Oponentský posudek bakalářské práce

Lukáš Jarosil: „Předpovídání budoucnosti a axiom výběru“

Předložená práce se zabývá některými neintuitivními důsledky axiomu výběru. Zejména se zaměřuje na různé varianty známé „hry s klobouky“. Základní situaci lze popsat následovně: Je dána (konečná či nekonečná) množina hráčů P a (konečná či nekonečná) množina barev K. Každému hráči je posazen na hlavu klobouk jedné z barev (tedy je zvoleno zobrazení $f : P \to K$ nazývané obarvení). Každý hráč vidí barvy klobouků některých dalších hráčů (to je dáno orientovaným grafem nazývaným graf viditelnosti). Na základě toho, co vidí, má hráč odhadnout buď barvu svého klobouku nebo celé obarvení. Hráči se mohou předem domluvit na strategii (to je zobrazení, které každému obarvení přiřadí odhady jednotlivých hráčů, přičemž odhad každého hráče závisí jen na tom, co vidí).

V první kapitole se zkoumá existence různých typů strategií pro vybrané případy (například strategie zaručující co největší úspěšnost odhadů, nebo strategie zaručující aspoň jeden správný odhad). Ve druhé kapitole se tentýž problém interpretuje jako předpovídání budoucnosti (množina P je částečně uspořádaná a hráč vidí právě barvy „menších hráčů“ – hráči jsou interpretováni jako časové okamžiky a v každém okamžiku je známa minulost) a hádá se buď barva vlastní (tj. odhaduje se přítomnost) nebo celé obarvení (předpovídá se budoucnost). Popisuje se strategie, která umožní odhadnout přítomnost či budoucnost ve „skoro všech“ případech. Ve třetí kapitole se zkoumá otázka nezbytnosti axiomu výběru pro některé z výsledků prvních dvou kapitol.

Téma práce je zajímavé a netriviální. Ke zpracování mám nějaké připomínky, poznámky a výhrady, jejichž seznam následuje.

1. Strana 4, Definice 1: Tato definice postrádá smysl pro čtenáře. Čtenář, který zná pojmy relace reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní, jistě zná i pojem uspořádání. Naopak, čtenář může znát pojem uspořádání aniž zná názvy jednotlivých axiomů. Bylo by lepší buď ty vlastnosti napsat nebo definici vůbec neuvádět. Případně jen poznamenat, že uspořádáním budeme myslet to, co se obvykle nazývá částečné uspořádání.

2. Strana 5 uprostřed a dále na mnoha místech: Pro označení rozdílu dvou množin se používá znaménko ‘$-$’ místo v analýze obvyklého ‘$\setminus$’. To není chyba, ale není to v analýze zvykem, protože znaménko ‘$-$’ se používá pro algebraický rozdíl množin (třeba pro podmnožiny $\mathbb{R}$ nebo obecněji podmnožiny vektorových prostorů).

3. Strana 5, Tvrzení 2: To tvrzení říká, že $\mathbb{R}$ je Baireův prostor a plyne z toho, že $\mathbb{R}$ je úplný metrický prostor.

4. Strana 5, Tvrzení 3: Pro toto tvrzení je vhodné uvést odkaz. (Najde se třeba v [10].)

5. Strana 8, předposlední odstavec: Vysvětlení je poněkud nesrozumitelné – jaký to podíl že se vlastně nezměnil a co se tím vlastně chce říci. Při strategii ze strany 6 jeden hráč vždy hádá (v polovině případů správně, v polovině špatně) a ostatní mlčí. V zde popsané strategii každý hráč v polovině případů mlčí a v polovině případů hádá, z toho v polovině případů správně. Celkem tedy hádá správně ve čtvrtině případů, špatně také ve čtvrtině případů a v polovině případů nehádá vůbec. Snad se chce říci, že každý hráč hádá správně v polovině případů, kdy nemlčí. Tak tomu ovšem musí být pro každou strategii, což snadno plyne z definice strategie.

6. Strana 8, řádek 3 zdola: „Z tohoto důvodu je strategie optimální.“ To by stálo za vysvětlení. Pokud se předchozí odstavec interpretuje tak, jak jsem naznačil, lze optimalitu intuitivně očekávat. Ale důkaz je něco jiného, ten chybí. Strategie v této situaci znamená, že v části případů hráč mlčí a v části hádá. Určit strategii tedy znamená vymezit případy, kdy mlčí, a určit, jak hádá v ostatních případech. Úspěšnost hádání je vždy 1/2. Bylo by třeba dokázat, že při libovolné strategii alespoň ve čtvrtině případů buď alespoň jeden hráč hádá špatně nebo všichni mlčí. Není to těžké, ale v textu to chybí.

7. Strana 9, popis Hammingova kódu: Hammingův kód by se měl popsat pořádně. Nemyslím tím jeho konstrukci, ale jen jeho vlastnosti. Třeba linearita (co se myslí vektorovým podprostorem v tomto kontextu – asi nad tělesem $\mathbb{Z}_2$, což by se mělo explicitně napsat). Dále podivnou formulací „jejich minimální vzdálenost je rovna třem“ se asi myslí „vzdálenost každých dvou slov je aspoň tři“.

8. Strana 9, popis strategie: Formulace „dělá chybu“ je dvojznačná – myslí se tím, že vytváří chybu v Hammingově kódu, ale sugeruje to představu, že hádá chybně. Člověk to po chvíli rozluští, ale přesnější vyjádření by neškodilo.

9. Strana 10, důkaz Věty 5, závěr druhého odstavce: Případ $n > k$ by se měl vysvětlit. Co znamená „takovýchto skupin“, co znamená „rozdělit“ (nejde o rozdělení, někteří hráči mohou zbýt).

10. Strana 11, důkaz Věty 6, druhý odstavec: Je to tak, ale ta induktivní konstrukce by zde měla být.

11. Strana 16, Důsledek 12 (a řada dalších míst): Že spočetná množina je míry nula, je jasné a není třeba to pořád opakovat. Je jistě možné jednou zdůraznit, že ze spočetnosti plyne nulovost, ale často se opakující formulace „spočetná množina míry nula“ je podivná a zavádějící. Působí dojmem, jako by ta míra nula byla nějaká informace navíc, což není. Je to stejný nesmysl jako říkat „nekonečná neprázdná množina“ nebo „spočetná hubená množina“ nebo „řídká množina s prázdným vnitřkem“.

12. Strana 16, důkaz Důsledku 12:
(a) V důkazu spočetnosti W_0 je podstatné, že přiřazení $t \mapsto q$ je prosté, což není zdůrazněno.
(b) Skutečnost, že uzávěr dobře uspořádané podmnožiny $\mathbb{R}$ je také dobře uspořádaný, je třeba dokázat. Je to sice snadné, ale nikoli triviální.

13. Strana 17, důkaz Věty 13:
(a) Je to správně, ale využití fundovanosti by chtělo popsat. Tedy vysvětlit, proč funguje naznačená induktivní konstrukce.
(b) Je přirozené se ptát, zda lze W realizovat přesně (tj. dosáhnout toho, aby chybová množina byla rovna W). Myslím, že pro μ-strategii tomu tak je.

14. Strana 19, důkaz Věty 17: Musí být W dobře uspořádaná?

15. Strana 19, Poznámka před oddílem 2.3: Je možná zajímavé zkoumat, kde všude se používá axiom výběru. Nicméně v textu se používá mlčky na mnoha místech – tak, jak je v analýze obvyklé. Například se používá v důkazu Důsledku 12 (spočetnost se dokazuje pomocí konstrukce prostého zobrazení do $\mathbb{Q}$ – obrat, který z tvrzení „pro každé t existuje q“ vyrobí zobrazení, je použitím axiomu výběru; i když v tomto konkrétním případě se mu lze vyhnout a popsat vzorec pro takové zobrazení) nebo v důkazu Věty 13 (i zde se tomu lze vyhnout). Pokud opravdu zkoumáme, kde je axiom výběru potřeba, je nutné důkazy psát pečlivěji.

16. Strana 19, začátek oddílu 2.3.1: Chtělo by to zdůraznit, že na topologický prostor X apriori neklademe žádné oddělovací axiomy (nejčastěji se zkoumají jen Hausdorffovy nebo dokonce úplně regulární prostory).

17. Strana 21, oddíl 2.3.2: Tento oddíl naprosto nezapadá do textu. Na první pohled vypadá jako naprosto nesmyslná vložka. Že nejde o nesmysl, ale o extrémně stručný nástin filosofie přírodních zákonů, pochopí čtenář až po důkladném zamyšlení a s obrovskou dávkou dobré vůle. Nicméně vztah k μ-strategii je poněkud násilný. Domnívám se, že takovéto exkurzy do filosofie se mají dělat buď pořádně nebo raději vůbec.

18. Kapitola 3, všeobecně:
(a) Nezbytnost axiomu výběru lze chápat ve dvou smyslech. Jeden z nich je, že negace příslušného tvrzení je konsistentní s ZF + negace AC (neboli, že ono tvrzení je nedokazatelné v ZF), druhý je, že příslušné tvrzení implikuje axiom výběru. V práci se pracuje s prvním smyslem, bylo by dobré to explicitně říci.
(b) V práci se konsistence tvrzení s ZF + negace AC dokazuje tak, že se ukáže jeho dokazatelnost v ZF+DC. Že to je dostatečné, je vysvětleno dobře. Ale je třeba všechna tvrzení této kapitoly dokazovat

v ZF+DC, což dá práci kontrolovat, protože v analýze obvykle používáme axiom výběru téměř bezmyšlenkovitě. V této kapitole se například opakovaně používá Baireova věta (Lemma 21 i Věta 23). V běžném důkazu Baireovy věty se používá axiom výběru. Přitom Baireova věta pro úplné metrické prostory je v ZF ekvivalentní s DC (viz třeba poznámky v [10]), zatímco pro separabilní úplné metrické prostory platí v ZF. Tyto věci je třeba vysvětlovat.

19. Strana 22, třetí odstavec zdola: $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ nelze jen tak chápat jako reálná čísla z intervalu $[0,1]$. Důvod je ten, že popsané zobrazení není prosté (binární rozvoj není jednoznačný). Kdybychom chtěli $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ztotožnit s podmnožinou $[0,1]$, museli bychom použít jiný vzorec. Například vzorec $2\cdot(r_1\cdot 3^{-1}+r_2\cdot 3^{-2}+r_3\cdot 3^{-3}+\dots)$ dává ztotožnění s klasickou Cantorovou množinou. Vzorec uvedený v práci dává klasické spojité zobrazení Cantorova diskontinua na $[0,1]$, které pochopitelně není prosté.

20. Strana 23, důkaz Lemmatu 21: Podstatným způsobem se používá fakt, že T_k je homeomorfismus (a zachovává tedy hubené množiny). Je to sice zřejmé, ale stojí za to to říci explicitně.

21. Strana 24, poslední dva řádky oddílu 3.1: Je podstatné, že implikace Věta 7 $\Rightarrow$ Věta 8 byla dokázána v ZF. Mělo by se na to upozornit.

Dále jsem našel následující překlepy a jazykové či typogragické nedostatky:

(i) Strana 4, řádek 11 zdola: „s saxiomem“

(ii) Strana 5, Definice 8: Správně je prostor ‘Baireův’ (s velkým B) nebo ‘baireovský’ (s malým b).

(iii) Strana 10: Nahoře se začíná čtverečkem, což je divné.

(iv) Strana 14, řádek 3 zdola: Spíše „až do t“ než „až t“.

(v) Strana 22, řádek 3 za Tvrzením 20: Správně ‘lebesgueovsky měřitelná’.

(vi) Strana 22, řádek 4 zdola: Správně ‘Cantorova diskontinua’.

(vii) Strana 23, řádek 8: Spíše ‘právě v k-tém’.

(viii) Strana 25, řádek 2: Asi Věta 9, ne Věta 18.

Celkové hodnocení: Téma bakalářské práce je zajímavé a netriviální. Práce je netriviální kompilací více zdrojů. Jazyková a typografická kvalita je dobrá, nedostatků není mnoho. Užité pojmy jsou definovány i používány korektně (s výjimkou popsanou v poznámce 7 výše). Důkazy některých vět jsou pěkně zpracované, korektní a srozumitelné (Věty 7–9, 15–18), v jiných důkazech důležité kroky buď chybějí (tvrzení o optimalitě na straně 8, Důsledek 12) nebo nejsou provedeny pořádně (Věty 5, 6, 13). Samostatným případem je třetí kapitola, která má, tak jak je, ke korektnosti daleko (viz poznámky 18(b) a 21 výše). Bylo by potřeba podrobně prozkoumat, co se opravdu dokazuje bez axiomu výběru (v ZF) nebo k čemu stačí jeho slabší verze (DC). Vzhledem k tomu, že axiom výběru se běžně mlčky používá, a to i tam, kde není nezbytný, je to pro studenta bakalářského studia dosti obtížný úkol.

Bylo by dobré, aby uchazeč vyjasnil problémy zmíněné v poznámkách 5, 6, 9, 10, 12(b) a 13(a) a vysvětlil chybějící části příslušných důkazů. Korektnost třetí kapitoly by též stála za vysvětlení, ale to bych po uchazeči nepožadoval – již pečlivé zpracování prvních dvou kapitol považuji za dostačující. Celkově se domnívám, že práce **splňuje** předpoklady kladené na bakalářskou práci.

V Praze dne 26. 8. 2014

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, Ph.D., DSc.
KMA MFF UK