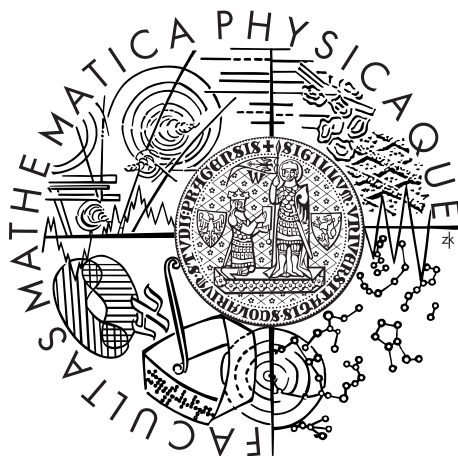


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Martin Kušnír

Goniometrie v Ptolemaiově Almagestu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Poděkování

Na tomto mieste by som rád poďakoval vedúcemu práce Mgr. Zdeňkovi Halasovi, DiS., Ph.D. za odbornú pomoc pri vypracovaní práce, poskytnutie literatúry, cenné rady a venovaný čas.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Názov práce: Goniometrie v Ptolemaiově Almagestu

Autor: Martin Kušnír

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Táto práca sa venuje začiatkom goniometrie v antickom Grécku, ako ich máme dochované v diele Klaudia Ptolemaia *Almagest*. V prvej časti popisujeme predchodcu goniometrickej funkcie – dĺžku tetivy a akým spôsobom Ptolemaios vypočítal tabuľku jej hodnôt. Takisto ukazujeme analógiu medzi dĺžkou tetivy a modernou goniometrickou funkciou sínus. V práci sú dodržiavané pôvodné postupy výpočtu, ktoré sú preložené do moderného matematického jazyka. Neskôr sa venujeme aj presnosti tabuľky dĺžok tetív a popisu Hérónovho algoritmu na výpočet odmocniny. Druhá časť práce slúži k obzrejmeniu, ako Ptolemaios použil tabuľku dĺžok tetív pri astronomických výpočtoch. Vychádzame pritom z jeho predstavy o slnečnej sústave a pohyboch nebeských telies v nej.

Kľúčové slová: goniometria, Ptolemaios, Almagest, tetiva, sínus

Title: Goniometry in Ptolemy's Almagest

Author: Martin Kušnír

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The main focus of this bachelor thesis are the beginnings of goniometry in ancient Greece, mainly in the book *Almagest* from Claudius Ptolemy. We describe a predecessor of modern goniometric function – the length of a chord in a circle and its similarity to the modern goniometric function sine. In the first part we focus on computing the table of chords. In the thesis the process of computing the table of chords is unchanged from the original in *Almagest*, it is only translated into a modern mathematical language. We present description of the Heron's algorithm for computing square roots and discuss the accuracy of the table of chords. In the second part we show the usage of the table of chords in astronomical calculations. Our work is based on how Ptolemy viewed the solar system and the movements of heavenly bodies.

Keywords: goniometry, Ptolemy, Almagest, chord, sine

Obsah

Úvod	3
1 Výpočet tabulky dĺžok tetív	4
1.1 Popis krokov výpočtu	4
1.2 Teória a výpočet	6
1.2.1 Teória potrebná k výpočtu	6
1.2.2 Výpočet	11
1.3 Analýza presnosti výpočtu	15
2 Pohyb nebeských telies	18
2.1 Výpočet dĺžky tieňu gnómonu	18
2.2 Pohyb vesmírnych telies	20
2.2.1 Model pre pohyb Slnka okolo Zeme	20
2.2.2 Model pre pohyb planét okolo Zeme	24
Zoznam použitej literatúry	26
Zoznam obrázkov	27
Zoznam tabuliek	28
Prílohy	37

Úvod

V tejto bakalárskej práci sa venujeme začiatkom goniometrie v starovekom Grécku, konkrétne knihe *Almagest*, ktorej autorom je Klaudios Ptolemaios (85–165). Klaudios Ptolemaios bol grécky matematik, astronóm, astrológ a geograf, ktorý žil a pracoval v egyptskej Alexandrii. Jeho najvýznamnejším dielom je *Almagest*, v ktorom sa nachádza prepracovaná matematická teória pohybu vesmírnych telies. Medzi iné jeho aspoň čiastočne dochované diela patrí *Tetrabiblos*, *Optika*, *Geografia* a *Príručné tabuľky*.

V dnešnom ponímaní chápeme goniometriu ako oblasť matematiky, ktorá sa venuje výpočtu veľkostí strán a uhlov v trojuholníku za použitia goniometrických funkcií sínus, kosínus, tangens a kotangens. Predchodca dnešných goniometrických funkcií, dĺžka tetivy, však nevznikal za účelom skúmania trojuholníkov, ale tetív kružníc. V antickom Grécku verili, že nebeské telesá sa pohybujú po dokonalých kruhových dráhach, a preto keď chceli skúmať rýchlosti a polohy týchto telies, potrebovali poznať dĺžku tetivy kružnice. V úvode *Almagestu* je uvedený najstarší dochovaný postup výpočtu dĺžky tetivy v kružnici a rozsiahla tabuľka týchto dĺžok.

Almagest je monumentálne dielo, ktoré obsahuje 13 kníh a v gréckom vydaní má 1154 strán. Od doby svojho vzniku až po všeobecné prijatie heliocentrického modelu bol *Almagest* najvýznamnejším astronomickým dielom. Po stáročia boli Ptolemaiove modely zdokonaľované a už aj tak vysoká presnosť ich predpovedí sa ešte zvyšovala. Presnosť týchto upravených modelov bola prekonaná až v 17. storočí oveľa jednoduchším heliocentrickým modelom Johanna Keplera.

Pri výpočte tabuľky dĺžok tetív sa v práci držíme postupu, ktorý používa Ptolemaios v *Almageste*. Takisto ako antickí autori ani my v tejto práci nerozlišujeme medzi úsečkou a dĺžkou úsečky, napr. ak máme dve úsečky AB a CD tak pomer ich dĺžok zapíšeme $\frac{AB}{CD}$. Podobne sa držíme antických zvyklostí pri práci s obsahmi. Nie je rozdiel medzi označením obdĺžnik $ABCD$ a obsahom tohto obdĺžnika $AB \cdot CD$. Ak napíšeme, že obdĺžniky sa rovnajú, máme na mysli, že majú rovnaký obsah. Pôvodný postup však modernizujeme zavedením funkcie crd pre dĺžku tetivy a používaním matematických symbolov a rovníc. Oproti originálnemu postupu počítame s tetivami oproti obvodovému uhlu namiesto oproti stredovému uhlu. Táto zmena nám pomôže lepšie ukázať analógie medzi modernou funkciou sínus a dĺžkou tetivy.

V prvej kapitole tejto práce je predstavený Ptolemaiov výpočet dĺžok tetív spolu s potrebnou teóriou. Je tiež ukázaná analógia medzi dĺžkou tetivy a modernou funkciou sínus. Na konci kapitoly sa venujeme presnosti Ptolemaiových výpočtov.

V druhej kapitole sú popísané astronomické výpočty z *Almagestu*, v ktorých sa

používa dĺžka tetivy. Konkrétne si predstavíme model pohybu Slnka okolo Zeme a planét okolo Zeme.

Kapitola 1

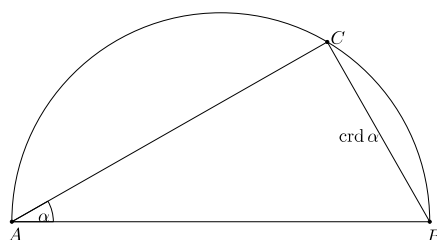
Výpočet tabulky dĺžok tetív

1.1 Popis krokov výpočtu

V prvej podkapitole bude čitateľ oboznámený s postupom a niektorými detailami výpočtu, ktorý Ptolemaios používa v *Almageste* na určenie dĺžok tetív. Vo výpočtoch je použitá pozičná šesťdesiatková sústava v ktorej číslo 10,458889 zapíšeme ako 10;27;32 (tj. $10+27/60+32/3600$)¹. Ptolemaios všetky hodnoty v *Almageste* zaokrúhľuje na 2 „šesťdesiatkové“ miesta a my sa budeme týchto hodnôt držať, a teda budeme písať = aj tam kde pôjde o zaokrúhlené hodnoty. V tejto práci budú všetky hodnoty uvádzané v desiatkovej aj šesťdesiatkovej sústave. Číslo v šesťdesiatkovej sústave bude presne prevzaté z *Almagestu*.

Na začiatok si potrebujeme definovať funkciu pre dĺžku tetivy, aby sme s ňou mohli ďalej pracovať.

Definícia 1. *Majme kružnicu s priemerom AB a na tejto kružnici bod C . Stranu BC trojuholníka $\triangle ABC$ budeme nazývať tetiva oproti uhlu α a značiť $\text{crd } \alpha$ (značenie je odvodené z gréckeho slova pre tetivu $\chi\omicron\rho\delta\eta$).*



Obr. 1.1: Definícia $\text{crd } \alpha$

Použitie polkružnice v obrázku nemá vplyv na všeobecnosť definície. Ak sa pozrieme na obrázok 1.1, ľahko vyčítame nasledujúci vzťah:

$$2r \cdot \sin \alpha = \text{crd } \alpha, \quad (1.1)$$

kde r je polomer kružnice a α je veľkosť uhlu. Pre zostrojenie tabulky dĺžok tetív v tomto prípade vezmeme α z intervalu $\langle 0,25^\circ; 90^\circ \rangle$ a hodnoty budeme tabelizovať s krokom $0,25^\circ$, aby odpovedali hodnotám v Ptolemaiovej tabulke.

¹ Ptolemaios túto sústavu prebral od Mezopotámskych astronómov.

Ptolemaios vo svojom diele definuje tetivu cez stredový uhol. Z takejto definície dostávame vzťah $\text{crd } \alpha = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Ptolemaiova tabuľka teda bola zostrojená pre $\alpha \in \langle 0,5^\circ; 180^\circ \rangle$ s krokom $0,5^\circ$. V tejto práci používame definíciu cez obvodový uhol, pretože v takomto prípade je viditeľnejšia podobnosť súčtových vzorcov pre sínus a vzťahov, ktoré používa Ptolemaios na výpočet dĺžok tetív.

Pre vytvorenie tabuľky najprv potrebujeme dokázať Ptolemaiovu vetu, ktorá je analógiou moderných súčtových vzorcov pre sínus. Odtiaľto taktiež plynú vzťahy pre veľkosť tetivy oproti súčtu a rozdielu dvoch uhlov a oproti polovičnému uhlu. Použitím týchto vzťahov postupne vyrátame tetivu oproti uhlu $\frac{1^\circ}{4}$ a s jej pomocou vytvoríme celú tabuľku. Tento postup sa dá zhrnúť do šiestich krokov:

1. Výpočet dĺžky strán pravidelného 5, 6 a 10-uholníka vpísaného do kružnice. Strany týchto útvarov sú zároveň aj tetivami $\text{crd } 36^\circ$, $\text{crd } 30^\circ$ a $\text{crd } 18^\circ$.

2. Formulácia a dôkaz Ptolemaiovej vety.

Pre ľubovoľný štvoruholník vpísaný do kružnice platí vzťah:

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f,$$

kde a, b, c, d sú strany štvoruholníka a e, f jeho uhlopriečky.

Ptolemaiova veta je analógia moderných súčtových vzorcov, ktorú použijeme v nasledujúcich krokoch.

3. Vzťah pre $\text{crd}(\alpha - \beta)$, pomocou ktorého sa vyráta tetiva oproti uhlu 6°

$$\text{crd } 6^\circ = \text{crd}(36^\circ - 30^\circ).$$

4. Vzťah pre polovičný uhol $\text{crd } \frac{\alpha}{2}$, pomocou ktorého vyrátame tetivy:

$$\text{crd } 3^\circ, \text{crd } \frac{3^\circ}{2}, \text{crd } \frac{3^\circ}{4} \text{ a } \text{crd } \frac{3^\circ}{8}.$$

5. Odhad dĺžky tetivy oproti uhlu $\frac{1^\circ}{2}$ a výpočet tetivy $\text{crd } \frac{1^\circ}{4}$.

6. Zostrojenie tabuľky $\text{crd } \alpha$ pre $\alpha \in \{\frac{1^\circ}{4}; \frac{1^\circ}{2}; \frac{3^\circ}{4}; \dots; 89\frac{3^\circ}{4}; 90^\circ\}$.

1.2 Teória a výpočet

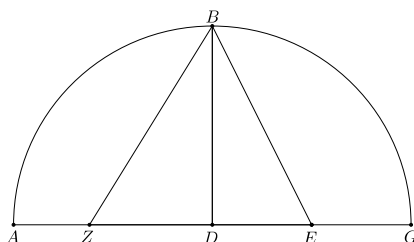
Teraz si postupne uvedieme a dokážeme vety, ktoré sa nachádzajú v 10. kapitole 1. knihy *Almagestu*. Všetky dôkazy sú robené rovnako ako v *Almageste*, sú však prepísané do moderného matematického jazyka. Prípadné analógie viet pre dĺžku tetivy s modernými vetami o sínuse sú uvedené za dôkazom príslušnej vety. Pri prepise viet do moderného matematického jazyka bol použitý český preklad 10. kapitoly prvej knihy *Almagestu* ([1], str. 501–519) a anglický preklad *Almagestu* ([2]).

Ďalej bude popísaný spôsob výpočtu celej tabuľky dĺžok tetív za použitia predom dokázaných viet.

1.2.1 Teória potrebná k výpočtu

Ptolemaios pri dokazovaní viet používa mnoho pre neho už známych viet, ktoré nedokazuje. Všetky tieto vety sa dajú nájsť v knihe *Základy* od Eukleida z Alexandrie ([3]). Aj v tejto práci sa budeme na *Základy* odvolávať, pričom použijeme zaužívané značenie poradia viet, tj. ([3] II, 6) značí šiestu vetu z druhej knihy *Základov*.

Veta 1. *Majme polkružnicu s priemerom AG a polomerom DG . Narysujme trojuholník $\triangle BZE$ tak, aby bod E bol v strede úsečky DG , uhol $\angle BDE$ bol pravým uhlom a úsečka ZE bola rovnako veľká ako BE . Platí, že úsečka ZD je stranou pravidelného 10-uholníka vpísaného do kružnice s priemerom AG a BZ je stranou pravidelného 5-uholníka vpísaného do kružnice s priemerom AG .*



Obr. 1.2: Dĺžka strany 5 a 10-uholníka

Dôkaz. Podľa vety ([3] II, 6) vieme, že platí rovnosť $GZ \cdot ZD + ED^2 = BE^2$. Použitím Pýthagorovej vety $EB^2 = DB^2 + ED^2$ dostaneme

$$GZ \cdot ZD = DB^2.$$

Platí, že $DB = DG$, a teda môžeme prepísať predchádzajúcu rovnosť do tvaru

$$\frac{GZ}{DG} = \frac{DG}{ZD}.$$

Úsečka GZ je teda rozdelená v pomere zlatého rezu v bode D . Podľa vety ([3] XIII, 9) vieme, že strany do kružnice vpísaného 6-uholníka a 10-uholníka sú

² Ak označíme dĺžku $DE = EG$ písmenom a a dĺžku ZD ako b , dostaneme $(2a + b) \cdot b + a^2 = (a + b)^2$.

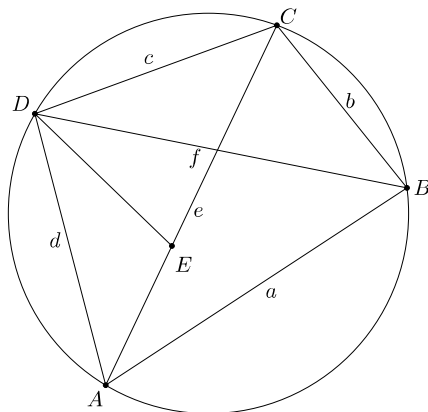
v pomere zlatého rezu. Polomer DG je stranou 6-uholníka z čoho vyplýva, že úsečka ZD musí byť stranou 10-uholníka.

Z Pýthagorovej vety ([3] I, 47) vieme, že platí $BD^2 + DZ^2 = BZ^2$. Podľa vety ([3] XIII, 10) je úsečka BZ stranou pravidelného 5-uholníka, pretože sa jej druhá mocnina rovná súčtu druhých mocnín strán pravidelného 6 a 10-uholníka. \square

Vieme, že strana takéhoto 5-uholníka je $\text{crd } 36^\circ$, strana 10-uholníka je $\text{crd } 18^\circ$ a strana 6-uholníka je $\text{crd } 30^\circ$.

Veta 2. *Majme štvoruholník $ABCD$ vpísaný do kružnice. Označme uhlopriečky štvoruholníka e a f . V takomto prípade platí, že súčet obsahov obdĺžnikov so stranami $DC = c$, $AB = a$ a $DA = d$, $BC = b$ je rovný obsahu obdĺžnika so stranami $CA = e$, $DB = f$, tj.*

$$a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f.$$



Obr. 1.3: Ptolemaiova veta

Dôkaz.

Na uhlopriečke e zvolíme bod E tak, aby uhol $\angle ADE$ bol rovnako veľký ako uhol $\angle BDC$, a teda tiež platí $\angle ADB = \angle EDC$. Vieme, že obvodové uhly oproti rovnako veľkým stranám sa v kruhu rovnajú ([3] IV, 21). Z toho vyplýva, že platí vzťah $\angle DBA = \angle ACD$. Trojuholníky $\triangle ABD$ a $\triangle ECD$ majú všetky uhly rovnako veľké, sú teda podobné ([3] VI, 4). Z podobnosti odvodíme nasledujúci vzťah pre strany trojuholníkov $\frac{a}{f} = \frac{CE}{c}$, a úpravou dostaneme

$$c \cdot a = CE \cdot f.$$

Použitím rovnakého postupu na trojuholníky $\triangle AED$ a $\triangle BCD$ dostaneme vzťah

$$d \cdot b = f \cdot AE.$$

Ak sčítame obe rovnice dostaneme:

$$c \cdot a + d \cdot b = f \cdot (CE + AE).$$

Je zjavné, že $AE + CE = e$, takže sme práve dokázali Ptolemaiovu vetu

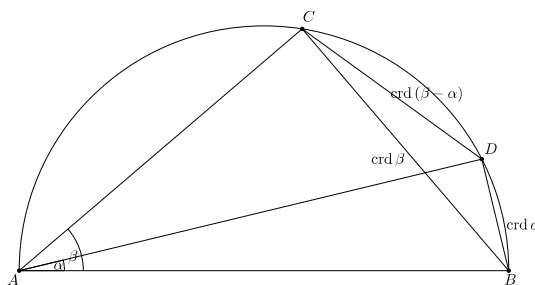
$$c \cdot a + d \cdot b = e \cdot f.$$

□

Z Ptolemaiovej vety sa dajú odvodiť dve veľmi dôležité dôsledky pre počítanie dĺžok tetív.

Dôsledok 1. *Majme polkružnicu a štvoruholník $ABCD$ do nej vpísaný tak, aby AB bol priemer. Majme dané dĺžky tetív $\text{crd } \alpha$ a $\text{crd } \beta$ oproti uhlu α a β , pričom musí platiť, že $\beta > \alpha$. Potom z Ptolemaiovej vety plynie, že dĺžka tetivy $\text{crd}(\beta - \alpha)$ oproti uhlu $(\beta - \alpha)$ je*

$$\text{crd}(\beta - \alpha) = \frac{\text{crd } \beta \cdot \sqrt{AB^2 - \text{crd}^2 \alpha} - \text{crd } \alpha \cdot \sqrt{AB^2 - \text{crd}^2 \beta}}{AB}.$$



Obr. 1.4: Tetiva oproti rozdielu dvoch uhlov

Dôkaz. Vyjadríme dĺžku tejto tetivy s pomocou Ptolemaiovej vety

$$\text{crd}(\beta - \alpha) = \frac{AD \cdot \text{crd } \beta - AC \cdot \text{crd } \alpha}{AB}.$$

Z Thalétovej vety vieme, že uhly $\angle ACB$ a $\angle ADB$ sú pravé. Použitím Pýthagorovej vety dostaneme vzťahy $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$ a $AC = \sqrt{AB^2 - CB^2}$. Dosadením týchto vzťahov do rovnice pre $\text{crd}(\beta - \alpha)$ dostaneme vzťah z tvrdenia vety.

□

Ak do tohto vzorca dosadíme rovnosť (1.1), dostaneme za predpokladu $r = \frac{1}{2}$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\beta - \alpha) =$$

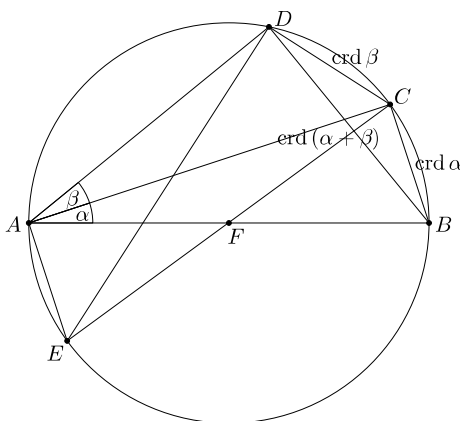
$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \beta \cdot \sqrt{1 - (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \alpha)} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \beta)^2}}{1}.$$

Použitím vzťahu $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ dostaneme súčtový vzorec pre $\sin(\beta - \alpha)$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \beta .$$

Dôsledok 2. *Majme kružnicu so stredom F , priemerom AB a do nej vpísaný štvoruholník $ABCD$. Majme taký bod E na kružnici, aby tetiva EC bola priemerom kružnice. Označme $\angle CAB$ ako α a $\angle DAC$ ako β . Dĺžka tetivy $\text{crd}(\alpha + \beta)$ sa dá potom vyjadriť pomocou $\text{crd} \alpha$ a $\text{crd} \beta$ ako*

$$\begin{aligned} \text{crd}(\alpha + \beta) &= \\ &= \sqrt{AB^2 - \left(\frac{\sqrt{EC^2 - \text{crd}^2 \beta} \cdot \sqrt{AB^2 - \text{crd}^2 \alpha} - \text{crd} \beta \cdot \sqrt{EC^2 - \sqrt{AB^2 - \text{crd}^2 \alpha}}}{EC} \right)^2} . \end{aligned}$$



Obr. 1.5: Tetiva oproti súčtu dvoch uhlov

Dôkaz. Použitím Ptolemaiovej vety na štvoruholník $ADCE$ dostaneme

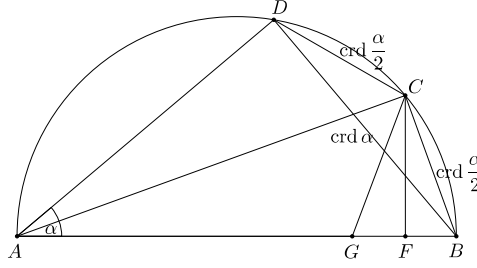
$$AD = \frac{DE \cdot AC - \text{crd} \beta \cdot AE}{EC} .$$

Použitím Thalétovej a Pýthagorovej vety dostaneme dĺžku tetivy oproti súčtu uhlov α a β , ktorú sme chceli vyrátať $\text{crd}(\alpha + \beta) = \sqrt{AB^2 - AD^2}$.

Pomocou Thalétovej a Pýthagorovej vety vieme vypočítať dĺžky tetív DE , AC a AE , vieme teda vyjadriť $\text{crd}(\alpha + \beta)$ pomocou známych dĺžok a dostávame vzťah z tvrdenia vety. □

Veta 3. *Majme polkružnicu s priemerom AB a tetivou $\text{crd} \alpha = DB$ oproti uhlu α , ktorej veľkosť je známa. Majme bod C , ktorý sa nachádza v strede oblúku \widehat{DB} . Dĺžku tetivy $\text{crd} \frac{\alpha}{2}$ sa dá vyjadriť pomocou $\text{crd} \alpha$ ako*

$$\text{crd} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{AB \cdot \frac{AB - \sqrt{AB^2 - \text{crd}^2 \alpha}}{2}} .$$



Obr. 1.6: Tetiva oproti polovici uhlu

Dôkaz. Označme na AB bod G tak, aby $AG = AD$. Vieme, že uhly $\angle CAD$ a $\angle GAC$ sa rovnajú ([3] III, 21), a teda aj $CD = CG = CB$. Označme bod F tak, aby úsečka CF bola kolmá na AB . Trojuholník $\triangle GBC$ je rovnoramenný a FC je jeho výška, teda platí, že $GF = FB$. Takisto platí, že $BF = \frac{AB - AD}{2}$. Trojuholníky $\triangle CBF$ a $\triangle ABC$ majú všetky uhly rovnaké, a teda pre dĺžky ich strán platí vzťah $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BF}$ ([3] VI, 4). Z tejto rovnice vyjadríme BC a dostaneme

$$BC = \text{crd } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{AB \cdot BF}.$$

Použitím Thalétovej a Pýthagorovej vety dostaneme konečný vzťah pre $\text{crd } \frac{\alpha}{2}$. \square

Ak predpokladáme platnosť rovnosti (1.1) a polomer polkružnice je $r = \frac{1}{2}$ dostaneme vzorec pre sínus polovičného uhlu:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

Veta 4. *Majme kružnicu a v nej dve tetivy $\text{crd } \alpha$ a $\text{crd } \beta$ oproti uhlom α a β tak, aby $\text{crd } \alpha$ bolo väčšie ako $\text{crd } \beta$. Potom pre tieto dve tetivy platí nerovnosť*

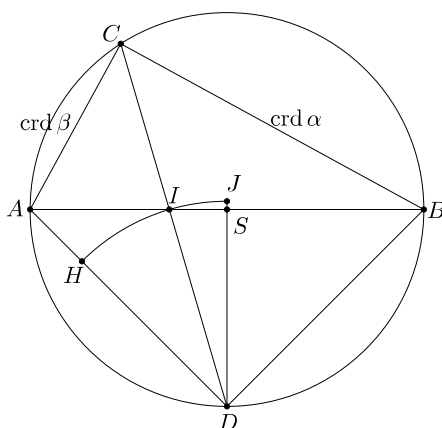
$$\frac{\text{crd } \alpha}{\text{crd } \beta} < \frac{\alpha}{\beta}. \quad (1.2)$$

Dôkaz. Rozdeľme $\angle ACB$ na polovicu úsečkou CD a z bodu D vedme kolmicu DS na úsečku AB . Vieme, že $\triangle ABD$ je rovnoramenný trojuholník s výškou DS . Z bodu D narýsujme kruh s polomerom DI , kde I je priesečník úsečiek CD a AB . Ak predĺžime úsečku DS do bodu J , dostaneme dva trojuholníky a dva kruhové výseky. Keďže $\triangle DIS$ je menší ako výsek IJD a $\triangle AID$ je väčší ako výsek HID dostávame nerovnosť:

$$\frac{\triangle DIS}{\triangle AID} < \frac{\text{výsek } IJD}{\text{výsek } HID}.$$

Pre trojuholníky s rovnakou výškou platí, že ich obsahy sú v rovnakom pomere ako dĺžky ich základní ([3] VI, 1) a obsahy výsekov sú v rovnakom pomere ako uhly daných výsekov. Odtiaľto dostávame nerovnosť

$$\frac{IS}{IA} < \frac{\angle IDS}{\angle ADI}$$



Obr. 1.7: Nerovnosť medzi tetivami a uhlami oproti nim

a tú ďalej upravujeme:

$$\frac{IS}{IA} + \frac{IA}{IA} < \frac{\angle IDS}{\angle ADI} + \frac{\angle ADI}{\angle ADI} \quad (\text{k oboch stranám sme prirátali jednotku}),$$

$$\frac{AB}{IA} < \frac{\angle ADB}{\angle ADI} \quad (\text{obe strany nerovnosti sme prenášobili dvojkou}),$$

$$\frac{AB}{IA} - \frac{IA}{IA} < \frac{\angle ADB}{\angle ADI} - \frac{\angle ADI}{\angle ADI} \quad (\text{znovu od oboch strán odrátame jednotku}).$$

Dostali sme vzťah $\frac{IB}{IA} < \frac{\alpha}{\beta}$. Použitím vety ([3] VI, 3)³ dostávame nerovnosť, ktorú sme chceli dokázať:

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\text{crd } \beta} < \frac{\alpha}{\beta}.$$

□

Týmto sme uviedli a dokázali všetky vety potrebné k zostrojeniu tabuľky dĺžok tetív.

1.2.2 Výpočet

V tejto časti bude priblížené, ako Ptolemaios vyrátal jednotlivé dĺžky tetív. Vo všetkých výpočtoch je použitá kružnica o priemere 120 jednotiek, ktorá je ekvivalentná jednotkovej kružnici v desiatkovej sústave.

Prvé dĺžky tetív sa získajú priamo ako dôsledok Vety 1. V obrázku 1.2 poznáme dĺžky strán $DE = 30$, $BD = 60$ a z konštrukcie tohto obrázku dostávame $EB = EZ$. Chceme vyrátať dĺžku strany DZ :

$$EZ^2 = DE^2 + BD^2$$

$$EZ = 67; 4; 55 (67,08194)$$

³ Ak je uhol vo vrchole trojuholníku rozdelený úsečkou na polovicu a táto úsečka pretína základňu trojuholníka, potom časti základne majú rovnaký pomer ako zvyšné strany trojuholníka, tj. $\frac{IB}{IA} = \frac{\text{crd } \alpha}{\text{crd } \beta}$.

$$DZ = EZ - DE$$

$$DZ = \text{crd } 18^\circ = 37; 4; 55 (37,08194).$$

Použitím Pýthagorovej vety vyrátame dĺžku strany BZ , o ktorej vieme, že je stranou 5-uholníka:

$$DZ^2 + DB^2 = BZ^2$$

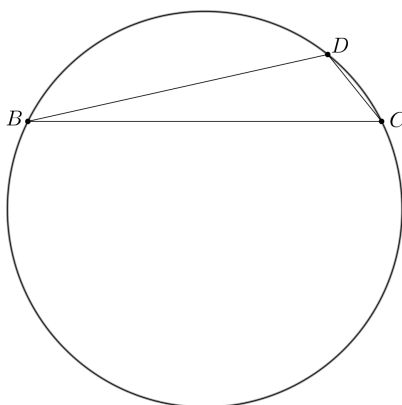
$$1375,07083 + 3600 = BZ^2$$

$$BZ = \text{crd } 36^\circ = 70; 32; 3 (70,53416).$$

Takto dostaneme dĺžky tetív oproti uhlom 18° a 36° . Vieme, že strana pravidelného 6-uholníka je rovná $\text{crd } 30^\circ$. Použijeme Dôsledok 1 Ptolemaiovej vety a vyrátame dĺžku tetivy $\text{crd}(36^\circ - 30^\circ) = \text{crd } 6^\circ = 12; 32; 36 (12,54333)$.

Pomocou Vety 3 vyrátame tetivy oproti uhlom 3° , $\frac{3^\circ}{2}$, $\frac{3^\circ}{4}$ a $\frac{3^\circ}{8}$. Z týchto hodnôt budeme k ďalším výpočtom potrebovať $\text{crd } \frac{3^\circ}{4} = 1; 34; 15 (1,57083)$ a $\text{crd } \frac{3^\circ}{8} = 0; 47; 8 (0,78555)$.

Keď poznáme dĺžky tetív $\text{crd } \frac{3^\circ}{4}$ a $\text{crd } \frac{3^\circ}{8}$, nájdeme odhad tetivy $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$ použitím Vety 4.



Obr. 1.8: Odhad $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$

Majme v kruhu dve rozdielne dlhé tetivy BD a CD . Najprv predpokladajme, že $CD = \text{crd } \frac{3^\circ}{8}$ a $BD = \text{crd } \frac{1^\circ}{2}$. Použitím nerovnosti (1.2) dostaneme:

$$\frac{1}{\frac{2}{3}} > \frac{\text{crd } \frac{1^\circ}{2}}{\text{crd } \frac{3^\circ}{8}}.$$

Takto získame horný odhad pre tetivu $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$:

$$\text{crd } \frac{1^\circ}{2} < \frac{4}{3} \cdot \text{crd } \frac{3^\circ}{8} = \frac{4}{3} \cdot 0; 47; 8 = 1; 2; 50 \frac{2}{3} (1,04733).$$

Spodný odhad získame, ak si určíme, že CD je $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$ a $BD = \text{crd } \frac{3^\circ}{4}$. V takomto prípade platí:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} > \frac{\text{crd } \frac{3^\circ}{4}}{\text{crd } \frac{1^\circ}{2}}$$

$$\text{crd } \frac{1^\circ}{2} > \frac{2}{3} \cdot \text{crd } \frac{3^\circ}{4} = \frac{2}{3} \cdot 1; 34; 15 = 1; 2; 50 (1,04722).$$

Takto sme hodnotu $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$ omedzili zhora aj zdola. Z týchto omedzení môžeme vyvodiť záver, že ak sa omedzíme na 2 „šesťdesiatkové“ miesta, je tetiva oproti uhlu $\frac{1^\circ}{2}$ rovná

$$\text{crd } \frac{1^\circ}{2} = 1; 2; 50 (1,04722).$$

Ak poznáme tetivy $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$ a $\text{crd } \frac{3^\circ}{4}$, ľahko pomocou Dôsledku 1 vyrátame tetivu oproti uhlu $\frac{1^\circ}{4}$. Za pomoci tejto tetivy, ostatných predom vyrátaných tetív a Dôsledkov 1 a 2 môžeme postupne vyrátať všetky tetivy $\text{crd } \alpha$ pre uhly $\alpha \in \{\frac{1^\circ}{4}; \frac{1^\circ}{2}; \frac{3^\circ}{4}; \dots; 89\frac{3^\circ}{4}; 90^\circ\}$.

Stĺpec šesťdesiatín

Ptolemaios do svojej tabuľky okrem dĺžok tetív oproti všetkým obvodovým uhlom od $0,25^\circ$ po 90° pridal aj stĺpec, ktorý pomenoval stĺpec šesťdesiatín. Tento stĺpec slúži na výpočet dĺžky tetív oproti každému uhlu od 0° do 90° s krokom 30 sekúnd. V tomto stĺpci sa nachádzajú hodnoty:

$$\frac{\text{crd}(\alpha + \frac{1}{4}) - \text{crd } \alpha}{30}.$$

Ukážeme si výpočet dĺžky tetivy oproti uhlu $12^\circ 53'$, tj. $12^\circ 45' + 8'$. Prírastok pre $8'$ je:

$$2 \cdot 8 \frac{\text{crd } 13^\circ - \text{crd } 12\frac{3^\circ}{4}}{30} = 16 \cdot \frac{26,99388889 - 26,48361111}{30} = 0,27214814.$$

Takto sme vypočítali prírastok pre $8'$ a ten prirátame k hodnote $\text{crd } 12\frac{3^\circ}{4}$, aby sme dostali požadovaný výsledok

$$\text{crd } 12^\circ 53' = 26,75575925.$$

V tabuľke nižšie je uvedených prvých osem hodnôt z Ptolemaiovej tabuľky dĺžok tetív. Hodnoty sú priamo prevzaté z *Almagestu*, okrem hodnôt uhlov, pretože používame obvodové namiesto pôvodných stredových.

Tabuľka 1.1: Ukážka prvých 8 hodnôt v tabuľke dĺžok tetív

uhol	veľkosť tetivy		stĺpec šesťdesiatín	
	desiatková s.	šesťdesiatková s.	desiatková s.	šesťdesiatková s.
$\frac{1}{4}^\circ$	0,52361	0;31;25	0,017453	0;1;2;50
$\frac{1}{2}^\circ$	1,04722	1;2;50	0,017453	0;1;2;50
$\frac{3}{4}^\circ$	1,57083	1;34;15	0,017453	0;1;2;50
1°	2,09444	2;5;40	0,017453	0;1;2;50
$1\frac{1}{4}^\circ$	2,61777	2;37;4	0,017444	0;1;2;48
$1\frac{1}{2}^\circ$	3,14111	3;8;28	0,017444	0;1;2;48
$1\frac{3}{4}^\circ$	3,66444	3;39;52	0,017444	0;1;2;48
2°	4,18777	4;11;16	0,017439	0;1;2;47

1.3 Analýza presnosti výpočtu

V tejto podkapitole sa budeme zaoberať presnosťou Ptolemaiovej tabuľky tetív.

Počas výpočtu dĺžok tetív Ptolemaios veľmi často odmocňuje čísla, ktoré nemajú racionálnu odmocninu. Práve od presnosti tohto odmocňovania závisí presnosť všetkých hodnôt v tabuľke. Ptolemaios vo svojom diele neuvádza žiadny algoritmus na výpočet odmocniny, a preto predpokladáme, že použil algoritmus, ktorý bol starší a všeobecne známy. Jeden takýto postup sa nachádza v diele *Metrika* od Héróna z Alexandrie ([1] str. 495–499)⁴. V tejto podkapitole bude vysvetlené, ako daný algoritmus funguje priamo na výpočte odmocnín čísel, ktoré sa v *Almageste* vyskytujú.

Ďalej vypočítame rozdiely medzi hodnotami funkcie sínus a Ptolemaiom vyrátanými dĺžkami tetív.

Výpočet odmocniny

Matematickou podstatou Hérónovho spôsobu výpočtu odmocniny je jednoduchý iteračný algoritmus

$$x_{i+1} = \frac{x + x_i^2}{2x_i}, \quad (1.3)$$

pre $i \in \{0, 1, 2 \dots\}$, kde x je kladné číslo, ktorého odmocninu chceme vyrátať. Za x_0 si zvolíme prirodzené číslo, ktorého druhá mocnina je najbližšie k číslu x .

Z Banachovej vety o pevnom bode vieme, že daný algoritmus bude konvergovať k jednému pevnému bodu, označme si ho a :

$$a = \lim_{i \rightarrow +\infty} x_i.$$

Potrebuje dokázať, že $a = \sqrt{x}$, a preto aplikujeme limitu na obe strany rovnosti (1.3):

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} x_{i+1} = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{x + x_i^2}{2x_i}.$$

Úpravou dostaneme

$$a = \frac{x + a^2}{2a}.$$

Z rovnice si vyjadríme a

$$a = \sqrt{x}.$$

Týmto sme dokázali, že algoritmus konverguje práve k odmocnine z čísla x .

Ukážeme si Hérónov algoritmus na výpočet odmocniny z čísla 4500. Odmocnina z tohto čísla je stranou EZ v obrázku 1.2 a je to prvá odmocnina, ktorú je potreba vypočítať pri tvorbe tabuľky dĺžok tetív.

$$x_0 = 67 \quad x_0^2 = 4489$$

$$x_1 = \frac{x + x_0^2}{2x_0} = 67,0820 \mid 89552238805970149253731343 \dots$$

⁴ V komentári k *Almagestu*, ktorý napísal v 4. storočí Theón z Alexandrie, sa nám dochoval iný postup výpočtu odmocniny. My sa však budeme venovať Hérónovmu postupu, pretože je efektívnejší a v dobe vzniku *Almagestu* bol dobre známy.

$$x_2 = \frac{x + x_1^2}{2x_1} = 67,08203932 \mid 5012494541421272766216 \dots$$

$$x_3 = \frac{x + x_2^2}{2x_2} = 67,08203932499369089227521 \mid 2697347 \dots$$

$$x_4 = \frac{x + x_3^2}{2x_3} = 67,082039324993690892275210061938287063218550788345 \mid 82 \dots$$

$$\sqrt{4500} = 67,08203932499369089227521006193828706321855078834577 \dots$$

Už pri tretej iterácii získame presnosť výpočtu na 23 desatinných miest. Štvrtá iterácia sa dokonca zhoduje s presnou hodnotou odmocniny na takmer 50-tich desatinných miestach. V tomto prípade je algoritmus výnimočne presný, pretože x_0^2 bolo veľmi blízko číslu x . Ptolemaios v *Almageste* zaokrúhľuje na dve „šesťdesiatkové“ miesta, z tohto dôvodu pracuje s hodnotou 67; 4; 55 (67,08194). Vidíme, že k tejto hodnote sa dostaneme už pri prvej iterácii algoritmu.

Algoritmus funguje rovnako dobre aj pri odmocňovaní desatinného čísla. Vy-
rátame odmocninu čísla $x = 4975,070833$. Odmocnina z tohto čísla je zaokrúh-
lenou dĺžkou strany BZ v obrázku 1.2, a teda stranou pravidelného päťuholníka
vpísaného do kružnice.

$$x_0 = 70 \quad x_0^2 = 4900$$

$$x_1 = \frac{x + x_0^2}{2x_0} = 70,5 \mid 40773785714285714285714285714 \dots$$

$$x_2 = \frac{x + x_1^2}{2x_1} = 70,534182 \mid 326353911589679938865278 \dots$$

$$x_3 = \frac{x + x_2^2}{2x_2} = 70,534182018366102 \mid 937999454937572 \dots$$

$$x_4 = \frac{x + x_3^2}{2x_3} = 70,53418201836610226558441046052037 \mid 3209625828399917 \dots$$

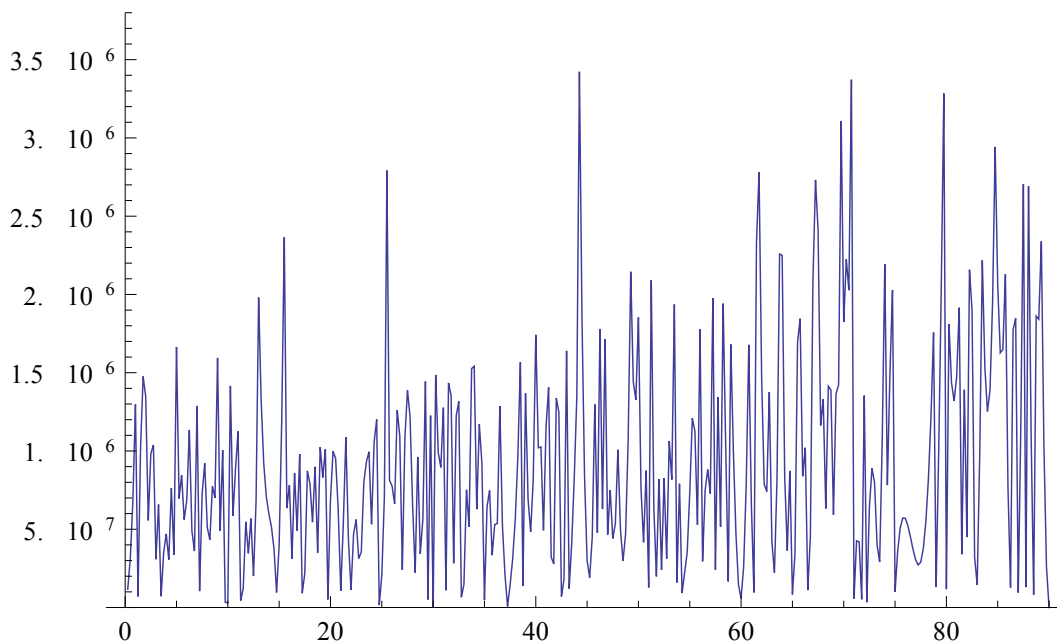
$$\sqrt{4975,070833} = 70,534182018366102265584410460520370004499043762761 \dots$$

V tomto prípade je konvergencia pomalšia, pretože číslo x_0^2 nie je tak blízko
číslu x ako v predošlom prípade. Aj takáto pomalšia konvergencia nám dá veľmi
rýchlo hodnoty s dostatočne dobrou presnosťou. V *Almageste* je táto odmocnina
určená ako 70; 32; 3 (70,53416), aby Ptolemaios dostal túto hodnotu, musel použiť
iteračný algoritmus dvakrát.

Presnosť tabuľky dĺžok tetív

Na nasledujúcom grafe môžeme vidieť rozdiel medzi hodnotami funkcie $\text{crd } \alpha$
z Ptolemaiovej tabuľky vydeľenými číslom 120 a presnými hodnotami funkcie
 $\sin \alpha$.

V grafe môžeme pozorovať, že rozdiel v okolí hodnôt, ktoré sme získali priamo
ako $\text{crd } 30^\circ$, $\text{crd } 36^\circ$ a $\text{crd } 18^\circ$, je malý alebo priamo nulový. Takisto v hodno-
tách, ktoré môžeme získať použitím malého počtu súčtových vzorcov pre tetivy
je presnosť vysoká. Napríklad v okolí $\text{crd } 72^\circ$ je chyba malá, pretože $\text{crd } 72^\circ =$



Obr. 1.9: Graf zobrazujúci absolútnu hodnotu z rozdielu $\frac{\text{crd } \alpha}{120} - \sin \alpha$

$\text{crd}(36^\circ + 36^\circ)$. Pri uhloch, na ktorých výpočet je nutné použiť väčší počet súčtových vzorcov, sa vyskytuje viac nepresných hodnôt, pretože s každým ďalším použitím vzorca strácajú hodnoty na presnosti.

Najväčšia rozdiel medzi hodnotou sínus a hodnotou ptolemaiovej dĺžky tetivy je $3,4228 \cdot 10^{-6}$. Priemerný rozdiel je len $9,04207 \cdot 10^{-7}$. Z týchto hodnôt vidíme, že Ptolemaiovy sa podarilo vyrátať dĺžky tetív s presnosťou až na 6 a viac desatinných miest.

V prílohe práce sa nachádza celá tabuľka dĺžok tetív doplnená o hodnoty funkcie sínus a rozdiel medzi dĺžkami tetív prevzatými z *Almagestu*, vydelenými číslom 120, a funkciou sínus.

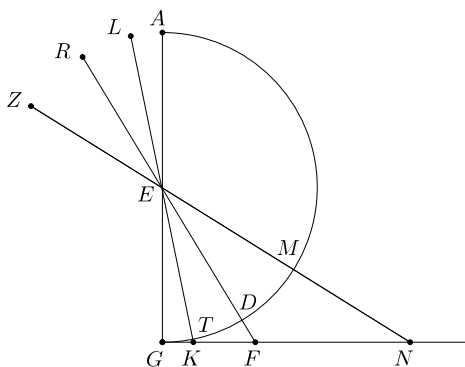
Kapitola 2

Pohyb nebeských telies

V tejto kapitole si ukážeme niektoré astronomické výpočty z *Almagestu*, v ktorých sa využíva tabuľka dĺžok tetív. Čerpáme pritom aj z knihy G. Van Brummelena [4]. Pri zostavovaní tabuľky dĺžok tetív sme použili definíciu tetivy pomocou obvodového uhlu. V prípade astronomických výpočtov však musíme pracovať so stredovými uhlami, ktoré sú však dvojnásobne väčšie ako uhly obvodové. V prílohe tejto práce sa nachádza tabuľka dĺžok tetív, v ktorej je napísaná vždy veľkosť obvodového aj stredového uhlu. Za pomoci tejto tabuľky by prechod od obvodového k stredovému uhlu nemal pre čitateľa predstavovať problém.

2.1 Výpočet dĺžky tieňu gnómonu

Gnómon je jednoducho povedané tyč zapichnutá do zeme. Pomocou znalosti dĺžok tetív vieme vyrátať dĺžku tieňu tejto tyče, čo môže pomôcť pri zostrojení slnečných hodín. Výpočet dĺžky tieňu gnómonu sa nachádza v 5. kapitole II. knihy *Almagestu* [2].



Obr. 2.1: Výpočet dĺžky tieňu gnómonu

Na obrázku 2.1 predstavuje bod L polohu Slnka v čase pravého poludnia počas letného slnovratu, bod R počas rovnodenností a bod Z počas zimného slnovratu. Úsečka GE predstavuje gnómon a body K, F, N sú body dopadu tieňu pre príslušné polohy Slnka. Práve vzdialenosť týchto bodov od bodu G chceme vyrátať.

Ptolemaios z pozorovaní poznal veľkosti uhlov $\angle GEF = 36^\circ$ a $\angle KEF = \angle FEN = 23; 51; 20^\circ$ (23,85556). Najprv vyrátajme dĺžku GK , veľkosť tieňu, ktorý Slnko vrhá v čase poludnia v deň letného slnovratu. V trojuholníku $\triangle GEK$ vyrátame veľkosti uhlov $\angle KEG = \angle GEF - \angle KEF = 12; 8; 40^\circ$ (12,14445) a $\angle EKG = 180^\circ - 90^\circ - 12; 8; 40^\circ = 77; 51; 20^\circ$ (77,85556).

Predpokladajme trojuholník $\triangle KEG$, ktorému opíšeme kružnicu s priemerom 120. GK je teda tetivou oproti uhlu $\angle GEK$. Z tabuľky dĺžok tetív získame

$$GK = \text{crd } 12; 8; 40^\circ = 25; 14; 43 \text{ (25,24527) ,}$$

$$GE = \text{crd } 77; 51; 20^\circ = 117; 18; 51 \text{ (117,31416) .}$$

Aby sa dalo so získanými hodnotami ľahko pracovať, predpokladajme, že dĺžka gnómonu je 60. Takýto gnómon označme \tilde{GE} a zvyšné strany označme \tilde{GK} a \tilde{EK} . Dĺžku strany \tilde{GK} vyrátame pomocou vzorca

$$\frac{\tilde{GE}}{GE} \cdot GK = \tilde{GK} ,$$

$$\tilde{GK} = \frac{60}{117; 18; 51} \cdot 25; 14; 43 = 12; 55 \text{ (12,19667) .}$$

Analalogicky vyrátame dĺžky strán GF a GN , dĺžky tieňou, ktoré Slnko vrhá v čase poludnia počas rovníkovej a zimného slnovratu.

$$GF = 70; 32; 3 \text{ (70,53416) } \quad \text{a} \quad GN = 103; 46; 16 \text{ (103,77112) .}$$

Za predpokladu, že dĺžka gnómonu je $\tilde{GE} = 60$, vyrátame dĺžky

$$\tilde{GF} = 43; 36 \text{ (43,6) } \quad \text{a} \quad \tilde{GN} = 103; 20 \text{ (103,33334) .}$$

Vyrátali sme dĺžky tieňu gnómonu počas slnovratov a rovníkovej. Tieto údaje boli v antike veľmi užitočné pri zostrojovaní slnečných hodín.

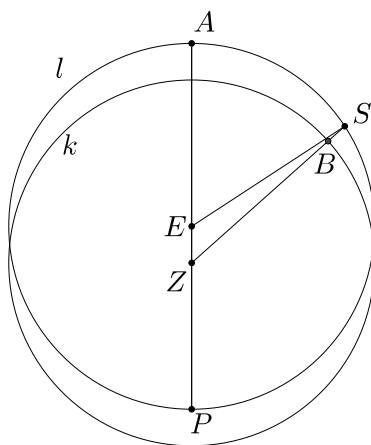
2.2 Pohyb vesmírnych telies

Najprv sa musíme zoznámiť s Ptolemaiovými predstavami o usporiadaní vesmíru a pohybe vesmírnych telies. Na začiatku prvej knihy *Almagestu* Ptolemaios predstavuje svoj pohľad na usporiadanie vesmíru a pripravuje si základy pre geometrické skúmanie pohybov nebeských telies. Najprv dokazuje, že Zem je guľatá, nachádza sa v strede vesmíru a je nehybná. Potom píše, že veľkosť Zeme je zanedbateľná v porovnaní s veľkosťou vesmíru, a preto môže Zem zredukovať do jedného geometrického bodu ([2] I, 6). Toto platí aj pre ostatné vesmírne telesá.

Ptolemaios vychádzal z Aristotelovho usporiadania vesmíru, kde sa všetky vesmírne telesá pohybujú po dokonalých kruhových dráhach rovnomernou rýchlosťou okolo Zeme. Tento predpoklad je v rozpore s pozorovaniami, pretože pozorovaná rýchlosť Slnka nie je rovnomerná, a takisto Slnko sa občas javí ďalej a občas bližšie k Zemi. V prípade planét sa dá pozorovať aj spätný pohyb, ktorý sa nedá vysvetliť jednoduchým pohybom po kružnici. V tejto podkapitole si ukážeme, ako dokázal Ptolemaios vyriešiť tento rozpor medzi predpokladaným usporiadaním vesmíru a pozorovaniami.

2.2.1 Model pre pohyb Slnka okolo Zeme

V tretej knihe *Almagestu* sa Ptolemaios venuje pohybu Slnka okolo Zeme. V tejto podkapitole si predstavíme niektoré z jeho výpočtov. Najprv si však popíšeme model používaný pre simuláciu obehu Slnka okolo Zeme. Tento model môžeme vidieť na obrázku 2.2, je to jeden z prvých geocentrických modelov, kedy sa stred obežnej dráhy Slnka nenachádza v rovnakom bode ako Zem. Vzdialenosť Zeme od Ptolemaiom predpokladaného stredu obežnej dráhy Slnka sa mu dokonca podarí vyrátať a tento výpočet si ukážeme.



Obr. 2.2: Model pre pohyb Slnka okolo Zeme

Bod E označuje stred kružnice l , po tejto kružnici sa pohybuje Slnko. Zem sa však nenachádza v strede kružnice l , ale v bode Z , ktorý je stredom kružnice k . Slnko sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou po kružnici l . Pre pozorovateľa na Zemi sa javí Slnko ako keby sa nachádzalo v bode B a pohybovalo sa nerovnomerným pohybom po kružnici k . Umiestnenie Zeme mimo stredu kruhovej dráhy

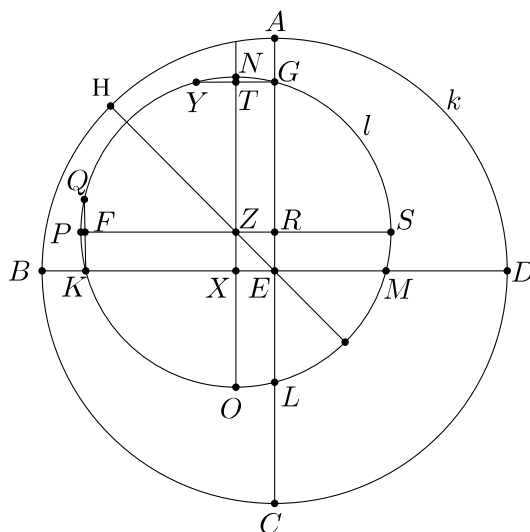
Slnka vysvetľuje, prečo sa Slnko niekedy javí bližšie a inokedy ďalej od Zeme. Bod A je najvzdialenejšia poloha Slnka od Zeme a bod P je najbližšia poloha Slnka vhlľadom k Zemi.

Ptolemaios pomocou známych časov slnovratov a rovnodenností vypočíta rýchlosť Slnka okolo Zeme. Dĺžku roku určí ako $365;14;48$ ($365,24666$) a toto číslo zároveň predstavuje aj čas, za ktorý Slnko obkruží Zem. Priemernú dennú rýchlosť Slnka teda dostaneme nasledovne

$$\frac{360^\circ}{365;14;48} = 0;59;8;17;13;12;31 \text{ (} 0,98563527844 \text{)}. \quad (2.1)$$

Pomocou tejto hodnoty Ptolemaios zostrojí tabuľku hodnôt určujúcich o koľko stupňov sa Slnko posunie za určitý čas. Tabuľka je robená s presnosťou na hodiny, a teda ak človek pozná aktuálnu polohu Slnka, vie presne pomocou tejto tabuľky vyrátať polohu Slnka v ľubovoľný iný čas.

Aby bol tento model použiteľný pre výpočty a predpovede, potrebujeme vedieť odchylku polohy Zeme od stredu kružnice, po ktorej sa pohybuje Slnko. Pre výpočet tejto hodnoty potrebujeme skonštruovať nasledujúci geometrický model:



Obr. 2.3: Model pre výpočet odchylky Zeme od stredu obežnej dráhy Slnka

Zostrojme kružnicu k s dvomi na seba kolmými priermi AC a BD a stredom E . Body A, B, C, D predstavujú postupne jarú rovnodennosť, letný slnovrat, jesennú rovnodennosť a zimný slnovrat. V tejto kružnici zostrojme menšiu kružnicu l so stredom v bode Z , polomerom $r = 60$ a na seba kolmými priermi PS a ON . V bode E sa nachádza Zem a Slnko sa okolo nej pohybuje po obežnej kružnici l . Ptolemaios z pozorovaní vedel, koľko dní trvá Slnku, kým prejde jednotlivé oblúky. A to konkrétne

$$\widehat{GK} = 94,5 \text{ dní} \sim 93;9^\circ \quad \text{a} \quad \widehat{KL} = 92,5 \text{ dní} \sim 91;11^\circ. \quad (2.2)$$

Z priemernej dennej rýchlosti Slnka (2.1) a počtu dní medzi bodmi A a G dostaneme, že Zem musí byť vo štvrtom kvadrante kružnice l (uhly $\angle GZK$ a $\angle KZL$ sú väčšie ako 90°). Naším cieľom je vyrátať vzdialenosť EZ .

Z rovností (2.2) vieme, že veľkosť oblúku \widehat{GKL} je $184; 20^\circ$ (184,33334) a z tohto priamo dostávame, že $\widehat{NG} + \widehat{OL} = 2 \cdot \widehat{NG} = 4; 20^\circ$ (4,33334). Označme bod Y na kružnici l tak, aby $\widehat{YN} = \widehat{NG}$, a teda platí $\widehat{YG} = 4; 20^\circ$. Z tabuľky dĺžok tetív dostaneme dĺžku tetivy:

$$YG = \text{crd } 4; 20^\circ = 4; 32 (4,53334).$$

Z konštrukcie je zjavné, že $EX = TG = \frac{YG}{2} = 2; 16 (2,26667)$.

Analogicky vyrátame aj veľkosť oblúku $\widehat{QK} = 1; 58^\circ$, a tým aj dĺžku strany $ZX = \frac{\text{crd } 1; 58^\circ}{2} = 1; 2 (1,03334)$.

Pomocou Pýthagorovej vety dorátame dĺžku strany EZ :

$$EZ = \sqrt{ZX^2 + EX^2} = 2; 29; 30 (2,49167).$$

Vieme, že polomer kružnice l je 60, a teda pomer medzi veľkosťou odchyľky EZ zaokrúhľenej na hodnotu $2; 30$ a polomerom r je:

$$\frac{EZ}{r} = \frac{1}{24}.$$

Ak vezmeme do úvahy, že bod Z je predpokladaný stred obežnej dráhy Slnka, v bode E sa nachádza Zem a Slnko sa pohybuje po kružnici l , tak sme práve dostali pomer medzi vzdialenosťou Zeme od stredu obežnej dráhy Slnka n a vzdialenosťou stredu obežnej dráhy Slnka od Slnka r .

Ptolemaios v *Almageste* neráta vzdialenosť Zeme od Slnka, ak však použijeme výsledky Eratosthena z Kyrény, ktorý túto vzdialenosť vyrátal približne 200 rokov pred Ptolemaiom, budeme vedieť určiť vzdialenosť n . Číslo, ktoré dostal Eratosthenés, bolo 804 000 000 stadií¹ (približne 148 740 000 km). Označme túto vzdialenosť k . Z predošlého výpočtu vieme, že predstavuje $\frac{23}{24} \cdot r$. Vzdialenosť n sa vyráta nasledovne

$$n = \frac{k}{\frac{23}{24}}$$

$$n = 6\,463\,460 \text{ km}.$$

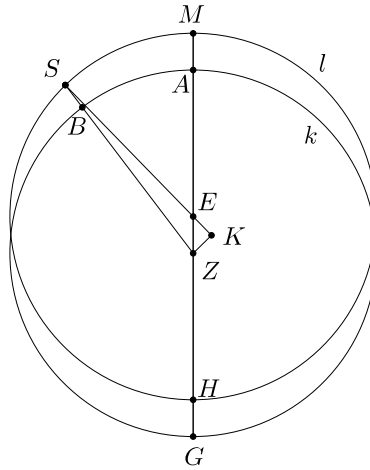
Takýto výpočet je veľmi približný, pretože vzdialenosť Zeme a Slnka sa mení. Túto zmenu si Ptolemaios uvedomoval, a preto vyrátal anomáliu Slnka.

Definícia 2. V modely pre pohyb Slnka okolo Zeme (obr. 2.2) nazveme uhol $\angle ESZ$ anomáliou Slnka.

Anomália Slnka predstavuje rozdiel medzi predpokladaným rovnomerným pohybom Slnka po kružnici l a zo Zeme pozorovaným pohybom Slnka po kružnici k . Ptolemaios ráta hodnoty anomálie Slnka pre uhly $\angle AES$ a zostavil ich do tabuľky. Výpočet práve tejto tabuľky si teraz ukážeme.

V obrázku 2.4 predpokladajme dĺžku oblúku $\widehat{MS} = 30^\circ$. Pre tento oblúk vyrátame veľkosť anomálie Slnka. Vieme, že $\angle MES = \angle ZEK = 30^\circ$. Predstavme si kružnicu okolo pravouhlého trojuholníka $\triangle ZEK$. V danej kružnici

¹ Stadion je grécka jednotka pre meranie vzdialenosti. V rôznych častiach Grécka mala rôznu dĺžku. Dĺžka v kilometroch je uvedená za predpokladu, že Eratosthenés použil attické stadion, ktoré má 185 m.



Obr. 2.4: Výpočet anomálie Slnka

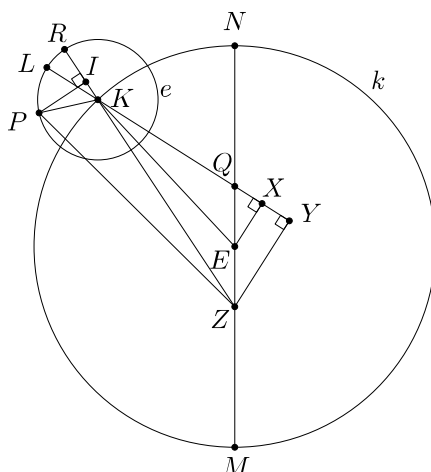
strana ZE je priemer o dĺžke 120. Použitím tabuľky dĺžky tetív určíme dĺžky strán $ZK = 60$ a $KE = 103; 55$ (103,91667). Vieme, že v kružnici o polomere $SE = 60$ je dĺžka strany $ZE = 2; 30$ (2,5). Určíme vzdialenosti $ZK = 1; 15$ (1,25) a $KE = 2; 10$ (2,16667). Z Pýthagorovej vety vieme, že platí $ZK^2 + SK^2 = SZ^2$. Dosadením dĺžok do vzorca dostávame $SZ = 62; 11$ (62,18334).

Ak budeme uvažovať kružnicu okolo pravouhlého trojuholníku $\triangle SZK$ s priemerom $SZ = 120$, dostaneme dĺžku strany $ZK = 2; 25$ (2,41667) a z tabuľky dĺžky tetív určíme veľkosť uhlu $\angle ZSK = 1; 9^\circ$ (1,15). Vyrátali sme teda anomáliu Slnka pre oblúk $\widehat{MS} = 30^\circ$.

Anomália Slnka pre veľkosť oblúku 30° je $1^\circ 9'$. Analogickým spôsobom vyrátal Ptolemaios anomálie Slnka pre veľkosti uhla $\angle AES$ od 6° po 180° .

2.2.2 Model pre pohyb planét okolo Zeme

Ptolemaios sa pohybu planét venuje v posledných piatich knihách *Almagestu*. Jemu známe planéty boli Merkúr, Venuša, Mars, Jupiter a Saturn. Podrobné vyloženie celého geometrického modelu aj s výpočtami by rozsahovo presahovalo veľkosť tejto práce, a preto sa uspokojíme len so základným popisom a modernizovaným výpočtom dôležitých hodnôt.



Obr. 2.5: Model pre pohyb planét okolo Zeme

Kružnica k má stred v bode E a priemer MN . V bode Z sa nachádza Zem. Po kružnici k sa pohybuje menšia kružnica e , ktorá sa nazýva epicyklus a na nej je planéta P . Bod Q nazývame ekvant. Je to bod, z ktorého sa pohyb stredy epicyklu K javí ako rovnomerný po kružnici k . Platí pre neho, že $EZ = EQ$. To znamená, že uhol $\angle NQK$ rastie v čase konštantnou rýchlosťou. Pomocou ekvantu vysvetlil Ptolemaios zmeny v pozorovanej rýchlosti planét pri ich obehu okolo Zeme.

Planéta P sa pohybuje rovnomernou rýchlosťou okolo stredy epicyklu K a táto rýchlosť je lineárne závislá na rýchlosti pohybu epicyklu okolo ekvantu. Zavedením epicyklu vyriešil Ptolemaios problém s pozorovaným spätným pohybom planét.

Pri pohybe planét okolo Zeme vznikajú dve anomálie, ktoré si definujeme.

Definícia 3. Uhol $\angle QKZ$ nazveme anomália planéty. Túto anomáliu označme p .

Anomália planéty je analógiou anomálie Slnka a vzniká z rovnakého dôvodu.

Definícia 4. Uhol $\angle KZP$ nazveme anomália ekvantu. Túto anomáliu označme f .

Ptolemaiov postup pre výpočet anomálií f a p je zdĺhavý a komplikovaný, preto si v tejto práci predstavíme výpočet, ktorý využíva moderné goniometrické funkcie. Pri popise tohto postupu čerpáme z ([4], str. 86–88). Ako prvú určíme anomáliu f . Vzdialenosť Zeme od stredy kružnice k označíme $ZE = n$. Označme polomer kruhu k ako R a polomer epicyklu e ako r . Uhol $\angle NQK$ označíme α . Poznáme veľkosti strán $EX = n \cdot \sin \alpha$ a $QX = n \cdot \cos \alpha$. Na tento výpočet musíme najprv určiť vzdialenosť Zeme od stredy epicyklu

$$m = ZK = \sqrt{KY^2 + ZY^2}. \quad (2.3)$$

Použitím Pýthagorovej vety určíme

$$KX = \sqrt{EK^2 - EX^2} = \sqrt{R^2 - (n \cdot \sin \alpha)^2},$$

$$KY = KX + YX = KX + QX = \sqrt{R^2 - (n \cdot \sin \alpha)^2} + n \cdot \cos \alpha.$$

Dosadením do vzťahu (2.3) za predpokladu, že $EZ = EQ$ dostaneme

$$m = \sqrt{(\sqrt{R^2 - (n \cdot \sin \alpha)^2} + n \cdot \cos \alpha)^2 + (2n \cdot \sin \alpha)^2}.$$

Keď sme už vyrátali vzdialenosť m , určíme veľkosť anomálie planéty p :

$$p = \angle QKZ = \arcsin \left(\frac{ZY}{ZK} \right) = \arcsin \left(\frac{2n \cdot \sin \alpha}{m} \right).$$

Teraz si ukážeme moderný výpočet anomálie epicyklu. Najprv si označme uhol $\angle LKP = \beta$ a vzdialenosti $PI = r \cdot \sin \beta$ a $KI = r \cdot \cos \beta$. Použitím Pýthagorovej vety pre vyrátanie dĺžky ZP priamo určíme veľkosť anomálie e :

$$e = \arcsin \left(\frac{PI}{ZP} \right) = \arcsin \left(\frac{r \cdot \sin \beta}{\sqrt{(m + r \cdot \cos \beta)^2 + (r \cdot \sin \beta)^2}} \right).$$

Takto sme moderným spôsobom vyrátali hodnoty oboch anomálií, ktoré vznikajú v Ptolemaiovom modeli pre pohyb planét okolo Zeme. Ptolemaiov výpočet je oveľa zložitejší a zdĺhavejší.

Pre každú z piatich planét (Merkúr, Venuša, Mars, Saturn, Jupiter) je rôzny polomer epicyklu, vzdialenosť EZ , a teda aj obe anomálie. Ptolemaios postupne vyrátal obe anomálie pre každú planétu a zostavil tabuľky s ich hodnotami. Pomocou týchto tabuliek a komplikovaných goniometrických výpočtov je schopný predpovedať dráhy a polohy jednotlivých planét v čase.

Almagest je jedna z najvplyvnejších matematických prác v dejinách. Ovplyvnil vnímanie slnečnej sústavy na viac ako 1500 rokov a to nie je len v Európe ale aj v arabskom svete. Matematický postup pre výpočet dĺžky tetivy v ňom popísaný využil aj Mikuláš Koperník vo svojom diele *De Revolutionibus orbium coelestium* (Obehy nebeských sfér). Ptolemaiov vplyv pretrváva dodnes v podobe používania pozičnej šesťdesiatkovej sústavy pri práci s uhlami.

Zoznam použitej literatúry

- [1] Šír Z. *Řecké matematické texty*. OIKOYMENH, Praha, 2011.
- [2] Toomer G. J. *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press, Princeton, 1990.
- [3] Eukleides. *Eukleidovy Základy (Elementa)*, preložil F. Servít. Praha, 1907.
- [4] Van Brummelen G. *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*. Princeton Univ. Press, Princeton, 2009.

Zoznam obrázkov

1.1	Definícia $\text{crd } \alpha$	4
1.2	Dĺžka strany 5 a 10-uholníka	6
1.3	Ptolemaiova veta	7
1.4	Tetiva oproti rozdielu dvoch uhlov	8
1.5	Tetiva oproti súčtu dvoch uhlov	9
1.6	Tetiva oproti polovici uhlu	10
1.7	Nerovnosť medzi tetivami a uhlami oproti nim	11
1.8	Odhad $\text{crd } \frac{1^\circ}{2}$	12
1.9	Graf zobrazujúci absolútnu hodnotu z rozdielu $\text{crd } \frac{\alpha}{120} - \sin \alpha$	17
2.1	Výpočet dĺžky tieňu gnómonu	18
2.2	Model pre pohyb Slnka okolo Zeme	20
2.3	Model pre výpočet odchyľky Zeme od stredu obežnej dráhy Slnka	21
2.4	Výpočet anomálie Slnka	23
2.5	Model pre pohyb planét okolo Zeme	24

Zoznam tabuliek

1.1 Ukážka prvých 8 hodnôt v tabuľke dĺžok tetív	14
--	----

Prílohy

Tabuľka dĺžok tetív

V prvom a druhom stĺpci tabuľky sú veľkosti obvodového uhlu α a stredového uhlu β , pričom platí $\beta = 2 \cdot \alpha$, pre $\alpha \in \langle 0,25; 90 \rangle$ a pre $\beta \in \langle 0,5; 180 \rangle$. V treťom stĺpci sú hodnoty $\sin \alpha$. Vo štvrtom stĺpci sa nachádzajú dĺžky tetív prevzaté priamo z *Almagestu* vydelené číslom 120, aby sa dali porovnávať s hodnotami funkcie sínus. V poslednom stĺpci sa nachádza absolútna hodnota z rozdielu tretieho a štvrtého stĺpca.

Obvodový uhol	Stredový uhol	Sínus	Dĺžka tetivy	Rozdiel
0,25	0,5	0,00436331	0,00436343	$1,16641179354 \cdot 10^{-7}$
0,5	1	0,00872654	0,00872685	$3,16353477917 \cdot 10^{-7}$
0,75	1,5	0,0130896	0,0130903	$6,82206433335 \cdot 10^{-7}$
1	2	0,0174524	0,0174537	$1,29726642019 \cdot 10^{-6}$
1,25	2,5	0,0218149	0,0218148	$7,02197463058 \cdot 10^{-8}$
1,5	3	0,0261769	0,0261759	$1,02238194722 \cdot 10^{-6}$
1,75	3,5	0,0305385	0,030537	$1,47617278562 \cdot 10^{-6}$
2	4	0,0348995	0,0348981	$1,34855435281 \cdot 10^{-6}$
2,25	4,5	0,0392598	0,0392593	$5,56499809352 \cdot 10^{-7}$
2,5	5	0,0436194	0,0436204	$9,83005034371 \cdot 10^{-7}$
2,75	5,5	0,0479781	0,0479792	$1,03814532272 \cdot 10^{-6}$
3	6	0,052336	0,0523356	$3,08094795682 \cdot 10^{-7}$
3,25	6,5	0,0566928	0,0566921	$6,57933747878 \cdot 10^{-7}$
3,5	7	0,0610485	0,0610486	$7,15762542430 \cdot 10^{-8}$
3,75	7,5	0,0654031	0,0654028	$3,51452365279 \cdot 10^{-7}$
4	8	0,0697565	0,0697569	$4,70700319138 \cdot 10^{-7}$
4,25	8,5	0,0741085	0,0741088	$3,06100897060 \cdot 10^{-7}$
4,5	9	0,0784591	0,0784583	$7,62394511619 \cdot 10^{-7}$
4,75	9,5	0,0828082	0,0828079	$3,37141833978 \cdot 10^{-7}$
5	10	0,0871557	0,0871574	$1,66465974923 \cdot 10^{-6}$
5,25	10,5	0,0915016	0,0915023	$6,96151412432 \cdot 10^{-7}$
5,5	11	0,0958458	0,0958449	$8,45112816574 \cdot 10^{-7}$
5,75	11,5	0,100188	0,100188	$5,61612076274 \cdot 10^{-7}$
6	12	0,104528	0,104528	$6,85489875695 \cdot 10^{-7}$
6,25	12,5	0,108867	0,108866	$1,13411122383 \cdot 10^{-6}$
6,5	13	0,113203	0,113204	$4,89935796987 \cdot 10^{-7}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
6,75	13,5	0,117537	0,117537	$3,60420800607 \cdot 10^{-7}$
7	14	0,121869	0,121868	$1,28784959191 \cdot 10^{-6}$
7,25	14,5	0,126199	0,126199	$1,04938244316 \cdot 10^{-7}$
7,5	15	0,130526	0,130525	$7,29257088605 \cdot 10^{-7}$
7,75	15,5	0,134851	0,134852	$9,21578128865 \cdot 10^{-7}$
8	16	0,139173	0,139174	$5,10151045657 \cdot 10^{-7}$
8,25	16,5	0,143493	0,143493	$4,33564376234 \cdot 10^{-7}$
8,5	17	0,147809	0,14781	$7,74055574553 \cdot 10^{-7}$
8,75	17,5	0,152123	0,152123	$7,01004731484 \cdot 10^{-7}$
9	18	0,156434	0,156433	$1,59466986052 \cdot 10^{-6}$
9,25	18,5	0,160743	0,160743	$4,89951729437 \cdot 10^{-7}$
9,5	19	0,165048	0,165049	$1,00525043345 \cdot 10^{-6}$
9,75	19,5	0,16935	0,16935	$3,31880124493 \cdot 10^{-8}$
10	20	0,173648	0,173648	$2,95187821963 \cdot 10^{-8}$
10,25	20,5	0,177944	0,177942	$1,41584421212 \cdot 10^{-6}$
10,5	21	0,182236	0,182236	$5,85618963627 \cdot 10^{-7}$
10,75	21,5	0,186524	0,186523	$8,87860586468 \cdot 10^{-7}$
11	22	0,190809	0,190808	$1,12500617444 \cdot 10^{-6}$
11,25	22,5	0,19509	0,19509	$4,42383504828 \cdot 10^{-8}$
11,5	23	0,199368	0,199368	$1,21138358372 \cdot 10^{-7}$
11,75	23,5	0,203642	0,203641	$5,47436473763 \cdot 10^{-7}$
12	24	0,207912	0,207912	$3,46219277691 \cdot 10^{-7}$
12,25	24,5	0,212178	0,212178	$5,68584294480 \cdot 10^{-7}$
12,5	25	0,21644	0,21644	$2,00876711931 \cdot 10^{-7}$
12,75	25,5	0,220697	0,220697	$6,75762241858 \cdot 10^{-7}$
13	26	0,224951	0,224949	$1,98026979092 \cdot 10^{-6}$
13,25	26,5	0,2292	0,229199	$1,31684834009 \cdot 10^{-6}$
13,5	27	0,233445	0,233444	$9,19411460964 \cdot 10^{-7}$
13,75	27,5	0,237686	0,237685	$7,07140987904 \cdot 10^{-7}$
14	28	0,241922	0,241921	$5,99303371429 \cdot 10^{-7}$
14,25	28,5	0,246153	0,246153	$5,15251215277 \cdot 10^{-7}$
14,5	29	0,25038	0,25038	$3,74424811822 \cdot 10^{-7}$
14,75	29,5	0,254602	0,254602	$9,63536757603 \cdot 10^{-8}$
15	30	0,258819	0,258819	$3,99341923695 \cdot 10^{-7}$
15,25	30,5	0,263031	0,263032	$1,19294943262 \cdot 10^{-6}$
15,5	31	0,267238	0,267241	$2,36466248387 \cdot 10^{-6}$
15,75	31,5	0,27144	0,27144	$6,35050259434 \cdot 10^{-7}$
16	32	0,275637	0,275637	$7,81742925115 \cdot 10^{-7}$
16,25	32,5	0,279829	0,279829	$3,10327288366 \cdot 10^{-7}$
16,5	33	0,284015	0,284016	$8,58999781083 \cdot 10^{-7}$
16,75	33,5	0,288196	0,288197	$4,91125169921 \cdot 10^{-7}$
17	34	0,292372	0,292373	$9,80462448452 \cdot 10^{-7}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
17,25	34,5	0,296542	0,296542	$9,16910957160 \cdot 10^{-8}$
17,5	35	0,300706	0,300706	$2,19014245406 \cdot 10^{-7}$
17,75	35,5	0,304864	0,304863	$8,73102084852 \cdot 10^{-7}$
18	36	0,309017	0,309016	$7,90671243700 \cdot 10^{-7}$
18,25	36,5	0,313164	0,313164	$5,45368102344 \cdot 10^{-7}$
18,5	37	0,317305	0,317306	$8,99150463418 \cdot 10^{-7}$
18,75	37,5	0,321439	0,32144	$3,49511653230 \cdot 10^{-7}$
19	38	0,325568	0,325567	$1,02482752711 \cdot 10^{-6}$
19,25	38,5	0,329691	0,32969	$8,30447972499 \cdot 10^{-7}$
19,5	39	0,333807	0,333808	$1,01113659950 \cdot 10^{-6}$
19,75	39,5	0,337917	0,337917	$5,13366603116 \cdot 10^{-8}$
20	40	0,34202	0,342021	$6,90007664616 \cdot 10^{-7}$
20,25	40,5	0,346117	0,346118	$9,98478062563 \cdot 10^{-7}$
20,5	41	0,350207	0,350208	$9,52073865911 \cdot 10^{-7}$
20,75	41,5	0,354291	0,354292	$6,28668950841 \cdot 10^{-7}$
21	42	0,358368	0,358368	$1,06010255296 \cdot 10^{-7}$
21,25	42,5	0,362438	0,362438	$5,38283701667 \cdot 10^{-7}$
21,5	43	0,366501	0,366502	$1,08809051752 \cdot 10^{-6}$
21,75	43,5	0,370557	0,370558	$4,32860534138 \cdot 10^{-7}$
22	44	0,374607	0,374606	$1,11934430557 \cdot 10^{-7}$
22,25	44,5	0,378649	0,378648	$4,69204284814 \cdot 10^{-7}$
22,5	45	0,382683	0,382683	$5,61994719427 \cdot 10^{-7}$
22,75	45,5	0,386711	0,386711	$3134886724653 \cdot 10^{-7}$
23	46	0,390731	0,390731	$3,52992207686 \cdot 10^{-7}$
23,25	46,5	0,394744	0,394743	$8,00828711677 \cdot 10^{-7}$
23,5	47	0,398749	0,39875	$9,31074753796 \cdot 10^{-7}$
23,75	47,5	0,402747	0,402748	$9,95326447927 \cdot 10^{-7}$
24	48	0,406737	0,406736	$5,31964689132 \cdot 10^{-7}$
24,25	48,5	0,410719	0,41072	$1,05479393014 \cdot 10^{-6}$
24,5	49	0,414693	0,414694	$1,20178820545 \cdot 10^{-6}$
24,75	49,5	0,41866	0,41866	$1,53152058257 \cdot 10^{-8}$
25	50	0,422618	0,422618	$2,06185143902 \cdot 10^{-7}$
25,25	50,5	0,426569	0,426569	$7,04542986118 \cdot 10^{-7}$
25,5	51	0,430511	0,430514	$2,79208059378 \cdot 10^{-6}$
25,75	51,5	0,434445	0,434444	$8,12959972673 \cdot 10^{-7}$
26	52	0,438371	0,43837	$7,76418707049 \cdot 10^{-7}$
26,25	52,5	0,442289	0,442289	$6,61632850507 \cdot 10^{-7}$
26,5	53	0,446198	0,446199	$1,26096426528 \cdot 10^{-6}$
26,75	53,5	0,450098	0,4501	$1,09599960207 \cdot 10^{-7}$
27	54	0,45399	0,453991	$2,41001194001 \cdot 10^{-7}$
27,25	54,5	0,457874	0,457875	$1,08488304323 \cdot 10^{-6}$
27,5	55	0,461749	0,46175	$1,38676496602 \cdot 10^{-6}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
27,75	55,5	0,465615	0,465616	$1,22041562933 \cdot 10^{-6}$
28	56	0,469472	0,469472	$6,59436331429 \cdot 10^{-7}$
28,25	56,5	0,47332	0,473319	$2,22740399014 \cdot 10^{-7}$
28,5	57	0,477159	0,47716	$9,61962613788 \cdot 10^{-7}$
28,75	57,5	0,480989	0,480988	$3,42993461743 \cdot 10^{-7}$
29	58	0,48481	0,48481	$5,64938848091 \cdot 10^{-7}$
29,25	58,5	0,488621	0,488623	$1,44368823029 \cdot 10^{-7}$
29,5	59	0,492424	0,492424	$5,10076439419 \cdot 10^{-8}$
29,75	59,5	0,496217	0,496215	$1,22589743040 \cdot 10^{-7}$
30	60	0,5	0,5	0
30,25	60,5	0,503774	0,503775	$1,48591743664 \cdot 10^{-6}$
30,5	61	0,507538	0,507539	$9,88891147746 \cdot 10^{-7}$
30,75	61,5	0,511293	0,511294	$8,95404429379 \cdot 10^{-7}$
31	62	0,515038	0,515039	$1,27694179774 \cdot 10^{-6}$
31,25	62,5	0,518773	0,518773	$1,10012373322 \cdot 10^{-7}$
31,5	63	0,522499	0,5225	$1,43528405116 \cdot 10^{-6}$
31,75	63,5	0,526214	0,526215	$1,35412590818 \cdot 10^{-6}$
32	64	0,529919	0,529919	$2,82751723368 \cdot 10^{-7}$
32,25	64,5	0,533615	0,533616	$1,22482512932 \cdot 10^{-6}$
32,5	65	0,5373	0,537301	$1,31757910204 \cdot 10^{-7}$
32,75	65,5	0,540974	0,540975	$6,56690430922 \cdot 10^{-8}$
33	66	0,544639	0,544639	$1,46126138189 \cdot 10^{-7}$
33,25	66,5	0,548293	0,548294	$7,51961567790 \cdot 10^{-7}$
33,5	67	0,551937	0,551938	$5,14687941821 \cdot 10^{-7}$
33,75	67,5	0,55557	0,555572	$1,52623965699 \cdot 10^{-6}$
34	68	0,559193	0,559194	$1,54097369753 \cdot 10^{-6}$
34,25	68,5	0,562805	0,562806	$6,27860487045 \cdot 10^{-7}$
34,5	69	0,566406	0,566407	$1,17048257453 \cdot 10^{-6}$
34,75	69,5	0,569997	0,569998	$9,22588882179 \cdot 10^{-7}$
35	70	0,573576	0,573576	$4,74621572044 \cdot 10^{-8}$
35,25	70,5	0,577145	0,577146	$6,43296099611 \cdot 10^{-7}$
35,5	71	0,580703	0,580704	$7,47992763838 \cdot 10^{-7}$
35,75	71,5	0,58425	0,58425	$3,34362565523 \cdot 10^{-7}$
36	72	0,587785	0,587785	$5,30070250914 \cdot 10^{-7}$
36,25	72,5	0,59131	0,59131	$5,36821602836 \cdot 10^{-7}$
36,5	73	0,594823	0,594824	$1,28732273285 \cdot 10^{-7}$
36,75	73,5	0,598325	0,598324	$5,26496584885 \cdot 10^{-7}$
37	74	0,601815	0,601815	$2,08337233464 \cdot 10^{-7}$
37,25	74,5	0,605294	0,605294	$6,56141296850 \cdot 10^{-9}$
37,5	75	0,608761	0,608762	$1,45065353507 \cdot 10^{-7}$
37,75	75,5	0,612217	0,612218	$3,12558143256 \cdot 10^{-7}$
38	76	0,615661	0,615662	$5,61711378743 \cdot 10^{-7}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
38,25	76,5	0,619094	0,619095	$9,58097573389 \cdot 10^{-7}$
38,5	77	0,622515	0,622516	$1,56706608422 \cdot 10^{-6}$
38,75	77,5	0,625923	0,625924	$1,38927051973 \cdot 10^{-7}$
39	78	0,62932	0,629322	$1,36820942187 \cdot 10^{-6}$
39,25	78,5	0,632705	0,632706	$6,89956002553 \cdot 10^{-7}$
39,5	79	0,636078	0,636079	$4,83425939723 \cdot 10^{-7}$
39,75	79,5	0,639439	0,63944	$8,12834230035 \cdot 10^{-7}$
40	80	0,642788	0,642789	$1,74216531256 \cdot 10^{-6}$
40,25	80,5	0,646124	0,646125	$1,02035703608 \cdot 10^{-6}$
40,5	81	0,649448	0,649449	$1,02574389038 \cdot 10^{-6}$
40,75	81,5	0,65276	0,652759	$4,93203463181 \cdot 10^{-7}$
41	82	0,656059	0,65606	$1,15619467788 \cdot 10^{-6}$
41,25	82,5	0,659346	0,659347	$1,40712215335 \cdot 10^{-7}$
41,5	83	0,66262	0,66262	$3,22154632859 \cdot 10^{-7}$
41,75	83,5	0,665882	0,665882	$2,78443610279 \cdot 10^{-7}$
42	84	0,669131	0,669132	$1,33808558622 \cdot 10^{-6}$
42,25	84,5	0,672367	0,672368	$1,24812088753 \cdot 10^{-7}$
42,5	85	0,67559	0,67559	$7,01621175602 \cdot 10^{-8}$
42,75	85,5	0,678801	0,678801	$1,80392984217 \cdot 10^{-7}$
43	86	0,681998	0,682	$1,63993750157 \cdot 10^{-6}$
43,25	86,5	0,685183	0,685183	$1,19955988697 \cdot 10^{-7}$
43,5	87	0,688355	0,688354	$4,09027087200 \cdot 10^{-7}$
43,75	87,5	0,691513	0,691514	$8,33106619468 \cdot 10^{-7}$
44	88	0,694658	0,69466	$1,35176322491 \cdot 10^{-6}$
44,25	88,5	0,69779	0,697787	$3,42280464316 \cdot 10^{-6}$
44,5	89	0,700909	0,700907	$1,85689244358 \cdot 10^{-6}$
44,75	89,5	0,704015	0,704014	$8,35567079415 \cdot 10^{-7}$
45	90	0,707107	0,707106	$2,99705065986 \cdot 10^{-7}$
45,25	90,5	0,710185	0,710185	$1,90438100178 \cdot 10^{-7}$
45,5	91	0,71325	0,71325	$4,49154181514 \cdot 10^{-7}$
45,75	91,5	0,716302	0,716303	$1,29731608655 \cdot 10^{-6}$
46	92	0,71934	0,71934	$4,77439126789 \cdot 10^{-7}$
46,25	92,5	0,722364	0,722366	$1,77868098516 \cdot 10^{-6}$
46,5	93	0,725374	0,725375	$6,28987712358 \cdot 10^{-7}$
46,75	93,5	0,728371	0,728373	$1,71530278492 \cdot 10^{-6}$
47	94	0,731354	0,731354	$4,65047496178 \cdot 10^{-7}$
47,25	94,5	0,734323	0,734322	$7,50176426311 \cdot 10^{-7}$
47,5	95	0,737277	0,737278	$4,40967653614 \cdot 10^{-7}$
47,75	95,5	0,740218	0,740218	$5,34894239345 \cdot 10^{-7}$
48	96	0,743145	0,743146	$1,00785593903 \cdot 10^{-6}$
48,25	96,5	0,746057	0,746058	$4,95308670855 \cdot 10^{-7}$
48,5	97	0,748956	0,748956	$2,97729516374 \cdot 10^{-7}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
48,75	97,5	0,75184	0,75184	$4,70298800347 \cdot 10^{-7}$
49	98	0,75471	0,754711	$1,06792537613 \cdot 10^{-6}$
49,25	98,5	0,757565	0,757567	$2,14524557995 \cdot 10^{-6}$
49,5	99	0,760406	0,760407	$1,44180737648 \cdot 10^{-6}$
49,75	99,5	0,763232	0,763234	$1,32651376738 \cdot 10^{-6}$
50	100	0,766044	0,766046	$1,85317731837 \cdot 10^{-6}$
50,25	100,5	0,768842	0,768843	$7,60519133002 \cdot 10^{-7}$
50,5	101	0,771625	0,771625	$4,16612280007 \cdot 10^{-7}$
50,75	101,5	0,774393	0,774394	$8,74436333009 \cdot 10^{-7}$
51	102	0,777146	0,777146	$1,28123637588 \cdot 10^{-7}$
51,25	102,5	0,779884	0,779887	$2,09098119241 \cdot 10^{-7}$
51,5	103	0,782608	0,782609	$6,39443882399 \cdot 10^{-7}$
51,75	103,5	0,785317	0,785317	$1,98748884683 \cdot 10^{-7}$
52	104	0,788011	0,788012	$8,20467352058 \cdot 10^{-7}$
52,25	104,5	0,79069	0,79069	$2,41070971518 \cdot 10^{-7}$
52,5	105	0,793353	0,793354	$8,26375431528 \cdot 10^{-7}$
52,75	105,5	0,796002	0,796002	$3,12280192704 \cdot 10^{-7}$
53	106	0,798636	0,798637	$1,06402678123 \cdot 10^{-6}$
53,25	106,5	0,801254	0,801255	$8,16938569014 \cdot 10^{-7}$
53,5	107	0,803857	0,803859	$1,93567907902 \cdot 10^{-6}$
53,75	107,5	0,806445	0,806444	$1,59823038137 \cdot 10^{-7}$
54	108	0,809017	0,809016	$7,90671243700 \cdot 10^{-7}$
54,25	108,5	0,811574	0,811574	$9,21090617111 \cdot 10^{-8}$
54,5	109	0,814116	0,814116	$2,22384421544 \cdot 10^{-7}$
54,75	109,5	0,816642	0,816641	$3,51457975278 \cdot 10^{-7}$
55	110	0,819152	0,819153	$7,33488785931 \cdot 10^{-7}$
55,25	110,5	0,821647	0,821648	$1,21020598453 \cdot 10^{-7}$
55,5	111	0,824126	0,824127	$1,12619279912 \cdot 10^{-6}$
55,75	111,5	0,82659	0,82659	$5,28650589082 \cdot 10^{-7}$
56	112	0,829038	0,829039	$1,77929681011 \cdot 10^{-6}$
56,25	112,5	0,83147	0,83147	$2,95104862102 \cdot 10^{-7}$
56,5	113	0,833886	0,833887	$7,52006905857 \cdot 10^{-7}$
56,75	113,5	0,836286	0,836287	$8,81189277546 \cdot 10^{-7}$
57	114	0,838671	0,838671	$7,28350872170 \cdot 10^{-7}$
57,25	114,5	0,841039	0,841037	$1,97592735540 \cdot 10^{-6}$
57,5	115	0,843391	0,843391	$2,42109182035 \cdot 10^{-7}$
57,75	115,5	0,845728	0,845729	$1,34496269343 \cdot 10^{-6}$
58	116	0,848048	0,848049	$5,14954685115 \cdot 10^{-7}$
58,25	116,5	0,850352	0,850354	$1,94167110378 \cdot 10^{-6}$
58,5	117	0,85264	0,852641	$1,03934961148 \cdot 10^{-6}$
58,75	117,5	0,854912	0,854912	$1,66364090503 \cdot 10^{-7}$
59	118	0,857167	0,857169	$1,68077936912 \cdot 10^{-6}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
59,25	118,5	0,859406	0,859407	$9,95905954703 \cdot 10^{-7}$
59,5	119	0,861629	0,86163	$4,69188103924 \cdot 10^{-7}$
59,75	119,5	0,863836	0,863836	$1,42943752501 \cdot 10^{-7}$
60	120	0,866025	0,866025	$5,91785243031 \cdot 10^{-8}$
60,25	120,5	0,868199	0,868199	$2,59584931772 \cdot 10^{-7}$
60,5	121	0,870356	0,870356	$7,85541581782 \cdot 10^{-7}$
60,75	121,5	0,872496	0,872498	$1,67811238804 \cdot 10^{-6}$
61	122	0,87462	0,87462	$6,63230974695 \cdot 10^{-7}$
61,25	122,5	0,876727	0,876727	$9,61443440417 \cdot 10^{-8}$
61,5	123	0,878817	0,878819	$2,33178247899 \cdot 10^{-6}$
61,75	123,5	0,880891	0,880894	$2,78031313305 \cdot 10^{-6}$
62	124	0,882948	0,882949	$1,48121514709 \cdot 10^{-6}$
62,25	124,5	0,884988	0,884988	$7,88462884093 \cdot 10^{-7}$
62,5	125	0,887011	0,887012	$7,40895852446 \cdot 10^{-7}$
62,75	125,5	0,889017	0,889019	$1,37703278213 \cdot 10^{-6}$
63	126	0,891007	0,891007	$4,20256076605 \cdot 10^{-7}$
63,25	126,5	0,892979	0,892979	$2,23255529729 \cdot 10^{-7}$
63,5	127	0,894934	0,894935	$8,23583160003 \cdot 10^{-7}$
63,75	127,5	0,896873	0,896875	$2,25846731161 \cdot 10^{-7}$
64	128	0,898794	0,898796	$2,24999712927 \cdot 10^{-6}$
64,25	128,5	0,900698	0,900699	$8,34751486267 \cdot 10^{-7}$
64,5	129	0,902585	0,902586	$3,63798287716 \cdot 10^{-7}$
64,75	129,5	0,904455	0,904456	$8,73064150530 \cdot 10^{-7}$
65	130	0,906308	0,906308	$8,33337203687 \cdot 10^{-8}$
65,25	130,5	0,908143	0,908144	$3,44693437237 \cdot 10^{-7}$
65,5	131	0,909961	0,909963	$1,69208641975 \cdot 10^{-6}$
65,75	131,5	0,911762	0,911764	$1,84531180025 \cdot 10^{-6}$
66	132	0,913545	0,913546	$8,38653695378 \cdot 10^{-7}$
66,25	132,5	0,915311	0,915313	$1,02088055298 \cdot 10^{-6}$
66,5	133	0,91706	0,91706	$1,10800061126 \cdot 10^{-7}$
66,75	133,5	0,918791	0,918792	$4,56517768365 \cdot 10^{-7}$
67	134	0,920505	0,920507	$2,09099200398 \cdot 10^{-6}$
67,25	134,5	0,922201	0,922204	$2,73203325185 \cdot 10^{-6}$
67,5	135	0,92388	0,923882	$2,41193315764 \cdot 10^{-6}$
67,75	135,5	0,925541	0,925542	$1,16264910021 \cdot 10^{-6}$
68	136	0,927184	0,927185	$1,33061839768 \cdot 10^{-6}$
68,25	136,5	0,92881	0,92881	$6,32313260973 \cdot 10^{-7}$
68,5	137	0,930418	0,930419	$1,41349945681 \cdot 10^{-6}$
68,75	137,5	0,932008	0,932009	$1,38997646070 \cdot 10^{-6}$
69	138	0,93358	0,933581	$5,92021316747 \cdot 10^{-7}$
69,25	138,5	0,935135	0,935137	$1,36438806230 \cdot 10^{-6}$
69,5	139	0,936672	0,936674	$1,42186271356 \cdot 10^{-6}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
69,75	139,5	0,938191	0,938194	$3,10852196028 \cdot 10^{-6}$
70	140	0,939693	0,939694	$1,82365853618 \cdot 10^{-6}$
70,25	140,5	0,941176	0,941178	$2,22548437012 \cdot 10^{-6}$
70,5	141	0,942641	0,942644	$2,02742634014 \cdot 10^{-6}$
70,75	141,5	0,944089	0,944086	$3,37224463609 \cdot 10^{-6}$
71	142	0,945519	0,945519	$5,70807981992 \cdot 10^{-8}$
71,25	142,5	0,94693	0,946931	$4,26060449920 \cdot 10^{-7}$
71,5	143	0,948324	0,948324	$4,18867874718 \cdot 10^{-7}$
71,75	143,5	0,949699	0,949699	$5,21278029630 \cdot 10^{-8}$
72	144	0,951057	0,951058	$1,35407521684 \cdot 10^{-6}$
72,25	144,5	0,952396	0,952396	$3,36900548569 \cdot 10^{-8}$
72,5	145	0,953717	0,953718	$6,41844365656 \cdot 10^{-7}$
72,75	145,5	0,95502	0,955021	$8,88876146687 \cdot 10^{-7}$
73	146	0,956305	0,956306	$7,99592520084 \cdot 10^{-7}$
73,25	146,5	0,957571	0,957572	$3,98454444883 \cdot 10^{-7}$
73,5	147	0,95882	0,958819	$2,90423748605 \cdot 10^{-7}$
73,75	147,5	0,96005	0,960051	$1,07153999717 \cdot 10^{-6}$
74	148	0,961262	0,961264	$2,19295057002 \cdot 10^{-6}$
74,25	148,5	0,962455	0,962456	$7,82064871196 \cdot 10^{-7}$
74,5	149	0,96363	0,963632	$1,49123582149 \cdot 10^{-6}$
74,75	149,5	0,964787	0,964789	$2,02802303883 \cdot 10^{-6}$
75	150	0,965926	0,965926	$9,96368576533 \cdot 10^{-8}$
75,25	150,5	0,967046	0,967046	$3,57382353155 \cdot 10^{-7}$
75,5	151	0,968148	0,968148	$5,07770040347 \cdot 10^{-7}$
75,75	151,5	0,969231	0,969231	$5,71774727009 \cdot 10^{-7}$
76	152	0,970296	0,970296	$5,70020299739 \cdot 10^{-7}$
76,25	152,5	0,971342	0,971343	$5,22779331157 \cdot 10^{-7}$
76,5	153	0,97237	0,97237	$4,49972693772 \cdot 10^{-7}$
76,75	153,5	0,973379	0,97338	$3,71169181168 \cdot 10^{-7}$
77	154	0,97437	0,97437	$3,05585135085 \cdot 10^{-7}$
77,25	154,5	0,975342	0,975343	$2,72084079933 \cdot 10^{-7}$
77,5	155	0,976296	0,976296	$2,89176362855 \cdot 10^{-7}$
77,75	155,5	0,977231	0,977231	$3,75018802678 \cdot 10^{-7}$
78	156	0,978148	0,978148	$5,47414342522 \cdot 10^{-7}$
78,25	156,5	0,979045	0,979046	$8,23811712402 \cdot 10^{-7}$
78,5	157	0,979925	0,979926	$1,22130509627 \cdot 10^{-6}$
78,75	157,5	0,980785	0,980787	$1,75663380652 \cdot 10^{-6}$
79	158	0,981627	0,981627	$1,31367150824 \cdot 10^{-7}$
79,25	158,5	0,98245	0,982451	$9,91163379038 \cdot 10^{-7}$
79,5	159	0,983255	0,983257	$2,03688048971 \cdot 10^{-6}$
79,75	159,5	0,984041	0,984044	$3,28383519054 \cdot 10^{-6}$
80	160	0,984808	0,984808	$1,17358162299 \cdot 10^{-7}$

Pokračovanie na nasledujúcej strane

Tabuľka 2.1 – Pokračovanie z predošlej strany

obvodový uhol	stredový uhol	sínus	dĺžka tetivy	rozdiel
80,25	160,5	0,985556	0,985558	$1,81131229259 \cdot 10^{-6}$
80,5	161	0,986286	0,986287	$1,43549980557 \cdot 10^{-6}$
80,75	161,5	0,986996	0,986998	$1,31862495322 \cdot 10^{-6}$
81	162	0,987688	0,98769	$1,47421967700 \cdot 10^{-6}$
81,25	162,5	0,988362	0,988363	$1,91545816519 \cdot 10^{-6}$
81,5	163	0,989016	0,989016	$3,40341786864 \cdot 10^{-7}$
81,75	163,5	0,989651	0,989653	$1,39095810758 \cdot 10^{-7}$
82	164	0,990268	0,990269	$4,49776948241 \cdot 10^{-7}$
82,25	164,5	0,990866	0,990868	$2,15816867332 \cdot 10^{-6}$
82,5	165	0,991445	0,991447	$1,89788544890 \cdot 10^{-6}$
82,75	165,5	0,992005	0,992005	$3,20050085322 \cdot 10^{-7}$
83	166	0,992546	0,992546	$1,44654974332 \cdot 10^{-7}$
83,25	166,5	0,993068	0,993069	$9,87489518156 \cdot 10^{-7}$
83,5	167	0,993572	0,993574	$2,21839748659 \cdot 10^{-7}$
83,75	167,5	0,994056	0,994058	$1,53214805065 \cdot 10^{-6}$
84	168	0,994522	0,994523	$1,25277987483 \cdot 10^{-6}$
84,25	168,5	0,994969	0,99497	$1,38915649572 \cdot 10^{-6}$
84,5	169	0,995396	0,995398	$1,94978096934 \cdot 10^{-6}$
84,75	169,5	0,995805	0,995808	$2,94279570856 \cdot 10^{-6}$
85	170	0,996195	0,996197	$2,06116751366 \cdot 10^{-6}$
85,25	170,5	0,996566	0,996567	$1,62713186813 \cdot 10^{-6}$
85,5	171	0,996917	0,996919	$1,64774835353 \cdot 10^{-6}$
85,75	171,5	0,99725	0,997252	$2,12971532909 \cdot 10^{-6}$
86	172	0,997564	0,997565	$7,64554990650 \cdot 10^{-7}$
86,25	172,5	0,997859	0,997859	$1,26942307221 \cdot 10^{-7}$
86,5	173	0,998135	0,998137	$1,77565220715 \cdot 10^{-6}$
86,75	173,5	0,998392	0,998394	$1,84796116975 \cdot 10^{-6}$
87	174	0,99863	0,99863	$9,48750558116 \cdot 10^{-8}$
87,25	174,5	0,998848	0,99885	$1,15055208638 \cdot 10^{-6}$
87,5	174	0,999048	0,999051	$2,70434406801 \cdot 10^{-6}$
87,75	175,5	0,999229	0,999229	$1,30425943711 \cdot 10^{-7}$
88	176	0,999391	0,999394	$2,69149942278 \cdot 10^{-6}$
88,25	176,5	0,999534	0,999535	$1,13138550927 \cdot 10^{-6}$
88,5	177	0,999657	0,999657	$8,24318501235 \cdot 10^{-8}$
88,75	177,5	0,999762	0,999764	$1,86180897976 \cdot 10^{-6}$
89	178	0,999848	0,99985	$1,84188064578 \cdot 10^{-6}$
89,25	178,5	0,999914	0,999917	$2,33909265956 \cdot 10^{-6}$
89,5	179	0,999962	0,999963	$1,03989879163 \cdot 10^{-6}$
89,75	179,5	0,99999	0,999991	$2,60020006193 \cdot 10^{-7}$
90	180	1	1	0