Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Hruška

Jacobiho variační princip

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2006

Na tomto místě bych rád poděkoval svému vedoucímu doc. Langerovi za zapůjčení knih a trpělivou spolupráci

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 20.5.2006

Jakub Hruška

Jakub Hruška

Obsah

Název práce: Jacobiho variační princip

Autor: Jakub Hruška

Katedra: Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc.

e-mail vedoucího: langer@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci srovnáváme diferenciální a integrální pojetí klasické mechaniky a ukazujeme výhody použití integrálních metod. Z d'Alembertova principu odvozujeme některé integrální principy a zaměřujeme se především na Jacobiho variační princip a jeho geometrickou interpretaci. Pomocí tohoto principu pak hledáme trajektorii částice s nulovou energií v gravitačním poli a dále v obecnějším poli centrální síly. Ukážeme, že vhodnými substitucemi lze problém převést na hledání geodetických křivek v lokálně plochých prostorech.

Klíčová slova: variační principy, Jacobiho princip, Keplerova úloha

Title: Jacobi variational principle

Author: Jakub Hruška

Department: Ústav teoretické fyziky

Supervisor: Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc.

Supervisor's e-mail address: langer@mbox.troja.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we compare the differential and integral approach to classical mechanics and show the advantages of integral methods. From d'Alembert principle we derive some of the integral principles focusing on the Jacobi variational principle and its geometrical interpretation. Using this principle we solve the trajectory of a particle with zero energy in gravity field and in more general central force field. We demonstrate that the problem can be transformed into looking for geodetics in a localy flat space.

Keywords: variational principles, Jacobi's principle, Kepler's problem

1 Srovnání diferenciálních a integrálních principů

V diferenciálním pojetí mechaniky zkoumáme vývoj soustavy v daném časovém intervalu tak, že vyšetřujeme její chování v okolí libovolně zvoleného okamžiku (např. v d'Alembertově principu srovnáváme okamžitý stav se stavem, vzniklým virtuálním posunutím) a tedy lokálně. Díky libovolnosti tohoto okamžiku pak platí získané rovnice na celém časovém intervalu. Jako první diferenciální princip mechaniky byly formulovány Newtonovy pohybové zákony, všechny ostatní diferenciální principy jsou pak s Newtonovými zákony ekvivalentní a byly formulovány především pro přechod od vektorového pojetí mechaniky k mechanice analytické. Tvar diferenciálních principů bývá značně závislý na zvolených souřadnicích, výjimkou jsou Lagrangeovy rovnice 2. druhu, které jsou invariantní vůči změně souřadnic a také v nich vystupují pouze skalární veličiny, čili jsou hledanou analytickou formulací mechaniky. Tyto rovnice jsou však formálně shodné s Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi variačního počtu, takže základní pohybové rovnice mechaniky můžeme získat variací určitého integrálu.

V integrálních principech srovnáváme skutečnou dráhu (tj. křivku v konfiguračním prostoru parametrizovanou časem t) s jí přiřazenou variovanou drahou (předpokládáme, že variované dráhy jsou spojité a dostatečně hladké). Křivka v konfiguračním prostoru znázorňuje vývoj soustavy jako celku mezi počátečním a koncovým stavem, tedy zkoumáme chování soustavy globálně. Integrální pojetí zákonů mechaniky přináší oproti diferenciálním principům tyto výhody:

- Diferenciální principy se vztahují pouze na mechanické děje v klasické mechanice, zatímco integrální principy se dají zobecnit například pro mechaniku kontinua, elektromagnetické pole, teorii relativity nebo kvantovou mechaniku.
- V diferenciálních principech vystupují druhé derivace zvolených souřadnic a přechod k jiným souřadnicím bývá pracnější než u integrálních principů, kde ve výchozí formulaci většinou vystupují pouze první derivace.
- Diferenciální principy vyžadují lokální diferencovatelnost na celém zkoumaném intervalu, u integrálních principů stačí lokální integrovatelnost a jsou tedy použitelné i v případech bodových zdrojů a nespojitostí.

2 Odvození některých integrálních principů

Při integrálních principech uvažujeme každou dráhu mechanické soustavy jako celek a požadujeme, aby integrál podél skutečné dráhy nabýval extremální hodnoty, tedy aby variace funkcionálu (integrálu) byla pro skutečnou dráhu rovna nule.

Pokud předpokládáme, že určitým bodem skutečné dráhy a jemu přiřazeným bodem dráhy variované prochází soustava současně, hovoříme o izochronní variaci (označovanou δ). V tomto případě tedy mají všechny porovnávané dráhy společný výchozí a koncový bod a jak dráha skutečná, tak dráhy porovnávací musí být uražena za stejnou dobu t_2-t_1. Pro souřadnici $q_i(t)$ dráhy v konfiguračním prostoru platí záměnnost derivace a izochronní variace

$$\delta\left(\frac{dq_i(t)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\delta q_i(t). \tag{1}$$

Dále bude také používáno značení pro úplnou časovou derivaci $\frac{d}{dt}f(t) \equiv \dot{f}(t)$.

Pokud opustíme předchozí předpoklad a připustíme, že variovanými drahami může projít soustava za libovolnou dobu, hovoříme o neizochronní variaci (označenou Δ). Pokud k n rozměrům konfiguračního prostoru připojíme čas jako nový rozměr, bude v tomto „prostoročasu" bodu $[q_i, t]$ dráhy přiřazen bod $[q_i+\Delta q_i, t+\Delta t]$ dráhy variované, kde o funkcích Δq_i a Δt předpokládáme, že jsou hladkými funkcemi času. Mezi neizochronní a izochronní variací souřadnice q_i platí vztah

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t, \tag{2}$$

který je zřejmý z geometrického náhledu.

Tento vztah je možné zobecnit pro libovolnou hladkou funkci $f(q_1, ..., q_n, t)$, jelikož platí následující vztahy:

Úplná časová derivace funkce $f(q_1, ..., q_n, t)$ je rovna

$$\dot{f} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{3}$$

Izochronní variace funkce f je

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i \tag{4}$$

a její neizochronní variace je dána vztahem

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t . \tag{5}$$

Dosadíme- li do této rovnice za Δq_i ze vztahu 2), dostáváme

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Delta t \tag{6}$$

a dosazením ze vztahů 3), 4) získáváme rovnici

$$\Delta f = \delta f + \dot{f} \Delta t . \tag{7}$$

Pro neizochronní variaci souřadnice již neplatí její záměnnost s časovou derivací, jak se můžeme přesvědčit derivováním vztahu 2):

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_i) = \frac{d}{dt} \delta q_i + \ddot{q}_i \Delta t + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \Delta t , \tag{8}$$

kde nyní můžeme zaměnit pořadí časové derivace a izochronní variace a použít vztah 7) pro $f = \dot{q}_i$. Dostáváme tedy rovnici

$$\frac{d}{dt}(\Delta q_i) = \Delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \Delta t . \tag{9}$$

Nyní již můžeme přikročit k odvození integrálních principů. Budeme vycházet z d'Alembertova principu pro soustavu N částic, který má v kartézských souřadnicích x_i tvar

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i = 0 , \tag{10}$$

kde F_{3a-2}, F_{3a-1}, F_{3a} jsou kartézské složky vtištěné síly působící na a-tou částici a $m_{3a-2} = m_{3a-1} = m_{3a}$ zastupují hmotnost a-té částice. Důležitá je úprava výrazu pro kinetickou energii soustavy

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 . \tag{11}$$

Její izochronní variace je

$$\delta T = \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \delta \dot{x}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \delta x_i \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \delta x_i , \tag{12}$$

dále k úpravě výrazu 12) použijeme rovnosti $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i$ a k celé rovnici přičteme $\sum_{i=1}^{3N} F_i \, \delta x_i$. Dostáváme tedy

$$\delta T + \sum_{i=1}^{3N} F_i \, \delta x_i - \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right) = \sum_{i=1}^{3N} \left(F_i - m_i \ddot{x}_i \right) \delta x_i , \qquad (13)$$

kde pravá strana je z d'Alembertova principu rovna nule. Dále označíme $\sum_{i=1}^{3N} F_i \, \delta x_i = \delta' W$, $\delta' W$ nazýváme virtuální prací a je to práce vykonaná vtištěnými silami při virtuálním posunutí. Obecně virtuální práce není exaktní izochronní variací výrazu $\sum_{i=1}^{3N} F_i$ a je proto značená odlišným symbolem δ'. Dospíváme tedy k rovnici

$$\delta T + \delta' W = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i \right). \qquad (14)$$

Použitím zobecněných souřadnic q_i bychom dostali formálně stejnou rovnici

$$\delta T + \delta' W = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right), \qquad (15)$$

kde ovšem $\delta' W = \sum_{i=1}^{n} Q_i \, \delta q_i$ (Q_i jsou zobecněné složky síly, $Q_i = \sum_{k=1}^{3N} F_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i}$) a v sumě sčítáme přes všechny zobecněné souřadnice.

2.1 Odvození Hamiltonova principu

Jelikož je pravá strana rovnice 15) úplnou časovou derivací, nabízí se zintegrovat celou rovnici na intervalu (t_1, t_2), dostáváme tedy

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta T + \delta' W \right) dt = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} . \qquad (16)$$

Pokud předpokládáme, že variace δq_i jsou nulové pro $t = t_1$ a $t = t_2$ (tedy máme variační úlohu s pevnými konci), vypadne člen na pravé straně a získáváme nejobecnější znění *Hamiltonova principu*

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta' W)\, dt = 0 . \tag{17}$$

Existuje-li potenciál V zobecněné síly Q, tj. $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$, stane se $\delta' W$ exaktní variací

$$\delta' W = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i = -\delta V \tag{18}$$

a můžeme psát rovnici 16 díky záměnnosti integrace a variace ve tvaru

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt = 0 , \tag{19}$$

kde L je Lagrangeova funkce $L = T - V$.

2.2 Odvození Maupertuisova-Eulerova principu

Napišme úplnou časovou derivaci výrazu $2T\Delta t$

$$\frac{d}{dt}(2T\Delta t) = 2\dot{T}\Delta t + 2T \frac{d}{dt}(\Delta t). \tag{20}$$

Tuto rovnici nyní přičteme k rovnici 15), kde zaměníme izochronní variaci T za variaci neizochronní podle vzorce 7), dostáváme výraz

$$\Delta T + \dot{T}\Delta t + 2T \frac{d}{dt}(\Delta t) + \delta' W = \frac{d}{dt}\left(2T\Delta t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right). \tag{21}$$

U tohoto principu klademe požadavek, aby variace kinetické energie byla rovna virtuální práci, tedy

$$\delta' W = \delta T = \Delta T - \dot{T}\Delta t . \tag{22}$$

Tento požadavek použijeme k úpravě rovnice 21)

$$2\Delta T + 2T\frac{d}{dt}(\Delta t) = \frac{d}{dt}\left(2T\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right). \tag{23}$$

Rovnici opět integrujeme podle času v mezích (t_1, t_2) a s použitím vztahu pro diferenciál

$$d(\Delta t) = \frac{d}{dt}(\Delta t)dt \tag{24}$$

dospíváme k

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[2\Delta T + 2T\Delta(dt)\right] = \left[2T\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_1}^{t_2}. \tag{25}$$

Dále si všimneme, že levou stranu této rovnice lze přepsat do tvaru neizochronní variace celého funkcionálu a izochronní variaci δq_i zaměníme dle vzorce 2) za neizochronní. Získáváme tak vztah

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} 2T dt = \left[2T\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i - \dot{q}_i\Delta t)\right]_{t_1}^{t_2}, \tag{26}$$

kde nyní volíme okrajové podmínky tak, aby platilo

$$\left[2T\Delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i - \dot{q}_i\Delta t)\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{27}$$

Tím dospíváme k *Maupertuisovu-Eulerovu principu nejmenší akce*

$$\Delta\int_{t_1}^{t_2} 2T dt = 0. \tag{28}$$

Pokud je kinetická energie homogenní kvadratickou funkcí zobecněných rychlostí, tj.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T, \tag{29}$$

můžeme okrajovou podmínku 27) přepsat do tvaru

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\Delta q_i\right]_{t_1}^{t_2} = 0. \tag{30}$$

Tuto podmínku splníme, položíme-li $\Delta q_i(t_1) = \Delta q_i(t_2) = 0$ a tedy porovnáváme dráhy, které mají společný výchozí a koncový bod bez ohledu na dobu, za kterou mechanická soustava dráhu urazí.

2.3 Odvození Jacobiho principu

Při formulaci tohoto principu můžeme navázat na Maupertuisův-Eulerův princip vyjádřený rovnicí 28) s podmínkami 22), 29). Navíc ještě přidáváme předpoklad

$$T + V = E = \text{konst}, \tag{31}$$

čímž se omezujeme na konzervativní soustavy, kde platí podél dráhy zákon zachování energie. Tento předpoklad uplatníme tím, že z Maupertuisova-Eulerova principu vyloučíme závislost na čase užitím následujících úprav

$$2Tdt = \sqrt{2T\,2Tdt^2} = \sqrt{2T\sum_i m_i v_i^2 dt^2} \tag{32}$$

Výraz $v_i dt$ je však roven elementu dráhy ds_i, můžeme tedy psát

$$2Tdt = \sqrt{2T\sum_i m_i ds_i^{\,2}} = \sqrt{2(E-V)\sum_i m_i ds_i^{\,2}}\,. \tag{33}$$

Získaný vztah dosadíme do 28) a dostáváme

$$\Delta\int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(E-V)\sum_i m_i ds_i^{\,2}} = 0\,, \tag{34}$$

kde (A) a (B) označují počáteční a koncovou polohu soustavy. Rovnice 34) je jedním z možných zápisů *Jacobiho principu nejmenší akce*.

V konzervativním případu je kinetická energie homogenní kvadratickou funkcí zobecněných rychlostí, ve zobecněných souřadnicích tedy můžeme psát

$$2T = \sum_{i,j} a_{ij}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j\,, \tag{35}$$

kde $a_{ij}(q)$ jsou funkcemi obecných souřadnic $q_1, \ldots, q_n$. Analogickým postupem pak získáme Jacobiho princip nyní ve tvaru

$$\Delta\int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(E-V)\sum_{i,j} a_{ij}\,dq_i dq_j} = 0\,. \tag{36}$$

Pokud nyní zavedeme parametr τ, takže $q_i = q_i(\tau)$, dostáváme třetí znění Jacobiho principu

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{2(E-V)\sum_{i,j} a_{ij} \frac{dq_i}{d\tau}\frac{dq_j}{d\tau}}\, d\tau = 0\,. \qquad (37)$$

Zde již řešíme klasickou Eulerovu rovnici variačního počtu, jelikož variace se nevztahuje na integrační proměnnou τ. Eliminací časové závislosti v Jacobiho principu jsme se omezili na určování trajektorií mechanické soustavy v konfiguračním prostoru, tj. tvar drah jednotlivých částí této soustavy, použitím Jacobiho principu tedy nedostaneme časový průběh pohybu.

Pokud na soustavu nepůsobí vtištěné síly (tj $V = 0$), je kinetická energie konstantní a z rovnice 28) tak plyne

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} dt = 0\,. \qquad (38)$$

Soustava, na níž nepůsobí žádné vtištěné síly, se tedy pohybuje tak, že z počáteční polohy do koncové polohy se při skutečném pohybu dostane v co nejkratším čase, což je analogické Fermatovu principu v geometrické optice.

3 Geometrická interpretace Jacobiho principu

Pro délku elementu křivky ds v konfiguračním prostoru platí

$$ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(q)\, dq_i dq_j\,, \qquad (39)$$

kde $a_{ij}(q)$ jsou funkce obecných souřadnic (složky metrického tenzoru na konfiguračním prostoru) zavedené v 35). Použijeme-li tento vztah v rovnici 36), dostáváme další možné vyjádření Jacobiho principu

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{2(E-V)}\, ds = 0\,. \qquad (40)$$

Pro případ $V = 0$ tak dostáváme

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0\,, \tag{41}$$

čili skutečná trajektorie soustavy, na kterou nepůsobí vtištěné síly, je nejkratší mezi všemi přípustnými drahami. Je-li pohyb soustavy vázán na určitou plochu v konfiguračním prostoru, je rovnicí 41) určena geodetická čára na této ploše.

Ve vzorci 36) můžeme označit $2(E - V)\cdot a_{ij} = \overline{a}_{ij}$ a psát Jacobiho princip ve tvaru

$$\delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\sum_{i,j} \overline{a}_{ij}\, dq_i\, dq_j} = 0\,, \tag{42}$$

kde $\overline{a}_{ij}$ je metrika konformní k a_{ij}. Tato rovnice je rovnicí geodetiky na prostoru s metrikou $\overline{a}_{ij}$, čehož využíváme v kapitole 3.1 k usnadnění výpočtu pohybu částice v centrálním poli. Výhodou této geometrické formulace je i to, že můžeme přejmou výsledky diferenciální geometrie na riemannovských prostorech. Například můžeme zkoumat symetrie pomocí Killingových vektorů Určíme-li Killingovy vektory ξ_i metriky $\overline{a}_{ij}$ z rovnice

$$\xi_{i;j} - \xi_{j;i} = 0\,, \tag{43}$$

kde *;* značí kovariantní derivaci, můžeme získat zachovávající se veličiny podél vývoje systému (integrály pohybu), jelikož platí

$$\frac{d}{d\tau}\left(\xi_i u^i\right) = \xi_{i;j} u^j u^i + \xi_i \frac{du_i}{d\tau} = 0\,, \tag{44}$$

kde u^i je v každém bodě tečný vektor ke geodetice (a tedy $\frac{du_i}{d\tau} = 0$), τ je její parametr a využíváme Einsteinovu sumační konvenci. Člen $\xi_{i;j} u^j u^i$ z rovnice 44) vypadne díky antisymetrii $\xi_{i;j}$ a symetrii $u^j u^i$ vůči záměně indexů. Vidíme tedy, že $\xi_i u^i$ je integrál pohybu.

Jacobiho princip je výhodné použít v situacích, kdy nás zajímá spíše trajektorie pohybu, než jeho časový průběh. Ze znalosti trajektorie $q_i(\tau)$ v konfiguračním prostoru pak lze zpětně určit časový vývoj určením vztahu mezi parametrem τ a časem t.

Při zachovávající se celkové energii E platí

$$E = T + V(q_i(\tau)) \Rightarrow T = T(\tau), \tag{45}$$

máme tedy kinetickou energii T jako funkci parametru τ. Z klasického vztahu pro kinetickou energii 11) dostáváme zavedením závislosti kartézských souřadnic x_i na parametru τ rovnici

$$T(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{dx_i(q_j(\tau(t)))}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2, \tag{46}$$

odtud již snadno získáme diferenciální rovnici

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{1}{2T(\tau)}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{d\tau}\right)} \tag{47}$$

pro hledanou závislost mezi parametrem τ a časem t.

3.1 Pohyb částice v gravitačním / coulombickém poli

Přesněji budeme zkoumat pohyb testovací částice s nulovou energií mezi zadanými body A, B v poli popsaném sféricky symetrickým potenciálem

$$V(r) = -\frac{k}{r},\ k \in (0,\infty),$$

Napíšeme Jacobiho variační princip ve tvaru

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(E-V)mds^2} = 0$$

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\frac{2mk}{r}ds^2} = 0 .$$

Tento problém je efektivně dvourozměrný, při řešení se tedy omezíme na rovinu procházející body A, B a počátkem soustavy a na ní zavedeme polární souřadnice r, φ obvyklým způsobem

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

V polárních souřadnicích máme $ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2$, a tedy

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\frac{2mk}{r}\left(dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2\right)} = 0$$

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\frac{2mk}{r} dr^2 + 2mkr \cdot d\varphi^2} = 0$$

Nyní je výhodné zavést nejdříve substituci $R = 2\sqrt{2mkr} \Rightarrow dR^2 = \frac{2mk}{r} dr^2$, tj.

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dR^2 + \frac{R^2}{4} d\varphi^2} = 0$$

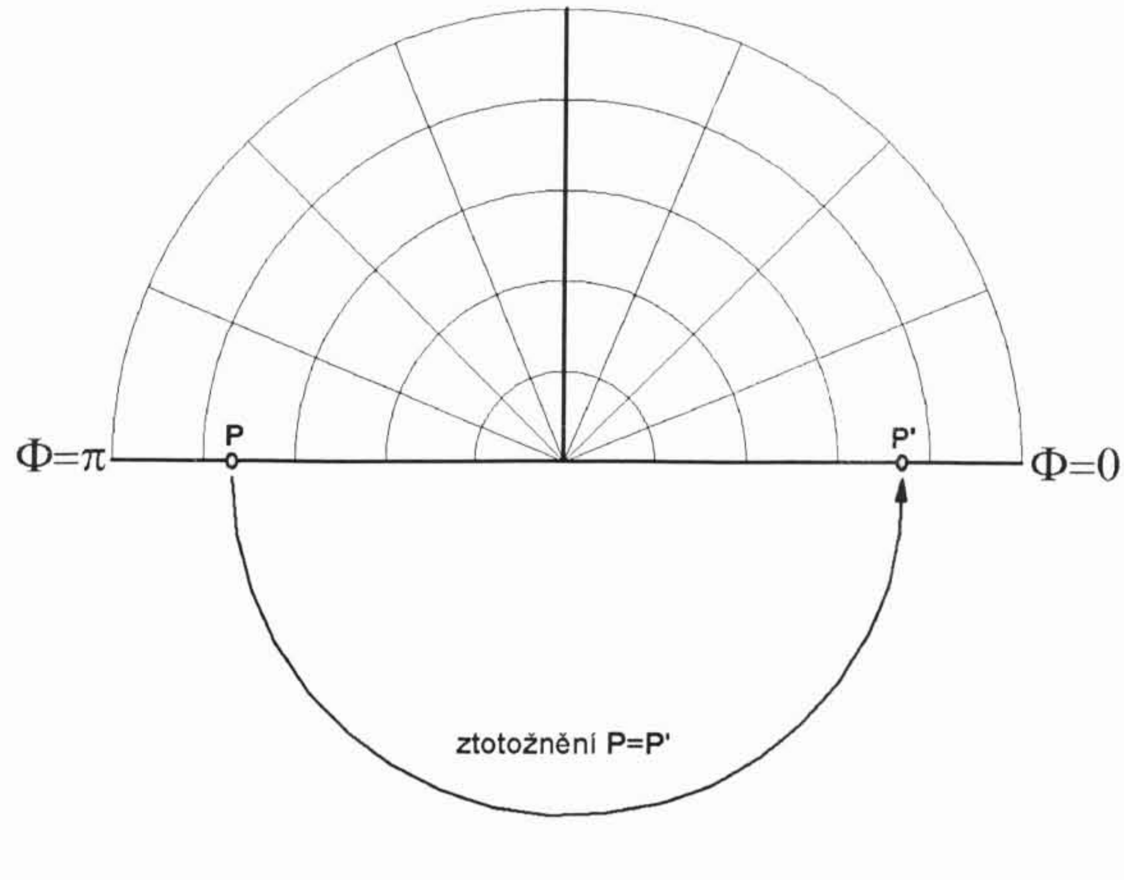
a dále $\Phi = \frac{\varphi}{2}$, máme tedy

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dR^2 + R^2 d\Phi^2} = 0,$$

což je rovnice formálně shodná s rovnicí geodetiky v rovině parametrizované polárními souřadnicemi s tím rozdílem, že Φ je pouze v rozmezí $\langle 0, \pi \rangle$, můžeme nyní zavést na tomto prostoru souřadnice

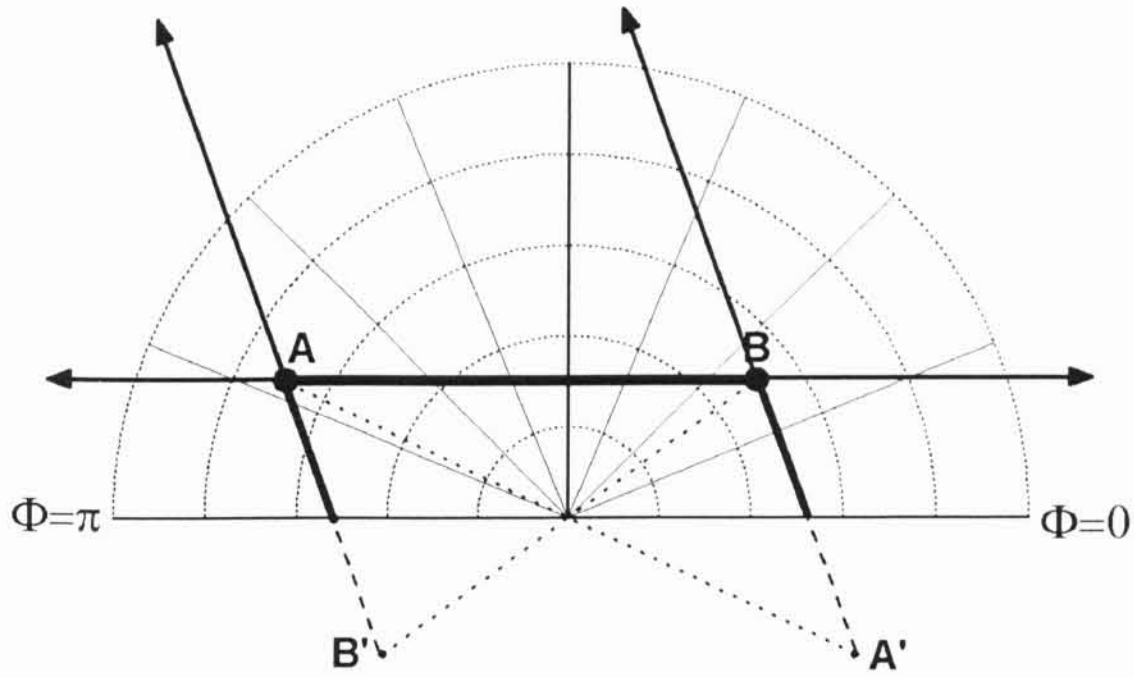
$$X = R \cos \Phi \qquad X \in (-\infty, \infty)$$
$$Y = R \sin \Phi \qquad Y \in (0, \infty)$$

prostor si tedy lze představit jako polorovinu, kde jsou ztotožněné body na hraně se stejnou vzdáleností od počátku (obrázek 1)



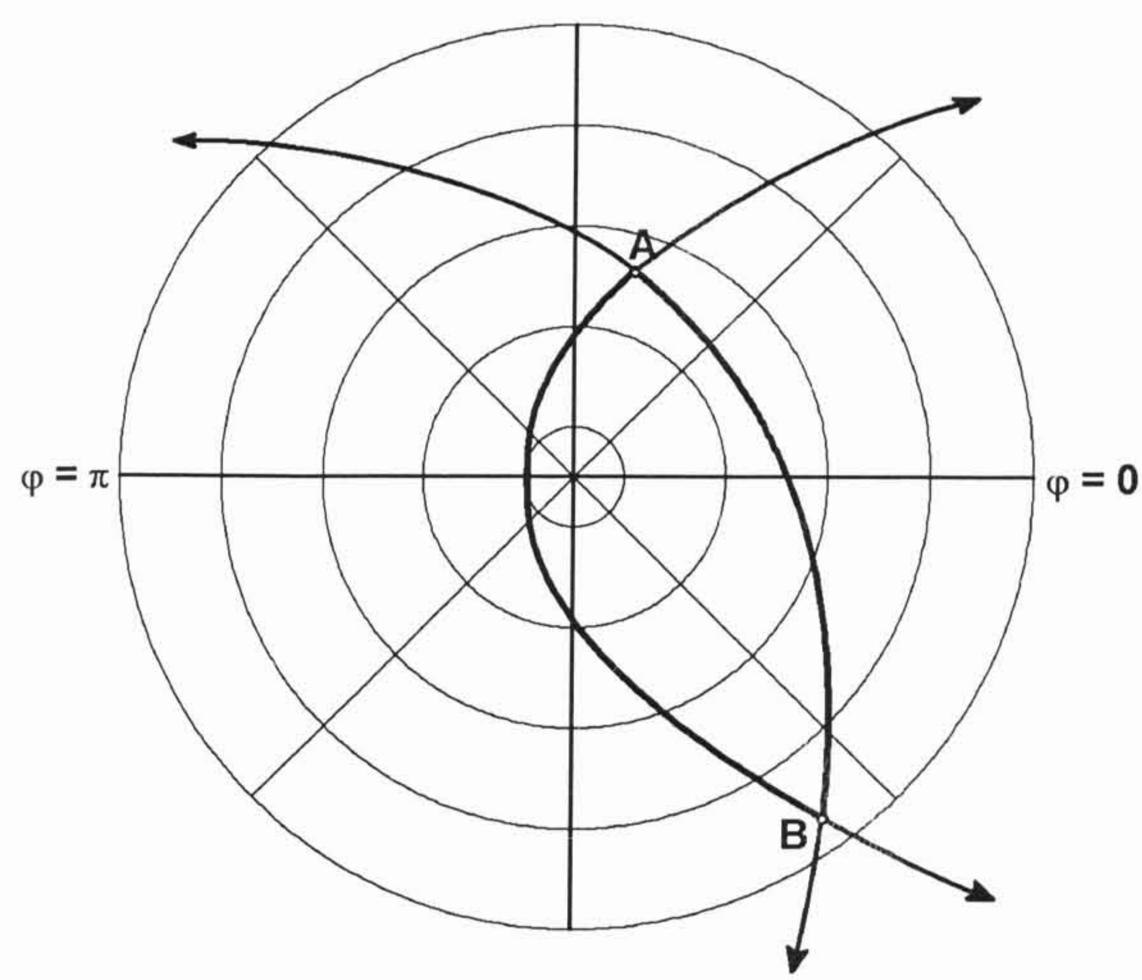
OBR. 1

Geodetiky v tomto prostoru jsou přímky, jelikož je prostor plochý. Na obrázku 2 jsou znázorněny geodetiky tučně, v obecném případě jsou dvě a jedna z nich vede „přes okraj".



OBR. 2

Provedeme-li nyní přechod zpět k původním souřadnicím r, φ, dostáváme trajektorie na obrázku 3 (trajektorie procházející dále od počátku odpovídá trajektorii jdoucí „přes okraj" na obrázku 2).



OBR. 3

Poznámka: Řešením Binetova vzorce se zadaným počátečním a koncovým bodem také dostáváme dvě řešení, která se liší momentem hybnosti. Získat obě tyto řešení je však přes Binetův vzorec pracné, námi uvedený postup tedy usnadňuje řešení s okrajovými podmínkami.

Nyní ukážeme, že takto získané trajektorie jsou paraboly. Počátek souřadnice φ lze vždy zvolit tak, že body A, B budou mít stejnou hodnotu souřadnice Y, pak má jedna z geodetických křivek nejjednodušší tvar (pro druhou křivku jdoucí při dané volbě počátku souřadnice φ „přes okraj" lze úvahu opakovat s jinou volbou počátku souřadnice φ)

$$R\cos\Phi = Y = konst\,.$$

Nyní můžeme přejít k původním polárním souřadnicím r, φ

$$2\sqrt{2mkr}\,\sin\frac{\varphi}{2} = Y \qquad /^2$$

$$8mkr\sin^2\frac{\varphi}{2} = Y^2$$

$$4mkr(1-\cos\varphi) = Y^2$$

$$r = \frac{Y^2}{4mk}\frac{1}{1-\cos\varphi}$$

Poslední vztah je rovnicí paraboly v polárních souřadnicích. Řešením Binetova vzorce s okrajovými podmínkami také dostáváme

3.2 Pohyb částice s nulovou energií v obecnějším centrálním poli

Postup při řešení předchozího přikladu lze zobecnit také pro potenciály typu

$$V(r) = -\frac{k}{r^n},\ n = 3,4,\ldots$$

Opět zavedeme polární souřadnice, ve kterých má Jacobiho princip tvar

$$\Delta\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{\frac{2mk}{r^n}dr^2 + \frac{2mk}{r^{n-2}}d\varphi^2} = 0$$

nyní tedy potřebujeme substituci takovou, aby $dR^2 = \frac{2mk}{r^n}dr^2$, tomu vyhovuje volba

$$R = \frac{\sqrt{8mk}}{n-2}\frac{1}{\sqrt{r^{n-2}}},$$

při které se navíc zobrazí počátek na nekonečno a naopak.

Jacobiho princip máme nyní ve tvaru

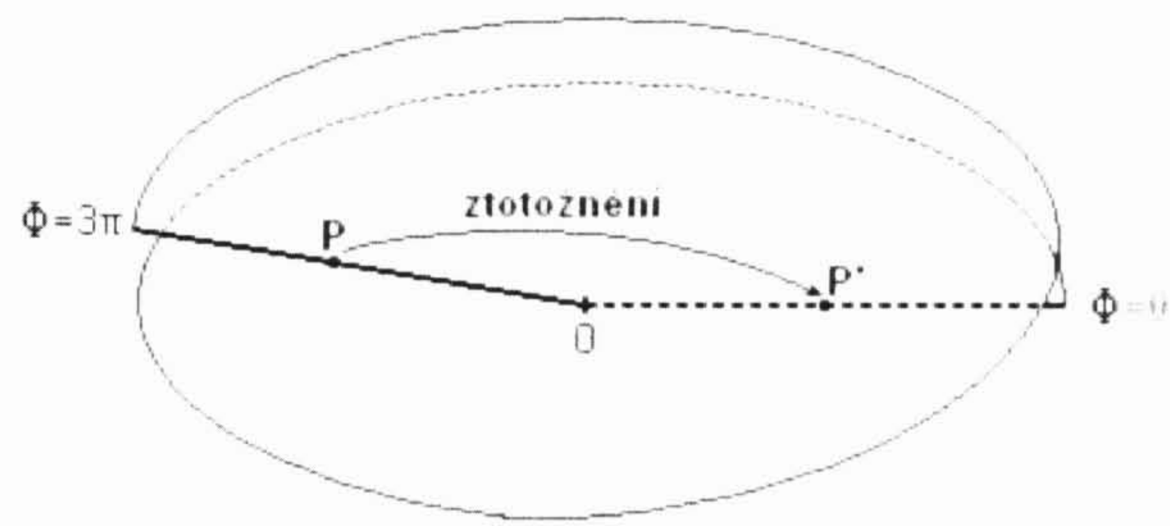
$$\Delta\int_{(A)}^{(B)}\sqrt{dR^2 + R^2\frac{(n-2)^2}{4}d\varphi^2} = 0$$

dále zavedeme $\Phi = \frac{n-2}{2}\varphi$, a dostáváme

$$\Delta \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dR^2 + R^2 d\Phi^2} = 0$$

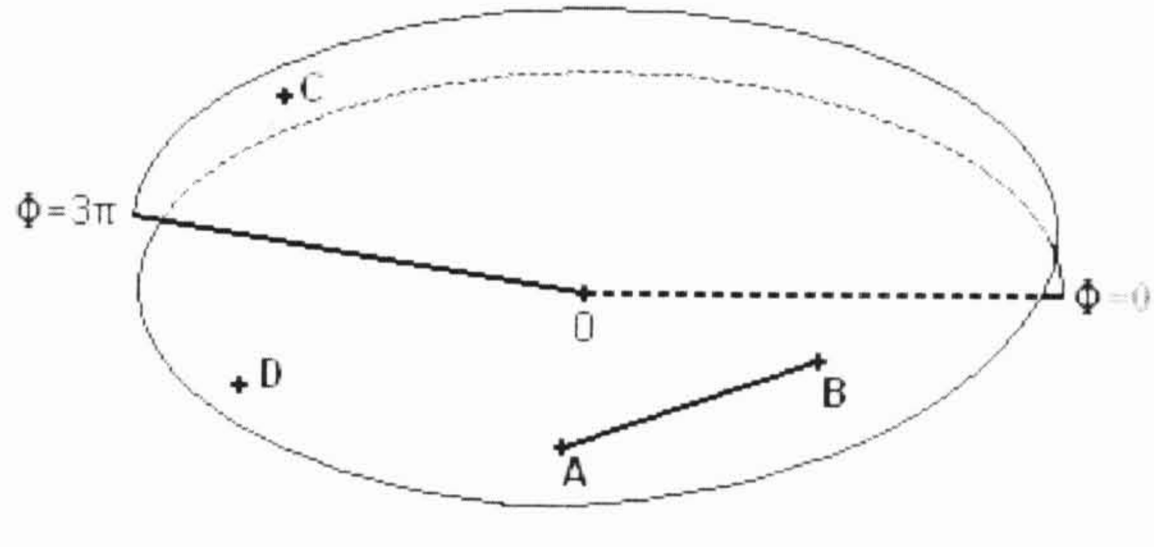
Což je opět rovnice formálně shodná s rovnicí geodetiky v rovině parametrizované polárními souřadnicemi R, Φ, tentokrát je úhel Φ z intervalu $\langle 0, (n-2)\pi \rangle$ a R s rostoucím r klesá (počátek se zobrazí do nekonečna a naopak).

Zvolme nyní například n=5. V tomto případě $\Phi \in \langle 0, 3\pi \rangle$ a prostor si lze představit jako část šroubovice, kde jsou opět ztotožněny body na hraně se stejnou vzdáleností od počátku (obrázek 4)



OBR. 4

Pro ‘blízké‘ body A, B je geodetikou opět přímka, pokud jsou však body C, D ‘příliš vzdálené‘, nelze je přímkou spojit (viz obr 5).

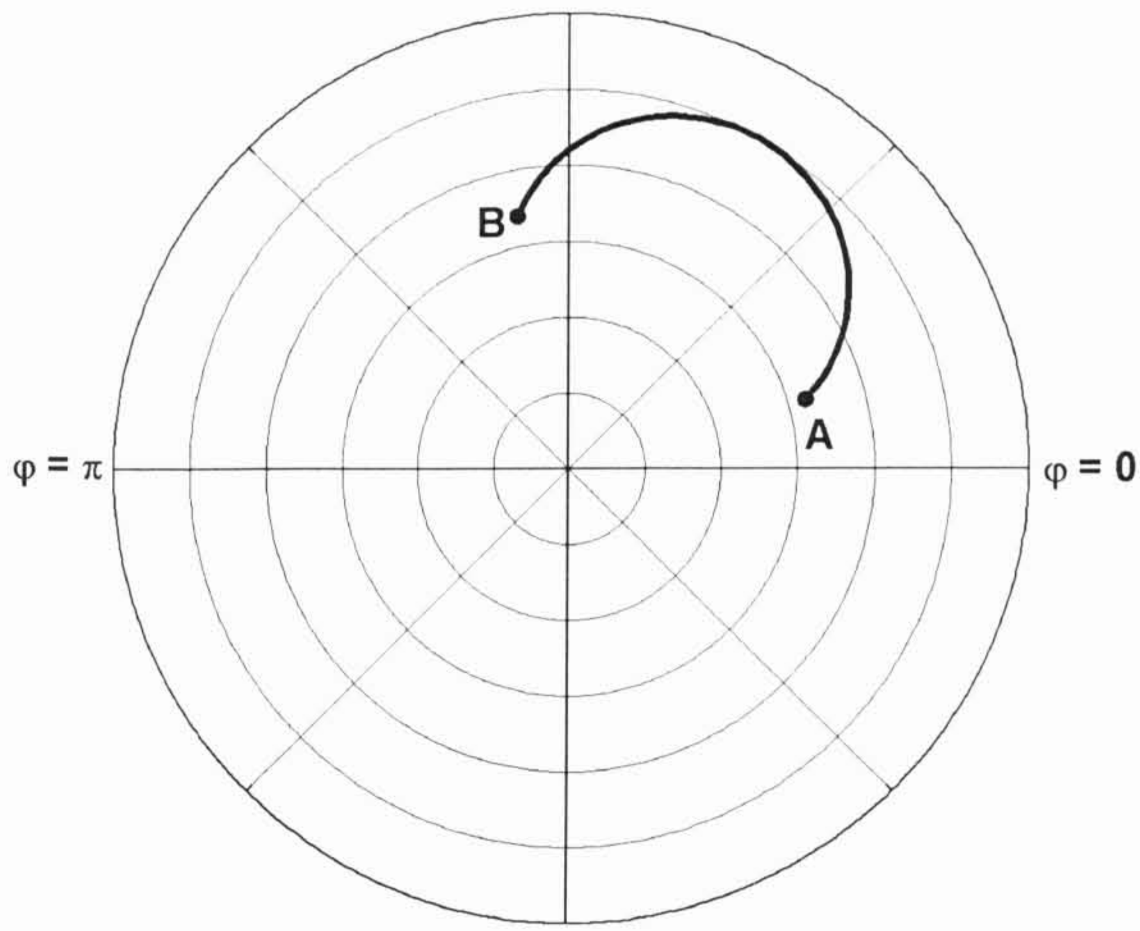


OBR. 5

Body C, D jsou příliš vzdálené, pokud pro jejich souřadnici Φ platí

$$\pi \leq \left|\Phi_D - \Phi_C\right| \leq 2\pi .$$

Jak vypadá trajektorie při návratu k původním polárním souřadnicím r, φ je znázorněno na obrázku 6



OBR. 6

Zadáme-li počáteční bod A, pak se zvyšující se mocninou n se relativně zmenšuje oblast, ve které musí ležet koncový bod B, aby tyto body bylo možné propojit geodetikou. Pokud se tedy na počátku pohybu nacházíme v bodě o souřadnici φ_0, s rostoucím n se kolem tohoto úhlu zužuje kruhová výseč, ve které leží body dostupné z počátečního místa.

Trajektorii pohybu můžeme ovšem získat také klasickým řešením Binetova vzorce, pro naše účely nejlépe zapsaného ve tvaru

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2}\left(E - V(u)\right),$$

kde

$u(\varphi) = \dfrac{1}{r(\varphi)}$, l je moment hybnosti (integrál pohybu) a dále v našem případě

$$E = 0 \, , \; V(u) = -u^n .$$

Dostáváme tedy rovnici

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = c \cdot u^n - u^2 \text{, kde jsme označili } c = \frac{2m}{l^2}.$$

Tuto diferenciální rovnici nyní vyřešíme.

$$\frac{du}{d\varphi} = \sqrt{c \cdot u^n - u^2}$$

$$\varphi = \int \frac{du}{\sqrt{c \cdot u^n - u^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{c \cdot u^{n-2} - 1}}$$

Nyní zavedeme substituci $\sqrt{c} \cdot u^{\frac{n-2}{2}} = t$ ($n \neq 2$), dostáváme

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{2}{n-2} \int \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - 1}}.$$

Další substituce $\sqrt{t^2 - 1} = x$ již vede na tabulkový integrál

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{2}{n-2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{2}{n-2} arctgx + \varphi_0.$$

Když nyní provedeme všechny zpětné substituce, dostáváme závislost $\varphi(r)$, jejíž inverzí získáme vztah

$$r = \sqrt[n-2]{\frac{c}{tg^2\left(\sqrt{c}\,\frac{n-2}{2}(\varphi - \varphi_0)\right) + 1}},$$

který určuje trajektorii pohybu.

Z rozumného požadavku na spojitost trajektorie dostáváme podmínku

$$\sqrt{c}\,\frac{n-2}{2}(\varphi - \varphi_0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

ze které při rostoucím n také plyne zužování kruhové výseče dostupných bodů.

Řešení přes Jacobiho princip tedy představuje jiný pohled na problém, který se vyhýbá netriviální integraci Binetova vzorce. Pokud víme, tento případ není v literatuře řešen.

Literatura

[1] Brdička M., Hladík A. (1987): Teoretická mechanika, Academia, Praha.