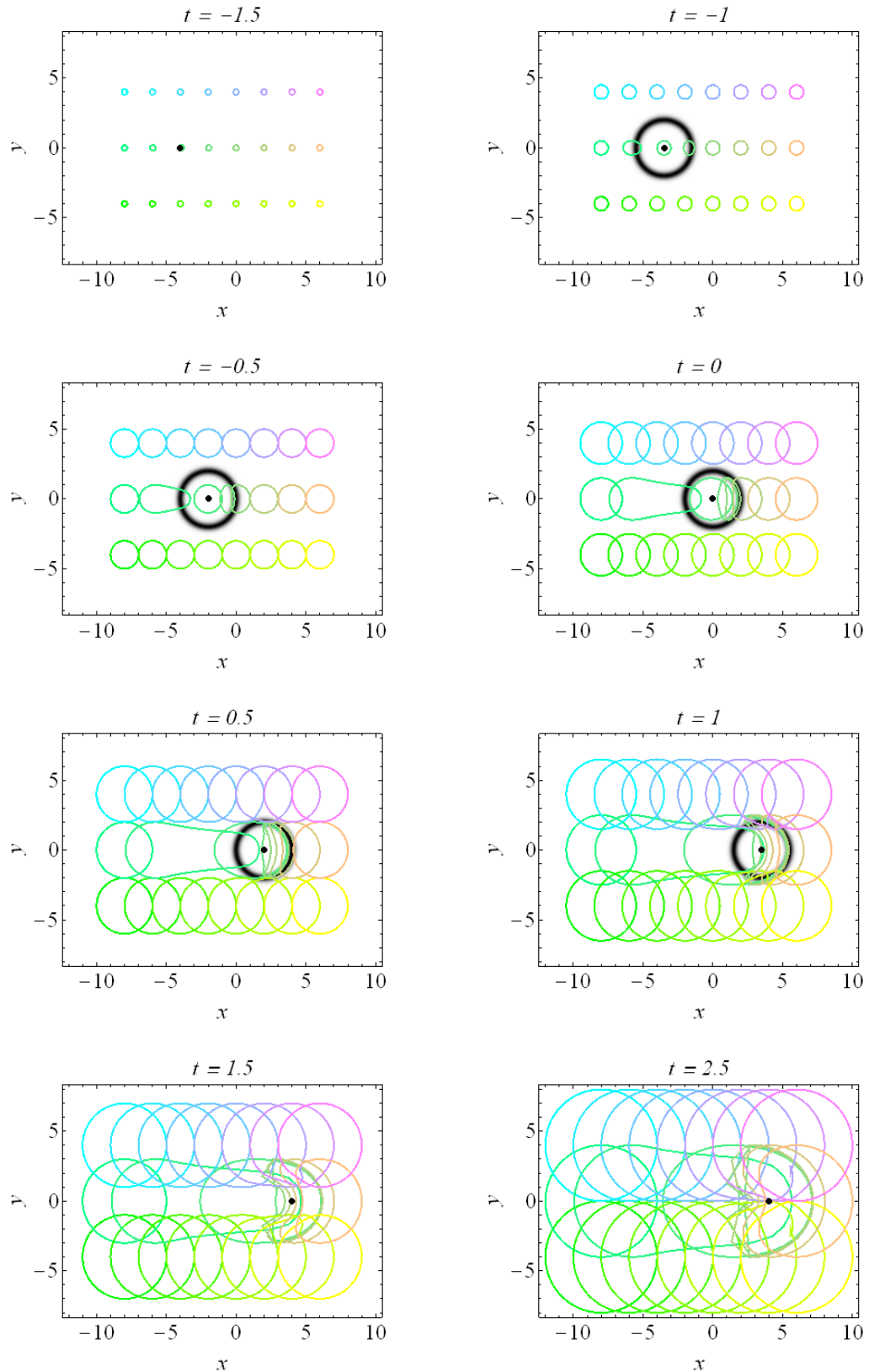


(d) Časový vývoj směrů pohybu fotonů k Obr. 2.4c. Analogicky k Obr. 2.4b, přičemž fotony jsou ale vysílány z lodi a čas s poloměrem roste. Zde fotony dopředu ($\varphi \sim 0^\circ$) bublinu opouštějí pomaleji pod úhlem 75° (horizont). Foton vylétající pod úhlem 0° ji asi nikdy neopustí (bude-li $v_s = \text{konst.}$).

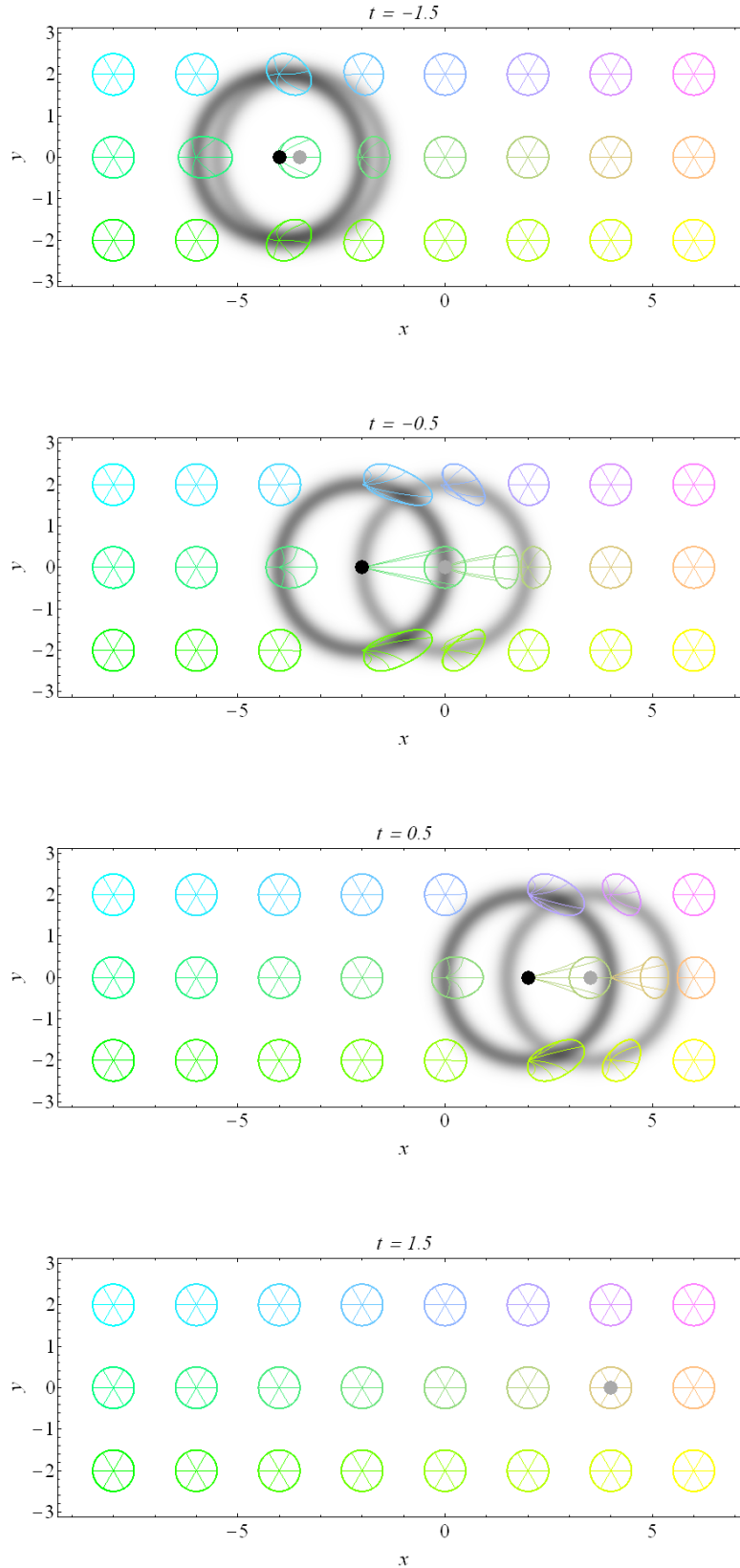
Obrázek 2.4: Horizonty. Ovlivnění směru pohybu fotonů Alcubierrovou bublinou při letu z vesmíru k lodi a letu z lodi do vesmíru. Parametry metriky jsou $R = 2.5$, $\sigma = 5$, $v_s = 4$.

Vedle frekvenčního posuvu lze v pohybových rovnicích pozorovat i strhávání světla s lodí. Uvnitř bubliny se rychlost $d\vec{x}/dt$ podle (2.15) skládá ze „směrové“ části \vec{p}/p a členu ω , který rychlost „strhává“ do systému cestujícího s lodí. To ale změní pouze rychlost $dx^\mu/d\lambda$ resp. $d\vec{x}/dt$, hybnost tímto efektem není ovlivněna. Změnu hybnosti lze pozorovat jen na hranici bubliny, kde $\nabla\omega \neq 0$. Pro rychlost $d\vec{x}/dt$ je přitom podstatná jenom změna směru, ne velikosti hybnosti. Ukáže se [2] [7], že existují směry pohybu, ze kterých světlo nedoletí na loď, a směry, ze kterých světlo vysílané z lodí nedosáhne vesmíru vně bubliny. Takto vzniklé *horizonty* se zdají být charakteristické pro prostoročasy umožňující nadsvětelné cestování [8]. Horizonty v naší metrice jsou znázorněny v Obr. 2.4 (str. 19). V Obr. 2.4a je vidět počáteční směr ψ_∞ fotonu např. vysílaného vnějším stojícím pozorovatelem, i koncový směr ψ_0 , ze kterého foton doletí na loď ($\psi_0 = 0^\circ$ vstříc lodí). Fotony vysílané do směrů $\psi_\infty \in (120^\circ, 180^\circ)$ zjevně nedorazí na loď. Tato oblast je znázorněna modře. Na lodi je v oblasti $\psi_0 \in (120^\circ, 180^\circ)$ vidět světlo, které bylo původně vysláno do jiných směrů ψ_∞ . Co je přímo za lodí tudíž z lodí není vidět, protože světlo ji nedoběhne, ale díky jiným fotonům tam není černá oblast. V Obr. 2.4c naopak vysílá fotony pozorovatel na lodi. Na rozdíl od předchozí situace ale neexistují fotony, které by letěly ve směru $\varphi_\infty \in (0^\circ, 60^\circ)$ (s lodí), tj. zvnějšku je vidět černá oblast přímo před lodí [8]. V Obr. 2.4b a 2.4d vidíme časový vývoj směru pohybu a poznáme horizonty v $\psi = 105^\circ$ pro let fotonů do bubliny a v $\varphi = 75^\circ$ pro let z bubliny ven (detailnější popisky pod obrázky).

Po diskuzi efektů v blízkosti bubliny nyní využijeme pohybové rovnice (2.15) i (2.16) k popisu šíření světla v prostoru. Obr. 2.5 (str. 21) ukáže, jak se zdeformují světelné kužely v prostoru, když jím prolétá loď. Místo vykreslování světelných kuželů v prostoročasovém diagramu vykreslujeme průsečíky kuželů událostí s plochou $t = \text{konst.}$ (deformované kuželosečky). Tučná černá tečka označuje aktuální polohu lodí, jejíž trajektorie je jako v Obr. 2.1 a Obr. 2.2, tj. loď je urychlena v čase $t = -1.5$, má největší rychlost $v = 4$ a zastaví v $t = 1.5$ v poloze $(x, y) = (4, 0)$. Na začátku ($t < -1.5$) se nachází v bodě $(x, y) = (-4, 0)$. Z různých bodů prostoru byly v čase $t = -1.5$ vyslány fotony do všech směrů. Ve vybraných časech a v rovině $z = 0$ představují různě deformované kuželosečky. Barvy slouží k jejich rozlišení. Na obrázku je zřetelně patrný nadsvětelný pohyb vzhledem k našim souřadnicím: Extrémní naklonění světelných kuželů se projeví tím, že místo, ze kterého bylo světlo vysláno, se (uvnitř bubliny) nachází mimo vnitřek kuželosečky. V čase $t = -1$ je již vidět, jak se prodlužuje kuželosečka v $(x, y) = (-6, 0)$ a stlačuje v $(-2, 0)$. Černá kružnice kolem lodí představuje hranici bubliny. V čase $t = -0.5$ je světlo z původní polohy $(-4, 0)$ už značně vychýleno a „cestuje s lodí“. V ostatních obrázcích je vidět, jak se kuželosečky přímo před lodí stlačují, a světlo z ostatních směrů loď strhává s sebou. Mimo hranici je vliv bubliny skutečně zanedbatelný.



Obrázek 2.5: Šíření světla v prostoru, interagujícího s bublinou. V čase $t = -1.5$ se z několika bodů vysílají světelné signály do všech směrů. Černá tečka označuje polohu lodi, černá kružnice je stěna bubliny. Pohyb lodi je identický s Obr. 2.2. Parametry metriky jsou $\sigma = 2$, $R = 2$. Světelné kuželořezy (řezy světelných kuželů) s časem rostou. Interakce s bublinou vede k deformacím kuželořečků, především k prodlužování za lodí (signál z $(x, y) = (-6, 0)$) a k stlačování před ní (body $(-2, 0)$; $(0, 0)$, ...). V čase $t = 1.5$ loď zastaví, další šíření světla se odehrává v Minkowského prostoročase.



Obrázek 2.6: Šíření světla v prostoru, vyslaného v různých časech. Obarvené kuželosečky označují polohy fotonů v časech $t + 0.5$. Radiální čáry naznačují jejich pohyby z počátečního bodu pod několika vybranými úhly. Černá tečka je poloha lodi v čase t , černá kružnice představuje stěny bubliny, šedá tečka i kružnice analogicky v čase $t + 0.5$. V čase $t = 1.5$ je loď v klidu, proto bublina zmizela — prostoročas je nyní Minkowského.

V Obr. 2.6 (str. 22) vidíme, jak se šíří světlo v době $\Delta t = 0.5$, jež bylo vysláno v různých okamžicích. Jde tedy o ilustraci geometrie vrstvy prostoročasu o tloušťce Δt . Pro malé Δt to ilustruje i geometrii nadplochy $t = \text{konst.}$ Parametry metriky jsou shodné s parametry používané v Obr. 2.5, trajektorie lodi také souhlasí. V čase $t = -1.5$, kdy loď je urychlena z klidu, dochází jen k malé deformaci okolních kuželoseček. Vedle zřejmého stlačování kuželoseček na čele bubliny a jejich prodlužování v týlu bubliny je vidět stočení kuželoseček v $(x, y) = (-4, \pm 2)$ ve směru pohybu, protože částečně pronikají stěnou bubliny. Kuželosečka ve středu bubliny cestuje s lodí. Již v počátečním čase je vidět, že střed po době Δt leží mimo vnitřek kuželosečky. Pro velkou rychlost $v = 4$ bublina v dalších časech ($t = -0.5; 0.5$) ovlivňuje více kuželoseček, deformace jsou větší. V čase $t = 1.5$ loď zastaví, světlo se tak šíří v Minkowského prostoročase v obvyklém tvaru sféry, a bublina zmizela.

2.2 Časupodobné geodetiky

Pohyb volných hmotných částic je popsán časupodobnými geodetikami. Po odvození pohybových rovnic se budeme věnovat stojícím pozorovatelům, kteří po cestování bublinou končí opět v klidu. Potom přejdeme i k cestovatelům s počátečními rychlostmi a zkoumáme, jak bublina ovlivňuje jejich světočáry a hybnosti.

Problém časupodobného pohybu je vyřešen v [7] i [5] pomocí rovnice geodetiky. Analogicky k předchozí kapitole zde použijeme Hamiltonův formalismus. Máme hamiltonián

$$H = \frac{1}{2m} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = \frac{1}{2m} \left[p^2 - (p_t + \omega(\vec{x}, t) p_x)^2 \right], \quad (2.26)$$

kde m je klidová hmotnost částice, p_μ její 4-hybnost. Hamiltonovy rovnice si vyjádříme pomocí vlastního času τ :

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad (2.27)$$

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}. \quad (2.28)$$

4-hybnost hmotné částice s klidovou hmotností m má velikost

$$g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -m^2, \quad (2.29)$$

z čehož plyne $H = -m/2$. Rovnost platí pro

$$p_t + \omega p_x = \pm \sqrt{m^2 + p^2}. \quad (2.30)$$

Z (2.27) resp. (2.28) obdržíme

$$\frac{dt}{d\tau} = \mp \frac{1}{m} \sqrt{m^2 + p^2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \mp \frac{1}{m} \sqrt{m^2 + p^2} [\omega, 0, 0] + \frac{\vec{p}}{m}, \quad (2.32)$$

$$\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \pm \frac{p_x}{m} \sqrt{m^2 + p^2} \nabla \omega, \quad (2.33)$$

složku p_t dopočítáme z (2.30). Chceme-li, aby vlastní čas τ a souřadnicový čas t dle (2.31) plynuly ve stejném směru, musíme zvolit záporné znaménko v (2.30). Pomocí (2.31) lze vyjádřit závislosti na souřadnicovém čase t :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [\omega, 0, 0] + \frac{\vec{p}}{\sqrt{m^2 + p^2}}, \quad (2.34)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -p_x \nabla \omega. \quad (2.35)$$

Pro konkrétní světočáry pak zvolíme počáteční polohu (t_0, \vec{x}_0) i hybnost:

$$p_t(t_0) = -\sqrt{m^2 + p_0^2} - \omega(\vec{x}_0, t_0) p_x(t_0), \quad (2.36)$$

$$p_x(t_0) = p_0 \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (2.37)$$

$$p_y(t_0) = p_0 \sin \vartheta \sin \varphi, \quad (2.38)$$

$$p_z(t_0) = p_0 \cos \vartheta, \quad (2.39)$$

kde úhly $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi)$, klidová hmotnost $m \geq 0$ a hybnost $p_0 \geq 0$.

Již v pohybových rovnicích světla jsme zjistili, že zvláštním případem je $p_x = 0$. I pro hmotné částice vidíme z (2.35), že $\vec{p} = \text{konst.}$, pokud $p_x = 0$. Rychlost je pak pouze ovlivněna polohou \vec{x} , která vystupuje v ω . Uvnitř bubliny je $\omega \sim v_s \neq 0$. Jako u fotonů je proto k obvyklé rychlosti, kterou představuje člen $\vec{p}/\sqrt{m^2 + p^2}$, přičten „strhávací“ člen ω ; lze říci, že částice „cestuje s lodí“, přičemž vůči ní má rychlost $\vec{p}/\sqrt{m^2 + p^2}$. Strhávání není omezeno jen na $p_x = 0$, ale ovlivňuje všechny pozorovatele. Zvláštní na pozorovatelích s $p_x = 0$ je však to, že po opuštění bubliny jsou zase v klidu: vně bubliny je $\omega = 0$, tj. stojící pozorovatel ($p_x = p_y = p_z = 0$) skutečně stojí, a pozorovatel s kolmou hybností ($p_y \neq 0$ nebo $p_z \neq 0$) se pohybuje stále v kolmém směru. Pohybové rovnice tam přejdou v obvyklé rovnice v Minkowského souřadnicích. Pro pozorovatele s $p_x \neq 0$ se ale mění hybnost na hranici bubliny podle (2.35), protože tam je $\nabla \omega \neq 0$. Mají pak rychlosti obecně různé od počátečních rychlostí.

Mezi případy stojících pozorovatelů ($\vec{p} = 0$) patří i pohyb lodi uprostřed bubliny, pro niž přesně platí $\omega = v_s$.

Pohybové rovnice (2.34) a (2.35) můžeme redukovat na jednorozměrný pohyb ve směru x . Volbou úhlů

$$\varphi = 0; \pi, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (2.40)$$

dosáhneme

$$p_y(t_0) = p_z(t_0) = 0, \quad (2.41)$$

čímž se částice v čase t_0 nepohybuje v kolmém směru, neboť

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t_0} = 0. \quad (2.42)$$

Pokud navíc požadujeme, aby se částice na začátku nacházela na x -ové ose ($y_0 = z_0 = 0$), dostaneme

$$(\nabla \omega)_y(t_0) = (\nabla \omega)_z(t_0) = 0, \quad (2.43)$$

z čehož plyne

$$\left. \frac{dp_y}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{dp_z}{dt} \right|_{t_0} = 0. \quad (2.44)$$

To má za důsledek, že se během celého pohybu nemění ani souřadnice y , z , ani hybnosti p_y , p_z . Částice pak letí pouze v x -ovém směru:

$$\frac{dx}{dt} = \omega + \frac{p_x}{\sqrt{m^2 + p_x^2}}, \quad (2.45)$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -p_x \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad (2.46)$$

kde $p_x \in \mathbb{R}$.

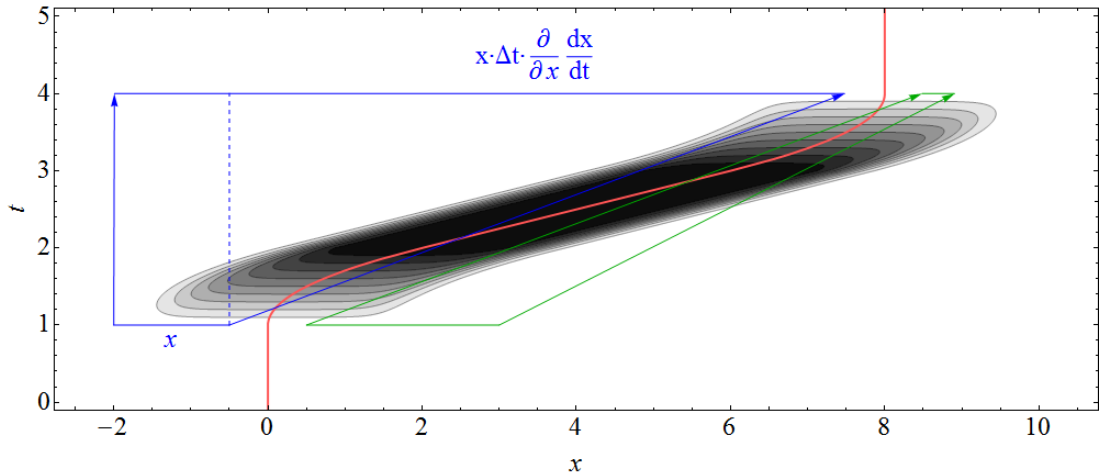
Geodetiky „stojících“ pozorovatelů (v našem porozumění: $\vec{p} = 0$), tzv. *Eulerovských pozorovatelů*, jsou zobrazeny v Obr. 2.8 (str. 26)². Zjistili jsme, že v tomto případě není ovlivněna hybnost \vec{p} . To je v obrázku vidět na tom, že světové čáry všech pozorovatelů po procestování Alcubierrovou metrikou jsou opět svislé (Obr. 2.8a) resp. že y -ová souřadnice se nemění (Obr. 2.8b a Obr. 2.8c). Pozorovatelé s $p_y = p_z = 0$ mají nejjednodušší pohybové rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \omega, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.47)$$

Při „urychlování“ a „brzdění“ lodi pomocí Alcubierrové metriky je patrné, že geodetiky před lodí jsou stlačovány, zatímco geodetiky za ní se vzdalují. Vezmeme-li malý kousek objemu V naplněný částicemi s $\vec{p} = 0$, můžeme ΔV popsat výrazem³

$$\Delta V = V \Delta t \nabla \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (2.48)$$

jak pro jednu dimenzi $V \sim x$ vidíme z Obr. 2.7.



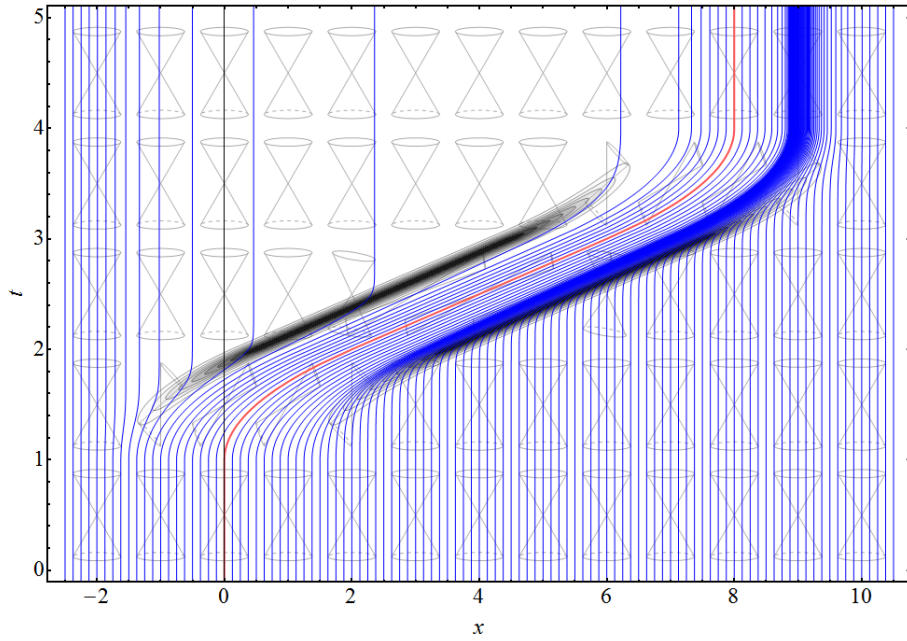
Obrázek 2.7: Expanze a komprese prostoru. „Objem“ mezi modrými pozorovateli se metrikou zvětšil, objem mezi zelenými pozorovateli se zmenšil.

Expanzí rozumíme rychlost změny jednotkového objemu:

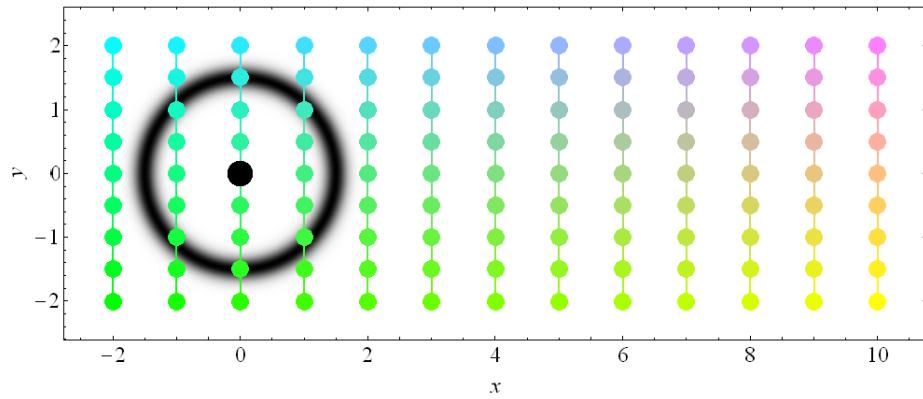
$$\theta = \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \nabla \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (2.49)$$

²V Dodatku A je vysvětleno, jak Obr. 2.8a byl vytvořen.

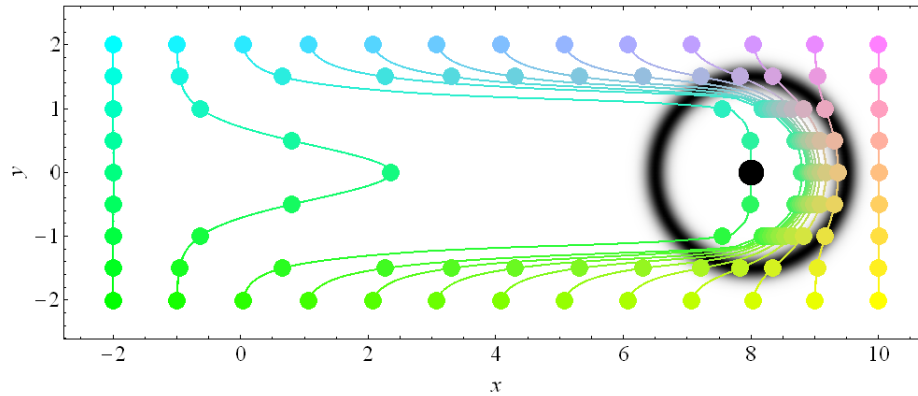
³Toto „odvození“ platí u Alcubierrové metriky. Obecná definice *expanze* je podána např. v [12].



(a) Časový vývoj pohybu stojících pozorovatelů v x -ové ose. Je vidět shluk geodetik před bublinou, a rozptýlení za ní. Všichni pozorovatelé se ale po cestování vrátí do klidu.



(b) Pozorovatelé v xy -rovině před warpovým cestováním ($t = 1$). Černá tečka s kružnicí je opět loď, obklopená warpovou bublinou. Ostatní barevné tečky označují počáteční polohy stojících pozorovatelů. Svislé spojnice slouží pouze k znázornění roztahování a stlačování sousedních geodetik v Obr. 2.8.



(c) Pozorovatelé v xy -rovině po warpovém cestování ($t = 4$).

Obrázek 2.8: Trajektorie stojících pozorovatelů. Na začátku jsou pozorovatelé stejně vzdálení, po cestování lodí Alcubierrovou metrikou se před bublinou shromáždí, za ní se rozptýlí.

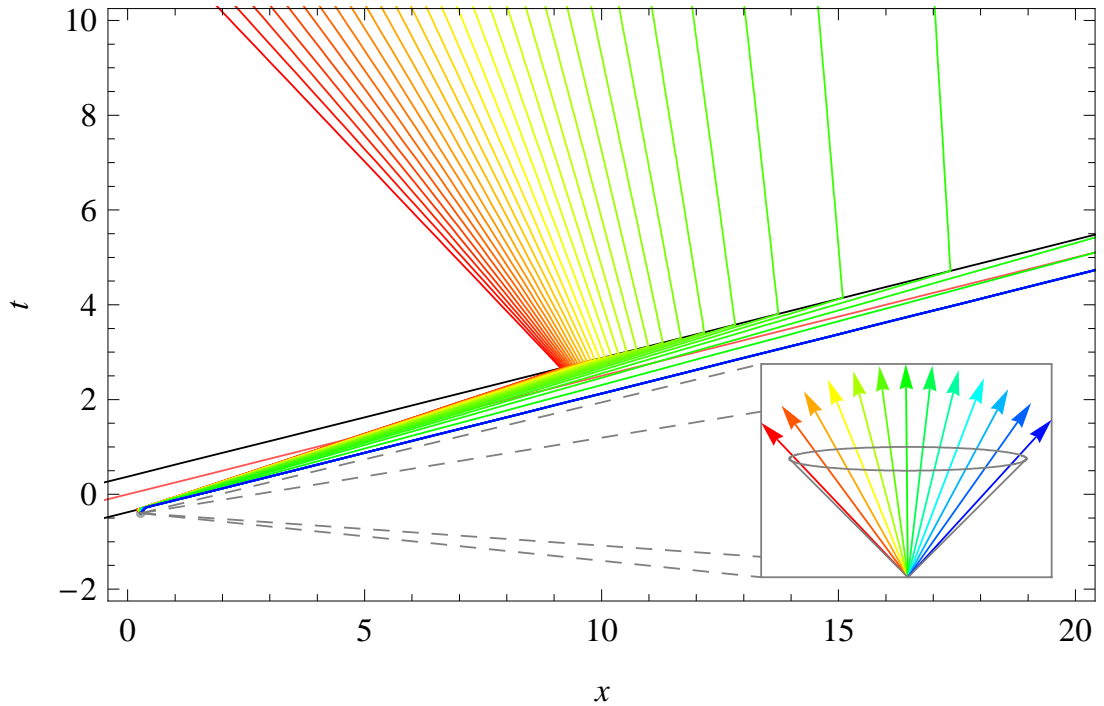
kde v poslední rovnosti jsme dosadili z (2.48). Pro naši metriku a Eulerovské pozorovatele v ní dostáváme:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial \omega}{\partial x} = v_s \frac{x - x_s}{r_s} \frac{df}{dr_s}. \quad (2.50)$$

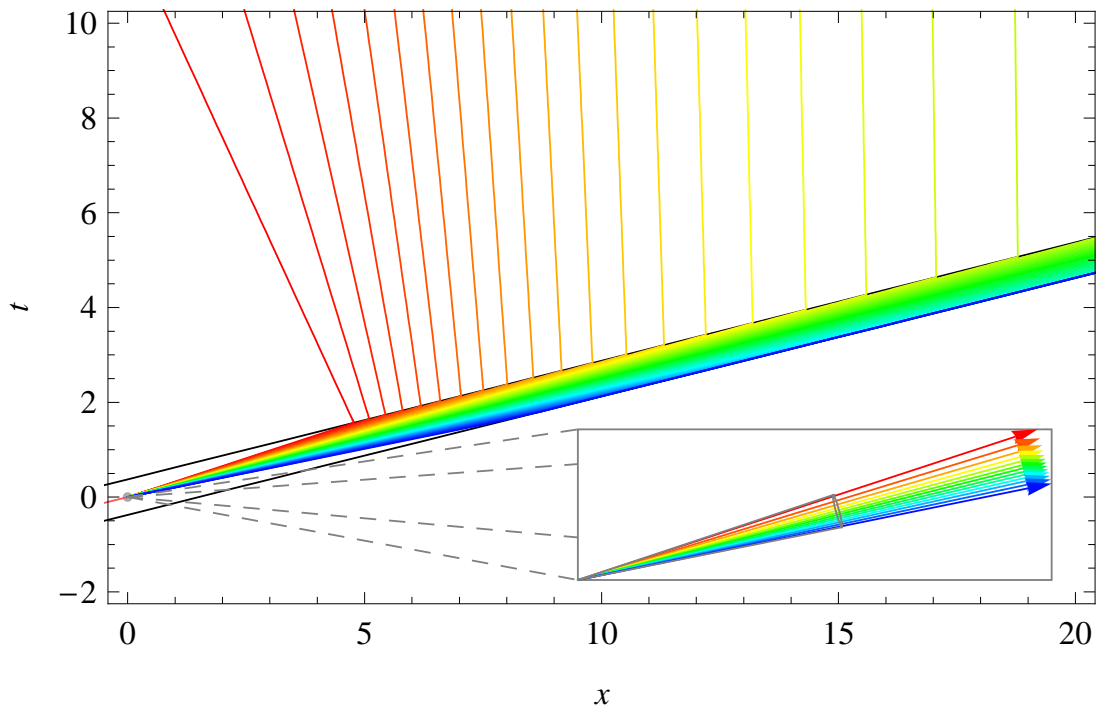
Před lodí tedy dojde ke kontrakci prostoru ($df/dr_s < 0$), za ní k jeho expanzi. Bylo však ukázáno J. Natáriem [8], že lze také zkonstruovat warpové metriky, u nichž expanze vymizí. V těchto případech je expanze ve směru pohybu lodi vykompenzována kompresí v kolmých směrech [8]. V případě expanze se tedy nejedná o podstatu související s nadsvětelným cestováním, ale o konkrétní vlastnost metriky (1.31).

Obr. 2.9 (str. 28) znázorňuje geodetiky částic v x -ové ose, které se rozletěly v blízkosti bubliny a z lodi různými hybnostmi. V Obr. 2.9a startovaly těsně před bublinou; stěnu bubliny jsme zvolili tenkou ($\sigma = 60$), aby se nacházely v Minkowského oblasti. Částice, které startovaly proti směru osy brzy po vstupu do bubliny ji zase opustí, ale v různých místech. Vzdálenost sousedních světočar se zvětšuje. Částice, které startovaly v kladném směru osy, se přiklání k přední stěně bubliny.

V Obr. 2.9b částice vysíláme z lodi. I zde se částice s „kladnou“ hybností (modré barvy) blíží k přední hranici a letí podél ní. Částice v protisměru opustí loď s menšími hybnostmi než v Obr. 2.9a. Ostatní částice se pomalu vzdalují od středu bubliny a letí rychlostí $v_s \doteq 4$ (zelené).

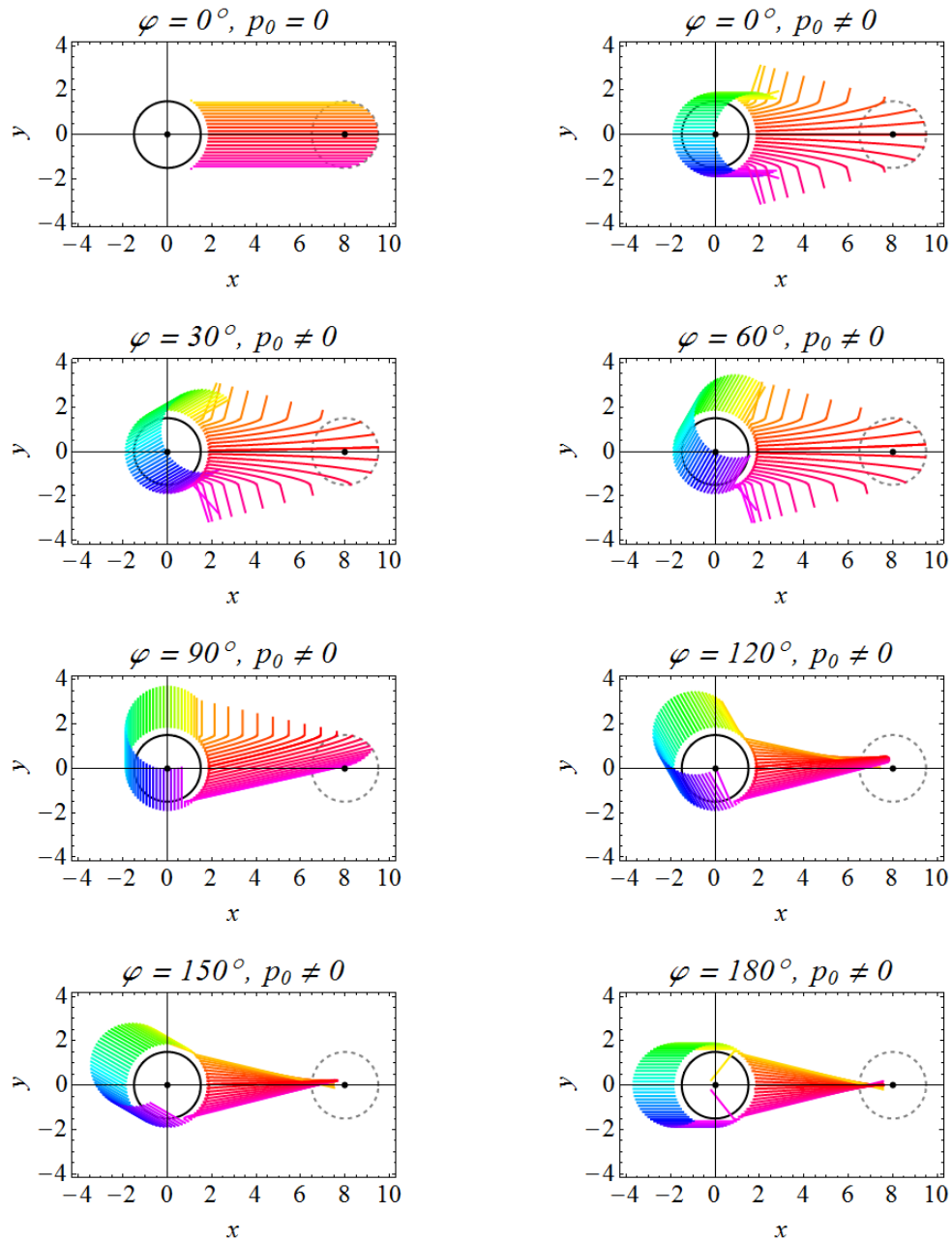


(a) Částice v x -ové ose startují ve vzdálenosti $1.25R$ od lodi s počátečními hybnostmi znázorněnými šipkami v světelném kuželi. Vnikají do bubliny a postupně ji opouštějí proti směru osy x . Částice s kladnou složkou hybnosti p_x cestují podél přední hranice.



(b) Částice startují z lodi.

Obrázek 2.9: Časupodobné geodetiky při interakci s bublinou. Částice se rozletí ze stejného bodu různými hybnostmi. Počáteční poloha je vyznačena šedivou tečkou. Poloměr bubliny je $R = 1.5$, ostrost hranice bubliny $\sigma = 60$. Loď letí rychlostí $v_s = 4$. Částice s různými počátečními hybnostmi p_0 jsou odlišeny barvou. Odpovídající hybnosti jsou uvedeny legendou ve tvaru šipek o různých přírůstcích, rovnoměrně pokrývajících vnitřek světelného kuželu.



Obrázek 2.10: Časupodobné geodetiky v xy -rovině. Loď letí celou dobu konstantní rychlostí $v_s = 4$, poloměr bubliny je $R = 1.5$, ostrost $\sigma = 60$. V okamžiku, kdy loď se nachází v poloze označené černou tečkou startují částice v blízkosti hranice bubliny, vybarvené černě, se stejnou hybností $p_0 = 0$ resp. $p_0 > 0$. V každém obrázku jsou směry hybností všech částic shodné. Směr je popsán úhlem φ sevřeným s osou x . Čáry pak označují dráhy jednotlivých částic, uražené ve stejném časovém intervalu. Koncová poloha lodi je znázorněna černou tečkou obklopenou šedivou hranicí bubliny.

V Obr. 2.10 jsou zobrazeny geodetiky hmotných částic v xy -rovině. Počáteční polohy byly zvoleny v blízkosti hranice bubliny, protože tam dojde k zakřivení dráhy. Pro různé směry hybnosti je pak vidět, jak se jednotlivé částice pohybují. Když hybnost je $p_0 = 0$, tj. případ diskutovaný v Obr. 2.8, jsou „urychleny“ pouze částice před bublinou. Pro $\varphi = 0^\circ$, $p_0 \neq 0$ pak vidíme, že se pohybují i částice vzadu, ale rovněž nejsou urychleny, nýbrž letí konstantní rychlostí, danou

počáteční hybností p_0 . To lze pozorovat i ve všech ostatních obrázcích: pohyb zadních pozorovatelů není ovlivněn bublinou. Přední částice zase mají rychlost danou hybností včetně strhávacího členu. Je dobře vidět „lom“ jejich světočáry, když opustí bublinu. Z $\varphi = 90^\circ$ se zjistí, že částice po opuštění bubliny letí v kolmém směru. To je v souladu s našimi odvozeními, podle kterých hybnosti při kolmém pohybu ($p_x = 0$) nejsou ovlivněny.

2.3 Kauzální struktura

Události mohou být svázány: Pokud jedna událost vede k druhé, nazveme první z nich *příčinou*, druhou *následkem*, a říkáme, že jsou *kauzálně svázané* [12]. Očekáváme, že takovýto vztah nebude záviset na souřadném systému.

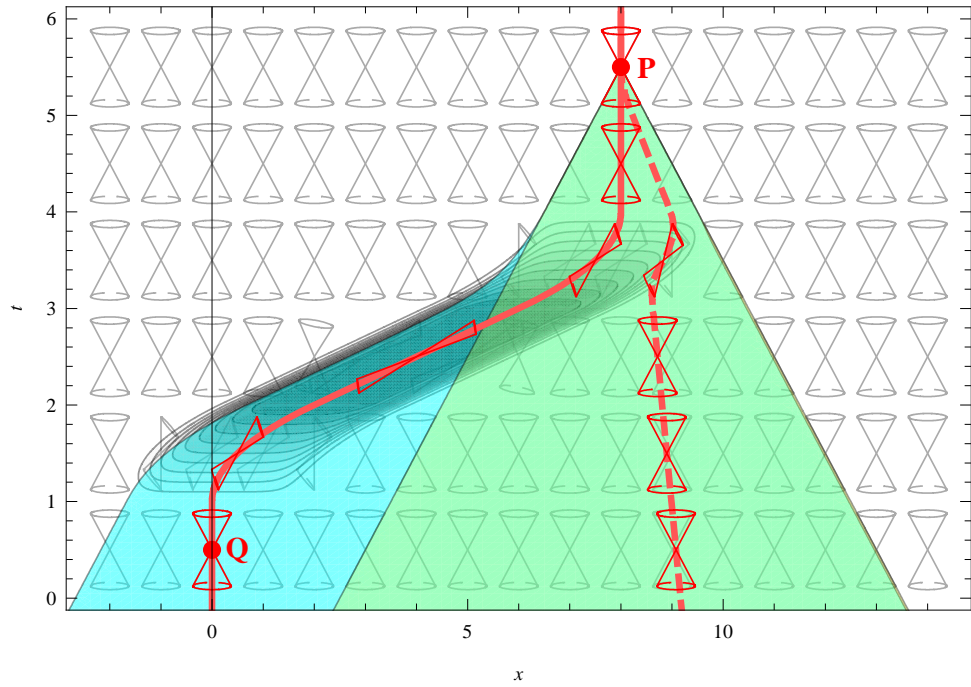
Ve speciální relativitě rozhoduje o možnosti, jestli jedna událost může být v příčinné relaci s druhou, znaménko prostoročasového intervalu. V obecné relativitě definujeme následující množiny:

Kauzální budoucnost události P nazýváme množinu všech událostí Q , které jsou spojeny s P časupodobnou, nanejvýš světelnou křivkou, která z P do Q směřuje do budoucnosti, tj. jejíž tečné vektory v každém bodě míří do budoucnosti [12]. Tuto množinu značíme $J^+(P)$.

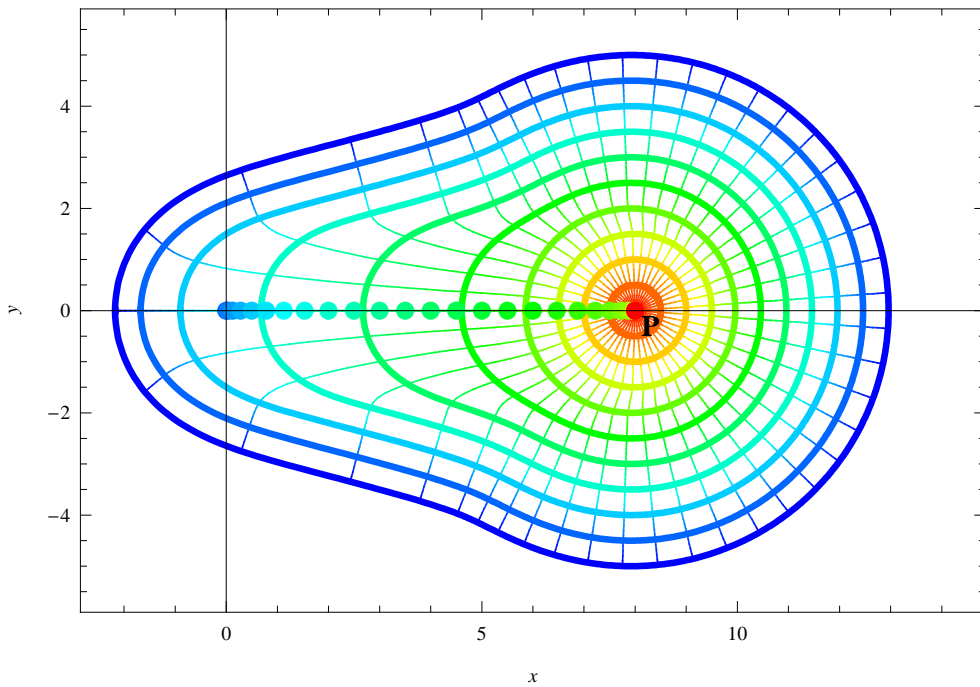
Analogicky definujeme *kauzální minulost* $J^-(P)$ množinu všech událostí Q , které spojuje časupodobná/světelná křivka, směřující z Q do P do budoucnosti [12].

Podmínkou k definici těchto kauzálních množin je *časová orientovatelnost* prostoročasu [12] – jinak by se nedalo říci, jakým směrem křivky míří do budoucnosti.

S pomocí $J^-(p)$ můžeme ukázat, v jakém smyslu jde v Alcubierrově metrice o nadsvětelný pohyb. V Obr. 2.11 jsou zobrazeny oblasti kauzální minulosti v Alcubierrově i Minkowského metrice. Alcubierrova metrika ($R = 1.5$, $\sigma = 3$) působí v $t \in (1, 4)$. V intervalu $t \in (2, 3)$ letí pozorovatel, pohybující se po tučné červené světočáře, rychlostí $v = 4$. Oblast Minkowského kauzální minulosti $J_M^-(P)$ události $P = (x, t) = (8, 5.5)$ je obarvena žlutě a překrývá se s modrou oblastí. Vidíme, že $Q \notin J_M^-(P)$, tj. kdyby byl přelán signál mezi P a $Q = (0, 0.5)$, pak by letěl nadsvětelnou rychlostí. V Alcubierrově metrice, kde kauzální minulost $J_A^-(P)$ jsme naznačili modrou oblastí, ale jasně $Q \in J_A^-(P)$.

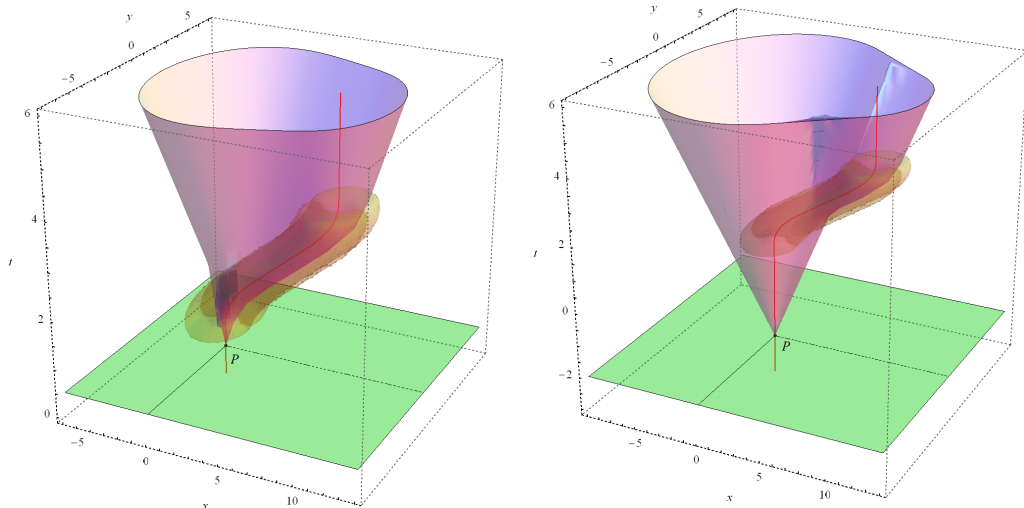


(a) Porovnání kauzální minulosti $J^-(P)$ v Alcubierrově a Minkowského metrice. Oblast, kde se překrývají, je obarvena zeleně, tj. oblast Minkowského kauzální minulosti $J_M^-(P)$ je téměř celá pokrytá oblastí Alcubierrově kauzální minulosti $J_A^-(P)$. Pohyb lodi popisuje tučná červená čára, pohyb dalšího pozorovatele, ovlivněného zakřivením, čárkovaná čára. Bublina je znázorněna isočarami. Je patrné, že událost $Q \in J_A^-(P)$ v křivém warpovém prostoročase, zatímco $Q \notin J_M^-(P)$ v plochem.



(b) Řezy kauzální minulosti $J^-(P)$ v časech $t = 0.5; 1; 1.5; 2; \dots; 5.5$ v rovině $z = 0$. Její hranice jsou zobrazeny tučnými křivkami. Radiální čáry ukazují šíření signálů do bodu $(x, y) = (8, 0)$, tečky označují polohu lodi v různých časech t ($\Delta t = 0.125$). Stejně obarvené body představují hranici kauzální minulosti resp. polohu lodi ve stejném okamžiku.

Obrázek 2.11: Oblast kauzální minulosti události P na trajektorii lodi.



(a) „Zapnutí“ resp. „vypnutí“ rozhodnuto těsně před vybudováním koridoru. Žluté oblasti představující hmotu, která určuje geometrii, nejsou celé dosaženy signálem z $P = (x, y, t) = (0, 0, 0.5)$. Takto by se prostoročas (bez pomoci zvnějšku lodi) již nedal vybudovat.

(b) Rozhodnutí v $P = (0, 0, -2)$. Zde je již většina hmoty uvnitř trychtýře, část ale pořád chybí a mělo by se rozhodnout ještě dříve.

Obrázek 2.12: Kauzální budoucnost událostí P , která vyvolá rozmístění hmoty, potřebné k vybudování warpového koridoru. Parametry metriky a trajektorie lodi jsou shodné s Obr. 2.11.

Dosud jsme se nezabývali tím, jak se koridor popsany Alcubierrovou metrikou vybuduje. V kapitole 1.3 jsme řekli, že změna geometrie prostoročasu je spojena s určitým rozmístěním hmoty, jehož odvození se budeme věnovat v kapitole 3.1

Pokud bychom chtěli mluvit o tom, že jsme koridor zapnuli z lodi, museli bychom mít přinejmenším možnost do příslušných míst informaci sdělit, např. poslat světelný signál. To je zobrazeno v Obr. 2.12, kde je posláno světlo z $t = -2$, aby byl vybudován koridor pro trajektorii lodi z Obr. 2.11. Žlutá jsou místa, kde se nachází exotická hmota vytvářející koridor a kam je tedy třeba poslat signál. Posádka lodi se tudíž musí rozhodnout pro „zapnutí“ i „vypnutí“ Alcubierrové metriky s dostatečným předstihem. Šíření světelného signálu z bodu $(x, y, t) = (0, 0, -2)$, jenž byl zvolen jako okamžik rozhodnutí, je ukázáno v Obr. 2.12 fialovým trychtýřem. Hmota tvořící stěny koridoru ale zjevně není celá uvnitř trychtýře (Obr. 2.12b), rozhodnout by se mělo dokonce dříve. V Obr. 2.12a vidíme, že zapnutí těsně před vybudováním koridoru není možné, protože spousta hmoty leží mimo oblast dosažitelnou světelným signálem z P .

3 Omezení a realizace

3.1 Rozložení hmoty

Určité geometrie prostoročasu dosáhneme pouze vhodným rozložením hmoty, jak jsme naznačili v kapitole 1.3. Spojku tvoří Einsteinovy rovnice

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.1)$$

Z levé „geometrické“ strany se dají přímočaře spočítat složky tenzoru energie a hybnosti $T_{\mu\nu}$, což je jednodušší než obrácená situace, kdy pro dané rozložení hmoty hledáme příslušnou metriku. Brzy ale uvidíme, že naše cesta vede k nefyzikálním výsledkům.

Lze ukázat, že hustota energie-hmoty ρ v lokálním systému pozorovatele je dána složkou

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = \rho c^2. \quad (3.2)$$

V každém jiném systému bychom tuto složku obdrželi zúžením se 4-rychlostí tohoto pozorovatele

$$T^{\hat{0}\hat{0}} = T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu, \quad (3.3)$$

jelikož víme, že 4-rychlost působí jako projektor na směr jeho pohybu.

V Alcubierrově metrice zavádíme *Eulerovské pozorovatele* se 4-rychlostí [1]

$$u_\mu = (-1, 0, 0, 0), \quad (3.4)$$

kterí odpovídají pozorovatelům s hybností $\vec{p} = 0$, diskutovaným v kapitole 2.2. Kontravariantní složky 4-rychlosti jsou tedy

$$u^\mu = (1, v_s(t)f(r_s), 0, 0). \quad (3.5)$$

Jak jsme již zmínili, pro $v_s > 1$ v globální metrice v blízkosti bubliny není možné zůstat stát na místě, tj. $u^\mu \not\sim (1, 0, 0, 0)$.

Složky $T^{\mu\nu}$ jsme určili z kontravariantní verze (3.1)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi} G^{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

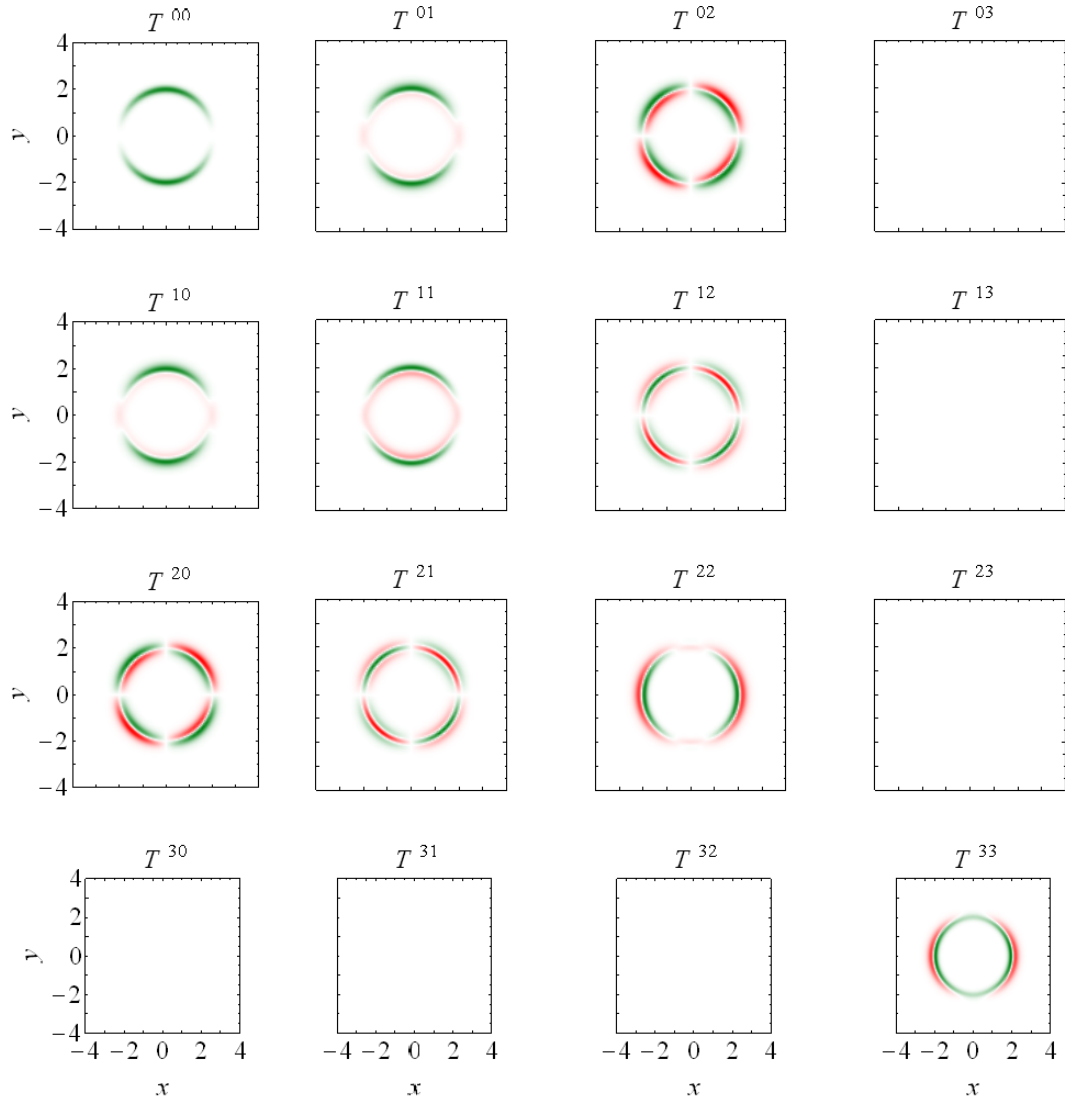
jednotlivé složky Einsteinova tenzoru jsou uvedeny v Dodatku B. Složka

$$T^{00} = -\frac{1}{8\pi} \frac{v_s^2 \rho^2}{4r_s^2} \left(\frac{df}{dr_s} \right)^2 \quad (3.7)$$

představuje rozložení hmoty z hlediska pozorovatelů se 4-rychlostí (3.5) [1] [9]. Zde ρ je kolmá část vzdálenosti od lodi:

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}. \quad (3.8)$$

Všechny složky v xy -rovině jsou zobrazeny v Obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Složky tenzoru energie a hybnosti $T^{\mu\nu}$ v xy -rovině ($v_s = 4$, $\sigma = 5$, $R = 2$). Červené oblasti označují kladné hodnoty, zelené záporné. Každá komponenta je samostatně normalizovaná. Složka T^{00} odpovídá přímo energii, kterou vidí Eulerovští pozorovatelé. Je čistě záporná.

Z rovnice (3.7) i Obr. 3.1 je patrné, že hustota energie z hlediska Eulerovských pozorovatelů je záporná. Té odpovídá *exotická hmota* ($\rho < 0$) [1], která ale žádnému známému fyzikálnímu poli neodpovídá. Proto nedokážeme v „klasické“ relativistické mechanice vytvořit Alcubierrovu metriku.

3.2 Modifikace

Došli jsme k závěru, že na našich (velkých) rozměrech nelze cestovat ve warpové bublině, popsané Alcubierrovou metriku. Má ale smysl zkoumat, jestli a za jakých podmínek to dovoluje kvantová mechanika. Vhodnými modifikacemi metriky lze podmínky zeslabit. Jedním takovým příkladem je metrika navržená C. Van Den Broeckem [11], kterou krátce načrtneme.

M.J. Pfenning a L.H. Ford [9] odvodili z relací neurčitosti kvantové mechaniky podmínku pro tloušťku hranice bubliny Δ . Ukázali pro zjednodušenou přechodo-

vou funkci

$$f(r_s) = \begin{cases} 1 & r_s \in (0, R - \frac{1}{2}\Delta), \\ -\frac{1}{\Delta}(r_s - R - \frac{1}{2}\Delta) & r_s \in (R - \frac{1}{2}\Delta, R + \frac{1}{2}\Delta), \\ 0 & r_s \in (R + \frac{1}{2}\Delta, \infty), \end{cases} \quad (3.9)$$

že musí platit

$$\Delta \leq 10^2 v_s L_{\text{Planck}}, \quad (3.10)$$

kde $L_{\text{Planck}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35}$ m je Planckova délka [9]. Při nesplnění (3.10) jsou energetické nerovnosti porušeny i v kvantověmechanickém smyslu. Pro „rozumné“ rychlosti $|v_s| \ll \infty$ tato podmínka znamená, že $f(r_s)$ musí být skoková funkce ($\Delta \sim 0$).

Pro novou přechodovou funkci a konstantní rychlost lodi v_s lze jednoduše spočítat celkovou energii rozloženou v prostoru v daném čase [9]

$$E = -\frac{1}{12} v_s^2 \left(\frac{R^2}{\Delta} + \frac{\Delta}{12} \right), \quad (3.11)$$

zanedbáme-li kladný příspěvek lodi. Pro poloměr $R = 100$ m [9], oproti němuž tloušťka Δ , omezená podmínkou (3.10), je zanedbatelně malá, máme odhad

$$E \leq -6.2 \cdot 10^{62} v_s \text{ kg}, \quad (3.12)$$

což je v absolutní hodnotě víc než klasická hmota obsažená ve viditelném vesmíru [9] [11]. V našich rozměrech tudíž nelze vytvořit Alcubierrovu metriku bez modifikace.

C. Van Den Broeck [11] využil toho, že pro bubliny v subatomárních rozměrech ($R \sim 10^{-15}$ m) energie nebude tak velká. Vložil proto bublinu s velkým objemem do vnější Alcubierrové bubliny, jejíž povrch držel malý. Takový prostoročas je popsán metrikou

$$ds^2 = -dt^2 + B^2(r_s) [(dx - v_s(t)f(r_s))^2 + dy^2 + dz^2], \quad (3.13)$$

kde funkce $B(r_s)$ určuje měření objemu pro daný poloměr r_s . Vložená bublina necht má poloměr \tilde{R} s tloušťkou hranice $\tilde{\Delta}$. Pak funkci můžeme charakterizovat

$$B(r_s) \begin{cases} = 1 + \alpha & r_s < \tilde{R}, \\ \in (1, 1 + \alpha) & r_s \in (\tilde{R}, \tilde{R} + \tilde{\Delta}), \\ = 1 & r_s > \tilde{R} + \tilde{\Delta}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Konstanta α je obecně velká, aby se vešla loď. Podstatně tím snížil množství potřebné exotické energie, která se ale pořád pohybuje v řádu 10^{30} kg, tj. v oboru sluneční hmotnosti [11].

Závěr

Objasnili jsme, jakým způsobem lze cestování v Alcubierrově chápat jako nadsvětelný pohyb: přešli jsme od jednoduché souřadnicové transformace k dynamickému prostoročasu, v němž jsme se setkali s horizonty a exotickou hmotou, které se vyskytují i v jiných prostoročasech umožňujících nadsvětelné cestování, jako např. u červích děr. Zjistili jsme, že kauzální množiny v Alcubierrově a Minkowského metrice se liší a tak je ve warpové metrice možné posílat signály mezi body, které by v plochem prostoročase byly prostorupodobně vzdálené a tím kauzálně nesvázané. Ukázali jsme též, že kauzálně nelze okamžitě „spustit“ metriku, ale musí se rozhodnout dostatečně před vybudováním koridoru o „zapnutí“ i „vypnutí“, má-li být cestování ovládatelné přímo z kosmické lodi. Popsali jsme pohyb světla a hmotných částice v daném prostoročase. Speciálně pro loď cestující uprostřed Alcubierrovy bubliny jsme naproti Lorentzovým transformacím pozorovali, že kupodivu nedochází k dilataci času. To je výhoda, protože i kdybychom ve speciální relativitě dokázali cestovat blízko rychlosti světla, čas vně lodi by plynul mnohem rychleji než na lodi. Podstatným závěrem diskuze rozmístění hmoty, kterým lze popsaný prostoročas vytvořit, je ten, že tuto metriku lze spíše chápat jako myšlenkový experiment.

Vedle horizontů a exotické hmoty existuje řada dalších vlastností, které Alcubierrův prostoročas sdílí s jinými „nadsvětelnými“ prostoročasy, a které jsme zde neprobírali. Jednoduchou Lorentzovskou transformací by se např. dalo ukázat, že loď z hlediska jiných systémů cestuje zpátky v čase [3]. Dal by se dokonce vytvořit prostoročas, ve kterém existují *uzavřené časopodobné smyčky*, tj. dráhy, které se vrátí do svého východiska v prostoru *i v čase* [3]. Bohužel Alcubierrova metrika s ostatními „nadsvětelnými“ prostoročasy má společné i porušení energetických podmínek, jak jsme zjistili v kapitole 3.1.

I když se zdá, že takové nehezké vlastnosti jsou způsobeny nadsvětelným cestováním, dá se ukázat, že metrika nedodrží energetické podmínky ani za malých rychlostí $v \ll c$, které zkoumali F.S.N. Lobo a M. Visser [4]. Ukázali, že i při podsvětelných rychlostech bude potřeba podstatný příspěvek exotické hmoty [4], i když tento prostoročas by ještě neumožnil nadsvětelné cestování.

Seznam použité literatury

- [1] ALCUBIERRE, M. The warp drive: hyper-fast travel within general relativity. *Class. Quantum Grav.* 1994, **11**, L73–L77.
- [2] CLARK, C., HISCOCK, W. A LARSON, S. Null geodesics in the Alcubierre warp-drive spacetime: the view from the bridge. *Class. Quantum Grav.* 1999, **16**, 3965–3972.
- [3] EVERETT, A. Warp drive and causality. *Physical Review D* 1996, **53**(12).
- [4] LOBO, F. A VISSER, M. Fundamental limitations on “warp drive” spacetimes. *arXiv:gr-qc/0406083*, 2004.
- [5] MCMONIGAL, B., LEWIS, G. A O’BYRNE, P. The Alcubierre Warp Drive: On the Matter of Matter. *arXiv:gr-qc/1202.5708*, 2012.
- [6] MISNER, W., THORNE, K. A WHEELER, J. *Gravitation*. San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973.
- [7] MÜLLER, T. A WEISKOPF, D. Detailed study of null and timelike geodesics in the Alcubierre warp spacetime. *Gen Relativ Gravit* 2012, **44**, 509–533.
- [8] NATÁRIO, J. Warp drive with zero expansion. *Class. Quantum Grav.* 2002, **19**, 1157–1165.
- [9] PFENNING, M. A FORD, L. The unphysical nature of ‘warp drive’. *Class. Quantum Grav.* 1997, **14**, 1743–1751.
- [10] SEMERÁK, O. Speciální teorie relativity. 2012 [cit. 27.07.2013]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/~semerak/STR.pdf>.
- [11] VAN DEN BROECK, C. A ‘warp drive’ with more reasonable total energy requirements. *Class. Quantum Grav.* 1999, **16**, 3973–3979.
- [12] WALD, R. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.

Seznam obrázků

1.1	Prostorčasový diagram ve speciální relativitě	4
1.2	Lorentzova transformace	5
1.3	Transformace $t' = t, x' = x - vt$	9
1.4	Přechodová funkce $f(r_s)$ Alcubierrovy metriky	10
1.5	Alcubierrova metrika	11
2.1	Světločáry fotonů po x -ové ose, vysílaných z lodi	14
a	Konstantní frekvence vysílání fotonů	15
b	Konstantní frekvence přijímání fotonů	15
2.2	Světločáry fotonů po x -ové ose, vysílaných stojícími pozorovateli	15
a	Konstantní frekvence vysílání fotonů	18
b	Konstantní frekvence přijímání fotonů	18
2.3	Frekvenční posuv světla	18
2.4	Horizonty	19
a	Směry pohybu fotonů letících z vesmíru k lodi	21
b	Časový vývoj směru pohybu fotonů letících z vesmíru k lodi	21
c	Směry pohybu fotonů letících z lodi do vesmíru	21
d	Časový vývoj směru pohybu fotonů letících z lodi do vesmíru	21
2.5	Šíření světla v prostoru (1)	21
2.6	Šíření světla v prostoru (2)	22
2.7	Expanze a komprese prostoru	25
2.8	Trajektorie stojících pozorovatelů	26
a	Časový vývoj	28
b	Pozorovatelé v xy -rovině před warpovým cestováním	28
c	Pozorovatelé v xy -rovině po warpovém cestování	28
2.9	Časupodobné geodetiky v x -ové ose při interakci s bublinou	28
a	Start ze vzdálenosti $1.25R$	29
b	Start z lodi	29
2.10	Časupodobné geodetiky v xy -rovině	29
2.11	Kauzální minulost	31
a	Porovnání v Alcubierrově a Minkowského metrice	32
b	Řezy v různých časech	32
2.12	Kauzální budoucnost	32
a	Signály „Zapnout/vypnout metriku“ z $t = 0.5$	33
b	Signály „Zapnout/vypnout metriku“ z $t = -2$	33
3.1	Složky tenzoru energie a hybnosti v xy -rovině	34

Přílohy

A Vytvoření obrázků

Obrázky v této práci byly vytvořeny výhradně pomocí programu Mathematica. Soubory se zdrojovým kódem se nacházejí na **příloženém CD**. Níže budeme blíže popisovat jeden příklad (Obr. 2.8a).

Nejdříve načítáme dva balíky, které obsahují funkce k výpočtu geodetik v Alcubierrově metrice, zobrazení světelných kůželů, stěn bubliny apod.:

```
<<Svt1Kuzel.m  
<<Alcub.m
```

Potom stanovíme parametry metriky

```
 $\sigma = 3; R = 1.5;$ 
```

jakož i trajektorii lodi:

```
vmax = 4;  
xtStart1 = {0, 1}; xtEnd1 = {2, 2};  
xtStart2 = {6, 3}; xtEnd2 = {8, 4};  
xLod[t_] := Piecewise[{{xtStart1[[1]], t < xtStart1[[2]]},  
  {0.5 vmax (t - xtStart1[[2]])^2 + xtStart1[[1]], (t  
  >= xtStart1[[2]]) && (t < xtEnd1[[2]])}, {vmax (t -  
  xtEnd1[[2]]) + xtEnd1[[1]], (t >= xtEnd1[[2]]) && (t <  
  xtStart2[[2]])}, {-0.5 vmax (t - xtStart2[[2]])^2 + vmax  
  (t - xtStart2[[2]]) + xtStart2[[1]], (t >= xtStart2[[2]])  
  && (t < xtEnd2[[2]])}, {xtEnd2[[1]], t >= xtEnd2[[2]]}];
```

Matematický zápis:

$$x_{\text{Lod}}(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2(t-1)^2 & t \in [1, 2) \\ 4(t-2) + 2 & t \in [2, 3) \\ -2(t-3)^2 + 4(t-3) + 6 & t \in [3, 4) \\ 8 & t \geq 4 \end{cases}$$

Stanovíme zobrazený obor hodnot v grafech a časový interval interpolace pro numerickou integraci:

```
(* t,x,y *)  
PRange = {{xtStart1[[2]] - 2, xtEnd2[[2]] + 2}, {xtStart1[[1]]  
  - 2, xtEnd2[[1]] + 2}, {-2, 2}};  
IRange = {PRange[[1, 1]] - 1, PRange[[1, 2]] + 1}; (* t *)
```

K výpočtu časupodobných trajektorií používáme funkci `AlcubCasGeod` z balíku `Alcub.m`. Předáme jí několik parametrů, mj. počáteční polohu $p = \{t, x, y\}$ i počáteční hybnost, vyjádřenou ve sférických souřadnicích $(0, 0, \pi/2)$:

```
xTraj[p_] := AlcubCasGeod[xLod,  $\sigma$ , R, {IRange[[1]], IRange[[2]],
  1/1000, 10000}["Hamilton", 1/1015] [False, {p[[1]], p[[2]],
  p[[3]], 0}, 0, 0,  $\pi/2$ ];
```

Funkce vrátí osmici funkcí

```
{t[ $\tau$ ], x[ $\tau$ ], y[ $\tau$ ], z[ $\tau$ ], pt[ $\tau$ ], px[ $\tau$ ], py[ $\tau$ ], pz[ $\tau$ ]}
```

přičemž jsme v xTraj zvolili neafinní parametrizaci (False), kde τ je nahrazen t. Pomocná funkce

```
klTStred[start_] := (xtStart1[[2]] + (start + 1) (xtEnd2[[2]]
  - xtStart1[[2]])/2);
```

zobrazuje interval $\{-1, 1\}$ na $\{xtStart1[[2]], xtEnd2[[2]]\}$. Funkce

```
klFce[xl_, start_] := Module[{i, f, t0, tbl},
  t0 = klTStred[start];
  tbl = {t0, {}};
  For[i = 1, i <= Length[xl], i++,
  f = xTraj[{t0, xl[[i, 1]], xl[[i, 2]]}];
  AppendTo[tbl[[2]], {xl[[i, 1]], xl[[i, 2]], {f[[2]], f[[3]]},
  xl[[i, 3]]}];
  tbl];
```

vrátí pro danou tabulku trojic $\{x, y, \text{barva}\}$ tabulku tbl, která v tbl[[1]] obsahuje počáteční čas t0 odpovídající start, a v tbl[[2]] má seznam prvků $\{\{x0, y0\}, \{x[t], y[t]\}, \text{barva}\}$. Funkcí

```
klPlot[xl_, start_] := Module[{f, i, xkl, g, t0}, g = {};
  f = klFce[xl, start];
  t0 = f[[1]]; f = f[[2]];
  For[i = 1, i <= Length[f], i++, xkl = f[[i, 2, 1]];
  g = Show[g, ParametricPlot[{xkl[t], t}, {t, PRange[[1, 1]]
  - 1, PRange[[1, 2]] + 1}, PlotStyle  $\rightarrow$  f[[i, 3]]]];
  g];
```

je můžeme nakreslit. Vytvoříme si seznam bodů

```
klcary = Table[{i, 0, Blue}, {i, PRange[[2, 1]] - 0.5,
  PRange[[2, 2]] + 0.5, 1/8}];
```

které všechny leží na ose x . Výstup klPlot uložíme v nové proměnné

```
plt = klPlot[klcary, -1];
```

Volba -1 znamená, že naše počáteční podmínky platí v čase xtStart1[[2]]. Dále si vytvoříme pozadí bgx, pro které potřebujeme funkci udávající přírůstky ($s = \pm 1$) světelného kuželu v x - t -diagramu

```
mxt[x_, t_, s_] := AlcubKuzelDtDx[x, xLod[t], xLod'[t], s,
   $\sigma$ , R];
```

Potom

```

bgx = Show[
KuzelPlot[
KuzelPole[PRange[[2, 1]], PRange[[2, 2]], 1, PRange[[1, 1]]
+ 0.5, PRange[[1, 2]] - 0.5, 1, Lighter[Gray]],
mxt, {0.75, "h"}, 0, "E", 0],
AlcubEDensPlot[xLod,  $\sigma$ , R][{PRange[[2]], PRange[[1]]}, False,
"H"]
];

```

kde KuzelPole pouze vytvoří seznam bodů, pro které mají být nakresleny světelné kužely. KuzelPlot je kreslí. AlcubEDensPlot kreslí buď stěny bubliny $v_s(t)f'(r_s)$ ("P"), bublinu $v_s(t)f(r_s)$ ("H") anebo rozložení energie. Dále do grafu zahrneme trajektorii lodi

```

traj0X = ParametricPlot[{xLod[t], t}, {t, PRange[[1, 1]]
- 1, PRange[[1, 2]] + 1}, PlotStyle → {Lighter[Red],
Thick}];

```

Pomocná funkce

```

setpr[pr_] := {{pr[[1, 1]] - 0.5, pr[[1, 2]] + 0.5},
pr[[2]]};

```

opraví viditelný obor hodnot, aby byly vidět všechny světelné kužely. Obrázek vytvoří funkce:

```

Show[bgx, plt, traj0X, Axes → True, AxesOrigin → {0,
0}, Frame → True, PlotRange → setpr[{PRange[[2]],
PRange[[1]]}], FrameLabel → {Defer[x], Defer[t]}, AspectRatio
→ 2/3
];

```

B Zakřivení prostoročasu v Alcubierrově metrice

Zde jsou uvedeny složky některých tenzorových veličin, popisujících prostoročas v bázi $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ a bázi k ní duální $\{dt, dx, dy, dz\}$ při dané metrice

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + (dx - v_s(t)f(r_s) dt)^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{B.1})$$

Inverzní metrika zní

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = -(\partial_t + v_s(t)f(r_s)\partial_x)^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2. \quad (\text{B.2})$$

V dalším výkladu pro přehlednost budeme psát

$$\omega = v f := v_s(t)f(r_s). \quad (\text{B.3})$$

Derivace ω značíme

$$\omega_t = \frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{dv}{dt} f - v \frac{x - x_s}{r_s} \frac{df}{dr_s}, \quad (\text{B.4})$$

$$\omega_x = \frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{x - x_s}{r_s} \frac{df}{dr_s}, \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_y = \frac{\partial\omega}{\partial y} = \frac{y}{r_s} \frac{df}{dr_s}, \quad (\text{B.6})$$

$$\omega_z = \frac{\partial\omega}{\partial z} = \frac{z}{r_s} \frac{df}{dr_s}, \quad (\text{B.7})$$

obdobně vyšší derivace.

Složky afinní konexe uvádíme jako matice $(\Gamma^t)_{\alpha\beta}$, $(\Gamma^x)_{\alpha\beta}$, $(\Gamma^y)_{\alpha\beta}$, $(\Gamma^z)_{\alpha\beta}$:

$$\Gamma^t = \begin{pmatrix} \omega^2\omega_x & -\omega\omega_x & -\frac{1}{2}\omega\omega_y & -\frac{1}{2}\omega\omega_z \\ & \omega_x & \frac{1}{2}\omega_y & \frac{1}{2}\omega_z \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma^x = \begin{pmatrix} -\omega(1-\omega^2)\omega_x - \omega_t & -\omega^2\omega_x & -\frac{1}{2}(1+\omega^2)\omega_y & -\frac{1}{2}(1+\omega^2)\omega_z \\ & \omega\omega_x & \frac{1}{2}\omega\omega_y & \frac{1}{2}\omega\omega_z \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

$$\Gamma^y = \begin{pmatrix} -\omega\omega_y & \frac{1}{2}\omega_y & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.10})$$

$$\Gamma^z = \begin{pmatrix} -\omega\omega_z & \frac{1}{2}\omega_z & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Vynechaná pole jsou určena symetrií $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$.

Riemannův tenzor potřebujeme pouze k výpočtu Ricciho tenzoru a skalární křivosti, proto ho zde neuvádíme. Ricciho tenzor má složky:

$$R_{tt} = -(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) - \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.12})$$

$$R_{tx} = -\omega(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) + \frac{1}{2}\omega(\omega_y^2 + \omega_z^2) + \frac{1}{2}(\omega_{yy} + \omega_{zz}), \quad (\text{B.13})$$

$$R_{ty} = -\frac{1}{2}\omega(\omega_{ty} + \omega\omega_{xy}) - \frac{1}{2}\omega_{xy} - \omega\omega_x\omega_y, \quad (\text{B.14})$$

$$R_{tz} = -\frac{1}{2}\omega(\omega_{tz} + \omega\omega_{xz}) - \frac{1}{2}\omega_{xz} - \omega\omega_x\omega_z, \quad (\text{B.15})$$

$$R_{xx} = \omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2 - \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.16})$$

$$R_{xy} = \frac{1}{2}(\omega_{ty} + \omega\omega_{xy}) + \omega_x\omega_y, \quad (\text{B.17})$$

$$R_{xz} = \frac{1}{2}(\omega_{tz} + \omega\omega_{xz}) + \omega_x\omega_z, \quad (\text{B.18})$$

$$R_{yy} = \frac{1}{2}\omega_y^2, \quad (\text{B.19})$$

$$R_{yz} = \frac{1}{2}\omega_y\omega_z, \quad (\text{B.20})$$

$$R_{zz} = \frac{1}{2}\omega_z^2. \quad (\text{B.21})$$

Ostatní složky se opět zjistí ze symetrie $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. Složky s horními indexy:

$$R^{tt} = -(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) - \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.22})$$

$$R^{tx} = -\omega(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) - \frac{1}{2}\omega(\omega_y^2 + \omega_z^2) - \frac{1}{2}(\omega_{yy} + \omega_{zz}), \quad (\text{B.23})$$

$$R^{ty} = \frac{1}{2}\omega_{xy}, \quad (\text{B.24})$$

$$R^{tz} = \frac{1}{2}\omega_{xz}, \quad (\text{B.25})$$

$$R^{xx} = \omega_{tx} + \omega_{xx} - \omega(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) + \omega(\omega_{xx} - \omega_{yy} - \omega_{zz}) - \frac{1}{2}(1 + \omega^2)(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.26})$$

$$R^{xy} = \frac{1}{2}\omega_{ty} + \omega\omega_{xy} + \omega_x\omega_y, \quad (\text{B.27})$$

$$R^{xz} = \frac{1}{2}\omega_{tz} + \omega\omega_{xz} + \omega_x\omega_z, \quad (\text{B.28})$$

$$R^{yy} = R_{yy}, \quad (\text{B.29})$$

$$R^{yz} = R_{yz}, \quad (\text{B.30})$$

$$R^{zz} = R_{zz}. \quad (\text{B.31})$$

Skalární křivost je dána výrazem

$$R = 2(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) + \frac{1}{2}(\omega_y^2 + \omega_z^2). \quad (\text{B.32})$$

Einsteinův tenzor má složky:

$$G^{tt} = -\frac{1}{4}(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.33})$$

$$G^{tx} = -\frac{1}{4}\omega(\omega_y^2 + \omega_z^2) - \frac{1}{2}(\omega_{yy} + \omega_{zz}), \quad (\text{B.34})$$

$$G^{ty} = R^{ty}, \quad (\text{B.35})$$

$$G^{tz} = R^{tz}, \quad (\text{B.36})$$

$$G^{xx} = \omega^3(\omega_{xx} + \omega_{yy}) - \frac{1}{4}(3 + \omega^2)(\omega_y^2 + \omega_z^2), \quad (\text{B.37})$$

$$G^{xy} = R^{xy}, \quad (\text{B.38})$$

$$G^{xz} = R^{xz}, \quad (\text{B.39})$$

$$G^{yy} = -(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) + \frac{1}{4}(\omega_y^2 - \omega_z^2), \quad (\text{B.40})$$

$$G^{yz} = R^{yz}, \quad (\text{B.41})$$

$$G^{zz} = -(\omega_{tx} + \omega\omega_{xx} + \omega_x^2) - \frac{1}{4}(\omega_y^2 - \omega_z^2). \quad (\text{B.42})$$

Všechny složky byly určeny pomocí Mathematica s balíkem *tensorial*. Christoffelovy symboly $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ byly porovnány s [7], Einsteinův tenzor $G^{\mu\nu}$ s [4].