Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lukáš Jarosil

Předpovídání budoucnosti a axiom výběru

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2014

Děkuji za pomoc svému vedoucímu doc. RNDr. Pavlu Pyrihovi, CSc., rodině za podporu i všem, kteří vyslechli myšlenky práce a měli podnětné otázky i cenné připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Předpovídání budoucnosti a axiom výběru

Autor: Lukáš Jarosil

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc., Katedra matematické analýzy

Abstrakt:

Máme-li funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o jejímž chování nic nepředpokládáme, zdá se nemožné předvídat její budoucí hodnoty z předcházejícího vývoje. Z axiomu výběru ovšem vyplývá existence strategie, která na základě hodnot funkce f na nějakém intervalu (s, t) správně předpoví její hodnoty na intervalu $[t, t + \epsilon)$ v každém bodě t reálné osy vyjma spočetné množiny. Tento výsledek Christophera Hardina a Alana Taylora práce prezentuje i se zobecněním na zobrazení z libovolného topologického prostoru v kontextu takzvaných her s klobouky, matematických her, při nichž hráči hádají barvu obvykle svého klobouku na základě barev klobouků ostatních hráčů.

Klíčová slova: axiom výběru, předpovídání budoucnosti, hry s klobouky

Title: Future predicting and the axiom of choice

Author: Lukáš Jarosil

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Pavel Pyrih, CSc., Department of Mathematical Analysis

Abstract:

Given arbitrary function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ it seems practically impossible to predict its future values based on our knowledge of its previous values. Nevertheless, axiom of choice surprisingly implies the existence of strategy that from values of the function f on some interval (s, t) correctly predicts its values on interval $[t, t+\epsilon)$ for every t of real line except for countable set. This result of Christopher Hardin and Alan Taylor is presented along with its generalization to mappings from topological space in the context of hat guessing games, mathematical games in which the players are supposed to guess color of their own hat while knowing only colors of other's hats.

Keywords: axiom of choice, predicting the future, hat guessing games

Obsah

Úvod

Lze předpovídat budoucnost? Často vývoj systémů popisujeme funkcí z reálných čísel, reprezentujících čas, do nějaké množiny stavů. Příkladem jsou nejjednodušší populační modely, obvykle ilustrované na příkladu rybolovu. Mohutnost populace ryb je modelována funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, o které se předpokládá, že splňuje danou diferenciální rovnici, po jejíž analýze můžeme předvídat osud ryb (závisející na intenzitě výlovu, kapacitě prostředí a dalších parametrech). Obecně, abychom mohli říci něco o budoucnosti, klademe na modelované veličiny nějaké předpoklady.

Je-li funkce spojitá, je snadné určit z jejího chování na nějakém intervalu „minulosti" hodnotu v přítomnosti, neboli z levého prstencového okolí bodu určit hodnotu v bodě. Odpověď dává limitní operátor. Nepředpokládáme-li u f spojitost ani žádné jiné vlastnosti, nezdá se možné z jakéhokoli množství informací o minulosti vyvozovat cokoli o přítomnosti, natož o jejím budoucím chování. Aniž bychom takovou nalezli, ukážeme existenci strategie, která ve všech časech vyjma spočetné množiny předpoví z libovolně malého intervalu minulosti nějaký interval budoucnosti. Ta je prezentována v souvislosti s hrami s klobouky.

Ve známé hádance je vězňům stojícím v řadě za sebou jednomu po druhém uloženo předpovědět barvu svého klobouku, zatímco vidí jen klobouky vězňů stojících před nimi, ale slyší všechny předcházející odhady. První vězeň vidí všechny ostatní, druhý všechny kromě prvního, a tak dále. Vězni se mohou předem domluvit na společném postupu. Budou-li klobouky jen červené nebo zelené, mohou vězni barvy označit jako 0 a 1. Jestliže první hádá tak, aby ostatním sdělil paritu součtu barev jejich klobouků, mohou všichni kromě prvního s jistotou hádat správně.

První kapitola se věnuje formalizaci her s klobouky, naznačuje souvislost s opravováním chyb v posloupnosti bitů a uvádí základní výsledek nejvyššího možného zaručitelného počtu správných odhadů pro konečný počet hráčů při simultánním hádání. Dále pak zkoumá značně odlišný případ, ve kterém je hráčů nekonečně a množina barev je libovolná.

Druhá kapitola uvádí do souvislosti hry s klobouky a předpovídání budoucnosti a je v ní předložena Hardinova–Taylorova strategie, jejími autory nazvaná μ-strategií, a její velmi neintuitivní vlastnosti. Předpokládáme-li axiom výběru, lze každou množinu uspořádat způsobem, že každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Takové uspořádání můžeme zavést i na množině reálných funkcí reálné proměnné. Idea μ-strategie je vcelku prostá. Říká, že chceme-li předpovídat hodnoty libovolné funkce f, máme zvolit nejmenší funkci konzistentní s tím, co víme o f. Takový postup vede k neobyčejně překvapivým výsledkům. Nicméně z axiom výběru plyne pouze existence zmiňovaného uspořádání, nikoli postup jak ho zavést, a μ-strategie tak neposkytuje žádný praktický nástroj pro předpovídání budoucnosti.

Třetí kapitola se zabývá nezbytností axiomu výběru pro dosažení výsledků uvedených v práci.

Definice a tvrzení

Následují definice, tvrzení a fakta (především z teorie množin a topologie), jež budeme dále používat.

Nejrozšířenější podobou teorie množin je Zermelova–Fraenkelova teorie množin (ZF), jejíž axiomatika byla na počátku minulého století publikována E. Zermelem a později ještě jím a A. A. Fraenkelem doplněna [1, str. 21]. Mnohé oblasti moderní matematiky se ovšem, stejně jako tato práce, neobejdou bez rozšíření ZF o axiom výběru (ZFC).

Axiom výběru (AC)**.** *Je-li $\mathcal{S}$ neprázdný soubor neprázdných množin A, existuje funkce $\varphi : \mathcal{S} \to \cup\{A : A \in \mathcal{S}\}$ splňující $\varphi(A) \in A$ pro každou $A \in \mathcal{S}$.*

Je-li soubor $\mathcal{S}$ konečný, můžeme takovou funkci najít pomocí axiomů Zermelovy–Frankeovy teorie množin. Axiom výběru však existenci takové funkce postuluje pro libovolný neprázdný soubor množin a je na ZF nezávislý. Více o axiomu výběru například v [8, Kapitola 5].

Z axiomu výběru vyplývají některá podstatná tvrzení, jež bez něj nelze dokázat. Například existence báze v každém vektorovém prostoru nebo to, že spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina. Zároveň na rozdíl od ostatních axiomů ZFC svým existenčním charakterem vede k nekonstruktivním důkazům a lze pomocí něho dokázat existenci „nepěkných“ množin (Lebesgueovsky neměřitelné množiny reálných čísel) nebo velmi neintuitivních výsledků (Banachův–Tarského paradox). Příkladem druhého případu je i tato práce.

V důkazech se axiom výběru často používá v ekvivalentní formulaci známé jako *Princip maximality*, nebo také *Zornovo lemma* [8, Theorem 5.4]. V dalším ovšem budeme potřebovat jiné tvrzení ekvivalentní [1, Kapitola I, Věta 7.23] s saxiomem výběru:

Princip dobrého uspořádání (WO)**.** *Každou množinu lze dobře uspořádat.*

Připomeňme proto definice některých relací (definice upravené z [1] a [8]):

Definice 1 (Relace uspořádání)**.** *Říkáme, že relace $\leq$ na množině A je uspořádání, je-li $\leq$ reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní na A.*

Definice 2 (Dolní množina)**.** *Říkáme, že množina A je dolní v množině X uspořádané relací $\leq$, jestliže s každým svým prvkem obsahuje i všechny menší prvky množiny X. To znamená, že platí:*

$$y \leq x \in A \Rightarrow y \in A \quad .$$

Poznámka. Analogicky definujeme i *horní množinu*, která s každým prvkem obsahuje i všechny prvky větší.

Definice 3 (Dobré uspořádání). *Říkáme, že uspořádání $\preceq$ na množině A je dobré, pokud každá neprázdná podmnožina $U \subseteq A$ má nejmenší prvek vzhledem k $\preceq$. Potom říkáme, že A je dobře uspořádaná relací $\preceq$.*

Definice 4 (Fundovaná relace). *Říkáme, že relace R je fundovaná na množině A, pokud každá neprázdná podmnožina $U \subseteq A$ má alespoň jeden R-minimální prvek. Prvek $r \in U \subseteq A$ je R-minimální, pokud neexistuje $x \in U$, pro které platí xRr.*

Definice fundované relace je podobná dobrému uspořádání, nicméně fundovaná relace mimo jiné nemusí být tranzitivní a nemusí tedy být uspořádáním. Je zřejmé, že fundovaná relace nepřipouští nekonečný klesající řetězec. Z axiomu výběru vyplývá i opačná implikace [viz 1, Kapitola II §6].

Uvedeme i některé topologické vlastnosti množin [1, str. 336-337]:

Definice 5 (Řídká množina). *Říkáme, že podmnožina A topologického prostoru X je řídká v X, jestliže vnitřek jejího uzávěru je prázdný.*

Definice 6 (Hubená množina). *Říkáme, že podmnožina A topologického prostoru X je hubená (nebo také první kategorie), je-li spočetným sjednocením řídkých množin.*

Definice 7 (Baireova vlastnost). *Říkáme, že podmnožina A topologického prostoru X má Baireovu vlastnost, můžeme-li ji psát ve tvaru $A = G \triangle P$, kde G je otevřená a P je hubená.*

$\triangle$ značí symetrickou diferenci definovanou jako $G \triangle P = (G \cup P) - (G \cap P) = (G - P) \cup (P - G)$. Množina s Baireovou vlastností se tedy od otevřené množiny liší o hubenou.

Definice 8 (Baireův prostor). *Říkáme, že topologický prostor X je baireův (či baireovský), jestliže žádná neprázdná otevřená množina $A \subseteq X$ není hubená.*

Věta 1 (Baireova). *Úplné metrické prostory i kompaktní topologické prostory jsou baireovské.*

O hubených podmnožinách reálných čísel si můžeme udělat jistou představu z následujících tvrzení [viz 10, Theorem 1.3 a 1.6]. První vyplývá z Baireovy věty a někdy bývá jako Baireova věta označováno.

Tvrzení 2. *Doplněk libovolné hubené množiny v $\mathbb{R}$ je hustá množina. Žádný interval není hubenou množinou.*

Definice hubené množiny naznačuje, podobně jako u množiny míry nula, že je v jistém smyslu „malá“. Libovolná spočetná množina je hubená a míry nula. Cantorovo diskontinuum [viz 13, Příklad 29] je příkladem nespočetné množiny, která je řídká a má míru nula [10, str. 4] (budeme-li dále mluvit o míře na množině reálných čísel, budeme mít na mysli Lebesgueovu). Že tyto vlastnosti nelze zaměňovat a že se mohou značně odlišovat můžeme nahlédnout například takto:

Tvrzení 3. *Reálná čísla můžeme vyjádřit jako sjednocení hubené množiny a množiny míry nula, přičemž jedna bude doplňkem druhé.*

Kapitola 1

Hry s klobouky

Tři hráči hrají následující hru. Každému je na hlavu posazen červený, nebo zelený klobouk. Barva je určena náhodně hodem spravedlivé mince. Každý z hráčů vidí klobouky ostatních dvou hráčů a žádný z nich nevidí barvu klobouku svého. Krátce poté musí po zaznění gongu všichni současně hádat barvu svého klobouku, nebo namísto hádání mlčet. Před hrou se hráči mohou domluvit na společné strategii, po rozdělení klobouků však nesmí nijak komunikovat. Vyhrají, jen pokud se nikdo nepletl a alespoň jeden z nich hádal správně.

Tento problém popsal v roce 1998 Todd Ebert [11, 1.1] ve své disertační práci. Existuje strategie zaručující výhru? Jestliže ne, jaké nejvyšší pravděpodobnosti úspěchu lze předem dohodnutou strategií dosáhnout? Bez společné domluvy je pravděpodobnost výhry 7/27, tedy o něco více než 1/4. Tři hráči mají totiž na výběr z hádání jedné ze dvou barev nebo mlčení, což je $3^3 = 27$ možností. Vyhrají, hádají-li všichni správně (1 případ), nebo hádají správně dva a jeden mlčí (3 případy), či jeden správně hádá a dva mlčí (3 případy). Dohromady tedy v 7 případech.

Jednoduchá společná strategie je určit předem jednoho hráče, který bude hádat barvu svého klobouku, zatímco zbylí dva budou mlčet. To vede k vítězství průměrně v jedné polovině her. S každým dalším nezávisle hádajícím hráčem pravděpodobnost výhry klesá (jeden správný odhad postačuje a zároveň plete-li se jeden hádající hráč, nezáleží už na tom, jestli ostatní také hádají nebo jen mlčí). Mohlo by se tak zdát, že lepší než padesátiprocentní šance výhry nelze dosáhnout. Uvidíme, že tomu tak není.

Nejprve se však budeme chvíli věnovat formalizaci problému, abychom posléze mohli snáze hledat odpovědi na související otázky. Sníží pravděpodobnost výhry větší počet hráčů? Co když všichni hráči budou muset hádat a cílem bude největší možný počet správných odhadů? Kolik z cizích klobouků musí jednotliví hráči vidět a kolik barev mohou mít klobouky, aby existovala strategie zaručující alespoň jeden správný odhad?

1.1 Definování problému

Co tedy budeme chápat jako *hru s klobouky*? Způsob formalizace problému je s úpravami převzán z [5]. Jak naznačuje předcházející příklad, problém s klobouky (či *hru s klobouky*) budeme popisovat následujícím (tedy *pravidly hry*):

- množinou hráčů P

- množinou barev K, kterých klobouky mohou nabývat
- množstvím informace, kterou má každý z hráčů k dispozici
- pravidly (všichni hráči musí hádat, či mohou i mlčet, hráči hádají postupně, či všichni současně, ...)
- podmínkou výhry (alespoň jeden správný odhad, správnost většiny odhadů, ...)

Budeme nadále předpokládat, že množina hráčů P je neprázdná, $|K| \geq 2$ a hráčům je umožněno předem naplánovat společnou strategii.

Množství informace je dáno tím, kolik klobouků jednotliví hráči vidí. To můžeme dobře reprezentovat *grafem viditelnosti V*.

Definice 9 (Graf viditelnosti)**.** *Grafem viditelnosti* $V = (P, E)$ *budeme rozumět orientovaný graf, jehož množina vrcholů je množina* P *a množina hran* $E \subseteq P \times P$.

Pro $a \in P$ *budeme množinu všech* $b \in P$ *takových, že* $\langle a, b \rangle \in E$*, značit* V_a.

Množinu vrcholů tvoří hráči a hranu $\langle a, b \rangle$ tak budeme interpretovat jako „hráč a vidí klobouk hráče b". V_a je množina všech hráčů, jejichž klobouk a vidí. Hráči by nutně nemuseli hádat barvu svého vlastního klobouku a graf by tak mohl obsahovat i smyčky (tedy hrany ve tvaru $\langle a, a \rangle$), my však takový případ uvažovat nebudeme. Graf viditelnosti nazveme *úplným*, jsou-li každé dva jeho vrcholy spojeny oběma možnými hranami. To znamená, že každý hráč vidí klobouky všech ostatních.

Konkrétní rozdělení klobouků hráčům můžeme popsat zobrazením množiny hráčů P do množiny barev K, které jednotlivým hráčům přiřazuje barvu klobouku. Proto budeme takové zobrazení nazývat *obarvením*.

Definice 10 (Obarvení)**.** *Zobrazení množiny hráčů* P *do množiny barev* K *nazveme obarvení. Množinu všech obarvení* $g : P \to K$ *budeme značit* $\mathcal{C}(P, K)$.

Bude-li jasné o jaké množiny P, K jde (např. o libovolné) budeme psát jen $\mathcal{C}$. Na množině $\mathcal{C}$ navíc následujícím způsobem zavedeme relaci ekvivalence.

Definice 11 (Ekvivalence obarvení)**.** *Řekneme, že* $g \in \mathcal{C}$ *a* $h \in \mathcal{C}$*, jsou při daném grafu viditelnosti* V *pro* $a \in P$ *ekvivalentní, píšeme* $g \approx_a h$*, jestliže* $g(b) = h(b)$ *pro všechna* $b \in V_a$.

a-ekvivalence dvou obarvení říká, že se tato shodují na všech kloboucích, které hráč a vidí, a jsou tak pro něj nerozlišitelná.

Definice 12 (Strategie)**.** *Strategií pro problém s množinou hráčů* P*, množinou barev* K *a daným grafem viditelnosti budeme nazývat zobrazení* $S : P \times \mathcal{C} \to K$*, které pro libovolné* $a \in P$ *a libovolná* $g, h \in \mathcal{C}$ *splňuje:*

$$g \approx_a h \Rightarrow S(a, g) = S(a, h) \ . \tag{1.1}$$

$S(a, h)$ je tedy barva, kterou hráč a hádá u svého klobouku při obarvení h a strategii S. *S(a, h)* budeme zapisovat jako $S_a(h)$. Hráč a hádá správně, jestliže $S_a(h) = h(a)$. Podmínka (1.1) je přirozená, neboť požaduje, aby odhad hráče a závisel pouze na barvách klobouků, které vidí. Pokud se obarvení změní pouze na kloboucích, které hráč a nevidí, zůstane jeho odhad stejným.

Definice 13 (Minimální strategie)**.** *Strategii S nazveme minimální, pokud pro každé obarvení $h \in \mathcal{C}$ existuje alespoň jeden hráč $a \in P$ tak, že platí:*

$$S_a(h) = h(a) \ .$$

Minimální strategie pro daný problém zaručuje alespoň jeden správný odhad při libovolném obarvení klobouků.

Poznámka. Protože se ve většině této kapitoly budeme zabývat případem, kdy všichni hráči hádají, možnost nehádat žádnou barvu není v Definici 12 zahrnuta. V následující sekci 1.2 tuto možnost přidáme do oboru hodnot strategie, $S : P \times \mathcal{C} \to K \cup \{$*„mlčení“*$\}$.

V dalším budeme buď vyšetřovat strategie pro daný problém, nebo zkoumat podmínky, které musí parametry hry splňovat pro existenci minimální strategie. Nadále budeme vždy, nebude-li definováno jinak, uvažovat simultánní hádání (popřípadě mlčení).

1.2 Řešení Ebertova problému

Vrátíme se nyní k problému z úvodu, ve kterém je $|P| = 3, |K| = 2$, graf viditelnosti je úplný, požadujeme alespoň jeden správný odhad, zároveň žádný chybný odhad a hráči hádají (resp. mlčí) simultánně. Vycházíme z [11, 1.1]. Již zmíněná strategie, při níž hádá pouze jeden předem zvolený hráč, vede k úspěchu průměrně v polovině případů. Zdá se, že více hádajících naději na úspěch nezlepšuje, nemůžeme však hádajícího hráče volit lépe než náhodně předem?

Protože máme tři hráče a klobouky dvou barev, máme celkem osm možných obarvení. Ve dvou z nich mají všechny klobouky stejnou barvu, ve zbylých šesti má však právě jeden klobouk jinou barvu. Tato úvaha poskytuje následující strategii:

Mají-li oba klobouky, které hráč vidí stejnou barvu, hádá, že má klobouk druhé z barev. V opačném případě mlčí.

Tedy hráč hádá červenou, vidí-li dva zelené klobouky, hádá zelenou, pokud vidí dva červené klobouky a mlčí, vidí-li jeden červený a jeden zelený klobouk. Jestliže všichni hráči mají klobouk stejné barvy, hádají všichni barvu druhou a všichni se mýlí. Ve zbývajících šesti obarveních má právě jeden klobouk jinou barvu než zbylé dva, hádá tak pouze jeden hráč a hádá správně. Pravděpodobnost výhry je proto $1 - 2/8$, neboli $3/4$.

Povšimněme si, že podíl počtu chybných a správných odhadů se oproti strategii jednoho pevně zvoleného hádajícího hráče nezměnil. Pevně zvolený hráč hádá v jedné polovině případů možných obarvení chybně a v druhé polovině správně. Nyní na tři případy obarvení, ve kterých jeden hráč hádá správně, připadá jedno obarvení, při kterém však hádají špatně všichni tři hráči a tak je podíl chybných a správných odhadů stále jedna. Došlo totiž k „nakupení“ chybných odhadů do dvou případů obarvení, které jsou však ve smyslu počtu špatných odhadů „nejhorší možné“, neboť v nich hádají špatně všichni hráči.

Z tohoto důvodu je strategie optimální [9, sekce 2]. Pro určité počty hráčů ji můžeme zobecnit pomocí *Hammingových kódů* s překvapivým výsledkem pravděpodobnosti výhry jdoucí k jedné, když $|P| = n \longrightarrow \infty$. Zobecnění jen naznačíme.

Uvažujeme-li dvě barvy, můžeme obarvení reprezentovat posloupností bitů. Označíme-li barvy jako 0 a 1 a hráče očíslujeme, lze k-tý bit posloupnosti chápat jako barvu klobouku k-tého hráče. Spojitost mezi hádáním barev klobouků a opravou chyb v posloupnosti bitů je nasnadě. Hammingův kód je lineární jednu chybu opravující perfektní kód. Lineární kód délky n je v našem případě podmnožina množiny $\{0, 1\}^n$, n-tic jedniček a nul, která je jejím vektorovým podprostorem. Jeho prvky nazýváme kódová slova. Hammingovu vzdálenost dvou kódových slov definujeme jako počet bitů, v nichž se liší.

Hammingův kód pro $m \geq 2$ má délku $n = 2^m - 1$ a obsahuje 2^{n-m} kódových slov, která se po dvou liší alespoň ve třech bitech (jejich minimální vzdálenost je rovna třem). Každá n-tice bitů je buď kódovým slovem, nebo ji lze změnou jednoho bitu změnit na právě jedno kódové slovo (*perfektnost*), a opravit tak jednu chybu.

Strategii pro $|P| = 2^m - 1$ definujeme takto:

Vidí-li hráč, že obarvení nemůže být kódovým slovem (tedy vidí chybu), mlčí. V opačném případě hádá, že barva jeho klobouku je taková, aby obarvení nebylo kódovým slovem (dělá chybu).

Taková vede k výhře vždy, když obarvení není kódovým slovem. Je-li obarvení kódové slovo, hádají špatně všichni hráči. Pravděpodobnost výhry je tak $1 - 2^{n-m}/2^n = (2^m - 1)/2^m = n/(n + 1)$.

V Ebertově problému je $n = 3$ a kódová slova jsou (000) a (111), kde k-tý bit značí barvu klobouku k-tého hráče. Při obarvení (001) první dva hráči vidí, že obarvení nemůže být kódovým slovem a mlčí. Třetí hráč hádá, že obarvení *není* kódovým slovem a hádá správně. Další výsledky a zobecnění pro více barev lze nalézt v [9].

1.3 Konečný případ

Nadále budeme uvažovat, že všichni hráči vždy hádají současně barvu svého klobouku (nemohou tedy mlčet) a nechť je množina hráčů P konečná. Nejprve se budeme zabývat průměrným počtem správně hádajících, abychom pak odvodili optimální strategii pro n hráčů, k barev a úplný graf viditelnosti. Nakonec se budeme ve speciálním případě zabývat problémem existence minimální strategie.

Intuitivně se zdá, že při dvou barvách bude průměrně hádat správně polovina hráčů a že při k barvách bude průměrný počet správně hádajících hráčů n/k. Následující lemma ukazuje, že tomu tak při libovolné strategii skutečně je.

Lemma 4 ([5, Lemma 2]). *Hraje-li hru n hráčů a klobouky mohou nabývat k barev, pak pro libovolnou pevně zvolenou strategii je průměrný počet hráčů hádajících správně n/k. (Uvažujeme zde průměr přes všechna obarvení.)*

Důkaz. Nechť $|P| = n$ a $|K| = k$. Mějme strategii S a vyberme jedno obarvení. Zafixujme barvy všech klobouků vyjma klobouku hráče a. Ten můžeme obarvit k způsoby, avšak odhad hráče a na barvě jeho klobouku nezávisí, a bude tak hádat správně v právě jednom případě. Při libovolném obarvení celkem v $1/k$ případů. Hráčů je dohromady n a průměrný počet správně hádajících je tak n/k.

❑

1.3.1 Optimální strategie

Je zřejmé, že žádná strategie nemůže zaručit více než průměrný počet správných odhadů při každém obarvení. Bude-li tento průměr, tedy n/k, celé číslo, můžeme najít strategii zaručující pro každé obarvení n/k správně hádajících? Při úplném grafu viditelnosti je odpověď ano.

Věta 5 ([2, Theorem 2])**.** *Pro hru $|P| = n$ hráčů, s $|K| = k$ možnými barvami klobouků a úplným grafem viditelnosti existuje strategie zaručující $\lfloor n/k \rfloor$ správných odhadů. Taková je ve smyslu počtu správných odhadů nejlepší možná.*

Důkaz. Nejprve ukážeme existenci takové strategie. Očíslujme pro tento účel hráče od 1 do n a možné barvy klobouků od 1 do k. Nechť s značí součet barev klobouků při daném obarvení. Součet s každý zná až na barvu svého klobouku. $\{1, 2, \ldots, n\}$ jsou čísla hráčů, která si před hrou rozdělili. Hádá-li i-tý hráč, že má takovou barvu klobouku, aby platilo $i \equiv s \pmod k$ (i je kongruentní s s modulo k), je odhad správný alespoň u $\lfloor n/k \rfloor$ hráčů.

To je vidět budeme-li nejdříve uvažovat případ, kdy je počet hráčů stejný jako počet barev, $n = k$. Pro $\overline{s} = (s \bmod k) + 1$ platí $\overline{s} \in \{1, 2, \ldots, k\}$, a tedy $\overline{s}$ je rovno indexu některého z hráčů. Každý z nich hádá, že má klobouk takové barvy, aby bylo $\overline{s}$ rovno právě jeho indexu. Jestliže potom skutečné barvy klobouků dávají součet s a platí $\overline{s} = i$, právě i-tý hráč hádal správně. Pro $n > k$, můžeme n hráčů rozdělit do $\lfloor n/k \rfloor$ takovýchto skupin po k hráčích a zajistit tak alespoň $\lfloor n/k \rfloor$ správných odhadů.

Optimalita této strategie plyne z Lemmatu 4 sporem. Předpokládejme existenci strategie zaručující $\lfloor n/k \rfloor + 1$ správných odhadů. Při ní by ale průměrný počet správně hádajících hráčů byl alespoň $\lfloor n/k \rfloor + 1$, což je spor s Lemmatem 4.

❑

Příklad 1. Pro $|P| = 2$, $|K| = 2$ Věta 5 říká, že vždy může alespoň jeden z hráčů hádat správně. Bez číslování barev a hráčů lze strategii popsat takto [2, Example 1]:

Hráč a hádá, že má klobouk stejné barvy jako hráč b, kdežto b hádá, že jeho klobouk je druhé barvy než vidí u a.

Čili jeden hráč předpokládá, že klobouky jsou stejné barvy, druhý, že tomu tak není, a tak se skutečně vždy mýlí jen jeden z nich.

Věta 5 ukazuje, že neexistuje strategie zajišťující, aby nezávisle na obarvení hádala většina hráčů správně (vyjma již vyloučeného triviálního případu, kdy máme pouze jedinou barvu). Následující příklad z [11, 1.3] ovšem demonstruje, že většina hráčů může hádat správně při *většině* obarvení.

Příklad 2. Nechť $|P| = 3$, $|K| = 2$ a každý hráč vidí všechny ostatní. Podmínka výhry je správnost většiny odhadů.

Označme hráče a, b, c a nechejme hráče a hádat druhou barvu než má klobouk hráče b, hráče b hádat druhou barvu než vidí na klobouku c a stejně tak nechť hráč c hádá opak toho, co vidí u a (stačí tedy, aby graf viditelnosti byl orientovaný cyklus). Stejně jako v řešení Ebertova problému pro tři hráče se budou při dvou obarveních (těch, při kterých mají všechny tři klobouky stejnou barvu) všichni hráči mýlit. Ve zbývajících šesti obarveních má jeden hráč klobouk jiné barvy a on a hráč v cyklu „před ním“ hádají správně. Průměrně ve 3/4 případů tak hádají správně dva ze tří hráčů.

Stejně jako v případě Ebertova problému můžeme tuto strategii pomocí Hammingových kódů zobecnit pro počet hráčů o jedna menším než libovolná mocnina dvou. Pravděpodobnost výhry bude opět rovna $n/(n+1)$. Nebudeme-li uvažovat o „obarvování“ klobouků na hlavách hráčů, nýbrž o „rozdělování“ klobouků na hlavy hráčů, lze omezit množství klobouků jednotlivých barev. Jak ilustruje třetí příklad týkající se Věty 5, může potom existovat strategie zajišťující *vždy* většinu správných odhadů.

Příklad 3. Nechť $|P| = 3$, každý hráč vidí všechny ostatní a klobouky rozdělené na hlavy hráčů jsou vybrány ze dvou zelených a ze dvou červených klobouků. Pak existuje strategie, při níž vždy hádá správně většina hráčů.

Ta ovšem snadno plyne z předchozího Příkladu 2, neboť máme opět tři hráče a dvě barvy, ale protože máme jen dva klobouky od každé barvy, hráči nemohou mít všichni stejnou barvu klobouku. Bez těchto dvou „špatných“ případů tak strategie z Příkladu 2 vždy vede ke dvěma správným odhadům ze tří.

1.3.2 Minimální strategie

Existencí minimální strategie se zabývají věty [2, Theorem 11] a [5, Theorem 1]. Kdy při $|K| = 2$ může vždy hádat alespoň jeden hráč správně?

Věta 6. *Při dvou barvách existuje pro hru n hráčů minimální strategie, právě když graf viditelnosti obsahuje orientovaný cyklus.*

Důkaz. Naznačíme důkaz. Obsahuje-li graf cyklus $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_m \to a_1$ je idea hledané strategie stejná jako u strategie popsané v Příkladu 1. Nechť prvních $m-1$ hráčů hádá, že má klobouk opačné barvy než hráč před nimi, a *m-tý* hráč hádá že má klobouk stejné barvy jako první. Hádá-li správně některý z prvních $m-1$, jsme hotovi. Pokud se všech $m-1$ prvních hráčů mýlí, pak mají všichni v cyklu klobouky stejné barvy a správně hádá *m-tý* hráč.

Naopak neobsahuje-li graf cyklus, existují hráči, kteří nevidí žádný klobouk. Můžeme tak pro každou strategii induktivně najít obarvení, při němž všichni hádají chybně. Lze si povšimnout, že tento argument platí i pro více než dvě barvy.

❑

1.4 Nekonečný případ

Viděli jsme nejen na předcházejících příkladech, že problém s konečně mnoha hráči lze mnoha způsoby obměňovat. Zároveň je-li hráčů konečně mnoho a všichni hádají současně, tak pro dvě barvy a sudý počet hráčů průměrně hádá polovina hráčů správně, je to tedy nejlepší možný výsledek, který při úplném grafu viditelnosti a simultánním hádání může být zajištěn společnou strategií pro libovolné obarvení. Jak uvidíme, případ nekonečně mnoha hráčů je však značně odlišný nejen pro dvě barvy.

Máme-li nekonečně mnoho hráčů, kteří kupříkladu vidí všechny ostatní, a dvě barvy, nechť jsou to opět červená a zelená, lze přímočaře nalézt strategii, při které hádá správně nekonečně mnoho z nich [5, str. 20].

Hráči hádají zelenou barvu, pokud vidí nekonečně mnoho zelených klobouků, a naopak červenou, pokud je zelených klobouků jen konečně.

Je-li zelených klobouků konečně, hádají všichni červenou a jen konečně hráčů se mýlí. Je-li zelených klobouků nekonečně mnoho, také hádá správně nekonečně hráčů, ale poněvadž zároveň může mít nekonečně klobouků červenou barvu, může se i nekonečně mnoho hráčů mýlit. Ve skutečnosti lze dosáhnou mnohem lepšího výsledku. Existuje strategie, při níž vždy správně hádají všichni hráči až na konečně mnoho z nich.

Věta 7 (Gabay–O'Connor [5, Theorem 4])**.** *Nechť je množina hráčů P libovolná, množina barev K libovolná a ať každý hráč vidí až na konečně mnoho výjimek klobouky všech ostatních. Potom existuje strategie zaručující, že se v odhadu barvy svého klobouku bude mýlit jen konečně mnoho hráčů.*

Důkaz. Nejprve zaveďme na množině obarvení $\mathcal{C}$ relaci ekvivalence $\equiv$, která se poněkud liší od ekvivalence $\approx_a$ zavedené v Definici 11. Řekneme, že obarvení g a h jsou ekvivalentní, píšeme $g \equiv h$, jestliže se liší jen na konečně mnoha kloboucích, tedy pro $g, h \in \mathcal{C}$

$$g \equiv h \Leftrightarrow \{a \in P : h(a) \neq g(a)\} \textit{ je konečná.}$$

Třídu ekvivalence obarvení h budeme značit $[h]$. Zatímco v Definici 11 se *a-ekvivalentní* obarvení mohla lišit jen na kloboucích, které hráč a neviděl, a třídy ekvivalence se tak pro jednotlivé hráče mohly obecně lišit, nyní se ekvivalentní obarvení mohou lišit nejen na konečné množině klobouků, které hráč a nevidí, nýbrž navíc i na libovolné konečné podmnožině klobouků, které hráč a vidí. Při obarvení h tak znají třídu ekvivalence $[h]$ všichni hráči a relace ekvivalence $\equiv$ je tak v tomto smyslu „univerzální".

$\mathcal{C}$ je tak rozdělena do tříd ekvivalence podle $\equiv$. Axiom výběru nám dává existenci funkce $\varphi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, vybírající obarvení z každé třídy ekvivalence, neboli $\varphi(g) \in \mathcal{C}, \varphi(g) \equiv g$ a $\varphi(g) = \varphi(h)$ pro $g \equiv h$.

Nechť mají klobouky barvy určené obarvením h. Neboť všichni hráči nevidí jen konečně mnoho klobouků, znají všichni i třídu ekvivalence $[h]$. Uvažme nyní strategii S při níž je odhad každého z hráčů dán vybraným obarvením $\varphi(h)$:

$$S_a(h) = \varphi(h)(a) \ .$$

Protože se však $\varphi(h) \in [h]$ z definice $\equiv$ liší od h pouze na konečné množině klobouků, hádají všichni až na konečně mnoho hráčů správně.

❑

Poznámka. Povšimněme si, že změníme-li při daném obarvení barvu konečně mnoha klobouků, třída ekvivalence zůstane stejná a ani hráči tak nezmění své odhady.

Strategie předcházející věty garantuje nejvýše konečně mnoho chybných odhadů. Nemůže však nikdy zaručit *nejvýše* l chybných odhadů. To by pro konečně hráčů $|P| > 2l$ okamžitě vedlo ke sporu s Lemmatem 4, neboť by vždy hádala většina hráčů správně.

Pro případ, kdy každý hráč vidí všechny ostatní a $|K| = 2$ má Věta 7 zajímavý důsledek zformulovaný v následující větě.

Věta 8 (Lenstra [5, Theorem 5])**.** *Nechť je množina hráčů P libovolná, množina barev K dvouprvková a každý hráč vidí všechny ostatní. Potom existuje strategie, při níž všichni hráči hádají správně, nebo se všichni ve svých odhadech mýlí.*

Důkaz. Nechť je S strategie definovaná v předcházející Větě 7 a mějme obarvení klobouků h. Při S všichni hráči hádají, že mají barvu klobouku příslušnou obarvení $\varphi(h)$ a každý z nich tak zná nejen svůj odhad, ale i odhad všech ostatních. Navíc nyní každý vidí všechny ostatní klobouky a může rozhodnout, kteří z ostatních hráčů budou při strategii S hádat chybně (a takových bude jen konečně mnoho).

Hráč a hádá barvu $S_a(h)$. Protože máme $|K| = 2$, nechť $\neg S_a(h)$ značí, že hráč a hádá druhou z barev než při strategii S. Nyní můžeme definovat strategii $\widetilde{S}$ pro hráče a při obarvení h následovně:

$$\widetilde{S}_a(h) = \begin{cases} S_a(h), & \textit{je-li } |\{b \in P : b \neq a \wedge S_b(h) \neq h(b)\}| \textit{ sudé číslo}, \\ \neg S_a(h), & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Hráči hádají podle strategie S, jestliže vidí sudý počet hráčů, kteří se při S mýlí. Hádají druhou z barev než při S, vidí-li u ostatních při S lichý počet chyb.

Jestliže se nyní při obarvení h a strategii S bude mýlit sudý počet hráčů, při $\widetilde{S}$ bude každý odhad správný, poněvadž ti, kteří hádají správně při S, svůj odhad nezmění a ti, kteří hádají při S chybně, uvidí u ostatních lichý počet chyb a změní tak při $\widetilde{S}$ svůj odhad na správný. Při lichém počtu chybných odhadů pod S tomu bude právě naopak a při $\widetilde{S}$ tak budou hádat špatně všichni.

❏

Úplná viditelnost je nutný předpoklad, neboť nevidí-li hráč a klobouk hráče b a změníme-li na tomto klobouku barvu, změní se i správnost odhadu b, zatímco a hádá pořád stejně.

Kapitola 2

Předpovídání budoucnosti

Mohli bychom i ve druhé kapitole nechat hráče předvídat barvu jejich či cizích klobouků, avšak jednak je hra nekonečně mnoha hráčů, z nichž každý vidí všechny ostatní, už dosti vzdálená původní představě třech hráčů, jimž jsou na hlavu posazeny barevné klobouky, a jednak můžeme pro následující případ najít zajímavější náhled, již naznačený v názvu práce. Tato kapitola vychází z článků [4] a [6].

Nechť $|K| = |\mathbb{R}|$, $|P| = |\mathbb{R}|$ a očíslujme hráče reálným čísly. Nechť každý z hráčů vidí pouze klobouky hráčů s nižším číslem. Budeme-li čas modelovat reálnou osou, můžeme barvu klobouku chápat jako stav systému v čase odpovídajícím hráčovu číslu a vzhledem k viditelnosti dané přirozeným uspořádáním reálných čísel se potom nabízí nahlížet na hádání barvy vlastního klobouku (resp. klobouků hráčů s vyšším číslem) jako na hádání současného stavu neboli *„předpovídání přítomnosti“* (resp. budoucích stavů tedy *„předpovídání budoucnosti“*).

Pro účely časové analogie pozměníme některé definice z úvodu první kapitoly. Změní se však pouze interpretace, nikoliv charakter problému a bude o něm možné i nadále kdykoli uvažovat jako o hře s klobouky. Předpokládat budeme poněkud obecnější kontext než v předcházejícím odstavci.

Mějme tedy množinu P a navíc binární relaci $\lhd$ na P. Množinu P si nyní budeme představovat jako *časové okamžiky* uspořádané relací $\lhd$. Ačkoli $\lhd$ nemusí být uspořádání, pro každé $t \in P$ můžeme určit množinu $\lhd$-předchůdců t, $\lhd t$, čili množinu všech $s \in P$, pro která platí $s \lhd t$.

Na prvek $t \in P$ budeme také pohlížet jako na *pozorovatele* v čase t. Prvky množiny K, nechť $|K| \geq 2$, nebudeme chápat jako barvy, ale jako *stavy systému*. Zobrazení z P do K tedy popisují vývoj systému v čase a budeme je proto nazývat *scénáři*. Množinu všech scénářů označíme $\mathcal{S}(P, K)$ (scénář je jinak nazvané obarvení, viz Definici 10). Bude-li jasné o jaké množiny P, K jde (např. o libovolné) budeme psát jen $\mathcal{S}$.

Nechť je graf viditelnosti V dán relací $\lhd$ takto: $s \in V_t \Leftrightarrow s \lhd t$, pro $s, t \in P$. Pozorovatel v čase t tak zná pouze minulost ($\lhd$-předchůdce t). Nazýváme-li obarvení scénáři a máme-li definovaný graf viditelnosti V, připomeňme relaci ekvivalence $\approx_t$ pro $g, h \in \mathcal{S}$ a $t \in P$ (viz Definici 11):

$$g \approx_t h \Leftrightarrow g(s) = h(s) \text{ pro všechna } s \lhd t.$$

$g \approx_t h$ znamená, že se scénáře g a h shodují až t, nikoli však nutně v něm (dále budeme v tomto smyslu psát jen *až do času* t). Nechť $[h]_t$ značí třídu ekvivalence h při $\approx_t$. Protože posléze budeme chtít předpovídat nejen stav v čase

t, nýbrž i stavy budoucí, budeme nyní po strategii požadovat, aby nevybírala pouze stav, ale celý scénář. Zobecníme proto Definici strategie 12. Podmínka 1.1 bude i nadále splněna, ale oborem hodnot bude množina scénářů $\mathcal{S}$ a budeme požadovat $S_t(g) \approx_t g$. Strategie je nyní zobrazení $S : P \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ vybírající z každé třídy ekvivalence $[g]_t$ jeden prvek, čili scénář konzistentní s tím co pozorovatel v čase t zná.

Můžeme si povšimnout, že tomu tak bylo již u strategie z důkazu Gabayovy–O'Connorovy Věty 7, ačkoli hráči hádali jen barvu svého klobouku.

2.1 μ-strategie

Mějme nyní množinu $\mathcal{S}(P, K)$ a nechť je $\preceq$ její dobré uspořádání (k tomu potřebujeme platnost principu dobrého uspořádání). Definujme nyní následující Hardinovu–Taylorovu strategii [4, Definition 2.2], nazvanou jejími autory μ-strategií:

Definice 14 (μ-strategie)**.** *μ-strategie je strategie $\mu : P \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ přiřazující pozorovateli t při scénáři g $\preceq$-nejmenší prvek $[g]_t$, kde $\preceq$ je dobré uspořádání $\mathcal{S}$. Označíme $\mu_t(g)$ jako $\langle g \rangle_t$.*

Budeme-li vztah $g \preceq h$ interpretovat jako g je jednodušší než h, pak při strategii μ pozorovatel vybírá nejjednodušší scénář konzistentní s tím, co zná - můžeme říci, že pozorovatel uplatňuje princip Occamovy břitvy (princip zhruba říkající, že z možných hypotéz je nejlépe vybrat nejméně komplikovanou).

Budeme nyní zkoumat jakých výsledků můžeme takovou strategií dosáhnout. Nejprve při předpovídání současného stavu - „předpovídání přítomnosti“. Předpokládejme pro tento účel, že skutečný vývoj systému popisuje (libovolný) scénář $g \in \mathcal{S}$, budeme ho nazývat *skutečným scénářem*, a definujme chybovou množinu W_0 takto:

$$W_0 = \{t \in P : \langle g \rangle_t (t) \neq g(t)\} \ .$$

Množina W_0 jsou časy, při nichž μ-strategie předpoví přítomnost chybně.

Věta 9 ([4, Theorem 3.1])**.** *Je-li relace $\lhd$ tranzitivní, je $\lhd$ fundovaná na W_0.*

Důkaz. Relace je fundovaná, právě když neobsahuje žádný nekonečný klesající řetězec. Pro spor předpokládejme, že takový najít můžeme. Mějme tedy posloupnost $t_0, t_{-1}, t_{-2}, \ldots$ prvků W_0 takovou, že pro každé $i \in \mathbb{Z}_0^-$ platí $t_{i-1} \lhd t_i$, čili $\ldots \lhd t_{-2} \lhd t_{-1} \lhd t_0$. Rostoucí absolutní hodnota indexu znamená posun do minulosti. Protože pro každé t_i se $\langle g \rangle_{t_i}$ z Definice 14 shoduje se *skutečným scénářem* g až do času t_i, speciálně i v čase t_{i-1}:

$$\langle g \rangle_{t_i}(t_{i-1}) = g(t_{i-1}) \ ,$$

ale $t_{i-1} \in W_0$, a platí tak:

$$g(t_{i-1}) \neq \langle g \rangle_{t_{i-1}}(t_{i-1}) \ .$$

Neboli víme, že pozorovatel v čase t_{i-1} se v předpovědi přítomnosti mýlí, avšak odhad pozorovatele v čase t_i je konzistentní se skutečným scénářem až do času t_i, tudíž i v t_{i-1}. Jimi předpovídané scénáře se tak v čase t_{i-1} nutně liší:

$$\langle g \rangle_{t_{i-1}} \neq \langle g \rangle_{t_i} \ . \tag{2.1}$$

Navíc ovšem, protože $\lhd$ je tranzitivní, množina $\lhd$-předchůdců t_{i-1} je podmnožinou množiny $\lhd$-předchůdců t_i, $\lhd t_{i-1} \subseteq \lhd t_i$. Z čehož plyne opačná inkluze pro třídy ekvivalence $[g]_{t_i} \subseteq [g]_{t_{i-1}}$ (scénáře z $[g]_{t_{i-1}}$ mohou v t_{i-1} nabývat libovolných hodnot, zatímco scénáře z $[g]_{t_i}$ musí reflektovat skutečný vývoj v čase t_{i-1}). Neboť μ-strategie vybírá z dané třídy ekvivalence $\preceq$-nejmenší prvek platí:

$$\langle g\rangle_{t_{i-1}} \preceq \langle g\rangle_{t_i} \tag{2.2}$$

Ze vztahů 2.1 a 2.2 dostaneme existenci nekonečného klesajícího řetězece $\ldots \prec \langle g\rangle_{t_{-2}} \prec \langle g\rangle_{t_{-1}} \prec \langle g\rangle_{t_0}$, což je spor s tím, že $\preceq$ je dobrým uspořádáním $\mathcal{S}$.

❑

Poznámka. Chápeme-li volbu μ-strategie jako nejjednodušší v úvahu připadající scénář, dá se očekávat, že s přibývajícími informacemi o vývoji systému se dříve vybraný scénář může stát příliš jednoduchým a je potřeba zvolit komplikovanější vysvětlení. Tak lze skutečně interpretovat vztah 2.2.

Zformulujeme tři důsledky Věty 9 [4, Corollaries 3.2-3.4].

Důsledek 10. *Je-li $(P, \lhd)$ ostré lineární uspořádání, je W_0 dobře uspořádaná podmnožina* P.

Důsledek 11. *Je-li $(P, \lhd)$ ostré lineární uspořádání neobsahující nekonečný rostoucí řetězec, je W_0 konečná.*

Důsledek 12. *Je-li $(P, \lhd) = (\mathbb{R}, <)$, je W_0 spočetná, míry nula a je řídká.*

Důkaz. Neboť W_0 je dobře uspořádaná podmnožina $\mathbb{R}$, můžeme pro každé $t \in W_0$ (není-li t poslední prvek W_0, což nastane nejvýše jednou) najít jeho následovníka (nejmenší $s \in W_0$ větší než t). Racionální čísla jsou hustá v $\mathbb{R}$, a proto pro každé $t \in W_0$ a jeho následovníka s existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že platí $t < q < s$. W_0 je tak spočetná a spočetná podmnožina reálné přímky má nulovou míru [10, str. 4].

Uzávěr dobře uspořádané podmnožiny $\mathbb{R}$ je taktéž dobře uspořádaný a vnitřek dobře uspořádané množiny je prázdný, neboť neprázdná otevřená množina na $\mathbb{R}$ nemá nejmenší prvek.

❑

Což znamená že μ-strategie je v *předpovídání přítomnosti* nečekaně dobrá. Předpovídá ji správně ve všech časech až na spočetnou řídkou množinu míry nula.

Další věta ukazuje, že pokud je $\lhd$ tranzitivní, nelze dosáhnout lepšího výsledku než uvádí Věta 9, neboť pro každou strategii existuje scénář, při kterém předpoví přítomnost chybně alespoň na W_0.

Věta 13 ([4, Theorem 3.5])**.** *Nechť je $\lhd$ tranzitivní, Q je strategie a $\lhd$ je fundovaná na $W \subseteq P$. Pak existuje scénář g, při kterém strategie Q předpoví přítomnost chybně v každém bodě* W*, tedy*

$$W \subseteq \{t \in P : Q_t(g)(t) \neq g(t)\} \ .$$

Důkaz. Definujme na $P - W$ scénář g libovolně. Neboť je $\lhd$ fundovaná na W, můžeme g na W definovat indukcí. Máme-li $t \in W$, pro jehož $\lhd$-předchůdce (nejen z W) je již g definován, známe i $[g]_t$, a tedy $Q_t(g)(t)$, a můžeme tak definovat $g(t)$ libovolně jinak, aby platilo $g(t) \neq Q_t(g)(t)$. Tak dostaneme pro každou strategii Q scénář, při němž Q chybně předpoví přítomnost alespoň na množině W.

❑

2.2 Budoucnost

Viděli jsme, že μ-strategie předpoví v případě času jako reálné přímky přítomnost chybně jen na spočetné řídké množině nulové míry. Mohli bychom se ptát, co se děje mimo chybovou množinu W_0 a jestli nemůže μ-strategie předpovídat i něco jiného než přítomnost - vybírá ostatně celý scénář, ne jen stav v přítomnosti. Definujme proto pro scénář g množinu W_1, která nám pomůže tyto otázky zodpovědět:

$$W_1 = \{t \in P : \langle g \rangle_t \neq \langle g \rangle_s \text{ pro } \forall s \in P, \text{ kde } t \lhd s\} \ .$$

Množina W_1 jsou časy, v nichž se předpověď μ-strategie liší od všech budoucích předpovědí.

Tvrzení 14 ([4, Proposition 4.1])**.** $W_0 \subseteq W_1$.

Důkaz. Je-li $t \in W_0$, platí $g(t) \neq \langle g \rangle_t(t)$. Odhad v libovolném pozdějším čase je konzistentní s hodnotou g v čase t, tedy pro $s \in P$, $t \lhd s$, máme $\langle g \rangle_s(t) = g(t) \neq \langle g \rangle_t(t)$. Dostáváme tak $\langle g \rangle_t \neq \langle g \rangle_s$ pro $\forall s \in P$ taková, že $t \lhd s$.

❑

Věta 15 ([4, Theorem 4.2])**.** *Je-li relace $\lhd$ tranzitivní, je $\lhd$ fundovaná na W_1.*

Důkaz. Důkaz lze provést sporem jako u Věty 9. Vztah 2.1, $\langle g \rangle_{t_{i-1}} \neq \langle g \rangle_{t_i}$, plyne z definice W_1 a vztah 2.2, $\langle g \rangle_{t_{i-1}} \preceq \langle g \rangle_{t_i}$, se odvodí zcela analogicky.

❑

Pro Větu 15 a množinu W_1 tak stejně jako pro Větu 9 a W_0 platí Důsledky 10 - 12. Budeme dále zkoumat už jen případ, kdy $(P, \lhd) = (\mathbb{R}, <)$. V takovém případě je W_1 spočetná, řídká a míry nula.

Všimněme si, že pokud je $t_{-2} < t_{-1} < t_0$ a $\langle g \rangle_{t_{-2}} \neq \langle g \rangle_{t_{-1}}$, lze stejně jako při odvození vztahu 2.2 dostat $\langle g \rangle_{t_{-2}} \preceq \langle g \rangle_{t_{-1}}$ a $\langle g \rangle_{t_{-1}} \preceq \langle g \rangle_{t_0}$. Spolu s $\langle g \rangle_{t_{-2}} \neq \langle g \rangle_{t_{-1}}$ tedy

$$\langle g \rangle_{t_{-2}} \prec \langle g \rangle_{t_{-1}} \preceq \langle g \rangle_{t_0} \ .$$

Speciálně platí vztah $\langle g \rangle_{t_{-2}} \neq \langle g \rangle_{t_0}$, vyjadřující, že se μ-strategie k již změněné předpovědi nikdy nevrací. To je podstatné pozorování, znamenající, že se předpověď μ-strategie v intervalech mimo množinu W_1 nemění. Ovšem pokud by předpověď neodpovídala skutečnému scénáři, změněna by byla. Na intervalu neobsahujícím body z W_1 se tedy předpovídaný scénář $\langle g \rangle_t$ a skutečný scénář g

shodují a μ-strategie tak „téměř vždy“ předpovídá správně i nějaký úsek budoucnosti!

Věta 16 ([4, Theorem 4.3])**.** *Pro každé $t \in \mathbb{R} - W_1$ existuje $\epsilon > 0$ takové, že $\langle g \rangle_t = g$ na $[t, t+\epsilon)$.*

Důkaz. Z definice W_1 a předcházejícího pozorování (o nezvratnosti změny předpovídaného scénáře) vyplývá pro $t \in \mathbb{R} - W_1$ existence $t_0 > t$ takového, že

$$\langle g \rangle_t = \langle g \rangle_{t_0} \ .$$

Čili se $\langle g \rangle_t$ shoduje se skutečným scénářem na $(-\infty, t_0)$ a speciálně tak správně předpovídá skutečný scénář na $[t, t+\epsilon)$, kde $\epsilon = t_0 - t$.

❑

μ-strategie na $\mathbb{R}$ v důsledku Věty 15 nepředpoví správně nějaký úsek budoucnosti jen na spočetné řídké množině nulové míry. Tento překvapivý výsledek můžeme učinit ještě podivuhodnějším. K předpovídání budoucnosti totiž μ-strategii stačí znát pouze libovolně malý úsek minulosti. Pozměňme proto nejprve definici relace ekvivalence:

$$g \approx_t h \Leftrightarrow \exists s < t : \ g \text{ a } h \text{ se shodují na } (s,t) \ .$$

Změní se tak i třída ekvivalence $[g]_t$, ze které μ-strategie vybírá $\preceq$-nejmenší scénář. Pozorovatel v čase t zná pouze libovolně malý úsek minulosti, interval (s,t), a není schopen rozlišit mezi scénáři, které se liší jen pro časy menší než s. Řekneme, že μ-strategie *předpovídá správně* v čase t, pokud existuje $\epsilon > 0$ takové, že se $\langle g \rangle_t$ shoduje se skutečným scénářem g na $[t, t+\epsilon)$. Definujme nyní v kontextu nové definice $\approx_t$ chybovou množinu W, na které μ-strategie *nepředpovídá správně*:

$$W = \{t \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \ \exists s \in [t, t+\epsilon) \text{ takové, že } \langle g \rangle_t(s) \neq g(s)\} \ .$$

Třebaže pozorovatelé vidí pouze jakkoli krátký interval minulosti, je W stejně jako W_1 nulové míry.

Věta 17 ([4, Theorem 5.1])**.** *Množina W je spočetná, řídká a nulové míry.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že je W spočetným sjednocením spočetných množin, a sama je tak spočetná a nulové míry. Nechť je pro každé racionální q

$$W_q = \{t \in W : q < t \wedge \langle g \rangle_t \text{ a } g \text{ se shodují na } (q,t)\} \ .$$

Nechť $t \in W$. $\langle g \rangle_t$ a g se musí shodovat na (s,t) pro nějaké $s < t$. Protože lze nalézt $q \in (s,t)$, dostáváme $t \in W_q$. Můžeme tak W psát jako sjednocení množin W_q a zbývá dokázat, že W_q jsou spočetné. To je možno provést analogicky jako u množiny W_0. Ukážeme proto nejprve platnost vztahů 2.1 a 2.2 pro W_q.

Mějme tedy $t_{i-1}, t_i \in W_q$, $t_{i-1} < t_i$. Neboť $t_{i-1} \in W$, existuje $s \in [t_{i-1}, t_i)$ takové, že $\langle g \rangle_{t_{i-1}}(s) \neq g(s)$. Avšak $\langle g \rangle_{t_i}(s) = g(s)$. Dostáváme

$$\langle g \rangle_{t_{i-1}} \neq \langle g \rangle_{t_i} \ .$$

Poněvadž $q < t_{i-1} < t_i$ a z definice W_q se $\langle g \rangle_{t_i}$ a g shodují na (q, t_i) (resp. $\langle g \rangle_{t_{i-1}}$ a g na (q, t_{i-1})), platí pro třídy ekvivalence $[g]_{t_i} \subseteq [g]_{t_{i-1}}$. Máme tak

$$\langle g \rangle_{t_{i-1}} \preceq \langle g \rangle_{t_i} \ .$$

Z důkazu Věty 9 (a jejích důsledků) plyne, že W_q jsou dobře uspořádané, a tedy spočetné. Jsouc jejich spočetným sjednocením, je W taktéž spočetná, a tedy nulové míry.

Nyní zbývá dokázat, že W je řídká. Předpokládejme pro spor, že W je hustá v intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom můžeme najít $t_0 \in W \cap (a, b)$. K němu existuje $s_0 < t_0$ splňující $\langle g \rangle_{t_0} = g$ na (s_0, t_0) a $a \leq s_0$ (pokud by pozorovatel v čase t_0 znal „příliš velký“ úsek minulosti, můžeme za s_0 vzít a). Protože je W hustá v (a, b) můžeme tímto způsobem najít posloupnost t_i a s_i s klesajícími indexy ($i \in \mathbb{Z}_0^-$), která splní $t_i \in W$, $\langle g \rangle_{t_i} = g$ na (s_i, t_i) a navíc $s_i \leq s_{i-1} < t_{i-1} < t_i$. Analogickou úvahou jako v první části důkazu, roli q splní s_{i-1}, dostaneme $\langle g \rangle_{t_{i-1}} \neq \langle g \rangle_{t_i}$ a $\langle g \rangle_{t_{i-1}} \preceq \langle g \rangle_{t_i}$, tedy nekonečný klesající řetězec $\ldots \prec \langle g \rangle_{t_{-2}} \prec \langle g \rangle_{t_{-1}} \prec \langle g \rangle_{t_0}$ odporující faktu, že $\preceq$ je dobrým uspořádáním. W je tudíž řídká.

❑

Poznámka. V předchozím důkazu jsme potřebovali axiom výběru nejen pro existenci dobrého uspořádání $\preceq$, ale navíc i pro důkaz spočetnosti W.

2.3 Důsledky

První část není zcela důsledkem, jako spíše zobecněním. Nicméně nezřídka kdy docházíme nejprve částečného poznání, abychom poté své závěry a pozorování zobecnili, o kterémžto principu krátce pojednává druhá část této kapitoly, zabývající se důsledky μ-strategie, vykročíme-li z matematického rámce uvažování.

2.3.1 μ^*-strategie

Podstatné v předcházející kapitole, především v sekci 2.2, jsme odvodili na množině reálných čísel. Otázku předpovídání hodnoty funkce v bodě z jejích hodnot v libovolně malém (redukovaném) okolí tohoto bodu ale můžeme zobecnit z množiny P na topologický prostor X. Množina K nechť je opět alespoň dvouprvková.

Poznámka. Redukovaným okolím bodu x máme na mysli okolí $U(x)$ vyjma bodu x, $U(x) - \{x\}$. Předpovídat hodnotu funkce v x by totiž při znalosti $g(x)$ nebylo příliš zajímavé.

Ukážeme existenci strategie chybně předpovídající hodnotu v bodě jen na slabě rozptýlené množině. Pro definici slabě rozptýlené množiny [6, Definition 1.1] potřebujeme pojem slabě izolovaného bodu.

Definice 15 (Slabě izolovaný bod). *Nechť $A \subseteq X$ je podmnožinou topologického prostoru X. Říkáme, že bod $x \in A$ je slabě izolovaným bodem A, jestliže existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap A$ je konečná.*

Definice 16 (Izolovaný bod)**.** *Nechť $A \subseteq X$ je podmnožinou topologického prostoru X. Říkáme, že bod $x \in A$ je izolovaným bodem A, jestliže existuje okolí U bodu x tak, že $U \cap A = \{x\}$.*

Definice 17 ((Slabě) rozptýlená množina)**.** *Říkáme, že podmnožina A topologického prostoru X je slabě rozptýlená (weakly scattered), jestliže každá její neprázdná podmnožina obsahuje slabě izolovaný bod. Podmnožina A je rozptýlená (scattered), jestliže každá její neprázdná podmnožina obsahuje izolovaný bod.*

Označme opět všechny zobrazení X do K jako $\mathcal{S}$, mějme na $\mathcal{S}$ opět dobré uspořádání $\preceq$ a definujme relaci ekvivalence $\approx_t^*$ pro $g, h \in \mathcal{S}$ a $t \in X$ následovně:

$$g \approx_t^* h \Leftrightarrow \exists U \text{ okolí } t \text{ takové, že } \{x \in U : g(x) \neq h(x)\} \text{ je konečná.}$$

Poznámka. $\approx_t^*$ je podobna relaci ekvivalence $\equiv$ z Gabayovy–O'Connorovy Věty 7, která také připouštěla konečně rozdílů.

Označme $[g]_t^*$ třídu ekvivalence g při $\approx_t^*$ a $\langle g \rangle_t$ její $\preceq$-nejmenší prvek. Definujme μ^*-strategii analogicky jako μ-strategii:

$$\mu_t^*(g) = \langle g \rangle_t \ .$$

Mějme nyní zobrazení $g : X \to K$ a označme W^* množinu všech t, ve kterých μ^*-strategii nepředpoví hodnotu g správně:

$$W^* = \{t \in X : \langle g \rangle_t(t) \neq g(t)\} \ .$$

Věta 18 ([6, Theorem 2.4])**.** *W^* je slabě rozptýlená.*

Důkaz. Chceme ukázat, že každá neprázdná $T \subseteq W^*$ obsahuje slabě izolovaný bod t. Vyberme $t \in T$ tak, aby $\langle g \rangle_t$ byla $\preceq$-nejmenším prvkem množiny $\{\langle g \rangle_s : s \in T\}$. Dokážeme, že t je slabě izolovaným bodem T. Protože $\langle g \rangle_t \approx_t^* g$, existuje U otevřené okolí t takové, že platí:

$$\{s \in U : \langle g \rangle_t(s) \neq g(s)\} \text{ je konečná.} \tag{2.3}$$

Vyberme libovolný bod $s \in U \cap T$. Neboť je U okolím s a platí 2.3, dostáváme

$$\langle g \rangle_t \approx_s^* g \ .$$

μ^* vybírá $\preceq$-nejmenší prvek třídy ekvivalence $[g]_s^*$, a proto $\langle g \rangle_s \preceq \langle g \rangle_t$. Zároveň však $s \in T$ a z volby t máme $\langle g \rangle_t \preceq \langle g \rangle_s$, a z obou nerovností $\langle g \rangle_s = \langle g \rangle_t$. Dále $s \in W^*$ implikuje $g(s) \neq \langle g \rangle_s(s) = \langle g \rangle_t(s)$. Pro každé $s \in U \cap T$ tak platí $g(s) \neq \langle g \rangle_t(s)$ a z 2.3 plyne, že $U \cap T$ je konečná. Pro každou $T \subseteq W^*$ jsme nalezli bod t a jeho okolí U takové, že $U \cap T$ je konečná. W^* je slabě rozptýlená. ❑

Topologický prostor je T_0 (také Kolmogorovův)[13, str. 11], jestliže pro každé dva různé body existuje otevřená množina, která obsahuje jeden, ale neobsahuje druhý. Pojmy slabě rozptýlená a rozptýlená množina v něm tak splývají, neboť z konečné množiny bodů můžeme vybrat izolovaný.

Důsledek 19. *Je-li prostor T_0, je W^* rozptýlená.*

Poznámka. Podobně jako v sekci 2.1 ve Větě 13, lze ukázat, že tento výsledek nelze zesílit ([viz 6, Theorem 2.5]).

Uvažme nyní topologii danou částečným uspořádáním následovně: množinu prohlásíme za otevřenou, je-li *dolní.* Dostaneme *dolní topologii.* Připomeňme, že množina je dolní, pokud s každým prvkem obsahuje i všechny menší prvky. Dolní topologie je zřejmě T_0.

Příklad 4. [6, Theorem 3.2] Interval $(-\infty, a]$ je na $\mathbb{R}$ v dolní topologii otevřená množina. Budeme-li předpovídat hodnotu funkce g v časech $t \in \mathbb{R}$ z jejích hodnot na $(-\infty, t)$ pomocí $\mu^* - \mathit{strategie}$, nebude předpověď správná podle předcházejícího, Věty 18, jen na rozptýlené množině. Z definice rozptýlené množiny plyne, že taková je na $\mathbb{R}$ v dolní topologii dobře uspořádaná (izolovaný bod množiny je zároveň jejím nejmenším prvkem). Důsledek 12 (Věty 9) o *předpovídání přítomnosti* tudíž vyplývá z Věty 18.

2.3.2 Kulečníkové koule

Vidíme-li kulečníkovou kouli pohybovat se po přímé dráze směrem k druhé, můžeme říci, že ji nárazem uvede do pohybu? David Hume se ve Zkoumání o lidském rozumu [viz 7, oddíl IV] ve své polemice s induktivním vyvozování ptá: „Nemohou obě koule po nárazu setrvat v naprostém klidu? Nemůže se první koule vrátit po stejné dráze, nebo odskočit od druhé v kterémkoli směru a po jakékoli dráze?“. A argumentuje, že induktivní vyvozování nemůžeme nikdy obhájit ani argumenty založenými na zkušenosti, ani myšlenkovým pochodem, neboť „. . . účinek je totiž naprosto odlišný od příčiny, a tudíž v ní nemůže být nikdy nalezen“.

Hume všechny předměty lidského rozumu a zkoumání rozděluje na *vztahy idejí* a *faktické okolnosti* (takzvaná *Humeova vidlička*). V oblasti Humem nazývané *vztahy ideí*, kam patří i matematika, dává μ-strategie na související otázky překvapivé odpovědi. Zabývá se jimi Alexander George v článku [3].

Kapitola 3

Nezbytnost axiomu výběru

Axiom výběru je pro μ-strategii i důkaz Gabayovy–O'Connorovy Věty 7 nezbytný, což ukážeme pomocí konstrukce zavedené v [5]. Konkrétně nahradíme-li ho slabším *axiomem závislého výběru* (DC), nebudeme moci podobné výsledky dokázat (více o DC, stejně jako o dále zmiňovaném nedosažitelném kardinálu, viz [8, Kapitola 5]). ZF spolu s DC značíme ZF + DC. Znění axiomu závislého výběru nebudeme potřebovat, podstatné je, že axiom výběru implikuje axiom závislého výběru, naopak tomu však není. V článku [12] z roku 1970 zkonstruoval R. Solovay (za předpokladu existence *nedosažitelného kardinálu* v ZFC) model ZF + DC, v němž jsou všechny množiny reálných čísel Lebesgueovsky měřitelné a všechny mají Baireovu vlastnost [viz také 8, Kapitola 26]. S. Shelah později ukázal, že pro Baireovu vlastnost není předpoklad existence nedosažitelného kardinálu nutný, zatímco pro měřitelnost je nezbytný. V ZF + DC, předpokládáme-li její bezespornost, tak nelze dokázat neplatnost následujícího tvrzení.

Tvrzení 20 (BP)**.** *Každá množina reálných čísel má Baireovu vlastnost.*

Předpokládáme-li axiom výběru, můžeme najít neměřitelnou množinu mnoha způsoby. Autorem nejstarší a nejjednodušší konstrukce je G. Vitali. Vitaliho množina není Lebesgueovsky měřitelná a nemá ani Baireovu vlastnost [viz 10, kapitola 5].

V ZF + DC zřejmě nemůžeme dokázat tvrzení, které je ve sporu s tvrzením BP. Ukážeme, že Gabayova–O'Connorova Věta 7 i Lenstrova Věta 8 s ním ve sporu jsou, a nelze je tak dokázat v ZF + DC. Pro tento účel budeme dále uvažovat, že je hráčů spočetně nekonečně, a můžeme tak ztotožnit množinu hráčů s množinou přirozených čísel. Jestliže dvě barvy označíme 0 a 1, tedy $K = \{0, 1\}$, jsou všechna obarvení právě všechny spočetně nekonečné posloupnosti jedniček a nul. Množinu všech těchto posloupností budeme značit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Ztotožníme-li posloupnost $r \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $r = (r_1, r_2, r_3, \dots)$, s binárním rozvojem reálného čísla a jako $a = 0 + r_1 \cdot 2^{-1} + r_2 \cdot 2^{-2} + r_3 \cdot 2^{-3} + \dots$ můžeme chápat $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jako reálná čísla intervalu $[0, 1]$.

Je-li b konečná posloupnost jedniček a nul, $b \in \{0, 1\}^n$, budeme $[b]$ značit všechny posloupnosti z $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ rozšiřující b. Na $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ uvažujeme topologii danou bází otevřených množin $B = \{[b] : b \in \{0, 1\}^n, n \in \mathbb{N}\}$. Získaná topologie je topologií cantorova diskontinua [viz 13, Příklad 29.8].

Definujme pro $k \in \mathbb{N}$ izomorfismus $T_k : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ jako zobrazení měnící hodnotu *k-tého* prvku posloupnosti na hodnotu druhou, tedy měnící 1 na 0 nebo 0 na 1. Zavedeme nyní pojem *přepínací množiny.*

Definice 18 (Přepínací množina). *Množinu $D \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nazveme přepínací, jestliže existuje nekonečně mnoho k takových, že platí $T_k(D) \cap D = \emptyset$.*

Poznámka. Libovolná jednoprvková D, neboli jedna posloupnost, je zřejmě přepínací množina. Ve skutečnosti je přepínací množina libovolná konečná množina $D \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Je-li v $D \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ posloupnost p taková, že spolu s ní jsou v D (až na konečně mnoho) všechny posloupnosti, které se od p liší na právě jednom prvku, není D přepínací. Liší-li se totiž dvě posloupnosti v právě *k-tém* prvku, izomorfismus T_k zobrazí jednu na druhou.

Obecně $D \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ není přepínací, právě když existuje $M \subset \mathbb{N}$ konečná tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N} - M$ existují v D dvě posloupnosti lišící se v právě *k-tém* prvku.

Lemma 21 ([5, Lemma 6]). *Každá přepínací množina s Baireovou vlastností je hubená.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že přepínací množina D má Baireovu vlastnost a není hubená. Z definice Baireovy vlastnosti existuje otevřená množina G tak, že $G - D$ je hubená, můžeme jistě najít bázovou množinu $[b]$ takovou, že $[b] - D$ je hubená. Neboť je D přepínací, existuje k větší než je délka b splňující $T_k(D) \cap D = \emptyset$. Prázdný průnik můžeme odečíst od $[b] \cap D$ a postupně dostaneme

$$[b] \cap D = [b] \cap D - T_k(D) \cap D = ([b] - T_k(D)) \cap D \subseteq [b] - T_k(D) \quad .$$

Protože je k větší než délka b a $[b]$ jsou všechny posloupnosti rozšiřující b, je $T_k([b]) = [b]$, a tedy můžeme psát

$$[b] \cap D \subseteq [b] - T_k(D) = T_k([b]) - T_k(D) = T_k([b] - D) \quad .$$

Máme tak $[b] \cap D \subseteq T_k([b] - D)$. Neboť $[b] - D$ je hubená a podmnožina hubené množiny je hubená, je i $[b] \cap D$ hubená. D dle předpokladu hubená není, a tak musí být hubená $[b]$, což je spor s Baireovou větou.

❑

3.1 Gabayova–O'Connorova věta

Ukážeme nyní, že Lenstrova Věta 8 je v rozporu s Tvrzením BP, a tedy nemůže být dokázána v ZF + DC.

Věta 22 ([5, Theorem 7]). *Nechť je množina hráčů spočetně nekonečná, množina barev dvouprvková a každý hráč vidí všechny ostatní. Předpokládejme, že každá množina reálných čísel má Baireovu vlastnost. Pak pro každou strategii existuje obarvení, při kterém alespoň jeden hráč hádá správně a alespoň jeden hráč se ve svém odhadu mýlí.*

Důkaz. Mějme libovolnou pevně zvolenou strategii S. Ať D značí množinu všech obarvení, při kterých při S hádají všichni hráči správně a W značí množinu všech obarvení, při kterých hádají všichni špatně.

D i W jsou přepínací. Mějme libovolné obarvení z D. Při něm hádají všichni hráči správně. Změníme-li barvu klobouku *k-tého* hráče, jeho odhad se nezmění, stane se tak chybným a výsledné obarvení nehledě na odhady ostatních hráčů nepatří do D. Existuje tak nekonečně mnoho k takových, že $T_k(D) \cap D = \emptyset$. Pro W platí to samé, jen se odhad mění na správný.

Navíc mají podle předpokladu D i W Baireovu vlastnost a jsou tak podle Lemmatu 21 hubené. Což ovšem znamená, že pro každou strategii S můžeme vybrat obarvení $h \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} - (D \cup W)$, při kterém alespoň jeden hráč hádá správně a alespoň jeden hráč se ve svém odhadu mýlí.

❑

Neboť Lenstrova Věta 8 byla odvozena jako důsledek Gabayovy–O'Connorovy Věty 7, nemůže být ani Gabayova–O'Connorova věta dokázána v ZF + DC.

3.2 Předpovídání přítomnosti

Nakonec ukážeme, že v rozporu s Tvrzením BP je i Věta 9 a axiom výběru je pro μ-strategii nezbytný.

Nechť je množina časů, ve kterých chceme předpovídat současný stav, množina záporných celých čísel s obvyklým ostrým uspořádáním a předpokládejme, že existují jen dva stavy, čili $(P, \lhd) = (\mathbb{Z}^-, <)$ a $|K| = 2$. Množina časů je tak indexovaná zápornými celými čísly a scénář můžeme popsat jako posloupnost z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ztotožňujíce její *m-tý* prvek se stavem pozorovatele v čase $-m$. Připomeňme, že W_0 značí množinu časů, v nichž μ-strategie chybně předpoví přítomnost. Podle Důsledku 11 je pro $(\mathbb{Z}^-, <)$ množina W_0 konečná. Ukážeme, že předpokládáme-li platnost Tvrzení BP, najdeme pro každou strategii scénář, při němž tato chybně předpoví přítomnost na nekonečné množině časů.

Nechť ν je libovolná strategie a W_0^ν je chybová množina

$$W_0^\nu = \{t \in \mathbb{Z}^- : \nu_t(g)(t) \neq g(t)\} \ ,$$

množina časů v nichž ν chybně předpoví přítomnost.

Věta 23. *Nechť $(P, \lhd) = (\mathbb{Z}^-, <)$, $|K| = 2$ a předpokládejme platnost BP. Pak pro každou strategii ν existuje scénář, při němž je chybová množina W_0^ν nekonečná.*

Důkaz. Označme D_m množinu scénářů, při nichž správně předpovídají přítomnost pozorovatelé v časech $-m$ a menších. D_m jsou přepínací, neboť změna stavu v čase $-m$ nebo menším nezmění odhad pozorovatele, ale změní jeho správnost. Existuje tak nekonečně mnoho k takových, že $T_k(D) \cap D = \emptyset$. Z předpokladu mají D_m Baireovu vlastnost a podle Lemmatu 21 jsou všechny D_m hubené. Lze tedy vybrat scénář $w \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} - \bigcup_{m \in \mathbb{N}} D_m$ při němž je W_0^ν nekonečná.

❑

Poněvadž analogicky jako v Příkladu 4 vyplývá Důsledek 11 pro $(\mathbb{Z}^-, <)$ z Věty 18, i pro důkaz Věty 18 je předpoklad axiomu výběru nutný.

Závěr

Práce v souvislostech podává přehled výsledků Christophera Hardina, Alana Taylora a dalších autorů, týkajících se možností předpovídání hodnot náhodných funkcí v kontextu matematických her s klobouky. Obsahuje příklady, rozvádí definice, zpřehledňuje argumentaci v některých důkazech a s využitím známé konstrukce předkládá i důkaz nezbytnosti axiomu výběru pro výsledky dosažené Hardinovou–Taylorovou μ-strategií, který její autoři neuvádějí.

V první kapitole je prezentováno řešení takzvaného Ebertova problému i s jeho zobecněním a následně odvozena optimální strategie pro hru n hráčů, kteří vidí klobouky všech ostatních a simultánně hádají barvu svého. Je popsána i strategie pro nekonečně hráčů, zajišťující pouze konečný počet chybných odhadů.

Kapitola druhá se zabývá především μ-strategií, která při dobrém uspořádání, jehož existence je zajištěna předpokladem axiomu výběru, vybírá nejmenší prvek z množiny s minulostí konzistentních popisů vývoje systému. Ukazuje se, že taková při modelování vývoje systému v čase funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ předpoví z libovolně malého úseku minulosti správně nejen přítomnost, nýbrž i nějaký úsek budoucnosti a to ve všech časech vyjma spočetné řídké množiny nulové míry. Protože z axiomu výběru plyne pouze existence dobrého uspořádání na každé množině, nikoli však postup jak takové získat, ani μ-strategie neposkytuje praktický nástroj pro předpovídání budoucnosti. V třetí části kapitoly je μ-strategie zobecněna pro zobrazení z topologického prostoru do množiny stavů. Jsou naznačeny i její filosofické důsledky.

Třetí kapitola ukazuje nezbytnost axiomu výběru pro důkazy hlavních výsledků uvedených v práci.

Literatura

[1] Balcar, B. a Štěpánek, P. (2001). *Teorie množin.* Druhé přepracované vydání. Academia, Praha. ISBN 80-200-0470-X.

[2] Butler, S., Hajiaghayi, M. T., Kleinberg, R. D. a Leighton, T. (2008). Hat guessing games. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **22**, 592–605.

[3] George, A. (2007). A proof of induction? *Philosophers' Imprint*, **7**(2), 1–5.

[4] Hardin, C. S. a Taylor, A. D. (2008). A peculiar connection between the axiom of choice and predicting the future. *American Mathematical Monthly*, **115**(2), 91–96.

[5] Hardin, C. S. a Taylor, A. D. (2008). An introduction to infinite hat problems. *The Mathematical Intelligencer*, **30**(4), 20–25.

[6] Hardin, C. S. a Taylor, A. D. (2009). Limit-like predictability for discontinuous functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **137**(9), 3123–3128.

[7] Hume, D. (1996). *Zkoumání o lidském rozumu.* Nakladatelství Svoboda, Praha. ISBN 80-205-0521-0. Z anglického originálu přeložil Moural, J.

[8] Jech, T. (2003). *Set theory.* 3rd millenium ed., rev. and expanded. Springer, Berlin. ISBN 3-540-44085-2.

[9] Lenstra Jr, H. W. a Seroussi, G. (2002). On hats and other covers. *IEEE International Symposium on Information Theory, Lausanne.* URL `http://arxiv.org/abs/cs/0509045`.

[10] Oxtoby, J. C. (1980). *Measure and Category: A Survey of the Analogies Between Topological and Measure Spaces.* Second Edition. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-90508-1.

[11] Paterson, M. B. a Stinson, D. R. (2010). Yet another hat game. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **17**(1), R86.

[12] Solovay, R. M. (1970). A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *Annals of Mathematics*, **92**(1), 1–56.

[13] Steen, L. A. a Seebach, J. (1995). *Counterexamples in topology.* Dover Publications, New York. ISBN 0-486-68735-X.