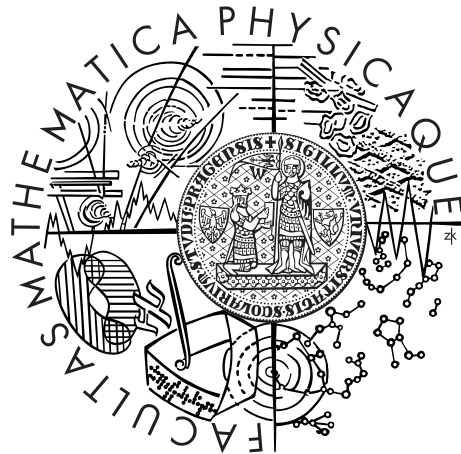


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Filka

Autokorelační a dekompoziční metody v analýze ekonomických časových řad

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zichová Jitka, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Chcel by som sa touto cestou poďakovať mojej vedúcej bakalárskej práce RNDr. Jitke Zichovej, Dr. za jej odbornú pomoc a usmernenie pri písaní, za cenné rady, informácie a v neposlednom rade aj za jej ochotu vždy pomôcť, keď to bolo treba.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Autokorelační a dekompoziční metody v analýze ekonomických časových řad

Autor: Jakub Filka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zichová Jitka, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cílem této práce je podat základní teoretický výklad pro práci s časovými řadami s využitím autokorelačních a dekompozičních metod, aplikovat metody na skutečná data ve vybraném softwaru, interpretovat získané výsledky a porovnat výhody a nevýhody daných metod. Vybraná data byla zpracována prostřednictvím softwaru Wolfram Mathematica a NCSS. Hlavním přínosem práce je spojení teoretické a praktické části v daných softwarech, které v čase psaní nebyly v české, respektive slovenské literatuře podobným způsobem propojené.

Klíčová slova: časová řada, autokorelační metody, dekompoziční metody, Wolfram Mathematica

Title: Autocorrelation and decomposition methods in economic time series analysis

Author: Jakub Filka

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Zichová Jitka, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The goal of this bachelor thesis is to give a basic theoretical background for working with time series with the usage of autocorrelation and decomposition methods, as well as to apply these methods on real data in selected software. The interpretation of the results is closely related to the comparison of advantages and disadvantages of the methods. We have used the software Wolfram Mathematica and NCSS. The main contribution of the thesis is the connection of both theoretical and practical approach, which was not performed similarly in Czech or Slovak literature in the time of elaborating the thesis.

Keywords: time series, autocorrelation methods, decomposive methods, Wolfram Mathematica

Názov práce: Autokorelačné a dekompozičné metódy v analýze ekonomických časových rád

Autor: Jakub Filka

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: RNDr. Zichová Jitka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Cieľom práce je podať základný teoretický podklad pre prácu s časovými radami s využitím autokorelačných a dekompozičných metód, aplikovať metódy na skutočné data vo vybranom software, interpretovať získané výsledky a porovnať tak výhody a nevýhody daných metód. Vybrané data sme spracovali prostredníctvom softwaru Wolfram Mathematica a NCSS. Hlavným prínosom práce je spojenie teoretickej a praktickej časti v daných softwaroch, ktoré v čase písania neboli v českej, respektíve slovenskej literatúre podobným štýlom prepojené.

Kľúčové slová: časová rada, autokorelačné metódy, dekompozičné metódy, Wolfram Mathematica

Obsah

1	Úvod	2
2	Autokorelačné metódy	3
2.1	Stacionarita	3
2.2	Lineárny proces	4
2.3	Autokovariančné a autokorelačné funkcie	5
2.4	Odhad autokovariančnej funkcie a ACF	5
2.5	PACF a jej odhad	6
2.6	Proces klzavých súčtov $MA(q)$	7
2.7	Autoregresný proces $AR(p)$	7
2.8	ARMA proces	9
2.9	Konštrukcia modelov	10
2.10	Predpovedanie	14
2.11	Aplikácia na skutočné data	16
3	Dekompozičné metódy	21
3.1	Metódy založené na popise matematickými krivkami	22
3.2	Exponenciálne vyrovnávanie	22
3.2.1	Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie	22
3.2.2	Dvojité exponenciálne vyrovnávanie	25
3.2.3	Holtova metóda	29
4	Záver a interpretácia výsledkov	32
	Literatúra	34
	Zoznam obrázkov	35

Kapitola 1

Úvod

Schopnosť predpovedať vývoj budúcich hodnôt pozorovaného javu na základe hodnôt súčasných alebo minulých je bezpochyby dôležitým faktorom pri našom súčasnom rozhodovaní. Jedným z nástrojov pre modelovanie vývoja v čase a konštrukciu predpovedí je matematická disciplína známa ako analýza časových rád.

V tejto práci sa najskôr budeme dôkladnejšie venovať matematickej teórii autokorelačných a dekompozičných metód, ktorá tvorí pevný základ pre praktickú činnosť. Spomenieme dôležité definície, tvrdenia a vety, ktoré nám pomôžu pochopiť súvislosti, ktorými sa budeme zaoberať v praktickej časti, kde získane poznatky aplikujeme na finančné data vo vybraných softwaroch. Uvedieme základné výhody a silné stránky, ale aj nevýhody a slabiny zvoleného postupu a porovnáme získané výsledky z jednotlivých metód a softwarov pri predpovedaní budúceho vývoja nami pozorovaných dát.

Kapitola 2

Autokorelačné metódy

Definícia 1 (Náhodný proces). [5] *Nech (Ω, A, P) je pravdepodobnostný priestor, nech $T \subset \mathbb{R}$. Rodina reálnych náhodných premenných $\{x_t, t \in T\}$ definovaná na (Ω, A, P) sa nazýva náhodný proces.*

Poznámka. V prípade, že $T = \mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ alebo $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, hovoríme o procese s diskrétnym časom alebo o časovej rade.

Definícia 2 (Biely šum). [5] *Biely šum definujeme ako postupnosť $\{\epsilon_t\}$ nekorelovaných náhodných premenných s nulovou strednou hodnotou a konštantným konečným rozptylom.*

$$E(\epsilon_t) = 0 ; \quad \text{var}(\epsilon_t) = \sigma^2 > 0 ; \quad \text{cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0 \text{ pre } s \neq t.$$

V nasledujúcej kapitole popíšeme základné metódy skúmania časových rád, tzv. autokorelačné metódy známe aj ako Box - Jenkinsova (B-J) metodológia. Najskôr ale uveďme niektoré hlavné výhody a nevýhody podľa zdroja [3], ktoré daná metodológia prináša.

- (+) flexibilita - použiteľnosť pre rady s veľmi obecným priebehom,
- (+) doposiaľ neexistuje lepšia rutinná metóda pre analýzu,
- (+) softwarová podoba je dostupná vo väčšine matematických softwarov,
- (-) vyžaduje dlhšie časové rady, potrebujeme množstvo údajov,
- (-) ťažko realizovateľná bez počítača vybaveného príslušným softwarom,
- (-) obtiažna praktická interpretácia modelov.

2.1 Stacionarita

Definícia 3 (Striktná stacionarita časovej rady). [3] *Časová rada $x_t, t \in T$ sa nazýva striktné stacionárna, ak pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$, pre ľubovoľné x_1, \dots, x_n a pre ľubovoľné t_1, \dots, t_n a h také, že $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \leq k \leq n$ platí*

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

kde $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ je systém distribučných funkcií.

Rozlišujeme striktnú a slabú stacionaritu. Striktná stacionarita predpokladá, že správanie sa príslušného náhodného procesu je invariantné voči posunu v čase. Pravdepodobnostné rozdelenie náhodného vektoru $(x_{t_1}, \dots, x_{t_k})$ je z definície rovnaké ako rozdelenie náhodného vektoru $(x_{t_1+h}, \dots, x_{t_k+h})$ pre ľubovoľné h a ľubovoľné časy t_1, \dots, t_k . Slabá stacionarita na rozdiel od striktnej požaduje aby mal príslušný náhodný proces konštantnú strednú hodnotu ($E(x_t) = \mu$), konštantný rozptyl ($var(x_t) = \sigma^2$) a pre kovarianciu platnosť vzťahu $cov(x_t, x_s) = cov(x_{t+h}, x_{s+h})$ pre každé časové okamihy t, s a pre každé h .

Poznámka. Ak má daný náhodný proces momenty do druhého rádu, potom striktná stacionarita implikuje slabú stacionaritu. V ďalšom výklade budeme pracovať so slabou stacionaritou, ktorú budeme naďalej nazývať len stacionarita.

2.2 Lineárny proces

Modelovaním stacionárnych časových rád sa zaoberá B-J metodológia. Jej základné modely sú AR, MA a ARMA.

Definícia 4 (Lineárny proces). [3] *Lineárny proces je definovaný ako nekonečná rada*

$$x_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \dots = (1 + \psi_1 \beta + \psi_2 \beta^2 + \dots) \epsilon_t = \psi(\beta) \epsilon_t, \quad (2.2)$$

kde ψ_i sú parametre, ϵ_t biely šum, $\psi(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \beta^j$, $\psi_0 = 1$ a β je operátor časového posunu, pre ktorý platí $\beta^j(x_t) = x_{t-j}$; $j = 1, 2, \dots$

Naviac predpokladáme, že mocninová rada $\psi(z)$ konverguje pre $|z| \leq 1$ (tj. vo vnútri jednotkového kruhu v komplexnej rovine). Toto je postačujúca podmienka stacionarity, lebo za tohto predpokladu možno ukázať, že pre proces x_t definovaný predpisom (2.2) platí

$$E(x_t - \sum_{j=0}^n \psi_j \epsilon_{t-j})^2 \rightarrow 0 \quad \text{pre } n \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

a x_t je slabo stacionárna (viď napr. [5], kapitola 2.6 alebo [2], kapitola 3.1).

Z praktického hľadiska je dôležité aby sa súčasná hodnota x_t dala vyjadriť pomocou predchádzajúcich hodnôt x_{t-1}, \dots a súčasnej hodnoty bieleho šumu.

$$x_t = \pi_1 x_{t-1} + \pi_2 x_{t-2} + \dots + \epsilon_t, \text{ t.j. } \epsilon_t = x_t - \pi_1 x_{t-1} - \pi_2 x_{t-2} - \dots = \pi(\beta) x_t \quad (2.4)$$

Definícia 5 (Invertibilita). [3] *Lineárny proces, ktorý možno zapísať vzťahom (2.4), sa nazýva invertibilný.*

Postačujúcou podmienkou invertibility je predpoklad $\pi(z)$ konverguje pre $|z| \leq 1$ (viď v [2] kapitola 3.1).

Poznámka. Z platnosti vzťahu $\epsilon(t) = \pi(\beta) x_t = \pi(\beta) \psi(\beta) \epsilon(t)$ dostávame vzťah medzi parametrami: $\pi(\beta) \psi(\beta) = 1$.

2.3 Autokovariančné a autokorelačné funkcie

Časové rady sa obvykle vyznačujú silnou korelovanosťou. Tento jav kvantitatívne popisujú autokorelačné funkcie (z angličtiny ACF), respektíve parciálne autokorelačné funkcie (PACF). Predpokladajme stacionárny proces x_t .

Definícia 6 (Autokovariančná funkcia). [3] *Autokovariančná funkcia pre oneskorenie k sa definuje ako*

$$\gamma_k = \text{cov}(x_t, x_{t-k}) = E(x_t - \mu)(x_{t-k} - \mu) \quad (2.5)$$

pre $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Definícia 7 (Autokorelačná funkcia). [3] *Autokorelačná funkcia pre oneskorenie k sa definuje ako*

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_k}{\sigma_x^2} = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(x_t)}\sqrt{\text{var}(x_{t-k})}} \quad (2.6)$$

pre $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$

Je zrejmé, že funkcie ρ_k a γ_k sú párne (plynie z vlastností kovariancie), preto sa stačí obmedziť na indexy $k \geq 0$. Navyiac $\rho_0 = 1$ a $|\rho_k| \leq 1$.

2.4 Odhad autokovariančnej funkcie a ACF

Autokovariančná a autokorelačná funkcia používajú odhad strednej hodnoty cez výberový priemer

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.7)$$

odhad autokovariančnej funkcie

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.8)$$

a odhad autokorelačnej funkcie

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.9)$$

Poznámka. Podľa [3] je pre praktické použitie potrebných aspoň 50 pozorovaní a $k < n/4$.

Správanie autokorelačnej funkcie je pre praktickú analýzu časových rád veľmi dôležitým ukazovateľom, nakoľko napovedá, aký typ modelu použiť. Kľúčová je predovšetkým identifikácia hodnoty $k = k_0$, za ktorou začína byť autokorelačná funkcia nulová. Bod k_0 nazývame *bodom useknutia*.

Pre konkrétnu analyzovanú radu ale teoretickú funkciu ρ_k nepoznáme, preto je dôležité vedieť ako blízko k nule musí byť hodnota r_k , aby sme mohli s určitou spoľahlivosťou tvrdiť, že $\rho_k = 0$. Často využívame *Barlettovu aproximáciu* [2] :

Ak je $\rho_k = 0$ pre $k > k_0$, potom za predpokladu asymptotickej normality rady x_t platí

$$r_k \sim N\left(0, \frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2\right)\right), \text{ pre } k > k_0. \quad (2.10)$$

Hypotézu nulovosti autokorelácie ρ_k , $k > k_0$ na hladine $\alpha = 5\%$ zamietame, ak je

$$|r_k| > 2 \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{k_0} r_j^2\right)}. \quad (2.11)$$

(2.11) dostaneme s využitím 97.5% kvantilu rozdelenia $N(0,1)$, ktorý je rovný 1.96, čo zaokruhlujeme na 2.

2.5 PACF a jej odhad

Definícia 8 (Parciálna autokorelačná funkcia). [3] *Parciálnu autokorelačnú funkciu ρ_{kk} definujeme ako parciálny korelačný koeficient medzi x_t a x_{t-k} pri pevných hodnotách $x_{t-k+1}, \dots, x_{t-1}$. Zrejme platí $\rho_{00} = 1$ a $\rho_{11} = \rho_1$.*

Poznámka. Podrobnú teóriu parciálnej korelácie je možné nájsť v [1].

Možno ukázať, že odhadom r_{kk} funkcie ρ_{kk} je odhadnutý parameter $\hat{\varphi}_{kk}$ v modele

$$x_t = \delta + \varphi_{k1}x_{t-1} + \varphi_{k2}x_{t-2} + \dots + \varphi_{kk}x_{t-k} + \epsilon_t. \quad (2.12)$$

V praxi sa ale často využíva rekurentný spôsob

$$r_{11} = r_1, \quad r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} r_{k-1,j} \cdot r_j} \quad (2.13)$$

pre $k > 1$, kde

$$r_{kj} = r_{k-1,j} - r_{kk} \cdot r_{k-1,k-j} \quad (2.14)$$

pre $j = 1, \dots, k-1$.

Podobne ako ACF môže mať aj PACF bod useknutia, takže aj ona býva dôležitým identifikačným nástrojom. Na rozdiel od ACF používame *Quenouilleovu aproximáciu*[3] : Ak je $\rho_{kk} = 0$ pre $k > k_0$ potom za predpokladu asymptotickej normality rady x_t platí

$$r_{kk} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right), \text{ pre } k > k_0. \quad (2.15)$$

Hypotézu nulovosti parciálnej autokorelácie ρ_{kk} na hladine $\alpha = 5\%$ zamietame, ak je $|r_{kk}| > 2\sqrt{\frac{1}{n}}$.

2.6 Proces kĺzavých súčtov MA(q)

Definícia 9. [3] *Proces kĺzavých súčtov rádu q , značíme MA (z angl. moving average), má tvar*

$$x_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q} = \theta(\beta) \epsilon_t, \quad (2.16)$$

kde $\theta_1, \dots, \theta_q$ sú parametre, a $\theta(\beta) = 1 + \theta_1 \beta + \dots + \theta_q \beta^q$ je operátor kĺzavých súčtov.

MA(q) zrejme vzniká useknutím lineárneho procesu (2.2) v bode, ktorý odpovedá oneskoreniu q .

Tvrdenie 1. [3] *Proces MA(q) je vždy stacionárny s nulovou strednou hodnotou a rozptylom $\sigma_x^2 = (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2$.*

Dôkaz. Stacionarita plynie priamo zo stacionarity bieleho šumu. Pre strednú hodnotu a rozptyl dostávame s využitím definície 2 :

$$\begin{aligned} E(x_t) &= E(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}) = E(\epsilon_t) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1}) + \dots + \theta_q E(\epsilon_{t-q}) = 0. \\ \text{var}(x_t) &= \text{var}(\epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}) = \text{var}(\epsilon_t) + \theta_1^2 \text{var}(\epsilon_{t-1}) + \dots + \theta_q^2 \text{var}(\epsilon_{t-q}) = \\ &= \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2). \end{aligned}$$

□

Tvrdenie 2. [3] *Autokorelačná funkcia procesu MA(q) má tvar*

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2} & \text{pre } k = 1, \dots, q, \\ 0 & \text{pre } k > q. \end{cases}$$

Dôkaz. $\rho_k = \frac{\text{cov}(x_t, x_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(x_t)} \sqrt{\text{var}(x_{t-k})}}$ podľa definície 7.

Menovateľ je podľa tvrdenia 1 rovný $\sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$.

Položme $\theta_0 = 1$. Čitateľ je podľa definície 2 :

$$\text{cov}(x_t, x_{t-k}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^q \theta_i \epsilon_{t-i}, \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-k-j}\right) = \sigma^2(\theta_0 \theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q).$$

Z toho plynie dokazované.

□

Proces MA(q) je invertibilný, ak všetky korene z_1, \dots, z_q polynómu $\theta(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine, lebo potom je splnený analogický predpoklad konvergencie mocnínovej rady ($\theta(z) = \frac{1}{\pi(z)}$ z definícií 5, 9).

2.7 Autoregresný proces AR(p)

Definícia 10. [2] *Autoregresný proces rádu p , značíme ako AR (z angl. autoregression), má tvar*

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \epsilon_t, \quad \text{t.j. } x_t - \varphi_1 x_{t-1} - \dots - \varphi_p x_{t-p} = \varphi(\beta) x_t = \epsilon_t, \quad (2.17)$$

kde $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sú parametre a $\varphi(\beta) = 1 - \varphi_1 \beta - \dots - \varphi_p \beta^p$ je autoregresný operátor, ktorý vzniká useknutím invertovaného lineárneho procesu (2.4) v bode, ktorý odpovedá oneskoreniu p .

Proces $AR(p)$ je stacionárny, ak všetky korene z_1, \dots, z_p polynómu $\varphi(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu v komplexnej rovine (Opäť analogicky $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ z definícií 4 a 10).

Tvrdenie 3. [3] *Proces $AR(p)$ má za splnenia podmienky stacionarity nulovú strednú hodnotu a rozptyl*

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \varphi_1 \rho_1 - \dots - \varphi_p \rho_p}. \quad (2.18)$$

Dôkaz. $E(x_t) - \varphi_1 E(x_{t-1}) - \dots - \varphi_p E(x_{t-p}) = E(\epsilon_t)$. Zo stacionarity máme $E(x_t) = \mu$ pre každé t a z vlastností bieleho šumu je $E(\epsilon_t) = 0$. Teda platí $\mu(1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p) = 0$. Zrejme je $1 - \varphi_1 - \dots - \varphi_p \neq 0$, inak by mal polynóm $\varphi(z)$ koreň 1, čo ale odporuje predpokladu stacionarity. Z toho plynie $\mu = 0$.

Rozptyl možno písať v tvare $var(x_t) = \sigma_x^2 = E x_t^2 = E(x_t(\sum_{i=1}^p \varphi_i x_{t-i} + \epsilon_t)) = \sum_{i=1}^p \varphi_i E(x_t x_{t-i}) + E(x_t \epsilon_t) = \sum_{i=1}^p \varphi_i \gamma_i + E \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} \epsilon_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho_i \sigma_x^2 + \psi_0 \sigma^2$. V predposlednej rovnosti sme využili možnosť písať proces $AR(p)$ ako lineárny proces (2.2). ψ_0 sa teda rovná 1, odkiaľ dostávame $\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i \rho_i}$. □

Tvrdenie 4. [3] *Za podmienky stacionarity $AR(p)$ procesu splňa autokorelačná funkcia diferenčnú rovnicu.*

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{pre } k > 0. \quad (2.19)$$

Dôkaz. Pre odvodenie ACF vynásobíme autoregresný proces (2.17) hodnotou $\frac{x_{t-k}}{\sigma_x^2}$, aplikujeme strednú hodnotu, pričom vzhľadom k možnosti vyjadrenia $AR(p)$ ako lineárneho procesu (2.2) platí $E(x_{t-k} \epsilon_t) = 0$ pre $k > 0$. Dostávame teda

$E(\frac{x_t \cdot x_{t-k}}{\sigma_x^2}) = E(\frac{\varphi_1 \cdot x_{t-1} \cdot x_{t-k}}{\sigma_x^2}) + \dots + E(\frac{\varphi_p \cdot x_{t-p} \cdot x_{t-k}}{\sigma_x^2}) = \varphi_1 \rho_{k-1} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p}$, kde ρ_k je zavedené v definícií 7. Z teórie diferenčných rovníc potom dostávame riešenie v tvare

$$\rho_k = \alpha_1 z_1^{-k} + \alpha_2 z_2^{-k} + \dots + \alpha_p z_p^{-k}, \quad (2.20)$$

kde z_1, \dots, z_p sú navzájom rôzne korene polynómu $\varphi(z)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sú pevné koeficienty. □

Poznámka. Ak zapíšeme autokorelačnú funkciu (2.19) pre $k = 1, \dots, p$, tak dostávame tzv. *Yule-Walkerove* rovnice, ktoré je možné použiť k vyjadreniu parametrov pomocou autokorelácií

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \varphi_1 + \varphi_2 \rho_1 + \dots + \varphi_p \rho_{p-1}, \\ \rho_2 &= \varphi_1 \rho_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_p \rho_{p-2}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \rho_p &= \varphi_1 \rho_{p-1} + \varphi_2 \rho_{p-2} + \dots + \varphi_p. \end{aligned}$$

Špeciálne v modele AR(1) máme $\rho_1 = \varphi_1$, kde $-1 \leq \rho_1 \leq 1$. V modele AR(2) dostaneme zo stacionarity a Yule - Walkerových rovníc

$$\varphi_1 + \varphi_2 < 1; \quad \varphi_2 - \varphi_1 < 1; \quad -1 < \varphi_2 < 1. \quad (2.21)$$

Proces AR(p) je vždy invertibilný, nakoľko zápis (2.15) je priamo zápis tohto modelu v invertovanom tvare (2.4).

Poznámka. Parciálna autokorelačná funkcia ρ_{kk} má podľa [3] bod useknutia k_0 rovný rádu modelu p , čo robí z tejto funkcie dôležitý nástroj pre identifikáciu autoregresných modelov. Táto vlastnosť plynie priamo z definície PACF.

2.8 ARMA proces

Definícia 11. [2] *ARMA proces rádu (p, q) je proces spĺňajúci rovnosť*

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \varphi_2 x_{t-2} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}, \quad (2.22)$$

t.j.

$$\varphi(\beta)x_t = \theta(\beta)\epsilon_t, \quad (2.23)$$

kde $\varphi(\beta)$ a $\theta(\beta)$ boli definované v procesoch AR(p) a MA(q).

Všimnime si, že procesy AR(p) a MA(q) sú špeciálnymi prípadmi ARMA procesu. Stacionarita tohto procesu teda závisí len na autoregresnej časti a invertibilita na MA časti. Preto je proces ARMA stacionárny, ak korene $\varphi(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu a invertibilný, ak korene $\theta(z)$ ležia mimo jednotkového kruhu. Stacionárny ARMA proces má zrejme nulovú strednú hodnotu a jeho autokorelačná funkcia spĺňa diferenčnú rovnicu

$$\rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} + \varphi_2 \rho_{k-2} + \dots + \varphi_p \rho_{k-p} \quad \text{pre } k > q. \quad (2.24)$$

Príklad (ARMA(1,1) proces).

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}. \quad (2.25)$$

Daný proces je stacionárny pre $|\varphi_1| < 1$ a invertibilný pre $|\theta_1| < 1$.

Tvrdenie 5. [3] *Rozptyl procesu ARMA(1,1) je*

$$\sigma_x^2 = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1)\sigma^2}{1 - \varphi_1^2} \quad (2.26)$$

a pre autokorelačnú funkciu platí

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 + \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1}, \quad \rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} \quad \text{pre } k > 1. \quad (2.27)$$

Dôkaz. Autokovariančná funkcia procesu ARMA(1,1) má tvar

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(x_t x_{t-k}) = \varphi_1 E(x_{t-1} x_{t-k}) + E(\epsilon_t x_{t-k}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} x_{t-k}) = \\ &= \varphi_1 \gamma_{k-1} + E(\epsilon_t x_{t-k}) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1} x_{t-k}). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pre $k = 0$ dostávame

$$\gamma_0 = \varphi_1 \gamma_1 + E(\epsilon_t(\varphi_1 x_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})) + \theta_1 E(\epsilon_{t-1}(\varphi_1 x_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})), \quad (2.29)$$

kde $E(\epsilon_t(\varphi_1 x_{t-1} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})) = \sigma^2$ a

$E(\epsilon_{t-1}(\varphi_1(\varphi_1 x_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-2}) + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1})) = (\varphi_1 + \theta_1)\sigma^2$, teda

$$\gamma_0 = \gamma_1 \varphi_1 + \sigma^2 + \theta_1(\varphi_1 + \theta_1)\sigma^2. \quad (2.30)$$

Pre $k = 1$ máme

$$\gamma_1 = \varphi_1 \gamma_0 + \theta_1 E(\epsilon_{t-1}(\varphi_1 x_{t-2} + \epsilon_{t-1} + \theta_1 \epsilon_{t-2})) = \gamma_0 \varphi_1 + \theta_1 \sigma^2. \quad (2.31)$$

Pre $k \geq 2$

$$\gamma_k = \varphi_1 \gamma_{k-1}. \quad (2.32)$$

Dostávame teda rekurentný zápis pre autokovariančnú funkciu. Rovnice (2.30) a (2.31) sú sústavou 2 rovníc s dvomi neznámymi γ_0 a γ_1 . Po vyriešení dostávame vzťahy

$$\gamma_0 = \frac{(1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1)\sigma^2}{1 - \varphi_1^2} = \sigma_x^2, \quad (2.33)$$

$$\gamma_1 = \frac{(1 + \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)\sigma^2}{1 - \varphi_1^2}. \quad (2.34)$$

Z toho už ľahko dostávame predpis pre autokorelačnú funkciu

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 + \varphi_1\theta_1)(\varphi_1 + \theta_1)}{1 + \theta_1^2 + 2\varphi_1\theta_1}, \quad \rho_k = \varphi_1 \rho_{k-1} \quad \text{pre } k > 1. \quad (2.35)$$

□

2.9 Konštrukcia modelov

Pri konštrukcii modelov B-J metodológie sa podľa [3] zvyčajne postupuje následovne : Najskôr sa *identifikuje vhodný model* pre nami pozorované data. Potom sa daný model *odhadne* a následne *diagnostikuje*, čo znamená, že sa spätne overí jeho vhodnosť pre dané data. Ak výsledky, ktoré získame po diagnostike modelu, nie sú uspokojivé, je nutné zopakovať všetky tri kroky pre iný model, ktorého podobu nám často napovie práve diagnostika.

Identifikácia modelu predstavuje jednu z najťažších úloh pri výstavbe modelov, ktorá spočíva v rozhodnutí, aký typ modelu použiť. Najčastejšie sa model identifikuje *pomocou ACF a PACF*. Postup, ktorý aplikujeme, spočíva v prehliadke grafického záznamu odhadnutých korelogramov a v následnom priradení najvhodnejšieho modelu pomocou nasledujúcej tabuľky prevzatej z [3], ktorá zhrňuje obecné poznatky o tvare autokorelačnej a parciálnej autokorelačnej funkcie stacionárnych a invertibilných procesov.

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ρ_k	neexistuje k_0 ; ρ_k má tvar krivky U	$k_0 = q$	neexistuje k_0 ; ρ_k má tvar krivky U po prvých $q - p$ hodnotách
ρ_{kk}	$k_0 = p$	neexistuje k_0 ; ρ_{kk} je ohraničená krivkou U	neexistuje k_0 ; ρ_{kk} je ohraničená krivkou U po prvých $p - q$ hodnotách

k_0 je bod useknutia a U označuje krivku v tvare lineárnej kombinácie klesajúcich geometrických postupností a sinusoid s geometricky klesajúcimi amplitúdami.

Nevýhodou tejto identifikácie je ale fakt, že je v mnoha prípadoch závislá na cite a skúsenostiach analytika. Preto sa v praxi niekedy používa identifikácia *pomocou informačných kritérií*, ktoré vylučujú subjektívny zásah analytika. Úloha, ktorú tu riešime, je založená na odhade rádov p a q v ARMA(p, q) procese na základe optimalizácie

$$(\hat{p}, \hat{q}) = \arg \min_{k, l} C(k, l) \quad (2.36)$$

kde symbolom $\hat{}$ značíme odhad a $C(k, l)$ je vhodné kritérium, ktoré vieme skonstruovať pri odhade modelu ARMA(k, l) pre dané data. Minimalizáciu potom prevedieme cez pevne zvolenú sieť $k = 0, 1, \dots, K$ a $l = 0, 1, \dots, L$. Odhadneme teda všetky modely, z ktorých chceme vybrať ten najlepší, a pre každý z týchto modelov spočítame vhodné kritérium. Uvedme 2 príklady kritérií :

$$AIC = \log \hat{\sigma}_{k, l}^2 + \frac{2(k + l)}{n} \quad (2.37)$$

$$SBIC = \log \hat{\sigma}_{k, l}^2 + \frac{(k + l) \log n}{n} \quad (2.38)$$

kde AIC značí Akaikeovo informačné kritérium, SBIC je Schwarz-Bayesovo informačné kritérium, $\hat{\sigma}_{k, l}^2$ je odhadnutý rozptyl bieleho šumu procesu ARMA(k, l), n je dĺžka časovej rady. Za vhodný model teda vyberieme ten, u ktorého je hodnota nami vybraného kritéria najmenšia.

Poznámka. SBIC poskytuje podľa [3] silne konzistentné odhady \hat{p} a \hat{q} , ale s veľkým rozptylom. U AIC je tomu presne naopak - odhad je nekonzistentný, ale s malým rozptylom. Záleží len na nás, ktorému dáme prednosť.

Tieto kritéria sú založené na penalizácii zbytočne veľkých hodnôt k a l . Na prvý pohľad je zrejmé, že kritérium je tým menšie, čím je menšia smerodajná chyba $\hat{\sigma}_{k, l}^2$ a čím je nižší počet vysvetľujúcich premenných, a teda aj parametrov modelu.

Čo sa týka odhadovania, dané modely možno odhadnúť momentovo a to tak, že sa využijú vzťahy medzi parametrami daného modelu a jeho autokoreláciami. Pri praktickej analýze sú ale odhadované procedúry záležitosťou príslušného používaného softwaru. Momentové odhady sú obvykle brané ako počítačové aproximácie pre iteračné procedúry.

Tvrdenie 6. [3] *Odhadom parametru φ_1 v procese AR(1) je odhad autokorelačnej funkcie r_1 počítaný podľa (2.9). Odhad rozptylu bieleho šumu je potom*

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2(1 - \hat{\varphi}_1^2). \quad (2.39)$$

kde $\hat{\sigma}_x^2 = \sigma_0$ zo vzorca (2.7).

Dôkaz. V dôkaze využijem Yule-Walkerove rovnice, ktoré možno použiť obecné pre odhady všetkých parametrov v AR(p) procese. Z napozorovaných dat určíme postupne odhady autokorelačných funkcií r_k , ktoré potom dosadíme do týchto rovníc a vyriešením lineárnych sústav dostaneme odhady parametrov. V prípade AR(1) dostávame priamo $\hat{\varphi}_1 = r_1$. Dosadením tohto odhadu do (2.18) pre daný AR(1) proces dostávame (2.39). □

Tvrdenie 7. [3] *Odhad parametru θ_1 v procese MA(1) je*

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}. \quad (2.40)$$

Odhad rozptylu bieleho šumu je potom

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_x^2}{1 + \hat{\theta}_1^2}. \quad (2.41)$$

Dôkaz. V dôkaze využijem tvrdenie 2. Pre $q = 1$ a $k = 1$ dostávame kvadratickú rovnicu

$$r_1\hat{\theta}_1^2 - \hat{\theta}_1 + r_1 = 0 \quad (2.42)$$

(namiesto autokorelačnej funkcie berieme jej odhad), ktorá má vzhľadom na podmienku invertibility (v tomto konkrétnom prípade $|\theta_1| < 1$) jedno prípustné riešenie $\hat{\theta}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r_1^2}}{2r_1}$. Dosadením tohto odhadu do tvrdenia 1 pre príslušný MA(1) proces plynie (2.41). □

Tvrdenie 8. [3] *Odhady parametrov φ_1 a θ_1 v procese ARMA(1,1) sú*

$$\hat{\varphi}_1 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \hat{\theta}_1 = \frac{\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 - 4}}{2}, \quad |\hat{\theta}_1| < 1 \quad (2.43)$$

kde $\hat{b} = \frac{1 - 2r_2 + \hat{\varphi}_1^2}{r_1 - \hat{\varphi}_1}$.

Dôkaz. Odhad $\hat{\varphi}_1$ plynie priamo z tvrdenia 5 pre $k = 2$ (Opäť namiesto autokorelačných funkcií berieme ich odhady). Dosadením tohto odhadu do (2.35) pre $k = 1$ dostávame algebraickými úpravami následne aj odhady pre $\hat{\theta}_1$, z ktorých vyberieme ten, ktorý je v absolútnej hodnote menší ako 1 z dôvodu splnenia podmienky invertibility. □

Diagnostika modelu spočíva podľa [3] v overovaní, či je nami zvolený model správny z hľadiska splnenia teoretických predpokladov. Predovšetkým sa kontroluje, či daný model spĺňa podmienku stacionarity, t.j. či korene jeho autoregresného polynómu ležia mimo jednotkového kruhu. Iný pohľad možno získať analýzou impulzov, ktoré nastanú v jedinom časovom okamihu(a) alebo opakovane od daného okamihu(b) a teda ovplyvnia hodnoty procesu. Ak je analyzovaná časová rada stacionárna, mala by s rastúcou vzdialenosťou od okamihu impulzu v prípade (a) jeho odozva postupne utíchnuť (odozva v prípade (b) stabilizovať na určitej nenulovej úrovni).

Poznámka. Biely šum je veľmi dôležitý diagnostický nástroj. Preto je dôležité pozrieť sa na hodnoty odhadnutého bieleho šumu ako sú napr. grafický záznam, odhadnutý korelogram alebo histogram, ktoré môžu naznačiť prípadné problémy nami vybraného modelu.

Takisto sa ale zvykne kontrolovať samotná štruktúra ARMA procesu, ktorou rozumieme zhodu korelačnej štruktúry odhadnutej z dat s korelačnou štruktúrou spočítanou z odhadnutého modelu. Na túto kontrolu ale takisto môžeme použiť testy nekorelovanosti pre biely šum. Spomeňme test založený na Barlettovej aproximácii (2.10) a tzv. Q *testy*. Pracujeme s odhadnutými autokoreláciami bieleho šumu $r_k(\hat{\epsilon}_t)$.

Pre proces ARMA (p, q) berieme za testovú štatistiku buď Box - Piercovu štatistiku

$$Q = n \cdot \sum_{k=1}^K (r_k(\hat{\epsilon}_t))^2 \quad (2.44)$$

alebo Ljung-Boxovu štatistiku

$$Q^* = n \cdot (n + 2) \cdot \sum_{k=1}^K \frac{1}{n - k} (r_k(\hat{\epsilon}_t))^2 \quad (2.45)$$

kde K je dopredu zvolené pevné číslo. Doporučená hodnota K je podľa [3] približne \sqrt{n} . Pri použití Barlettovej aproximácie podľa (2.10) je za platnosti hypotézy nekorelovanosti bieleho šumu kritický obor na hladine významnosti 5%

$$|r_k(\hat{\epsilon}_t)| \geq 2\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{pre } k = 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

Kritický obor plynie z nekorelovanosti bieleho šumu (v (2.10) sú $r_j = 0$) a zaokrúhlenia 97,5 percentného kvantilu normovaného normálneho rozdelenia : $1,96 \approx 2$.

V prípade Q testov testujeme súhrnne významnosti prvých K autokorelácií. Obe štatistiky majú asymptoticky χ^2 rozdelenie s $K - p - q$ stupňami voľnosti. Kritický obor na hladine α je teda $Q \geq \chi_{K-p-q}^2(1-\alpha)$, respektíve $Q^* \geq \chi_{K-p-q}^2(1-\alpha)$, kde $\chi_{K-p-q}^2(1-\alpha)$ je kvantil príslušného χ^2 rozdelenia.

2.10 Predpovedanie

V prípade, že už máme skonštruovaný model, ktorý sme riadne diagnostikovali, môžeme prejsť priamo k predpovedaniu podľa postupu uvedenom v [2]. Uvažujme stacionárny a invertibilný proces ARMA(p, q) s nulovou strednou hodnotou v tvare :

$$x_t = \varphi_1 x_{t-1} + \dots + \varphi_p x_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}. \quad (2.47)$$

Označme $\hat{x}_{t+k}(t)$ predpoveď hodnoty x_{t+k} v čase t o k krokov dopredu. Pre jednoduchosť sa obmedzíme na lineárnu predpoveď a budeme požadovať, aby táto predpoveď mala v skupine všetkých predpovedí najmenšiu štvorcovú chybu

$$MSE = E(x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}(t))^2. \quad (2.48)$$

Hľadáme teda predpovede v tvare

$$\hat{x}_{t+k}(t) = \nu_k^* \epsilon_t + \nu_{k+1}^* \epsilon_{t-1} + \nu_{k+2}^* \epsilon_{t-2} + \dots, \quad (2.49)$$

pričom

$$x_{t+k} = \epsilon_{t+k} + \nu_1 \epsilon_{t+k-1} + \dots + \nu_k \epsilon_t + \dots \quad (2.50)$$

Dosadením (2.49) a (2.50) do (2.48) s využitím nekorelovanosti bieleho šumu ϵ_t s rozpytľom σ^2 , dostávame úlohu nájsť koeficienty $\nu_k^*, \nu_{k+1}^*, \dots$, ktoré minimalizujú výraz

$$(1 + \nu_1^2 + \nu_2^2 + \dots + \nu_{k-1}^2 + \sum_{i=k}^{\infty} (\nu_i - \nu_i^*)^2) \sigma^2. \quad (2.51)$$

Čo sú zrejme hodnoty $\nu_i^* = \nu_i$ pre $i = k, k+1, \dots$

Obecne teda platí vzťah

$$\hat{x}_{t+k}(t) = \nu_k \epsilon_t + \nu_{k+1} \epsilon_{t-1} + \dots \quad (2.52)$$

Definujme chybu predpovede ako $e_{t+k}(t) = x_{t+k} - \hat{x}_{t+k}(t)$, ktorá je rovná

$$e_{t+k}(t) = \epsilon_{t+k} + \nu_1 \epsilon_{t+k-1} + \dots + \nu_{k-1} \epsilon_{t+1} \quad (2.53)$$

Zrejme $E e_{t+k}(t) = 0$ a $var(e_{t+k}(t)) = (1 + \nu_1^2 + \dots + \nu_{k-1}^2) \sigma^2$.

Špeciálne pre $k = 0$ platí

$$e_t(t-1) = x_t - \hat{x}_t(t-1) = \epsilon_t, \quad (2.54)$$

teda vidíme, že biely šum predstavuje jednokrokové chyby predpovede.

Skutočná konštrukcia prebieha následovne : predpoveď hodnoty

$$x_{t+k} = \varphi_1 x_{t+k-1} + \dots + \varphi_p x_{t+k-p} + \epsilon_{t+k} + \theta_1 \epsilon_{t+k-1} + \dots + \theta_q \epsilon_{t+k-q} \quad (2.55)$$

napíšeme vzhľadom k linearite predpovedí ako

$$\hat{x}_{t+k}(t) = \varphi_1 \hat{x}_{t+k-1}(t) + \dots + \varphi_p \hat{x}_{t+k-p}(t) + \hat{\epsilon}_{t+k}(t) + \theta_1 \hat{\epsilon}_{t+k-1}(t) + \dots + \theta_q \hat{\epsilon}_{t+k-q}(t). \quad (2.56)$$

Je potreba si uvedomiť, že

$$\hat{x}_{t+i}(t) = x_{t+i} \quad \text{pre } i \leq 0, \quad (2.57)$$

$$\hat{\epsilon}_{t+i}(t) = \begin{cases} 0, & \text{pre } i > 0, \\ \epsilon_{t+i} = x_{t+i} - \hat{x}_{t+i}(t+i-1), & \text{pre } i \leq 0. \end{cases}$$

Praktický výpočet sa potom riadi týmito pravidlami : Postupuje sa rekurentne. Položí sa $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_q = 0$. Skonstruujú sa postupne predpovede

$\hat{x}_{q+1}(q), \hat{x}_{q+2}(q+1), \dots$ o jeden krok dopredu, pomocou nich následovne predpovede $\hat{x}_{q+2}(q), \hat{x}_{q+3}(q+1), \dots$ o dva kroky dopredu, až dosiahneme požadovaný predpovedný horizont. Vychádzame zo vzorca (2.56), do ktorého dosadzujeme vzťahy (2.57).

Príklad. Ukážme si priebeh na ARMA(1,1) procese. Položme $\epsilon_1 = 0$. Z (2.56) pre $t = 1$ a $k = 1$ máme

$$\hat{x}_2(1) = \varphi_1 \hat{x}_1(1) + \hat{\epsilon}_2(1) + \theta_1 \hat{\epsilon}_1(1). \quad (2.58)$$

Podľa (2.57) dostávame

$$\hat{x}_2(1) = \varphi_1 x_1 + 0 + \theta_1 \epsilon_1 = \varphi_1 x_1, \quad (2.59)$$

čo už sme schopný vyčísliť. Rovnako dostávame z (2.56) pre $t = 2$ a $k = 1$

$$\hat{x}_3(2) = \varphi_1 x_2 + \theta_1 (x_2 - \hat{x}_2(1)). \quad (2.60)$$

Obecne možno zapísať pre $t = 2, \dots, n$

$$\hat{x}_{t+1}(t) = \varphi_1 x_t + \theta_1 (x_t - \hat{x}_t(t-1)). \quad (2.61)$$

Hodnotu (2.59) potom využijeme pri konštrukcii predpovede $\hat{x}_3(1)$, pretože z (2.56) pre $t = 1$ a $k = 2$ máme

$$\hat{x}_3(1) = \varphi_1 \hat{x}_2(1) + \hat{\epsilon}_3(1) + \theta_1 \hat{\epsilon}_2(1) \quad (2.62)$$

a opäť podľa (2.57) dostávame

$$\hat{x}_3(1) = \varphi_1 \hat{x}_2(1). \quad (2.63)$$

Rovnako hodnotu (2.60) využijeme pri výpočte

$$\hat{x}_4(2) = \varphi_1 \hat{x}_3(2). \quad (2.64)$$

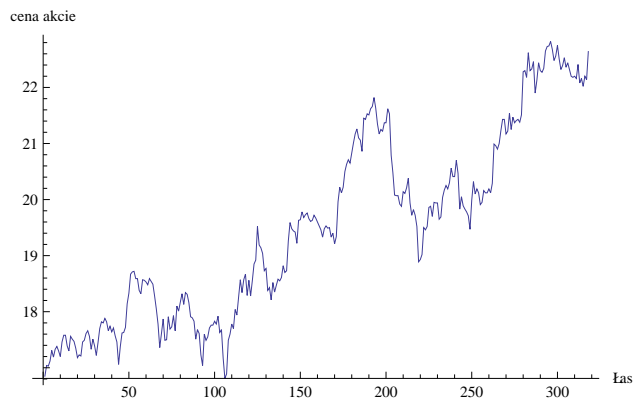
Obecne dostávame

$$\hat{x}_{t+k}(t) = \varphi_1 \hat{x}_{t+k-1}(t) = \varphi_1^k x_t \quad \text{pre } k \geq 2, t = 1, \dots, n. \quad (2.65)$$

Tento postup opakujeme až do času, v ktorom nás ešte predpoveď zaujíma.

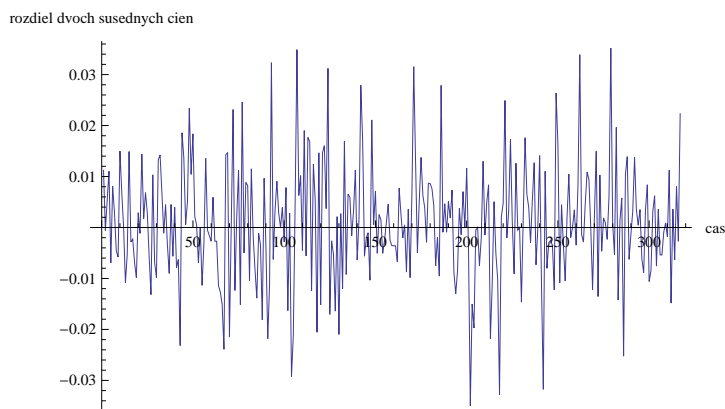
2.11 Aplikácia na skutočné data

Pokúsime sa aplikovať popísaný prístup na skutočných datach v software Wolfram Mathematica. Vytvorený program sa nachádza na priloženom CD. Stiahneme si denné ceny akcií spoločnosti General Electronics (GE) od 1.1.2012 pre nasledujúcich 318 pracovných dní funkciou *FinancialData*.



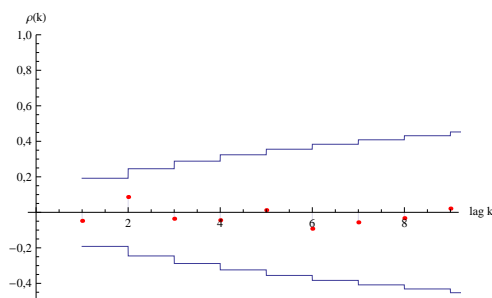
Obr. 2.1: Ceny akcií

Vidíme že ceny akcií majú stúpajúci trend. V praktickej analýze sa často stretávame s datami, u ktorých nemáme zaručenú stacionaritu ani nulovosť strednej hodnoty. Preto je za potreba zvoliť vhodnú transformáciu vstupných údajov. Nulovosť strednej hodnoty možno dosiahnuť odpočítaním priemeru od všetkých hodnôt, táto transformácia nám ale nezaručí stacionaritu. Naopak stacionaritu možno obvykle dosiahnuť diferenciou $(x_t - x_{t-1})$ pre pozorované okamihy t alebo logaritmickou diferenciou $\ln(x_t) - \ln(x_{t-1})$, ktorá ale opäť nemusí zaručiť nulovosť strednej hodnoty. Ukážme si najprv druhú možnosť pomocou diferencií logaritmov. Po aplikácii tejto transformácií dostávame data, ktoré majú nasledujúci priebeh

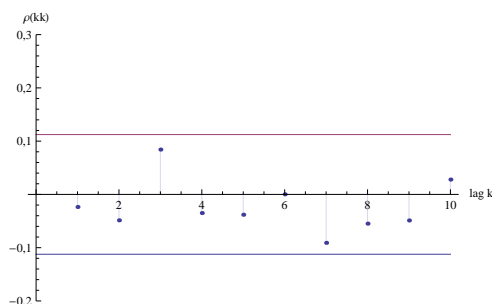


Obr. 2.2: Ceny akcií po transformácii logaritmickou diferenciou

Na určenie vhodného modelu použijeme ACF a PACF - funkcia *CorrelationFunction* a *PartialCorrelationFunction*. Do grafov spolu s nimi zakreslíme aj medze významnosti, teda kritické obory testov nulovosti korelácií pomocou Bartlettovej (2.10), resp. Quenouilleovej aproximácie (2.15). Pri pohľade na oba grafy je zrejmé, že sa jedná o postupnosť nekorelovaných náhodných veličín, teda upravené data nemá zmysel predpovedať lineárnymi modelmi ARMA. Upraviť data do požadovaného tvaru vhodnou transformáciou môže byť náročné a k úplnému uspokojeniu nemusíme prísť. Podrobnosti viď v práci [4] a [6].

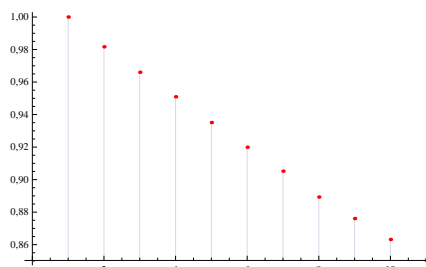


Obr. 2.3: ACF pre logaritmickú transformáciu



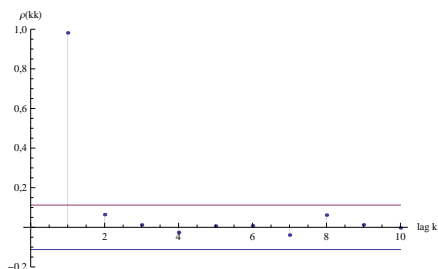
Obr. 2.4: PACF pre logaritmickú transformáciu

Pozrime sa teraz na prvú navrhovanú transformáciu a síce odpočítanie priemeru od všetkých hodnôt. Ukážeme si vzorový postup, ktorý pri modelovaní zvolíť. Identifikáciu modelu možno spraviť opäť subjektívne pomocou ACF a PACF alebo pomocou informačných kritérií.



Obr. 2.5: ACF po odpočítaní priemeru.

Poznámka. Linerálny pokles u ACF je zvyčajne znakom, že na pozorované data je dobré aplikovať diferencie, aby sme zaručili stacionaritu.



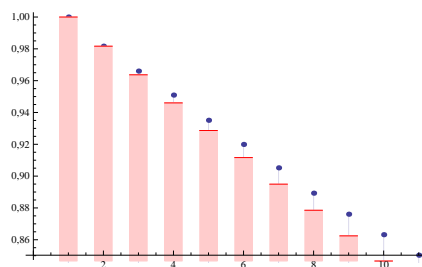
Obr. 2.6: PACF po odpočítaní priemeru.

Vidíme, že ako vhodný kandidát pripadá proces AR(1), nakoľko PACF je zrejme useknutá v bode 1. To podporuje aj Akaikeovo informačné kritérium (AIC). Hodnoty sú napočítavané podľa (2.37)

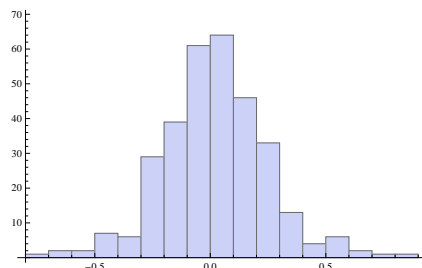
AR(p)	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)	AR(5)	AR(6)	AR(7)
AIC	5.164	5.189	5.196	5.206	5.212	5.219	5.232

Keď už máme zvolený model, je potreba odhadnúť jeho parametre. Využijeme funkciu *EstimatedProcess*, ktorá pre data a zvolený proces odhadne jeho parametre zvolenou metódou (maximálna vierohodnosť alebo momentová metóda) a spočíta rozptyl odhadnutého bieleho šumu. Táto funkcia je veľmi silná a dokáže pracovať aj s nie úplne stacionárnymi datami. V našom prípade bol parameter φ_1 odhadnutý hodnotou 0.981671 a odhadnutý rozptyl bieleho šumu 0.103206. Vidíme, že hodnota 0.981671 je blízka 1, čo je v súlade s pomaly klesajúcou ACF.

Prejdime k diagnostike modelu. Skontrolujeme stacionaritu a invertibilitu procesu pomocou funkcií *WeakStationary* a *TimeSeriesInvertibility*. Proces oboma kontrolami prešiel. Následne overíme zhodu korelačnej štruktúry dat a odhadnutého AR(1) procesu pomocou ACF a pozrieme sa na histogram bieleho šumu.



Obr. 2.7: Zhoda korelačnej štruktúry dat a odhadnutého procesu.



Obr. 2.8: Histogram bieleho šumu.

Vidíme že tu dochádza k uspokojivej zhode korelačnej štruktúry medzi datami a odhadnutým procesom a že histogram nevykazuje výrazné odlišenie od normálneho rozdelenia, ktoré môžeme otestovať pomocou funkcie *DistributionFitTest* (tá hypotézu o normálnom rozdelení na štandardnej hladine $\alpha = 5\%$ nezamietla).

Zostáva otestovať nekorelovanosť bieleho šumu. Keďže pracujeme s datami o veľkosti $n = 318$, kritická hodnota pri použití testu založenom na Barlettovej aproximácii je podľa (2.46) $2(\sqrt{n})^{-1} = 0.112154$. Použitím *CorrelationFunction* na odhadnutý biely šum dostávame postupne odhadnuté autokorelácie

{ -0.00483573, -0.0284535, 0.106817, -0.0163526, -0.0192458, 0.0428375, -0.0787487, -0.0262518, 0.00370756, 0.0316673, 0.0294429, 0.103354, 0.033867, 0.0335092, 0.0100669 }.

Všetky hodnoty sú v absolútnej hodnote menšie ako 0.112154 čo znamená že hypotézu o nekorelovanosti bieleho šumu nemožno zamietnuť. Pri použití Box-Piercovej a Ljung-Boxovej štatistiky dospejeme k rovnakému záveru. Hodnoty štatistík Q, resp. Q* sú

{ 0.26489, 3.89322, 3.97825, 4.09604, 4.67958, 6.65162, 6.87077, 6.87514, 7.19404, 7.46971, 10.8666, 11.2313, 11.5884, 11.6206 },

{ 0.268219, 3.95414, 4.0408, 4.16122, 4.75973, 6.78883, 7.01505, 7.01958, 7.3509, 7.63824, 11.1905, 11.5732, 11.9491, 11.9831 }.

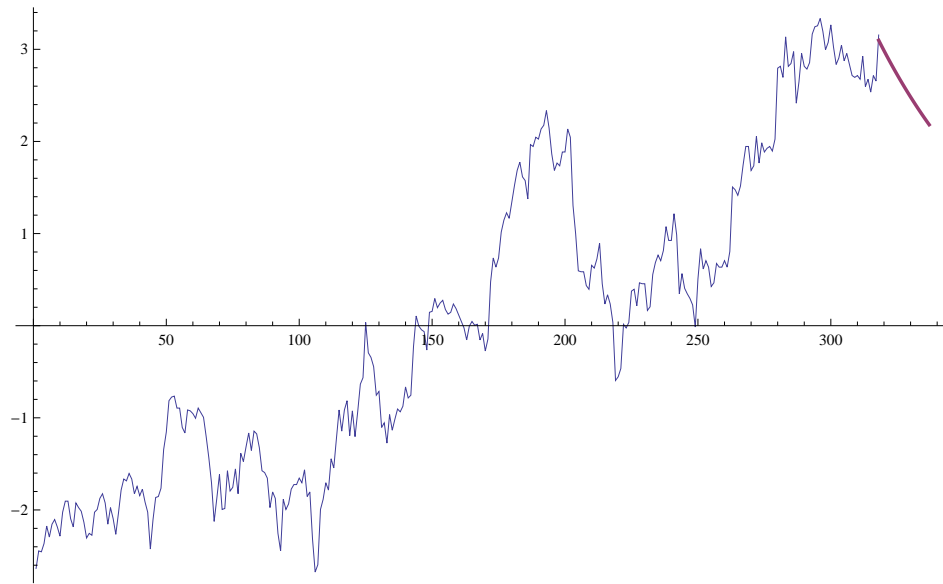
Hodnoty sú počítané podľa (2.44) a (2.45) pre $K = 2, \dots, 15$. Hodnotu pre konkrétne K potom porovnávame s kvantilom χ^2 rozdelenia o $K - 1$ stupňoch voľnosti. Posun o jeden index je spôsobený práve voľbou AR(1) modelu. Prislúchajúce kritické obory dostaneme použitím funkcií *Quantile* a *ChiSquareDistribution*. Hodnoty pre náš príklad na hladine $\alpha = 5\%$ sú

{ 3.84146, 5.99146, 7.81473, 9.48773, 11.0705, 12.5916, 14.0671, 15.5073, 16.919, 18.307, 19.6751, 21.0261, 22.362, 23.6848, 24.9958, 26.2962 },

teda nulovú hypotézu o nulovosti prvých K autokorelácií bieleho šumu nezamietame.

Prejdime k predpovedaniu. Využijeme funkciu *TimeSeriesForecast*, ktorá pre dané data a odhadnutý proces spočíta predpovede až do nami zvoleného časového okamihu.

Stále ale pracujeme s upravenými datami, preto je ešte treba pripočítať k predpovediam priemer aby sme dostali skutočné hodnoty akcií. Model zachytil klesajúci trend, ktorý sprevádzal vývoj cien akcií za posledné obdobie (konkrétne časové okamihy 300 - 315) s výnimkou posledných dní. Daná predpoveď ale môže podávať skreslený pohľad, nakoľko sme nezaručili stacionaritu, preto sa pokúsime v nasledujúcej kapitole predpovedať budúci vývoj sledovanej časovej rady inými metódami.



Obr. 2.9: Predpoveď vývoja ceny akcií General Electronics na ďalších 20 dní.

Poznámka. Veľmi často sa v učebniciach stretávame s datami, na ktorých je vzorovo ukázané riešenie. V praxi však býva realita často iná a údaje, ktoré modelujeme, nemajú vždy vzorový tvar. Autor sa preto zámerne vydal touto cestou a zvolil si data, na ktorých sa snažil ukázať jednak postup, ktorý pri modelovaní pomocou B-J zvoliť v prostredí Wolfram Mathematica, ale predovšetkým prekážky, na ktoré môže čitateľ naraziť.

Kapitola 3

Dekompozičné metódy

Voľba metódy pre analýzu závisí na mnoha faktoroch, ako sú napr. účel analýzy, typ časových dát alebo skúsenosti analytika. Pri spracovaní časových rád je často výhodné rozložiť danú radu na niekoľko zložiek, ktorými sú trend, sezónna zložka, cyklická zložka a reziduálna zložka.

Trend odráža dlhodobé zmeny v chovaní časovej rady, napr. jej rast alebo pokles. Sezónna zložka popisuje periodické zmeny v čase, ktoré sa pravidelne odohrávajú v určitú dobu kalendárneho roku. Cyklická zložka hovorí o nepravidelných fluktuáciach okolo trendu, v ktorých sa strieda fáza rastu a poklesu. Reziduálna zložka je tvorená náhodnými pohybmi, ktoré nemajú rozpoznateľný (bližšie špecifikovaný) charakter a pokrýva rozličné chyby, či už pri meraní dát alebo chyby, ktorých sa dopúšťa analytik, napr. zaokrúhľovanie. Reziduálna zložka je často modelovaná procesom bieleho šumu.

V tejto kapitole sa, ako už z názvu vyplýva, budeme venovať niektorým metódam dekompozície časovej rady. Eliminácia jednotlivých zložiek časovej rady môže výrazným spôsobom pomôcť pri našej práci, nakoľko je možné touto analýzou získať niektoré inak navonok nepozorované zákonitosti, rozpoznať vonkajšie vplyvy pôsobiace na danú radu, previesť zrovnanie priebehov jednotlivých časových rád alebo rozpoznať chovanie časovej rady očistené od niektorých jej zložiek. Dekompozícia sa používa rovnako efektívne aj pri skúmaní budúcich vývojov jednotlivých zložiek a ich následnom predpovedaní.

Metód na elimináciu jednotlivých zložiek je veľa. Líšia sa rôznym stupňom presnosti, výpočetnej zložitosti alebo objektivity, pričom výber tej najvhodnejšej závisí na celi dekompozície a type časovej rady. Najčastejšie používané sú metódy založené na regresnej analýze, ktorá ale vyžaduje predpoklad, že reziduálna zložka je v čase nekorelovaná a má charakter bieleho šumu, ktorý má prípadne navyše normálne rozdelenie.

V nasledujúcich odstavcoch si ukážeme, ako z časovej rady eliminovať trendovú zložku a predpovedať jej budúci vývoj. V súvislosti s touto problematikou sa často používa označenie *vyrovňavanie* alebo *vyhladzovanie* (*smoothing*) časovej rady, nakoľko potlačujeme sezónne a náhodné fluktuácie.

3.1 Metódy založené na popise matematickými krivkami

Cieľom našej analýzy je popísať trend pomocou niektorých analyticky jednoduchých kriviek, čo nám ulačí budúce predpovedanie. Predpokladajme, že časová rada má tvar

$$x_t = Tr_t + e_t \quad (3.1)$$

pričom reziduálna zložka má vlastnosti bieleho šumu. To nám umožní použiť regresné metódy a ztotožniť tak predpovede budúceho vývoja trendu Tr_t s predpoveďami budúceho chovania rady x_t . Na začiatok si na základe typu časovej rady alebo vlastností, ktoré od trendu očakávame určíme typ najvhodnejšej krivky. Medzi v praxi najpoužívanejšie krivky patria krivky konštantné, lineárne, kvadratické, logistické a mnohé ďalšie. Napr. v prípade kvadratickej krivky sa predpokladá nasledujúca závislosť hodnôt $Tr_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$. V tejto práci sa však zameriame na iné metódy, ktoré sa v praxi používajú najčastejšie, podrobné informácie ale možno nájsť v [3].

3.2 Exponenciálne vyrovnávanie

Exponenciálne vyrovnávanie popísané v knihe [3] patrí medzi tzv. adaptívne modely, ktorých hlavným znakom je, že najnovšie pozorovania časovej rady považujeme za najdôležitejšie pri konštrukcii predpovedí. V praxi sa využíva najmä na krátkodobé predpovedanie. Výhodou tejto metódy je jej nenáročnosť. Zohľadňuje minulý vývoj sledovanej veličiny pomocou jej vážených priemerov. Vyrovnaná rada \hat{x}_t potom minimalizuje výraz

$$(x_t - \hat{x}_t)^2 + (x_{t-1} - \hat{x}_{t-1})^2 \beta + (x_{t-2} - \hat{x}_{t-2})^2 \beta^2 + \dots \quad (3.2)$$

kde $0 < \beta < 1$ je dopredu zvolená vyrovnávací konštanta. Vidíme, že tu dochádza k exponenciálnemu poklesu veľkosti váh smerom do minulosti. V ďalšom výklade budeme predpokladať, že pracujeme s časovou radou typu (3.1).

3.2.1 Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie

Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie sa využíva vtedy, ak v určitých časových úsekoch je trend časovej rady konštantný, čo znamená, že ho môžeme opísať vzorcom

$$Tr_t = \beta_0. \quad (3.3)$$

Potrebuje najst' vhodný odhad parametru β_0 . Keďže pracujeme s adaptívnym modelom, bude tento odhad závisieť na čase, v ktorom bol počítaný. Odhad $b_0(t)$ predstavuje jednak odhadnutú hodnotu trendu v čase t a zároveň aj vyrovnanú hodnotu \hat{x}_t (vyrovnaná hodnota je synonymum pre vypočítanú hodnotu na základe odhadnutých parametrov). Metódou najmenších štvorcov dostávame z (3.2) minimalizáciu výrazu

$$\sum_{j=0}^{\infty} (x_{t-j} - \beta_0)^2 \beta^j. \quad (3.4)$$

Vzorec má síce tvar nekonečného súčtu, ale toto predĺženie do minulosti nám zjednoduchší ďalšie úpravy, pretože odpovedá limitnému prechodu. Ak zderivujeme rovnosť (3.4) podľa β_0 a položíme ju rovnú nule máme

$$-2 \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j} + 2\beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = 0. \quad (3.5)$$

S využitím $\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = \frac{1}{1-\beta}$ dostávame odhad $b_0(t)$ parametru β_0 v čase t ako

$$\hat{x}_t = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j}, \quad (3.6)$$

teda vidíme, že vyrovnaná hodnota v čase t je váženým priemerom hodnôt tejto rady do času t s exponenciálne klesajúcimi váhami. Výraz (3.6) je ale prakticky nepoužiteľný. Preto sa upravuje na rekurentný tvar následovne

$$(1 - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j} = (1 - \beta)x_t + \beta(1 - \beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} x_{t-j}. \quad (3.7)$$

Položením $\alpha = 1 - \beta$, kde α je vyrovnávací konštanta, dostávame

$$\hat{x}_t = \alpha x_t + (1 - \alpha) \hat{x}_{t-1}. \quad (3.8)$$

Jednoduchou úpravou možno dostať ďalší vzťah

$$\hat{x}_t = \hat{x}_{t-1} + \alpha(x_t - \hat{x}_{t-1}) = \hat{x}_{t-1} + \alpha \cdot e_t, \quad (3.9)$$

teda vidíme, že nová prognóza v čase t sa určí ako súčet prognózy so začiatkom v čase $t-1$ a α násobku chyby prognózy. Predpovedané hodnoty do budúcnosti sú konštantné, rovné \hat{x}_n , kde n je čas posledného záznamu.

Rekurentná formula (3.8) sa v praxi používa najčastejšie. Vyžaduje voľbu počiatkovej hodnoty \hat{x}_0 a vyrovnávacej konštanty α . Za \hat{x}_0 sa obvykle berie aritmetický priemer niektorého krátkeho počiatkového úseku rady alebo pevne pozorovaná hodnota x_1 . Voľba vyrovnávacej konštanty je dôležitá. Obecne platí, čím je hodnota vyššia (bližšia k 1), tým je predpoveď citlivejšia na súčasné podmienky. Ak je hodnota konštanty blízka jednej, tak vyrovnaný rad je podobný pôvodnému. Čím je hodnota bližšia k nule, tým je vyrovnanie radu silnejšie a rad je hladší. Preto sa obvykle obmedzujeme na interval $0 < \alpha < 0.3$. Existuje viacero spôsobov ako konštantu zvoliť. Rada softwarov používa odhad α , kde sa zo zvolenej siete vyberie tá α , ktorá poskytuje najpresnejšie predpovede $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ hodnôt x_1, \dots, x_n v zmysle minimalizácie súčtu štvorcov chýb, prípadne strednej štvorcovej chyby

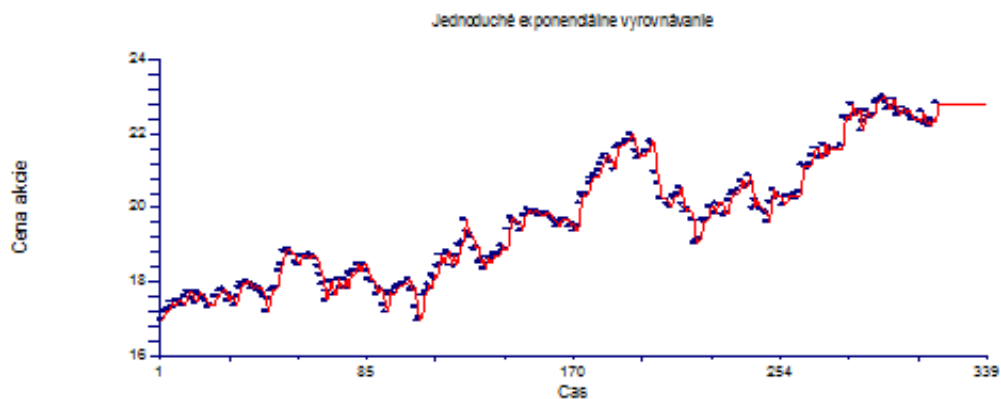
$$SSE = \sum_{t=1}^n (x_t - \hat{x}_t)^2, \quad MSE = \frac{1}{n} SSE \quad (3.10)$$

Aplikujme jednoduché exponenciálne vyrovnávanie na nami zvolené hodnoty akcií GE v prostredí NCSS. Neznámy parameter budeme hľadať metódou najmenších štvorcov. Software poskytne nasledujúci výstupný protokol :

Forecast Summary Section

Variable	Hodnoty akcií GE
Number of Rows	318
Mean	19.64525
Mean Square Error	5.007163E-02
Alpha Search	Mean Square Error
Alpha	0.9775841
Forecast	22.81882

V obrázku 3.1 je znázornená pozorovaná rada x_t (body), ktorá je preložená vyrovnanou radou \hat{x}_t vrátane konštantnej predpovede na 20 dní do budúca (čiara).



Obr. 3.1: Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie

V nasledujúcej sekcii ukážeme niektoré pozorované hodnoty rady a ich vyrovnávanie (software poskytne výstup pre všetky hodnoty, ktoré ale z kapacitných dôvodov nebudeme uvádzať).

Forecast Section

Row	Forecast	Actual	Residuals
1	16.99426	16.99	-4.255072E-03
2	16.9901	17.18	0.1899046
3	17.17574	17.17	-5.743104E-03
4	17.17013	17.26	8.987126E-02
5	17.25799	17.46	0.2020146
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
316	22,20311	22,38	0,1768933
317	22,37604	22,33	-4,60E-02
318	22,33103	22,83	0,4989681
319	22,81882		
320	22,81882		
321	22,81882		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Vidíme, že jednoduché exponenciálne vyrovnávanie v NCSS predpovedá na rozdiel od postupu z [3] do budúca konštantou prvej do budúca predpovedanej hodnoty x_{319} . Počiatočná vyrovnaná hodnota \hat{x}_0 sa v NCSS na rozdiel od [3] určí ako $\alpha \cdot x_0 + (1 - \alpha)x_1$. Vyrovnané hodnoty pre $t = 1, 2, \dots$ sú potom počítané na základe rekurentného vzťahu

$$\hat{x}_t = \alpha x_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{x}_{t-1}, \quad (3.11)$$

Pozorujeme opäť miernu odlišnosť od vzorca (3.8) z [3].

3.2.2 Dvojité exponenciálne vyrovnávanie

Tento model sa podľa [3] využíva vtedy, ak časovú radu možno na rovnako dlhých časových úsekoch vyrovnáť lineárnou funkciou času. Opäť predpokladáme model (3.1) kde

$$Tr_{t-j} = \beta_0 + \beta_1 \cdot (-j), \quad (3.12)$$

Vidíme, že tentokrát potrebujeme nájsť odhady parametrov β_0 a β_1 v čase t , ktoré označíme analogicky $b_0(t)$ a $b_1(t)$. Získame ich minimalizáciou výrazu

$$\sum_{j=0}^{\infty} [x_{t-j} - (\beta_0 + \beta_1(-j))]^2 \beta^j, \quad (3.13)$$

kde $0 < \beta < 1$ je opäť dopredu zvolená konštantá. Riešime rovnako ako u jednoduchého exponenciálneho vyrovnávania položením parciálnych derivácií podľa β_1 a β_0 rovným 0. Dostávame sústavu normálnych rovníc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j} - \beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j + \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j &= 0, \\
\sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j x_{t-j} - \beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j + \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \beta^j &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

S použitím vzťahov

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = \frac{1}{1-\beta}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j = \frac{\beta}{(1-\beta)^2}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \beta^j = \frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3} \tag{3.15}$$

dostávame

$$\begin{aligned}
\beta_0 - \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \beta_1 &= (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j}, \\
\beta \cdot \beta_0 - \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta} \cdot \beta_1 &= (1-\beta)^2 \sum_{j=0}^{\infty} j \beta^j x_{t-j}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Označme S_t jednoduchú vyrovnávaciu štatistiku a $S_t^{[2]}$ dvojitú vyrovnávaciu štatistiku, ktoré definujeme predpismi

$$S_t = (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j x_{t-j}, \tag{3.17}$$

$$S_t^{[2]} = (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j S_{t-j}. \tag{3.18}$$

(3.17) presne odpovedá hodnote uvažovanej rady vyrovnanej v čase t podľa jednoduchého exponenciálneho vyrovnávania (3.6). Podľa (3.8) a pre $\alpha = 1-\beta$ teda platí

$$S_t = \alpha x_t + (1-\alpha) S_{t-1}. \tag{3.19}$$

Ďalej zrejme platí

$$S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{[2]}. \tag{3.20}$$

So zavedeným značením môžeme prepísať sústavu (3.16) ako

$$\begin{aligned}
\beta_0 - \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \beta_1 &= S_t, \\
\beta \cdot \beta_0 - \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta} \cdot \beta_1 &= S_t^{[2]} - (1-\beta) S_t.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Odvoďme druhú rovnosť. $S_t^{[2]} - (1 - \beta)S_t$ je vlastne $S_t^{[2]}$ bez sčítanca pre $j = 0$. Vyjadrieme S_t v závislosti na S_{t-j} z (3.19) postupným dosadením ($\alpha = 1 - \beta$)

$$S_t = (1 - \beta) \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i x_{t-i} = (1 - \beta) \sum_{i=0}^{j-1} x_{t-i} \beta^i + \beta^j S_{t-j}. \quad (3.22)$$

Vyjadrením S_{t-j} z (3.22) a dosadením do (3.18) bez nultého sčítanca dostávame

$$S_t^{[2]} = (1 - \beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j (1 - \beta) \cdot \frac{\sum_{i=j}^{\infty} \beta^i x_{t-i}}{\beta^j} = (1 - \beta)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \beta^i x_{t-i}, \quad (3.23)$$

čo je ekvivalentne zapísaná pravá strana druhej rovnice (3.16).

Zo sústavy (3.21) potom dostávame odhady parametrov β_0 a β_1 prevedené v čase t ako

$$b_0(t) = 2S_t - S_t^{[2]}, \quad b_1(t) = \frac{1 - \beta}{\beta} (S_t - S_t^{[2]}). \quad (3.24)$$

Hľadaná predpoveď hodnoty x_t skonštruovaná v čase t o τ krokov dopredu má potom pre $\alpha = 1 - \beta$ tvar

$$\hat{x}_{t+\tau} = b_0(t) + b_1(t) \cdot \tau = \left(2 + \frac{\alpha \cdot \tau}{1 - \alpha}\right) S_t - \left(1 + \frac{\alpha \cdot \tau}{1 - \alpha}\right) S_t^{[2]}. \quad (3.25)$$

Pre výpočet štatistík S_t a $S_t^{[2]}$ využívame rekurentné vzťahy (3.19) a (3.20). Táto realizácia vyžaduje voľbu počiatočných hodnôt S_0 a $S_0^{[2]}$ a vyrovnávacej konštanty α .

Počiatočné hodnoty S_0 a $S_0^{[2]}$ určíme riešením sústavy rovníc (3.24) pre $t = 0$, pričom za $b_0(0)$ a $b_1(0)$ uvažujeme odhady parametrov β_0 a β_1 skonštruované tak, že preložíme priamku krátkym počiatočným úsekom rady a použijeme metódu najmenších štvorcov. Explicitné vyjadrenie S_0 a $S_0^{[2]}$ má teda tvar

$$S_0 = b_0(0) - \frac{1 - \alpha}{\alpha} b_1(0), \quad S_0^{[2]} = b_0(0) - \frac{2(1 - \alpha)}{\alpha} b_1(0). \quad (3.26)$$

Voľba vyrovnávacej konštanty bola popísaná v podkapitole 3.2.1

Poznámka. Jednoduché a dvojité exponenciálne vyrovnávanie možno obecné rozšíriť až na exponenciálne vyrovnávania r -tého rádu. Rád $r = 3$ však býva najvyšší, ktorý sa v praxi používa.

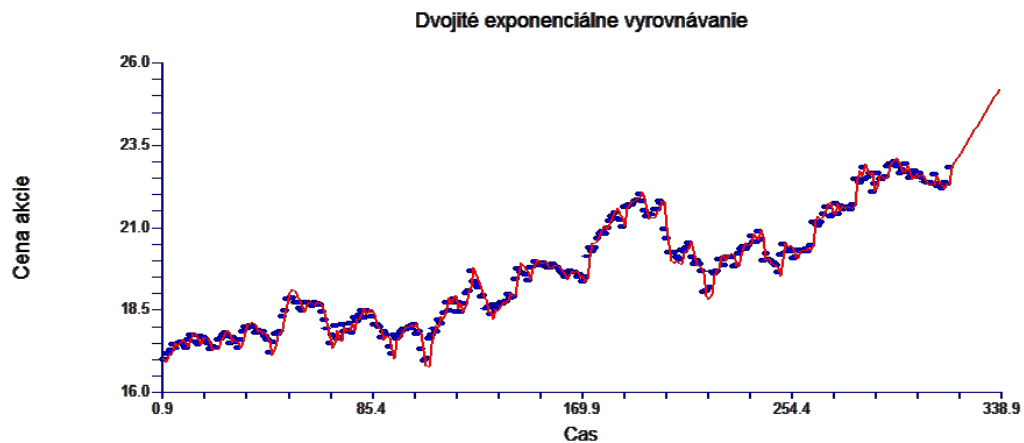
Aplikujme teraz dvojité exponenciálne vyrovnávanie na rovnaké data, čo doposiaľ, aby sme mohli získané výsledky porovnať. NCSS poskytne tento výstupný protokol :

Forecast Summary Section

Variable	Hodnoty akcií GE
Number of Rows	318
Mean	19.64525
Mean Square Error	5.908951E-02
Forecast Method	Double Smooth
Search Criterion	Mean Square Error
Alpha	0.4977288
Intercept (A)	-16.60013
Slope (B)	0.1235963

Parameter α bol odhadnutý minimalizáciou MSE, ako bolo popísané v kapitole 3.2.1. Veličiny Intercept (A) a Slope (B) slúžia k výpočtu predpovedí. Ľahko sa presvedčíme, že napr. 319 hodnota v našej rade sa spočíta ako Intercept (A) + 319 · Slope (B) (viď nižšie).

Rovnako ako pri jednoduchom exponenciálnom vyrovnaní je na obrázku 3.2 zaznamenaný celkový priebeh pôvodnej rady x_t (body) a tej vyrovnanej \hat{x}_t spolu s predpoveďami na 20 dní dopredu (čiara). Vidíme, že dvojité exponenciálne vyrovnanie zachytilo trend nárastu ceny akcií. Ten bol v poslednom období výraznejší než počas celého priebehu, takže použitá metóda predpovedá relatívne výrazný nárast do budúcnosti. Predpovede zrejme nemá zmysel konštruovať pre dlhší časový horizont. Pod obrázkom opäť nájdeme stručný náhľad na výstupné hodnoty.



Obr. 3.2: Dvojité exponenciálne vyrovnanie

Forecast Section

Row	Forecast	Actual	Residuals
1	17,02071	16,99	-3,07E-02
2	16,90582	17,18	0,2741745
3	17,10801	17,17	6,20E-02
4	17,16689	17,26	9,31E-02
5	17,27211	17,46	0,1878901
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
316	22.1748	22.38	0.2051969
317	22.32682	22.33	3.177172E-03
318	22.32858	22.83	0.5014253
319	22.8271		
320	22.9507		
321	23.07429		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Poznámka. Dvojité exponenciálne vyrovňovanie je implementované do softwaru NCSS skôr z historických dôvodov ako prakticky používaných. Samotný software o tom informuje vo svojom návode, v ktorom odporúča na rady s po častiach lineárnym trendom použiť Holtovu metódu, ktorú si teraz ukážeme.

3.2.3 Holtova metóda

Na Holtovu metódu môžeme pozeráť ako na zobecnenie dvojitého exponenciálneho vyrovňovania. Táto metóda, ako je popísané v [2], používa dve vyrovňovacie konštanty : α pre vyrovnanie úrovne L_t danej rady a γ pre vyrovňovanie odhadu trendu ($0 < \alpha, \gamma < 1$). Pozostáva z troch rovníc :

$$L_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}), \quad (3.27)$$

$$T_t = \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1 - \gamma)T_{t-1}, \quad (3.28)$$

$$\hat{x}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t \cdot \tau \quad \tau \geq 0, \quad (3.29)$$

Rozborom rovnice (3.27) zistíme, že vyrovnanú hodnotu L_t dostaneme lineárnou kombináciou skutočnej hodnoty v príslušnom období x_t a predchádzajúcej vyrovnanej hodnoty zväčšenej o trendovú zložku z minulého obdobia. Vidíme, že konštanta γ v rovnici (3.28) určuje odhad trendu, ktorý koncipujeme ako vážený priemer dvoch trendových zložiek. Prvou zložkou je zmena v úrovni vyrovnaných hodnôt z obdobia súčasného a predchádzajúceho a druhú zložkou potom určuje hodnota predchádzajúceho trendu. Rovnica (3.29) už popisuje predpovedanie o τ období dopredu. Za počiatočné hodnoty sa doporučujú $L_0 = x_1$ a $T_0 = x_2 - x_1$.

Poznámka. Je dokázané, že pre dvojité exponenciálne vyrovnávanie s vyrovnávaciou konštantou α a Holtovu metódu s vyrovnávacími konštantami α_{holt} a γ_{holt} platí vzťah

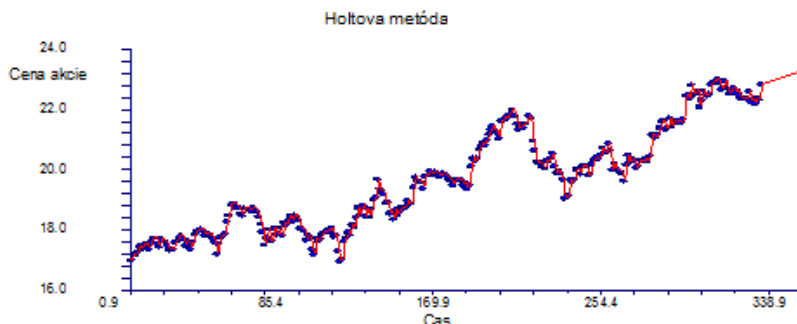
$$\alpha_{holt} = \alpha(2 - \alpha), \quad \gamma_{holt} = \frac{\alpha}{2 - \alpha}. \quad (3.30)$$

Výstupný protokol Holtovej metódy pre ceny akcií GE v NCSS:

Forecast Summary Section

Variable	Hodnoty akcií GE
Number of Rows	318
Mean	19.64525
Mean Square Error	5.022235E-02
Forecast Method	Holt's Linear Trend
Search Iterations	70
Search Criterion	Mean Square Error
Alpha	0.9707171
Beta	1.018674E-02
Intercept (A)	15.71954
Slope (B)	2.231569E-02

Search iterations hovorí, koľko iterácií bolo treba na nájdenie najlepšej hodnoty pre vyrovnávaciu konštantu α . Alpha a Beta sú hodnoty parametrov α a γ v (3.27) a (3.28). Intercept (A) a Slope (B) slúžia k predpovedaniu. Napr. hodnotu v časovom okamihu 319 dostaneme ako Intercept (A) + 319 Slope (B), vid' nižšie. Výpočet korešponduje s tým, ktorý uvádza zdroj [3].



Obr. 3.3: Holtova metóda

Obrázok 3.3 zachytáva pozorovanú časovú radu (body), jej vyrovnanie a následné predpovedanie pre obdobie 20 pracovných dní pomocou Holtovej metódy (čiara).

Ukážme opäť časť výstupných hodnôt z NCSS

Forecast Section			
Row	Forecast	Actual	Residuals
1	16,99452	16,99	-4,52E-03
2	17,02662	17,18	0,1533758
3	17,21247	17,17	-4,25E-02
4	17,20778	17,26	5,22E-02
5	17,29553	17,46	0,1644737
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
316	22.22122	22.38	0.1587826
317	22.39354	22.33	-6.354226E-02
318	22.34942	22.83	0.4805758
319	22.83824		
320	22.86056		
321	22.88287		
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Vidíme, že Holtova metóda zachytila dlhodobý trend nárastu akcií, ktorý potom využíva pri konštrukcii predpovedí.

Kvalitu vyrovnanej rady \hat{x}_t z hľadiska zhody s pozorovanou radou x_t , $t = 1, \dots, 318$ možno posúdiť pomocou strednej štvorcovej chyby.

$$MSE = \frac{1}{318} \sum_{t=1}^{318} (x_t - \hat{x}_t)^2, \quad (3.31)$$

ktorú nájdeme v sekcii Forecast Summary výstupných protokolov. Pripomeňme hodnoty MSE :

jednoduché exp. vyr. : $5.007 \cdot 10^{-2}$.

dvojité exp. vyr. : $5.909 \cdot 10^{-2}$.

Holtova metóda : $5.022 \cdot 10^{-2}$.

Vidíme, že MSE je zrovnateľne malá u všetkých troch postupoch. Jednoduché exp. vyrovnávanie ale vykazuje najlepšiu zhodu s pozorovanou radou.

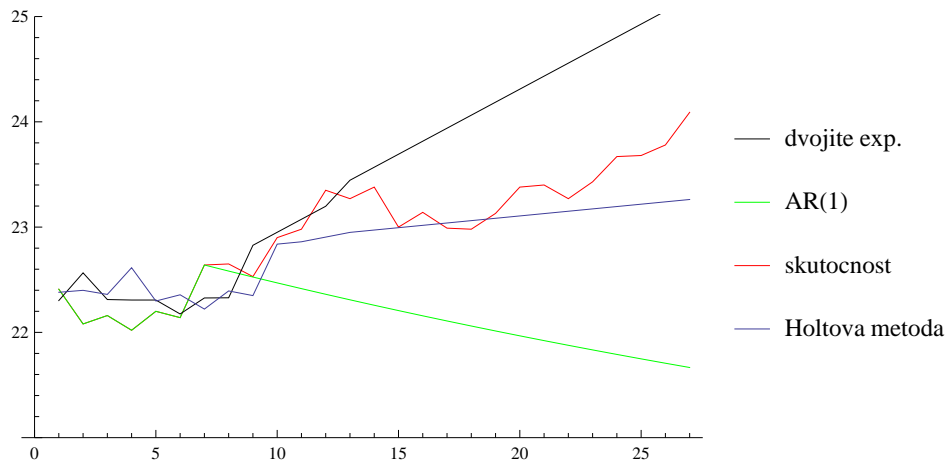
Kapitola 4

Záver a interpretácia výsledkov

V predchádzajúcich kapitolách sme ukázali teoretický podklad a praktické aplikácie ARMA modelov a dekompozičných metód v softwaroch Wolfram Mathematica a NCSS. Tieto dva softwary sa od seba pomerne výrazne odlišujú. Wolfram Mathematica je veľmi prepracovaný, stále sa rozvíjajúci a vysoko perspektívny program, ktorý má veľké ambície. Práca v tomto softwari ale vyžaduje určitú znalosť základných funkcií a syntaxe, ktoré možno v našom prípade nájsť vo Wolfram Mathematica Documentation Center - Time Series. Pracovať s ARMA modelmi by potom nemal byť problém pre užívateľa s teoretickými znalosťami. Na druhej strane ale boli dekompozičné metódy v čase písania práce v Mathematice spracované pomerne málo, preto sme sa obrátili na NCSS. Tento software je veľmi jednoduchý, nevyžaduje v podstate žiadne programátorske schopnosti a práca v ňom je pohodlná. S rozsahom funkcií sa Mathematice nemôže rovnať, ale dekompozičné metódy sú tu spracované jednoducho a prehľadne. Implementované výpočetné algoritmy sa môžu líšiť od tých teoretických uvedených v literatúre, čo sme dokumentovali pri zrovnaní so zdrojom [3].

Každá z uvedených metód má svoje výhody a nevýhody, ktoré by mali ovplyvniť rozhodnutie pre analýzu. Výhodou ARMA modelov je určite ich veľká univerzálnosť, softwarová dostupnosť a modelovanie náhodnosti. Ako sme sa ale mohli sami presvedčiť, nie vždy sme schopní splniť predpoklady, ktoré vyžadujú. Preto je dobré poznať alternatívy, ku ktorým sa môžeme obrátiť, a jednou z nich sú dekompozičné metódy. V prípade, že nás zaujíma len určitá zložka časovej rady, napr. trend alebo sezónne rasty či poklesy, je ich použitie výhodné. Po matematickej stránke sú jednoduchšie napríklad v tom, že s jedná o deterministické modely.

V našom konkrétnom prípade cien akcií General Electronics sme postupne predpovedali ich vývoj pomocou AR(1) modelu, dvojitého exponenciálneho vyrovnávania a Holtovej metódy. Výsledky, ktoré sme dostali z AR(1) modelu, môžu byť skreslené práve nestacionaritou dat, u dvojitého exponenciálneho vyrovnávania je nárast predpovedaných cien prekvapivo veľký, čo mohlo byť spôsobené zvýšeným nárastom cien za posledné obdobie. Holtova metóda vykazuje mierny rast, ktorý sa zdá z logického hľadiska najpravdepodobnejší. Bolo tomu tak aj v skutočnosti. K posúdeniu kvality predpovedí do budúcnosti sme pozorovanú časovú radu skrátili o 20 posledných hodnôt, ktorými teraz otestujeme presnosť jednotlivých predpovedí v obrázku 4.1.



Obr. 4.1: Porovnanie použitých metód so skutočnosťou

Holtova metóda teda poskytla v našom prípade najpresnejšiu predpoveď. Na záver teda môžeme dodať, že priebeh vývoja cien akcií GE za skúmané obdobie je ovplyvnený rastúcim trendom, ktorý sa najlepšie podarilo zachytiť použitím Holtovej metódy.

Poznámka. V prípade stochastického AR(1) je možné pracovať s predpovednými intervalmi, ktoré na rozdiel od nepresných bodových predpovedí dokážu určiť rozmedzie, v ktorom sa budúci vývoj časovej rady so zadanou pravdepodobnosťou odohraje.

Literatúra

- [1] *Anděl J.:* Základy matematické statistiky. Matfyzpress, Praha, 2005.
- [2] *Box, E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C.:* Time Series Analysis. Forecasting and Control. Prentice Hall, London, 1994.
- [3] *Cipra T.:* Finanční ekonometrie. Ekopress, Praha, 2008
- [4] *Hirotoogu Akaike:* Fitting autoregressive models for predictions, 1969
- [5] *Prášková Zuzana:* Základy náhodných procesů. Karolinum, Praha, 1998
- [5] *Wei, W.W.S.:* Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods. Addison-Wesley, New York, 1990.

Zoznam obrázkov

2.1	Ceny akcií	16
2.2	Ceny akcií po transformácii logaritmickou diferenciou	16
2.3	ACF pre logaritmickú transformáciu	17
2.4	PACF pre logaritmickú transformáciu	17
2.5	ACF po odpočítaní priemeru.	17
2.6	PACF po odpočítaní priemeru.	18
2.7	Zhoda korelačnej štruktúry dat a odhadnutého procesu.	18
2.8	Histogram bieleho šumu.	18
2.9	Predpoveď vývoja ceny akcií General Electronics na ďalších 20 dní.	20
3.1	Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie	24
3.2	Dvojité exponenciálne vyrovnávanie	28
3.3	Holtova metóda	30
4.1	Porovnanie použitých metód so skutočnosťou	33