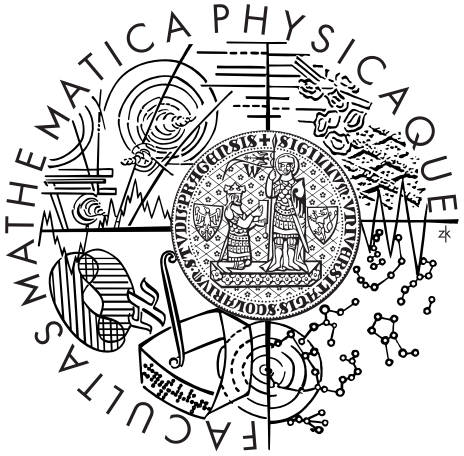
Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



David Mařák

Korelační útoky

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Michal Hojsík, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematické metody informační bezpečnosti

Praha 2014

Děkuji svému vedoucímu RNDr.Michalu Hojsíkovi, Ph.D. za četné konzultace, pomoc a trpělivost, které mi věnoval při vytváření této práce. Dále děkuji mé rodině, přítelkyni a přátelům za jejich podporu a trpělivost.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne ..... Podpis autora

Název práce: Korelační útoky

Autor: David Mařák

Katedra: Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Michal Hojsík, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá popisem Korelačních útoků na proudové šifry typu kombinačního generátoru. Čtenář je nejdříve zběžně seznámen se základními definicemi z kryptografické teorie potřebné k porozumění textu. V práci je pak popsán původní článek, který tento druh útoku představuje, a který byl inspirací pro další vylepšení a modifikace. Podrobněji je pak popsána skupina vylepšených útoku nazývaná Rychlé korelační útoky, které jsou mnohem efektivnější, a již plně nahradily původní útok. Závěrem jsou pak popsány některé modifikace Rychlých korelačních útoků.

Klíčová slova: korelační útok, proudová šifra, kombinační generátor, kryptografie

Title: Correlation attacks

Author: David Mařák

Department: Department of Algebra

Supervisor: RNDr. Michal Hojsík, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: This bachelor thesis decribes Correlation attacks on stream ciphers combination generator type. The reader is briefly acquainted with the basic definitions of cryptographic theory which is necessary to understand the text. Afterwards, the thesis describes the original article that presented this type of attack, and which was the inspiration for further improvements and modifications. These improvements are then described in more details, namely the group called "Fast correlation attacks"which are more efficient and fully replaced the original attack. Finally, there are described some modifications of Fast correlation attacks.

Keywords: correlation attack, stream cipher, combination generator, cryptography

Obsah

Úvod

Denně se po světě díky pokročilým komunikačním technologiím přenese miliony terabytů dat a závislost lidské populace na těchto technologiích je čím dál tím větší. Proto se klade velký důraz na rychlost, spolehlivost a také bezpečnost přenosu těchto dat. V posledních letech bylo vynaloženo mnoho úsilí na lepší porozumění návrhu a zabezpečení proudových šifer. Mezi jejich velké výhody patří zejména malá hardwarová náročnost a rychlost šifrování.

V této práci se budeme zabývat jednou z nejvýznamnějších tříd útoků, která se používá k prolamování proudových šifer a také se zohledňuje při jejich návrhu – korelačními útoky. Především se zaměříme na proudové šifry, které k vytváření proudu klíče využívají posuvné registry s lineární zpětnou vazbou (takzvané LFSR, z angl. Linear Feedback Shift Register) kombinované pomocí nelineární Booleovské funkce.

V kapitole jedna uvedeme základní definice a tvrzení, které budou použity v této práci. V druhé kapitole bude představen původní korelační útok a jeho vztah k dekódovacímu problému. Ve třetí kapitole pak popíšeme rychlé korelační útoky. V závěrečné kapitole pak budou prezentovány některé modifikace a vylepšení rychlých korelačních útoků.

1. Úvod do definic a terminologie

V této kapitole se budeme zabývat základními definicemi a tvrzeními z teoretické kryptografie a teorie kódů, které budou použity v této práci. Čerpáno bylo především z obsahu přednášek předmětů Teoretická kryptografie a Samoopravné kódy. Od čtenáře se očekávají základní znalosti algebry (Stanovský, 2010) a pravděpodobnosti a statistiky (pravděpodobnost, střední hodnota, pravděpodobnostní rozdělení...) (Zvára a Štěpán J., 2002). Některé z nich jsou zde explicitně rozepsány.

Konečné těleso s q prvky budeme značit $\mathbb{F}_q$. Okruh polynomů nad konečným tělesem pak budeme značit $\mathbb{F}_q[x]$.

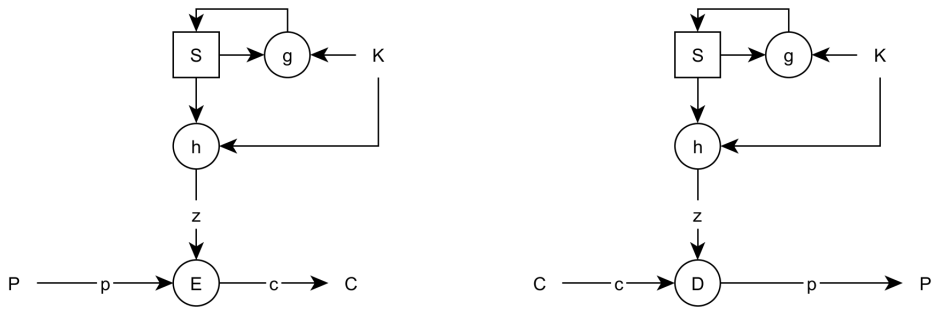
Definice 1 (Proudová šifra)**.** *Proudovou šifru definujeme jako uspořádanou devítici* $(\mathcal{P},\mathcal{C},\mathcal{K},\mathcal{L},\mathcal{S},g,h,\mathcal{E},\mathcal{D})$*, kde*
$\mathcal{P}$ *je konečná množina znaků otevřeného textu,*
$\mathcal{C}$ *je konečná množina znaků šifrového textu,*
$\mathcal{K}$ *je konečná množina klíčů,*
$\mathcal{L}$ *je konečná množina znaků proudu klíče,*
$\mathcal{S}$ *je konečná množina stavů,*
$g : (\mathcal{S},\mathcal{K}) \to \mathcal{S}$ *je obnovovací funkce,*
$h : (\mathcal{S},\mathcal{K}) \to \mathcal{L}$ *je výstupní funkce,*
$\mathcal{E} = \{e_z : \mathcal{P} \to \mathcal{C} | z \in \mathcal{L}\}$ *je množina všech šifrovacích transformací,*
$\mathcal{D} = \{d_z : \mathcal{C} \to \mathcal{P} | z \in \mathcal{L}\}$ *je množina všech dešifrovacích transformací,*
a platí, že pro $\forall p \in \mathcal{P}\, \forall z \in \mathcal{L}\, d_z(e_z(p)) = p$.

Na obrázku (1.1) je popsáno šifrovací a dešifrovací schéma proudové šifry.

Definice 2 (Lineární rekurentní posloupnost)**.** *Posloupnost* $\{a_i\}_{i\geq 0}$ *nad* $\mathbb{F}_q$ *nazveme Lineární rekurentní posloupnost (LRP) pokud existuje polynom* $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$, $g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ *takový, že platí*

$$\sum_{i=0}^{n} c_i a_{i+t} = 0 \,\forall t \geq 0.$$

Posloupnost $(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$ *nazveme inicializační vektor LRP. Polynomu* $g(x)$ *říkáme charakteristický polynom LRP.*



Obrázek 1.1: Šifrovací a dešifrovací schéma proudové šifry.

Definice 3 (Binární posuvný registr s lineární zpětnou vazbou)**.** *Binární posuvný registr s lineární zpětnou vazbou definujeme jako strukturu, která se skládá z l vnitřních registrů (R_0 ,R_1, ... , R_{l-1}), časovacího signálu a je určená pomocí monického charakteristického polynomu $g(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ stupně l, $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_lx^l$. Za každý takt časovacího signálu se pak provede následující:*

Je spočítána hodnota $T = -\sum_{i=0}^{l-1} R_ic_i$,
obsah registru R_0 je předán na výstup,
obsah registru R_i se přesune do registru R_{i-1} pro $\forall\ i \in \{1, ..., l-1\}$ a
obsah registru R_{l-1} je nastaven na hodnotu T.
Obsah registrů na začátku procesu nazýváme počátečním stavem LFSR.

Poznámka. Z definice LFSR plyne, že výstupní posloupnost LFSR je lineární rekurentní posloupnost, kde počáteční stav LFSR odpovídá inicializačnímu vektoru LRP.

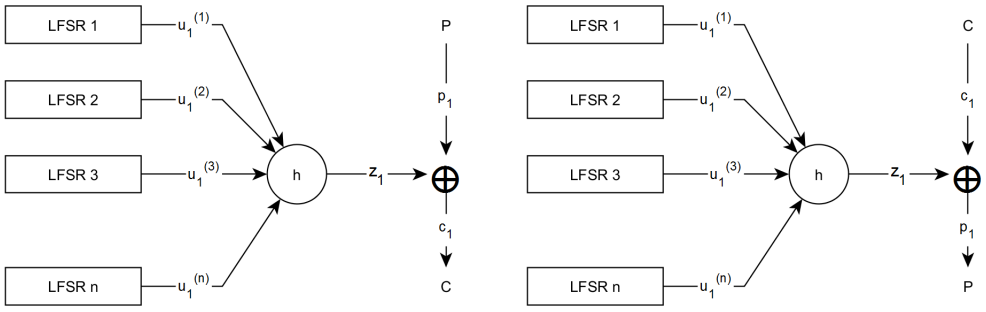
Definice 4 (Ireducibilní polynom)**.** *Mějme polynom $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ stupně n. O $g(x)$ řekneme, že je ireducibilní nad $\mathbb{F}_q$ právě tehdy, když neexistuje žádný polynom $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ stupně $0 < k < n$ takový, že $f(x)|g(x)$.*

Definice 5 (Primitivní polynom)**.** *O ireducibilním polynomu $g(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ stupně n řekneme, že je primitivní právě tehdy, když jeho kořen $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ je primitivní prvek $\mathbb{F}_{q^n}$.*

Definice 6 (Korelace)**.** *Mějme náhodné veličiny U a V, jejich vzájemnou korelaci ϵ pak definujeme jako $\epsilon = P(U = V) - \frac{1}{2}$. Pravděpodobnost $p = P(U = V) = \frac{1}{2} + \epsilon$ nazýváme korelační pravděpodobností.*

Definice 7 (Kombinační generátor)**.** *Kombinační generátor je proudová šifra, která ke generování proudu klíče využívá soubor n LFSR, jejichž výstupy kombinuje nelineární Booleovskou funkcí h. Platí, že $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{L} = \{0,1\}$, $\mathcal{S}$ je množina stavů všech LFSR, obnovovací funkci g zastupuje princip posunů LFSR a výstupní funkce h je definována jako Booleovská funkce $h(u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, ..., u_i^{(n)}) = z_i$, kde u_i^j je výstup $j-$tého LFSR v čase i, a platí $e_z(p) = p \oplus z$, $d_z(c) = c \oplus z$ pro $\forall p \in P$, $\forall c \in C$.*

Na obrázku (1.2) je znázorněno šifrovací a dešifrovací schéma kombinačního generátoru.



Obrázek 1.2: Šifrovací a dešifrovací schéma kombinačního generátoru.

Pro $n \in \mathbb{N}$ budeme množinu všech Booleovských funkcí značit jako B_n

$$B_n = \{f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}\}.$$

Definice 8 (Lineární Booleovská funkce)**.** *Pro $w \in \mathbb{F}_2^n$ definujeme Lineární Booleovskou funkci $l^{(w)}$ takto:*

$$l^{(w)}(x) = x * w,$$

kde $x * w = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ v tělese $\mathbb{F}_2$, kde $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a $w = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$.

Definice 9 (Balancovaná Booleovská funkce)**.** *Mějme funkci $f \in B_n$, řekneme, že f je balancovaná právě tehdy, když $|f^{-1}(0)| = |f^{-1}(1)| = 2^{n-1}$.*

Definice 10. *Nechť $f \in B_n$ a $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Funkci $f^{(m)}$ pak definujeme jako funkci $(n-m)$ proměnných, která vznikne dosazením libovolných hodnot do libovolných m proměnných f.*

Definice 11 (Korelační odolnost funkce)**.** *Nechť $f \in B_n$ a $m \in \mathbb{N}$, $m < n$. Funkci f nazveme $m-$odolnou, pokud platí, že $\forall f^{(m)}$ je balancovaná.*

Tvrzení 1. *Uvažujme funkci $f \in B_n$, která je $m-$odolná, pak f je i $(m-1)-$odolná.*

Důkaz. Mějme funkci $f = f(x_1,x_2,\ldots,x_{m-1},x_m,\ldots,x_n)$, která je $m-$odolná. Tedy $f_1^{(m)}(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1},0,x_{m+1},\ldots,x_n)$ je balancovaná a zároveň
$f_2^{(m)}(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1},1,x_{m+1},\ldots,x_n)$ je také balancovaná, kde $l_i \in \mathbb{F}_2$ jsou pevně dosazené hodnoty. Z čehož plyne, že i $f^{(m-1)}(l_1,l_2,\ldots,l_{m-1},x_m,x_{m+1},\ldots,x_n)$ je také balancovaná.

❑

Definice 12 (Lineární kód)**.** *Lineární q-ární kód C délky n a dimenze k (značení $[n,k]_q$) je lineární podprostor dimenze k vektorového prostoru $\mathbb{F}_q^n$.*

$c = (c_0,c_1,\ldots,c_{n-1})$ $c \in C$ nazýváme kódovým slovem kódu C. V dalším textu budeme pracovat jen s binárními lineárními kódy, to jsou $[n,k]_q$ s $q = 2$. Ty značíme $[n,k]$.

Definice 13 (Duální kód)**.** *Lineární kód H nazveme duálním kódem lineárnímu $[n,k]$ kódu C pokud platí, že*

$$H = \{h \in \mathbb{F}_2^n | \sum_{i=0}^{n-1} h_i c_i = 0 \ \forall c \in C\}.$$

Definice 14 (Hammingova vzdálenost)**.** *Mějme vektory $u, v \in \mathbb{F}_q^n$ pak Hammingovu vzdálenost u a v definujeme jako počet pozic, ve kterých se u a v liší. Značíme ji $d_H(u,v)$. Speciálně pro binární případ, kdy q=2 platí $d_H(u,v) = \sum_{i=1}^{n} (u_i \oplus v_i)$.*

Definice 15. *Mějme vektor $u \in \mathbb{F}_q^n$ pak Hammingovu váhu u definujeme jako počet nenulových prvků u. Značíme $w_H(u)$ a platí $w_H(u) = d_H(u,0)$, kde $0 \in \mathbb{F}_q^n$ představuje nulový vektor stejné délky jako u.*

Definice 16 (Binární symetrický kanál)**.** *Binární symetrický kanál s chybovostí* $p \in (0,1)$ *definujeme jako nedeterministickou funkci* $f : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$,

$$f(u) = u \oplus b,$$

kde u, $b \in \mathbb{F}_2$, $P(b = 0) = 1 - p$ *a* $P(b = 1) = p$. *Takový kanál značíme* BSC$[p]$ *(z angl. Binary symmetric channel).*

Definice 17 (Informační entropie)**.** *Mějme konečný prostor stavů* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, *kde* $n \in \mathbb{N}$ *a pravděpodobnosti jednotlivých stavů* $P(s_i)$ *takové, že* $\sum_{i=1}^{n} P(s_i) = 1$. *Pak informační entropii* S *definujeme jako*

$$H(S) = -\sum_{i=1}^{n} P(s_i) log_2(P(s_i)).$$

V naší práci se budeme věnovat jen binární informační entropii, kde platí

$$\begin{aligned} H(x) &= -x log_2(x) - (1-x) log_2(1-x) && 0 < x < 1 \\ H(x) &= 0 && x \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

2. Korelační útok

Původní zmínka o korelačních útocích se datuje k roku 1985, kdy T. Siegenthaler tento druh útoku představil ve svém článku Decrypting a Class of Stream Cipher Using Ciphertext only (Siegenthaler, 1985). V něm ukazuje, že při útoku na proudové šifry typu kombinačního generátoru lze využít existence nenulové korelace mezi výstupem a jedním či skupinou vstupů do kombinační funkce, a za pomoci statistického modelu značně snížit počet pokusů potřebných k prolomení šifry hrubou silou.

Princip korelačního útoku na kombinační generátor je následující. Předpokládáme, že máme proud klíče z délky N, kde $z = (z_0, z_1, ..., z_{N-1})$ a zároveň známe charakteristické polynomy všech LFSR. Pokud existuje nenulová korelace $\epsilon = p - \frac{1}{2}$, kde $p = P(u_i = z_i)$, mezi výstupní posloupností u vybraného $LFSR$ a proudem klíče z, pak můžeme nalézt počáteční stav tohoto $LFSR$ nezávisle na ostatních, a tím podstatně snížit obtížnost útoku hrubou silou.

2.1 Siegenthalerův útok

Princip originálního útoku na kombinační generátor představeného Siegenthalerem je následující. Předpokládejme, že mezi sekvencí u generovanou jedním z $LFSR$ použitých v kombinačním generátoru délky l a proudem klíče z existuje nenulová korelace $\epsilon = p - \frac{1}{2}$, a také předpokládáme, že charakteristický polynom LFSR $g(x) = \sum_{k=0}^{l} c_k x^k$ je znám. Tento předpoklad v původním útoku nebyl, místo toho se ještě prohledávalo přes všechny primitivní polynomy stupně l. Pro binární LFSR délky l existuje 2^l možných počátečních stavů. Z každého počátečního stavu $(u_0, u_1, \ldots, u_{l-1})$ je nagenerována posloupnost délky N

$$u' = (u'_0, u'_1, ..., u'_{N-1}),$$

kde

$$\begin{aligned} u'_i &= u_i && \forall i \in \{0, 1, \ldots, l-1\} \\ u'_{i+l} &= -\sum_{k=0}^{l-1} c_k u'_{i+k} && \forall i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vezměme dále proud klíče délky N $z = (z_0, z_1, \ldots, z_{N-1})$ a označme

$$\omega = N - d_H(u', z). \tag{2.2}$$

Pokud bude délka proudu klíče N dostatečně dlouhá, s vysokou pravděpodobností pak ω bude pro správně zvolený inicializační stav u' rovno očekávané hodnotě $\omega' = N \cdot p$.

Pokud je proud klíče korelován se skupinou registrů velikosti s, postup je následující. Řekněme, že mezi součtem sekvencí generovaných $LFSR_1$, $LFSR_2$, ..., $LFSR_s$ existuje nenulová korelace s proudem klíče

$$\epsilon = P(u_i^{(1)} + u_i^{(2)} + ... + u_i^{(s)} = z_i) - \frac{1}{2} \neq 0. \tag{2.3}$$

Pak existuje 2^{l_j} možných počátečních stavů pro každý $LFSR_j$ $j \in \{1, 2, ..., s\}$ a tedy celkově $K = \prod_{k=1}^{s} 2^{l_k}$ kombinací možných počátečních stavů těchto LFSR.

Následně stejně jako v minulém případě nagenerujeme posloupnosti délky N z každého $LFSR_j$. Dále spočítáme ω pro všech K možností

$$\omega = N - d_H(u'_1 + u'_2 + ... + u'_s,z), \tag{2.4}$$

kde u'_j značí jednu z 2^{l_j} možných posloupností délky N nagenerované z počátečního stavu délky l_j.

Jelikož ale není jisté, že ω pro správné počáteční stavy bude to nejbližší očekávané hodnotě ω', musí být provedeno ještě testování a následné korekce.

Algoritmus 1: Algoritmus Sigenthalerova útoku

Krok 1: Nastav počáteční stavy všech LFSR se známou korelací na hodnoty, při kterých byli jednotlivé ω nejblíže očekávané hodnotě.
Krok 2: Projdi hrubou silou všechny možné stavy LFSR, pro které neexistuje korelace. A zkoušej, jestli některá z kombinací počátečních stavů negeneruje proud klíče z.
Krok 3: Pokud žádná taková kombinace stavů neexistuje, změň jeden počáteční stav v odhadu LFSR se známou korelací, a přejdi na Krok 2.
Krok 4: Ukonči algoritmus s n počátečními stavy, které po kombinaci funkcí h tvoří proud klíče z.

V Kroku 3 jsou počáteční stavy měněny od nejvíc pravděpodobných a postupně se zkoušejí všechny kombinace.

Pro korelaci existuje i alternativní definice, kterou využijeme ve větě (2).

Definice 18. *Nechť f,$g \in B_n$, pak definujeme korelaci funkcí f a g jako $C(f,g) = 2P(f = g) - 1$.*

Věta 2. *Nechť $f \in B_n$, potom f je $m-$odolná právě tehdy, když $C(f,l^{(u)}) = 0$ pro $u \in \mathbb{F}_2^n : w_h(u) \leq m$.*

Důkaz. viz. (Carlet, 2007)

❑

Důsledek. V kombinačním generátoru s $m-$odolnou kombinační funkcí je nejmenší skupina LFSR, se kterou můžeme najít nenulovou korelaci ϵ, velikosti $m + 1$.

Důkaz. Plyne z věty (2), ta říká, že korelace funkce f a součtu až m vstupů je nulová.

❑

Důsledek. Pokud může být korelace nalezena pro každé $LFSR_j$ samostatně (funkce h je 0-odolná vůči korelaci), pak složitost nalezení počátečních stavů všech $LFSR_j$ je redukována z $\prod_{i=1}^{n}(2^{l_i} - 1)$ na $\sum_{i=1}^{n}(2^{l_i} - 1)$.

Tvrzení 3. *Výpočetní složitost útoku na jeden LFSR, se známou korelací s proudem klíče je u Sigenthalerova útoku $O(2^l)$, kde l je délka LFSR.*

Důkaz. Jedná se o prohledávání všech možných počátečních stavů, kterých je 2^l.

❑

Důsledek. Mějme kombinační generátor tvořený n $LFSR_j$ délky l_j, které generují posloupnosti u_j. Dále uvažujme k disjunktních množin indexů $N_i \subset \{1,2,\ldots,n\}$ $i = 1,2,\ldots,k$ takových, že platí $P(\sum_{j\in N_i} u_j = z) = \frac{1}{2}+\epsilon_i$, $\epsilon_i > 0$. A označme množinu $N_{k+1} = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \cup_{i=1}^{k} N_i$. Pak složitost Sigenthalerova útoku na tento kombinační generátor je řádu

$$O(\sum_{i=1}^{k+1} 2^{\sum_{l\in N_i} l_j}).$$

Důkaz. Nejdříve nalezneme nejpravděpodobnější kandidáty na počáteční stavy LFSR ve skupině N_i, pro kterou existuje nenulová korelace ϵ_i s proudem klíče, ty najdeme projitím všech možných stavů, kterých je $2^{\sum_{j\in N_i} l_j}$. Takto projdeme všechny skupiny. Nakonec provedeme korekce těchto kandidátů pomocí vygenerování domnělého proudu klíče tak, že hrubou silou projedeme všechny počáteční stavy skupiny N_{k+1}, kterých je $2^{\sum_{j\in N_{k+1}} l_j}$, a vybereme kombinaci kandidátů na počáteční stavy s velkou pravděpodobností v každé skupině tak, aby byl generován správný proud klíče.

❑

Tento útok byl v původním článku (Siegenthaler, 1985) prokázán efektivním pro maximální délku LFSR $l < 50$ s korelační pravděpodobností $p \geq 0{,}75$.

2.2 Vztah k dekódovacímu problému

Na korelační útoky se dá pohlížet také jako na úlohu dekódovacího problému. Označme V množinu všech možných posloupností u' délky N, které vzniknou generováním z vybraného LFSR délky l způsobem ukázaným v (2.1). Pak V je lineárním podprostorem dimenze l vektorového prostoru $\mathbb{F}_2^N$. A tedy z definice (12) plyne, že tato množina je také lineární binární $[N,l]$ kód C, kde jednotlivé posloupnosti u' jsou kódovými slovy. Pokud existuje nenulová korelace ϵ mezi správnou výstupní posloupností LFSR u' a proudem klíče $z = (z_0, z_1, ..., z_{N-1})$, můžeme pak modelovat korelační útok jako dekódovací problém, kdy proud klíče z délky N představuje slovo přijaté z binárního symetrického kanálu s chybovostí BSC$[\frac{1}{2}-\epsilon]$, a naším úkolem je nalézt kódové slovo z C, které bylo zasláno. Hledaný počáteční stav je pak roven prvním l znakům nalezeného kódového slova.

Tvrzení 4. *Uvažujme dekódovací problém definovaný výše. Pro jednoznačné dekódování pak musí být délka slova alespoň*

$$N_0 = \frac{l}{1 - H(\frac{1}{2} - \epsilon)}.$$

Důkaz. Odhad vychází z definice BSC a kapacity kanálu, která je pro BSC$[\frac{1}{2} - \epsilon]$ definována jako $c = 1 - H(\frac{1}{2} - \epsilon)$. Tedy jeden zaslaný bit přenese v průměru $\frac{1}{c}$ informace, pro zaslání l bitů musí být zasláno v průměru $\frac{l}{c} = \frac{l}{1-H(\frac{1}{2}-\epsilon)}$ bitů.

❑

3. Rychlé korelační útoky

V této kapitole se budeme zabývat rychlými korelačními útoky, které prvně představili v roce 1989 Willy Meier a Othmar Staffelbach ve článku Fast Correlation Attacks on Certain Stream Ciphers (Meier a Staffelbach, 1989), dále vycházíme z článků, které na tuto práci navázaly (Meier, 2011) a (Jönsson, 2002). Tyto práce představují podstatné vylepšení korelačních útoku. Nejdříve bude zhruba vysvětlen princip rychlých korelačních útoků, poté bude prezentován statistický model, na kterém jsou tyto útoky založeny, a nakonec představíme i dva algoritmy, které je aplikují.

3.1 Základní princip a motivace

V této kapitole se budeme zaměřovat na případ, kdy existuje nenulová korelace ϵ mezi proudem klíče z a výstupem u z jednoho LFSR délky l (budeme předpokládat, že kombinační funkce je $0-$korelačně odolná). Případ, kdy je funkce $k-$korelačně odolná $k \in \mathbb{N}$, a tedy existuje nenulová korelace se skupinou $k+1$ LFSR, se řeší pomocí kombinací jednotlivých počátečních stavu LFSR tak, jak je popsáno v kapitole 2. V minulé kapitole jsme také ukázali interpretaci korelačních útoků pomocí dekódovacího problému. Tato reprezentace se ukázala v praxi vhodná i pro rychlé korelační útoky, a proto ji budeme používat v této kapitole po celou dobu. Pro rychlé korelační útoky popsané v této kapitole tedy definujeme zadání: Mějme známý proud klíče z délky N, který představuje výstup z BSC$[1-p]$, kde $p = P(z_i = u_i) = \frac{1}{2} + \epsilon$, po zaslání neznámé posloupnosti u délky N. Najděte správnou posloupnost u, která byla zaslána, když víme, že se jedná o výstupní posloupnost z LFSR délky l se známým charakteristickým polynomem $g(x)$ váhy t. Což je ekvivalentní nalezení počátečního stavu daného LFSR tak, aby generoval posloupnost u. Jak víme z definice LFSR můžeme plynule přecházet mezi definicemi LRP a LFSR se stejnými charakteristickými polynomy a se stejně dlouhým počátečním stavem a inicializačním vektorem. Tohoto přechodu budeme v některých případech pro přehlednost využívat.

Za rychlé korelační útoky považujeme všechny, které jsou výrazně rychlejší než Siegenthalerův útok, který prochází přes všechny možné počáteční stavy LFSR. Konkrétně všechny útoky s výpočetní složitostí pro útok na samostatné LFSR $O(2^{cl})$, kde l je délka LFSR a $c < 1$ konstanta. Na rozdíl od Siegenthalerova útoku potřebují rychlé korelační útoky mnohem větší poměr $d = \frac{N}{l}$ velikosti známého proudu klíče ku délce LFSR, na druhou stranu ale dokáží útočit na LFSR s délkou $l > 100$ a korelační pravděpodobností p blízkou 0,5.

Základní myšlenkou rychlých korelačních útoků je využití faktu, že každý znak u_n LFSR posloupnosti u splňuje několik lineárních vztahů, odvozených z charakteristického polynomu, které obsahují další znaky u. Pokud stejné vztahy zkusíme aplikovat na korespondující znaky posloupnosti proudu klíče z, dostaneme pro každý znak z_n rovnice, které buď budou platit, či ne. Počty rovnic, které budou platit i na posloupnost z, nám pak budou nápomocné k rozhodnutí, které $z_n = u_n$. Intuitivně, čím větší počet rovnic, které platí, tím větší je pravděpodobnost, že daný znak je správně.

Rychlé korelační útoky se dělí do dvou fází. První fáze je přípravná, kdy

hledáme co možná nejvíce lineárních rovnic odvozených z charakteristického polynomu. V druhé fázi jsou pak tyto rovnice využity v rychlém dekódovacím algoritmu pro nalezení správného počátečního stavu LFSR. Dva základní dekódovací algoritmy využívané v rychlých korelačních útocích se nazývají jednoduše Algoritmus A a Algoritmus B.

Princip Algoritmu A je následující, nejdříve vybereme množinu znaků I_0 posloupnosti z, které splňují dostatek rovnic, a tedy jsou s velkou pravděpodobností správně. Z těchto znaků pak dopočítáme pomocí rekurentních vztahů prvních l znaků posloupnosti. Takto dostaneme odhad počátečního stavu, který za příznivých podmínek generuje posloupnost blízkou správné posloupnosti, a pak budou potřeba pouze malé korekce I_0. Tyto korekce jsou provedeny velmi redukovaným prohledávání všech možností.

Algoritmus B také využívá vztahy derivované z charakteristického polynomu, nehledáme v něm však nejvíce spolehlivé znaky. Místo toho vezmeme všechny znaky z společně s jejich pravděpodobností, že jsou správné. To nás vede k zavedení nové pomocné pravděpodobnosti p^*, která pro každý znak z_n posloupnost z definuje podmíněnou pravděpodobnost, že $z_n = u_n$ v závislosti na počtu splněných rovnic. Tato pravděpodobnost se nejdříve několikrát iterativně přepočítá pro každý znak a po několika opakováních jsou pak všechny znaky z_n s pravděpodobností p^* menší, než daná, dobře zvolená mez, invertovány. Za příznivých podmínek můžeme očekávat, že počet špatných znaků se tímto procesem zmenší. Tento proces restartujeme několikrát s nově upravenou posloupností z, dokud nedostaneme originální posloupnost u.

3.2 Výpočetní a statistický model

Znak u_n lineárně rekurentní posloupnosti u s charakteristickým polynomem $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_lx^l \in \mathbb{F}_2[x]$ váhy t můžeme zapsat takto

$$u_n = c_{l-1}u_{n-1} + c_{l-2}u_{n-2} + \ldots + c_0u_{n-l}. \tag{3.1}$$

Z tohoto vyjádření můžeme pozorovat, že při vyjadřování dalších znaků se u_n objeví v l pozicích, z nichž v $t-1$ má nenulový koeficient c_i.

$$\begin{aligned}
u_n &= c_{l-1}u_{n-1} + c_{l-2}u_{n-2} + \ldots + c_0u_{n-l} \\
u_{n+1} &= c_{l-1}u_n + c_{l-2}u_{n-1} + \ldots + c_0u_{n-l} \\
&\vdots \\
u_{n+l-1} &= c_{l-1}u_{n+l-2} + \ldots + c_1u_n + c_0u_{n-l} \\
u_{n+l} &= c_{l-1}u_{n+l-1} + c_{l-2}u_{n+l-2} \ldots + c_0u_n
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Tímto způsobem lze nalézt t lineárních rovnic obsahující daný znak u_n v závislosti na dalších $t-1$ znacích stejné posloupnosti. Každý násobek charakteristického polynomu definuje také lineární vztahy pro u. Jelikož pracujeme nad tělesem charakteristiky 2, můžeme využít vztahu $c(x)^j = c(x^j)$, pro všechna j tvaru $j = 2^i$ $i \in \mathbb{N}$, touto cestou získáme další rovnice. Všechny tyto rovnice mají t nenulových koeficientů. Těmito dvěma metodami jsou primárně získávány rovnice, které se využívají v dekódovacích algoritmech Rychlých korelačních útoků. V kapitole 4 jsou popsány pokročilejší metody pro získávání těchto rovnic.

Ke správnému simulování dekódovacích algoritmů potřebujeme znát odhad počtu lineárních rovnic pro znak u_n vytvořených těmito dvěma metodami. Tento odhad slouží pouze k určování řádové složitosti jednotlivých algoritmů a při praktickém využívání víme přesný počet, tedy můžeme v určování odhadu některé věci zanedbat.

Nejdříve vyjádříme počet všech rovnic, které můžeme odvodit pro LRP u délky N. Rovnice vzniklé z $j-$krát opakovaného mocnění ($j \geq 0$) mají délku (rozdíl indexu prvního a posledního nenulového členu) $2^j l$, je jich tedy $N - 2^j l + 1$, toto číslo musí být však kladné, takže j může být nanejvýše $\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor$. Tedy celkový počet všech rovnic může být vyjádřen jako

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{j=0}^{\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor} (N - 2^j l + 1) = \\
&= (N+1)(\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor + 1) - \sum_{j=0}^{\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor} 2^j l = \\
&= (N+1)(\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor + 1) - (2^{\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor + 1} - 1)l \simeq \\
&\simeq (N+1)\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor + N + 1 - (\frac{2(N+1)}{l} - 1)l = \\
&= (N+1)\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor + -N - 1 + l = \\
&= (N+1)(\lfloor log_2(\frac{N+1}{l})\rfloor - log_2 2) + l \simeq \\
&\simeq (N+1)\lfloor log_2(\frac{N+1}{2l})\rfloor + l.
\end{aligned}$$

Každá z těchto rovnic obsahuje t znaků u. Tedy průměrný počet rovnic m na znak je roven

$$m = M\frac{t}{N} = (\lfloor log_2(\frac{N+1}{2l})\rfloor + \frac{l + \lfloor log_2(\frac{N+1}{2l})\rfloor}{N})t.$$

V našich aplikacích však platí, že $\frac{l+\lfloor log_2(\frac{N+1}{2l})\rfloor}{N}t \ll 1$ tedy pro účely odhadů můžeme zjednodušit na

$$m = \lfloor log_2(\frac{N+1}{2l})\rfloor t. \tag{3.3}$$

Pro dané u_n pak mohou být rovnice zapsány takto

$$\begin{aligned}
u_n + b_{1,1} + b_{1,2} + \ldots + b_{1,t-1} &= 0 \\
u_n + b_{2,1} + b_{2,2} + \ldots + b_{2,t-1} &= 0 \\
&\vdots \\
u_n + b_{m,1} + b_{m,2} + \ldots + b_{m,t-1} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

kde $b_{i,j}$ značí znak u obsažený v i-té rovnici společně s u_n. V algoritmech pro dekódování nás však zajímá, kolik těchto rovnic bude platit, když je aplikujeme

na posloupnost proudu klíče z. Dané rovnice můžeme vyjádřit takto

$$\begin{aligned} z_n + y_{1,1} + y_{1,2} + \ldots + y_{1,t-1} &= L_1 \\ z_n + y_{2,1} + y_{2,2} + \ldots + y_{2,t-1} &= L_2 \\ &\vdots \\ z_n + y_{m,1} + y_{m,2} + \ldots + y_{m,t-1} &= L_m, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $y_{i,j}$ jsou znaky z na odpovídajících indexových pozicích s $b_{i,j}$ a $L_i \in \{0,1\}$.

3.2.1 Statistický model

Nyní již máme dostatek informací k tomu, aby jsme mohli definovat statistický model, o který se budou opírat Rychlé korelační útoky.

Nejdříve nahradíme znaky posloupnosti u v rovnicích (3.4) množinou binárních náhodných proměnných $U = \{u_n, b_{1,1}, b_{1,2}, \ldots, b_{1,t-1}, b_{21}, \ldots, b_{m,t-1}\}$, splňujících rovnice

$$u_n + b_{i,1} + b_{i,2} + \ldots + b_{i,t-1} = 0, \tag{3.6}$$

kde $i \in 1,2,\ldots,m$. Obdobně definujeme i množinu binárních náhodných proměnných $Z = \{z_n, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots, y_{1,t-1}, y_{2,1}, \ldots, y_{m,t-1}\}$, kterými nahradíme znaky z v rovnici (3.5). U a Z splňují vzájemné vztahy (3.7), mimo ně jsou tyto množiny nezávislé s rovnoměrným pravděpodobnostním rozdělením.

$$\begin{aligned} P(u_n = z_n) &= p \\ P(b_{i,j} = y_{i,j}) &= p \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dále definujeme náhodné proměnné b_i a y_i

$$\begin{aligned} b_i &= b_{i,1} + b_{i,2} + \ldots + b_{i,t-1} \\ y_i &= y_{i,1} + y_{i,2} + \ldots + y_{i,t-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

a také L_i

$$L_i = z_n + y_i. \tag{3.9}$$

Můžeme nahlédnout, že stav $L_i = 0$ nastane ve dvou případech:

- $z_n = u_n \wedge b_i = y_i$
- $z_n \neq u_n \wedge b_i \neq y_i$

a obdobně $L_i = 1$ nastane v případech:

- $z_n \neq u_n \wedge b_i = y_i$
- $z_n = u_n \wedge b_i \neq y_i$.

Tedy potřebujeme vyjádřit pravděpodobnost $s = P(b_i = y_i)$, s jakou se budou sumy znaků b_i a y_i rovnat. Z rovnic (3.7) a (3.8) plyne, že pravděpodobnost s je nezávislá na indexu i, a tedy se dá vyjádřit jen v závislosti na p a t, $s = s(p,t)$.

Tvrzení 5. *Uvažujme náhodné proměnné definované výše. Pak pravděpodobnost* $s(p,t) = P(b_i = y_i)$ *se dá vyjádřit rekurzivně jako*

$$\begin{aligned} s(p,t) &= p \cdot s(p,t-1) + (1-p)(1-s(p,t-1)), t > 1 \\ s(p,1) &= p \end{aligned}$$

Důkaz. Pro $t = 1$ platí, že $b_i = b_{i,1}$ a $y_i = y_{i,1}$ tedy nastane rovnost právě tehdy, když se $b_{i,1} = y_{i,1}$, což dle (3.7) je rovno p, tedy $s(p,1) = p$. Při vyšších t platí, že $b_i = y_i$ právě tehdy, když se liší v sudém počtu znaků. Sudý počet znaků při t znacích může nastat, pokud při $t-1$ znacích byl sudý počet odlišných znaků, a $t-$tý znak byl stejný, což nastane s pravděpodobností $p \cdot s(p,t-1)$ anebo při $t-1$ znacích byl lichý počet odlišných znaků a $t-$tý znak se lišil také, což nastane s pravděpodobností $(1-p) \cdot (1-s(p,t-1))$. Tedy $s(p,t) = ps(p,t-1) + (1-p)(1-s(p,t-1)$.

❑

Poznámka. Pro $s(p,t)$ existuje alternativní formule nevyužívající rekurenci.

$$s(p,t) = \frac{1}{2} + 2^{t-2} \cdot \epsilon^{t-1} \tag{3.10}$$

(Chepyzhov a kol., 2000)

V závislosti na pravděpodobnosti s pak můžeme vyjádřit pravděpodobnosti pro případy, kdy $L_i = 0$ a $L_i = 1$

$$\begin{aligned} P(L_i = 0) &= p \cdot s + (1-p) \cdot (1-s) \\ P(L_i = 1) &= p \cdot (1-s) + (1-p) \cdot s. \end{aligned}$$

Nyní tedy již můžeme vyjádřit jaká je pravděpodobnost, že znak z_n je správně za podmínky, že přesně h jeho rovnic je splněno. Uvažujme případ $S : L_1 = L_2 = \cdots = L_h = 0 \wedge L_{h+1} = L_{h+2} = \cdots = L_m = 1$. Pak pravděpodobnost jevu S je

$$\begin{aligned} P(S) =& P(L_1 = \cdots = L_h = 0 \wedge L_{h+1} = \cdots = L_m = 1 | z_n = u_n) \cdot P(z_n = u_n) + \\ &+ P(L_1 = \cdots = L_h = 0 \wedge L_{h+1} = \cdots = L_m = 1 | z_n \neq u_n) \cdot P(z_n \neq u_n) = \\ &= p \cdot s^h \cdot (1-s)^{m-h} + (1-p) \cdot (1-s)^h \cdot s^{m-h}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Jev S totiž nastane ve dvou případech:

- $z_n = u_n \wedge (b_i = y_i$ pro $i \in \{1,2,\ldots,h\}, b_i \neq y_i$ pro $i \in \{h+1, h+2, \ldots, m\})$. Tento jev má pravděpodobnost $p \cdot s^h (1-s)^{m-h}$.
- $z_n \neq u_n \wedge (b_i \neq y_i$ pro $i \in \{1,2,\ldots,h\}, b_i = y_i$ pro $i \in \{h+1, h+2, \ldots, m\})$. Tento jev má pravděpodobnost $(1-p) \cdot s^{m-h} (1-s)^h$.

A tedy můžeme dle Bayesova vzorce odvodit pravděpodobnost $z_n = u_n$ za podmínky S

$$\begin{aligned} P(z_n = u_n | S) &= \frac{P(S | z_n = u_n) \cdot P(z_n = u_n)}{P(S)} = \\ &= \frac{p \cdot s^h \cdot (1-s)^{m-h}}{p \cdot s^h \cdot (1-s)^{m-h} + (1-p) \cdot s^{m-h} \cdot (1-s)^h}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

tuto pravděpodobnost budeme značit p^*. Obdobně vyjádříme pravděpodobnost $z_n \neq u_n$ za podmínky S

$$P(z_n \neq u_n|S) = \frac{(1-p)\cdot(1-s)^h \cdot s^{m-h}}{p\cdot s^h\cdot(1-s)^{m-h} + (1-p)\cdot s^{m-h}\cdot(1-s)^h}. \tag{3.13}$$

Dále označme S^* množinu všech možností pro hodnoty L_i $i = 1,2,\ldots,m$. Pro úspěšnost algoritmu potřebujeme, aby pro velká h platilo, že

$$z_n = u_n \Rightarrow p^* > p$$

a

$$z_n \neq u_n \Rightarrow p^* < p.$$

Toto ověříme spočítáním středních hodnot pro p^* za jednotlivých případů.

$$\begin{aligned}
E_0[p^*] &= E[p^*|z_n = u_n] = \\
&= \sum_{r\in(0,1)} [r\cdot P(r = P(z_n = u_n|S_i \in S^*)|z_n = u_n)] = \\
&= \sum_{(r_1,r_2,\ldots,r_m)\in\mathbb{Z}_2^m} [P(z_n = u_n|L_1 = r_1, L_2 = r_2, \ldots, L_m = r_m)\cdot \\
&\cdot P(L_1 = r_1, L_2 = r_2, \ldots, L_m = r_m|z_n = u_n)] = \\
&= \sum_{h=0}^{m} \binom{m}{h} [\frac{p\cdot s^h(1-s)^{m-h}}{p\cdot s^h\cdot(1-s)^{m-h} + (1-p)\cdot(1-s)^h\cdot s^{m-h}} \cdot s^h\cdot(1-s)^{m-h}]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Jelikož $S_i \in S^*$ nabývá konečně mnoho hodnot, můžeme přejít na sumu v závislosti na vektoru $(r_1,r_2,\ldots,r_m) \in \mathbb{Z}_2^m$. Obdobně pak můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned}
E_1[p^*] &= E[p^*|z_n \neq u_n] = \\
&= \sum_{h=0}^{m} [\binom{m}{h} \frac{p\cdot s^h(1-s)^{m-h}}{p\cdot s^h\cdot(1-s)^{m-h} + (1-p)\cdot(1-s)^h\cdot s^{m-h}} \cdot s^{m-h}\cdot(1-s)^h].
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Příklad. Pro případ, kdy $p = 0{,}75$, $t = 2$ a $m = 20$ platí $E_0[p^*] = 0{,}9$ a $E_1[p^*] = 0{,}3$. Převzato z (Meier a Staffelbach, 1989).

Jak vidíme z příkladu (3.2.1) opravdu platí, že pravděpodobnost p^* se zvýší pokud $z_n = u_n$, a sníží pokud $z_n \neq u_n$.

3.3 Algoritmus A

Předpokládáme, že známe posloupnost proudu klíče z délky N, charakteristický polynom $g(x)$ LFSR a jeho délku l, a že výstupní posloupnost LFSR u je korelována s posloupností z s pravděpodobností $p = \frac{1}{2} + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Náš úkol je nalézt správnou posloupnost u při znalostech z, p, l, $g(x)$. Tato posloupnost může být rekonstruována ze správně určených znaků pomocí řešení lineárních rovnic pro počáteční stav. Proto, abychom dostali přibližnou posloupnost u, vybereme alespoň l znaků s největší pravděpodobností p^* nebo ekvivalentně ty, které splňují nejvíce vztahů (3.4).

Tvrzení 6. *Mějme binární LRP* $\{a_i\}_{i\geq 0}$ *a její charakteristický polynom* $g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. *Pak platí, že pro* $\forall n \geq l$ *lze člen* a_n *vyjádřit jako součet členů inicializačního vektoru* $(a_0,a_1,\ldots,a_{l-1})$.

Důkaz. Plyne z definice LRP. Víme, že libovolný znak posloupnosti můžeme vyjádřit v závislosti na l předcházejících znacích takto $a_{l+t} = \sum_{i=0}^{l-1} c_i a_{i+t}$, kde $t \geq 0$. Tedy vyjádříme daný znak a_n v závislosti na znacích $(a_{n-l},a_{n-l+1},\ldots,a_{n-1})$, tento proces opakujeme dokud nevyjádříme všechny potřebné znaky v závislosti na znacích inicializačního vektoru.

❑

Důsledek. Uvažujme LRP $\{a_i\}_{i\geq 0}$, z které známe l znaků společně s jejich indexem a charakteristický polynom $g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Pak pokud rovnice vyjadřující daných l znaků v závislosti na znacích inicializačního vektoru tvoří lineárně nezávislý systém rovnic, můžeme z těchto l znaků rekonstruovat inicializační vektor $(a_0,a_1,\ldots,a_{l-1})$.

Pro potřeby algoritmu a pozdějších výpočtů označíme některé pravděpodobnosti. Označme jev $H := |\{i|L_i = 0\}| \geq h$, tedy že je splněno alespoň h rovnic. Definujeme pak $Q(p,m,h)$ jako pravděpodobnost, že fixní znak posloupnosti z splňuje nejméně h z m rovnic,

$$Q(p,m,h) = P(H) = \sum_{i=h}^{m} [\binom{m}{i} (ps^i(1-s)^{m-i} + (1-p)(1-s)^i s^{m-i})]. \quad (3.16)$$

Dále označme $R(p,m,h)$ jako pravděpodobnost, že $z_i = u_i$ a nejméně h z m rovnic je splněno,

$$R(p,m,h) = P(z_n = u_n \wedge H) = \sum_{i=h}^{m} [\binom{m}{i} ps^i(1-s)^{m-i}]. \quad (3.17)$$

A tedy stav, kdy $z_i = u_i$ za podmínky že nejméně h z m rovnic je splněno, je vyjádřen jako $T(p,m,h)$,

$$T(p,m,h) = P(z_n = u_n|H) = \frac{P(z_n = u_n \wedge H)}{P(H)} = \frac{R(p,m,h)}{Q(p,m,h)}. \quad (3.18)$$

Tvrzení 7. $T(p,m,h)$ *je pro fixní* p *a* m *rostoucí v závislosti na* h.

Důkaz. Platí, že

$$\binom{m}{i} ps^i(1-s)^{m-i} > 0, 0 \leq i \leq m$$

$$\binom{m}{i} (ps^i(1-s)^{m-i} + (1-p)(1-s)^i s^{m-i}) > 0, 0 \leq i \leq m$$

$$\binom{m}{i} (1-p)(1-s)^i s^{m-i} > 0, 0 \leq i \leq m,$$

a tedy platí, že $Q(p,m,h)$ i $R(p,m,h)$ jsou klesající s rostoucím h. Jelikož také platí, že

$$Q(p,m,h) = R(p,m,h) + \sum_{i=h}^{m}[\binom{m}{i}(1-p)(1-s)^i s^{m-i}]$$

a $s \geq \frac{1}{2}$ (3.10) tak platí, že

$$\frac{1}{T(p,m,h)} = \frac{Q(p,m,h)}{R(p,m,h)}$$

je také klesající. Tedy $T(p,m,h)$ je rostoucí v závislosti na h.

❑

Očekávaný počet znaků posloupnosti z, které splní H, je pak $Q(p,m,h) \cdot N$. Každý znak posloupnosti z je s pravděpodobností $T(p,m,h)$ správně. Jelikož pro rekonstruování inicializačního vektoru LRP délky l potřebujeme alespoň l znaků, které splňují H, tak hledáme maximální h takové, že platí

$$Q(p,m,h) \cdot N > l. \tag{3.19}$$

I_0 pak označíme množinu všech znaků, pro které platí H a zároveň $|I_0| \geq l$. Ze znaků I_0 pak vytvoříme soustavu lineárních rovnic pro inicializační vektor LRP. Řešením těchto rovnic bude odhad inicializačního vektoru LRP. Jediný problém nastává, pokud soustava těchto rovnic je lineárně závislá a neexistuje jednoznačné řešení. Tento problém se dá řešit přidáváním dalších znaků, které splňují hodně rovnic, dokud nedostaneme lineárně nezávislý systém rovnic. V našem modelu však předpokládáme, že počet znaků bude dostatečný tak, aby byl systém těchto rovnic lineárně nezávislý, a tedy existovalo jednoznačné řešení. Očekávaný počet chybných znaků v I_0 je pak

$$r_{avg} = (1 - T(p,m,h))|I_0|. \tag{3.20}$$

Pokud je tento počet malý, pak inicializační vektor LRP může být nalezen pomocí zkoušení malých úprav I_0.

Algoritmus 2: Algoritmus A

Krok 1: Spočítej odhad m pomocí vzorce (3.3).
Krok 2: Najdi maximální hodnotu h takovou, že $Q(p,m,h)N \geq l$.
Krok 3: Vytvoř pak ze znaků I_0 pomocí řešení soustavy rovnic odhad pro inicializační vektor LRP.
Krok 4: Najdi správný inicializační vektor LRP pomocí testování modifikací I_0 s Hammingovou vzdáleností $0,1,\ldots$.

Věta 8. *Výpočetní složitost Algoritmu A je* $O(2^{cl})$, *kde* $0 < c = H(\frac{r_{avg}}{l}) < 1$.

Důkaz. Výpočetní složitost kroků 1 – 3 je zanedbatelná, jedná se pouze o dosazení do vzorců. Stačí tedy určit průměrný počet pokusů v kroku 4. Předpokládáme, že přesně r znaků z kroku 3 je nesprávných. Pak maximální počet pokusů v kroku 4 je

$$A(l,r) = \sum_{i=0}^{r}\binom{l}{i}, \tag{3.21}$$

	t								
p	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	∞
0,51	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,53	0,994	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
0,55	0,973	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993
0,57	0,927	0,985	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986	0,986
0,59	0,846	0,973	0,976	0,976	0,977	0,977	0,977	0,977	0,977
0,61	0,729	0,956	0,964	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965	0,965
0,63	0,584	0,930	0,949	0,951	0,951	0,951	0,951	0,951	0,951
0,65	0,432	0,890	0,930	0,934	0,934	0,934	0,934	0,934	0,934
0,67	0,293	0,832	0,905	0,914	0,915	0,915	0,915	0,915	0,915
0,69	0,122	0,750	0,871	0,890	0,893	0,893	0,893	0,893	0,893
0,71	0,062	0,641	0,825	0,860	0,867	0,868	0,869	0,869	0,869
0,73	0,028	0,462	0,761	0,822	0,837	0,840	0,841	0,841	0,841
0,75	0,012	0,314	0,671	0,772	0,800	0,808	0,810	0,811	0,811

Tabulka 3.1: Koeficient výpočetní složitosti Algoritmu A $c(p,t,\frac{N}{l})$ pro $\frac{N}{l} = 100$. Převzato z (Meier a Staffelbach, 1989).

pro tuto formuli existuje odhad využívající funkci binární entropie (van Lint, 1982)

$$A(l,r) = \sum_{i=0}^{r} \binom{l}{i} \leq 2^{H(\frac{r}{l})l}. \tag{3.22}$$

Pokud místo r dosadíme do (3.22) r_{avg}, dostaneme odhad počtu pokusů potřebných v kroku 4. Z čehož plyne, že výpočetní složitost Algoritmu A je $O(2^{cl})$, kde $c = H(\frac{r_{avg}}{l})$ a $0 < c < 1$.

❑

Za příznivých podmínek je $c \ll 1$, což znamená, že útok je mnohem rychlejší než prohledávání všech možností.

Příklad. Nechť $p = 0{,}75$, $t = 2$ a poměr známého proudu klíče ku délce LFSR $d = \frac{N}{l} = 100$. Pak $c = 0{,}012$ (viz. Tabulka 3.1). Tedy výpočetní složitost pro tento případ je $O(2^{0{,}012l})$, což je mnohem rychlejší v porovnáním s $O(2^l)$ při prohledávání všech možností. Převzato z (Meier a Staffelbach, 1989)

3.4 Algoritmus B

Na rozdíl od Algoritmu A, který je jednoprůchodový, Algoritmus B funguje na iteračním principu. Využívá faktu, že podmíněná pravděpodobnost p^* je malá, pokud znak z_n splňuje pouze několik rovnic. Původní idea tohoto algoritmu byla, že vhodně zvolíme mez počtu splněných rovnic, a všechny znaky posloupnosti z pod touto mezí invertujeme (jelikož pracujeme nad $\mathbb{F}_2$ stačí přičíst 1). Za příznivých podmínek pak po této úpravě bude počet znaků, které se ze špatných změnily na správné, větší, než těch, co se změnily ze správných na špatné. A tedy po několika iteracích tohoto procesu budeme schopni rekonstruovat původní posloupnost u. Z praxe se však ukázalo vhodné používání alternativní metody, kdy nejdříve

několikrát iterativně přepočítáme pravděpodobnosti p^* pro každý znak posloupnosti z a invertujeme, až když máme dostatečný počet znaků s p^* pod zvolenou mezí. Tento proces se několikrát restartuje dokud nedostaneme správnou původní posloupnost.

Pro přehlednost výpočtů si stejně jako v předcházejícím algoritmu označíme jednotlivé pravděpodobnosti, které jsou použity v samotném algoritmu. Označme jev $G := |\{i|L_i = 0\}| \leq h$, tedy že je splněno nejvýše h rovnic. Pravděpodobnost, že nejvýše h z m vztahů bude splněno pak bude $U(p,m,h)$,

$$U(p,m,h) = P(G) = \sum_{i=0}^{h}[\binom{m}{i} ps^i(1-s)^{m-i} + (1-p)(1-s)^i s^{m-i}]. \tag{3.23}$$

Dále označme pravděpodobnost, že $z_n = u_n$ a nejvýše h z m vztahů je splněno jako $V(p,m,h)$. Obdobně můžeme odvodit, že

$$V(p,m,h) = P(z_n = u_n \wedge G) = \sum_{i=0}^{h}[\binom{m}{i} ps^i(1-s)^{m-i}], \tag{3.24}$$

a nakonec i pravděpodobnost, že $z_n \neq u_n$ a maximálně h z m vztahů je splněno označíme jako $W(p,m,h)$,

$$W(p,m,h) = P(z_n \neq u_n \wedge G) = \sum_{i=0}^{h}[\binom{m}{i} (1-p)(1-s)^i s^{m-i}]. \tag{3.25}$$

Tedy $U(p,m,h)\cdot N$ je očekávaný počet znaků z, které splňují nanejvýš h vztahů. Pokud jsou tyto znaky invertovány, tak očekávaný počet správně upravených znaků je $W(p,m,h) \cdot N$ a $V(p,m,h) \cdot N$ je počet špatně změněných znaků. Tedy zvýšení správných znaků je rozdíl

$$W(p,m,h) \cdot N - V(p,m,h) \cdot N.$$

A relativní zvýšení správných znaků je

$$I(p,m,h) = W(p,m,h) - V(p,m,h). \tag{3.26}$$

Optimální korekce tedy nastane, když vybereme $h = h_{max}$ takové, že $I(p,m,h)$ je maximální pro dané p a m. Jelikož budeme v algoritmu rozhodovat v závislosti na hodnotách p^*, použijeme mez pro p^*, která byla v původním článku experimentálně nalezena optimální pro

$$p_{mez} = \frac{1}{2}[(p^*(p,m,h_{max}) + p^*(p,m,h_{max}+1)] \tag{3.27}$$

tak, aby byl korekční efekt co největší. Poté očekávaný počet znaků s p^* pod p_{mez} je

$$N_{mez} = U(p,m,h) \cdot N. \tag{3.28}$$

Pokud je pouze několik znaků s p^* pod p_{mez}, tak zopakujeme přidělení nových pravděpodobností p^*. Pro iterování pravděpodobností p^* potřebujeme zobecnění vzorce z Tvrzení (5) pro situaci, kdy každý z t znaků může mít různou pravděpodobnost $p_1,p_2,\ldots,p_t$.

$$s(p_1,p_2,\ldots,p_t,t) = p_t \cdot s(p_1,\ldots,p_{t-1},t-1) + (1-p_t)(1-s(p_1,\ldots,p_{t-1},t-1))$$
$$s(p_1,1) = p_1. \tag{3.29}$$

Toto zobecnění platí pro všechny další formule, především pro (3.12), která vyjadřuje p^*.

Samotné iterování pravděpodobnosti p^* pak funguje následovně. Nejdříve vypočítáme počáteční pravděpodobnost p^* v závislosti na původní pravděpodobnosti p dle (3.12) a (3.29) $p^*(p_1,p_2,\ldots,p_{t-1},m,h)$, kde $p_1 = p_2 = \cdots = p_{t-1} = p$. Každé další p^* se již počítá v závislosti na pravděpodobnostech p^* pro jednotlivé znaky, tedy $p^*(p_1,p_2,\ldots,p_{t-1},m,h)$, kde p_i jsou pravděpodobnosti p^* pro odpovídající znaky v minulém kroku.

Samotný algoritmus pak vypadá takto

Algoritmus 3: Algoritmus B

Krok 1: Vypočítej odhad m pomocí rovnice z (3.3).
Krok 2: Najdi hodnotu $h = h_{max}$, pro kterou je $I(p,m,h)$ maximální a spočítej p_{mez} a N_{mez} pomocí formulí (3.27) a (3.28).
Krok 3: Nastav čítač $i = 0$.
Krok 4: Pro každý znak posloupnosti z spočítej novou pravděpodobnost p^* pomocí formulí (3.12) a (3.29), s ohledem na jednotlivé počty vztahů, které jsou splněny. Vypočítej počet N_w znaků s $p^* < p_{mez}$.
Krok 5: Pokud $N_w < N_{mez}$ nebo $i < \alpha$, zvyš hodnotu i o jedna a přejdi na krok 4.
Krok 6: Invertuj ty znaky posloupnosti z, které mají $p^* < p_{mez}$, a resetuj pravděpodobnosti pro každý znak na originální hodnotu p.
Krok 7: Pokud zde jsou znaky, které nesplňují (3.1), přejdi do kroku 3.
Krok 8: Ukonči s $u = z$.

Iterace kroků 4 – 5 nazýváme vnitřní smyčka a kroků 3 – 7 smyčkou vnější. Protože jak mnoho experimentů ukázalo po několika opakování vnitřních smyček ztrácí tento proces účinnost, byl zaveden koeficient α, který se většinou nastavuje jako $\alpha = 5$.

K ohodnocení korekčního efektu Algoritmu B potřebujeme vypočítat $I_{max} = I(p,m,h_{max})$, pro dané p, t, N a l. Ze znalosti vzorců pro výpočet m a h_{max} však víme, že můžeme I_{max} vyjádřit jako $I_{max} = I(p,t,d)$, a očekávaný počet znaků opravených v jedné vnitřní smyčce je pak

$$N_0 = I_{max}(p,t,d) \cdot N. \tag{3.30}$$

Pro přehlednost je lepší N_0 vyjádřit jako $N_0 = F(p,t,d) \cdot l$, kde

$$F(p,t,d) = I_{max}(p,t,d) \cdot d \tag{3.31}$$

je opravný faktor nezávislý na l.

Jak ukázalo mnoho pokusů, Algoritmus B bude s velkou pravděpodobností úspěšný, pokud $F(p,t,d) \geq 0{,}5$. Naopak pokud $F(p,t,d) \leq 0$, tak nenastane žádný opravný efekt, a útok zklame. V tabulce (3.2) je pro ilustraci ukázáno, jak velké musí být korelační pravděpodobnost p, aby $F(p,t,d) \geq 0{,}5$ a tedy aby s největší pravděpodobností útok uspěl. Hodnoty jsou vyjádřeny pro dané váhy t charakteristického polynomu a poměry d délky známého proudu klíče ku délce LFSR.

	t								
d	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**
10	0,761	0,880	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980	0,980
10^2	0,595	0,754	0,824	0,863	0,889	0,905	0,917	0,926	0,934
10^3	0,553	0,708	0,787	0,832	0,861	0,882	0,897	0,908	0,918
10^4	0,533	0,679	0,763	0,812	0,844	0,867	0,883	0,896	0,906
10^5	0,525	0,663	0,748	0,800	0,833	0,857	0,875	0,889	0,900
10^6	0,519	0,650	0,737	0,789	0,825	0,849	0,868	0,883	0,894
10^7	0,515	0,641	0,727	0,781	0,817	0,843	0,862	0,877	0,890
10^8	0,514	0,634	0,720	0,774	0,812	0,838	0,858	0,874	0,886
10^9	0,512	0,628	0,714	0,770	0,807	0,833	0,854	0,870	0,882
10^{10}	0,510	0,621	0,709	0,764	0,802	0,830	0,850	0,866	0,879

Tabulka 3.2: Pravděpodbnosti p pro $F(p,t,d) = 0{,}5$. Převzato z (Meier a Staffelbach, 1989).

Výpočetní složitost Algoritmu B roste lineárně v závislosti na délce LFSR l tedy $O(l)$. (Meier a Staffelbach, 1989).

3.5 Shrnutí

Algoritmy prezentované v této sekci se v praxi ukázaly velmi efektivní, což vedlo k zavedení restrikcí pro konstrukci kombinačních generátorů. Neměla by existovat žádná netriviální korelace mezi proudem klíče a LFSR s délkou $l < 100$ a také s LFSR, které má charakteristický polynom malé váhy $t < 10$. Pro Booleovské funkce by zpravidla také neměla existovat žádná netriviální korelace mezi proudem klíče a malou skupinou LFSR. Bohužel, jak ukázal T. Sigenthaler zvyšování korelační odolnosti Booleovské funkce způsobuje snižování jejího algebraického stupně (Siegenthaler, 1985), což vede k náchylnosti na jiné útoky například pomocí Berlekamp-Massey algoritmu (Massey, 1969). Proto se musí při návrhu Booleovské funkce v tomto ohledu dospět ke kompromisu.

4. Modifikace rychlých korelačních útoků

V této kapitole se budeme zabývat modifikacemi rychlých korelačních útoků, které byli prezentovány jako reakce na původní rychlé korelační útoky prezentované v (Meier a Staffelbach, 1989). Budou představeny základní principy a myšlenky těchto metod. Zaměříme se především na metody hledání více rovnic z charakteristického polynomu a hledání rovnic s malou vahou. Také představíme alternativní reprezentaci korelačních útoků.

4.1 Vylepšené hledání rovnic

Postup pro hledání dalších rovnic představily Mihaljevič a Golic v (Mihaljevic a Golić, 1990). Algoritmus je založen na maticové reprezentaci LFSR. Předpokládáme, že máme charakteristický polynom $g(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_lx^l$ LFSR délky l. Definujeme u_n^* stav LFSR v čase n

$$u_n^* = (u_{n-l}, u_{n-l+1}, \ldots, u_{n-1}),$$

pak pro matici A rozměrů $l \times l$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_{l-1} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

platí, že $A \cdot (u_{n-1}^*)^\top = u_n^*$. Tedy stav LFSR v čase n může být vyjádřen jako $u_n^* = A^j \cdot (u_{n-j}^*)^\top$. Tedy pomocí mocnění A^j pro $j = 1,2,\ldots,n-l$ dostaneme $n-l$ rovnic obsahující u_n^*. Očekávaný počet m_t všech rovnic s váhou t nalezených tímto algoritmem je pak

$$m_t = \frac{N}{2^l}\binom{l}{t}.$$

Problematičnost této metody tkví ve velmi vysokých nárocích na velikost poměru d velikosti proudu klíče ku délce délce LFSR k nalezení dostatečného množství rovnic. Tedy tato metoda není velmi praktická pro LFSR velkých délek.

Jedna z metod hledání rovnic s malou vahou byla představena Chepyzhovem a Smeetsem (Chepyzhov a Smeets, 1991). Metoda je založena na známém problému z teorie kódu. Z kapitoly 2 víme, že výstupní sekvence u LFSR může být interpretována jako kódové slovo lineárního kódu C. Pro takový kód však existuje duální kód H, pro který platí $H = \{h \in \mathbb{F}_2^n | \sum_{i=0}^{n-1} h_i c_i = 0 \ \forall c \in C\}$. V (Chepyzhov a Smeets, 1991) je ukázáno, že hledání rovnic s malou vahou je ekvivalentní hledání kódového slova kódu H s malou vahou.

V (Penzhorn, 1996) Penzhorn představil metodu hledání rovnic s malou vahou pomocí dělení polynomů. Máme $g(x) = 1 + c_1x + \ldots + c_lx^l$ charakteristický polynom LFSR a hledáme polynomy $h(x)$ takové, že $h(x) \equiv 0 \mod (g(x))$.

Penzhorn ukázal, že hledání dostatečně mnoha rovnic s vahou 3 je velmi složité až neproveditelné, proto musíme hledat rovnice s vahou 4. V (Penzhorn, 1996) je složitost algoritmu hledání rovnic váhy 4 dokázána řádu $O(2^{\frac{2l}{3}})$.

4.2 Modifikace interpretací

V článku Thomase Johanssona a Fredrika Jönssona Fast Correlation Attacks throught Reconstruction of Linear Polynomials (Johansson a Jönsson, 2000) bylo ukázáno efektivní použití reprezentace pomocí polynomů více proměnných a následně představeny dva vylepšené dekódovací algoritmy využívající tuto reprezentaci. Reprezentace pomocí polynomů více proměnných vypadá takto. Mějme inicializační stav $LFSR$ délky l

$$u = (u_0,u_1,\ldots,u_{l-1}) \tag{4.2}$$

tedy jak jsme již ukázali dříve, dají se další členy posloupnosti vyjádřit v závislosti na těchto l znacích.

$$u_i = \sum_{j=0}^{l-1} w_{ij}u_j, \tag{4.3}$$

kde w_{ij} jsou konstanty vypočítané pomocí charakteristického polynomu. Pak definujeme polynom inicializačního stavu $U(x)$

$$U(x) = U(x_0,x_1,\ldots,x_{l-1}) = u_0x_0 + u_1x_1 + \cdots + u_{l-1}x_{l-1}. \tag{4.4}$$

Takto můžeme vyjádřit každé u_i jako výsledek polynomu inicializačního stavu v daném známém bodu $x^{(i)} = (w_{i1},w_{i2},\ldots,w_{ij})$, tedy

$$u_i = U(x^{(i)}). \tag{4.5}$$

Proud klíče z pak můžeme chápat jako sekvenci $LFSR$ u, ke které byla přičtena neznámá sekvence šumu $e = (e_0,e_1,\ldots,e_{N-1})$, kde $e_i \in \{0,1\}$ jsou náhodné nezávislé proměnné a $P(e_i = 0) = \frac{1}{2} + \epsilon$. Vyjádření pomocí polynomu $U(x)$ pak vypadá takto

$$z = (U(x^{(0)}) + e_0,U(x^{(1)}) + e_1,\ldots,U(x^{N-1}) + e_{N-1}). \tag{4.6}$$

Našim úkolem je pak rekonstruovat polynom $U(x)$ ze znalosti výstupů z a známé korelační pravděpodobnosti. Tento problém se nazývá Learning Parity with Noise a je považován za těžký. Řešení zjednodušení tohoto problému, kdy si můžeme vybírat body, ve kterých známe hodnotu polynomu, je pak použito jako základ pro dekódovací algoritmus.

Johansson a Jönsson se také zabývali reprezentací pomocí konvolučních kódů (Johansson a Jönsson, 1999a). Motivací této reprezentace byli především poznatky z rychlých korelačních útoků, a to, že dekódovací algoritmy jsou mnohem efektivnější, pokud máme dostatek rovnic derivovaných z charakteristického polynomu s malou vahou. Pokud použijeme reprezentaci pomocí konvolučních kódů, můžeme pak takové rovnice nalézt, i když je charakteristický polynom velké váhy. Tato metoda využívá algoritmus s pamětí a právě velká paměťová složitost je nevýhodou tohoto způsobu.

Jako řešení problému s paměťovou složitostí se však ukázalo používání reprezentace pomocí turbo kódů (Johansson a Jönsson, 1999b), které fungují na bázi použití více paralelních konvolučních kódů.

Závěr

Rychlé korelační útoky jsou stále aktuální téma, kterým se zabývá mnoho kryptologů a přibývají nové práce, které se snaží tento druh útoku vylepšit. Většina těchto vylepšení však vyžaduje k porozumění již větší znalosti matematiky. V této práci jsme se zabývali především základy. Představili jsme původní průkopnickou práci na téma Korelačních útoků. Zabývali jsme se vztahem korelačních útoků k dekódovacímu problému. Rychlé korelační útoky byly dále představeny a podrobněji rozebrány. V neposlední řadě bylo ukázáno několik příkladů modifikací rychlých korelačních útoků.

Literatura

Carlet, C. (2007). Boolean functions for cryptography and error correcting codes.

Chepyzhov, V. a Smeets, B. (1991). On a fast correlation attack on certain stream ciphers. **547**, 176–185.

Chepyzhov, V., Johanson, T. a Smeets, B. (2000). A simple algorithm for fast correlation attack on stream ciphers. *Springer-Verlag*, **LNCS 1978**, 181–195.

Johansson, T. a Jönsson, F. (1999a). Improved fast correlation attacks on stream ciphers via convolutional codes. In *EUROCRYPT*, volume 1592 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–362. Springer. ISBN 3-540-65889-0.

Johansson, T. a Jönsson, F. (1999b). Fast correlation attacks based on turbo code techniques. In *CRYPTO*, volume 1666 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 181–197. Springer. ISBN 3-540-66347-9.

Johansson, T. a Jönsson, F. (2000). Fast correlation attacks through reconstruction of linear polynomials. In *CRYPTO*, volume 1880 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 300–315. Springer. ISBN 3-540-67907-3.

Jönsson, F. (2002). *Some results on fast correlation attacks*. PhD thesis, Lund University.

Massey, J. L. (1969). Shift-register synthesis and bch decoding. *IEEE Transactions on Information Theory*, **15**, 122–127.

Meier, W. a Staffelbach, O. (1989). Fast correlation attacks on certain stream ciphers. *Journal of Cryptology*, **1**(3), 159–176.

Meier, W. (2011). Fast correlation attacks: Methods and countermeasures. pages 55–67.

Mihaljevic, M. a Golić, J. (1990). A fast iterative algorithm for a shift register initial state reconstruction given the noisy output sequence. *Springer-Verlag*, pages 165–175.

Penzhorn, W. T. (1996). Correlation attacks on stream ciphers: Computing low-weight parity checks based on error-correcting codes. In *Fast Software Encryption*, pages 159–172.

Siegenthaler, T. (1985). Decrypting a class of stream ciphers using ciphertext only. *IEEE Transactions of Information Theory*, **C-34**(1), 81–85.

Stanovský, D. (2010). *Základy Algebry*. Matfyzpress, Praha. ISBN 9788073781057.

van Lint, J. (1982). Introduction to coding theory. *Springer-Verlag*, **86**.

Zvára, K. a Štěpán J. (2002). *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-24-3.

Seznam obrázků

Seznam tabulek