Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Zuzana Vydrová

Posuv perihelia v klasické a relativistické mechanice

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Jiří Langer, CSc.

Studijní program: obecná fyzika

2006

Děkuji vedoucímu této práce Doc. RNDr. Jiřímu Langerovi, CSc. za poskytnutí konzultací i cenných připomínek a komentářů.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 30. 4. 06 Zuzana Vydrová

Obsah

Název práce: Posuv perihelia v klasické a relativistické mechanice
Autor: Zuzana Vydrová
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr Jiří Langer, CSc.
e-mail vedoucího: Jiri.Langer@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce se zabývá posunem perihelia: je uveden výpočet stočení perihelia obecně relativistické čásice v centrálním gravitačním poli a konkrétní vyčíslení pro Merkur, u nějž byl jev poprvé pozorován; práce podává také ekvivalentní výpočet pomocí kvadrupólového rozvoje centra hmoty. Zmíněn je též dnes již překonaný Sommerfeldův speciálně relativistický model atomu s eliptickými drahami elektronů, který vede na obdobné stáčení pericentra orbity elektronu.

Klíčová slova: stáčení perihelia, obecná teorie relativity, Binetův vzorec

Title: The advance of the perihelion in classic and relativistic mechanics
Author: Zuzana Vydrová
Department: Institute of Theoretical Physics
Supervisor: Doc. RNDr Jiří Langer, CSc.
Supervisor's e-mail address: Jiri.Langer@mff.cuni.cz

Abstract: This work studies the advance of perihelion: the calculation of the advance of general relativistic particle in the central field is shown, as well as the concrete computation for the planet Mercury, for which the phenomenon was observed first; the work gives also an equivalent calculation treating a centre of mass as quadrupole. The special relativistic Sommerfelds model of the atom with elliptic orbits of electrons is mentioned, too; nowadays its obsolete, but it gives similar advance of pericentre of the electron orbit.

Keywords: The advance of the perihelion, general theory of relativity, Binets equation

1 Úvod

Podle obecné teorie relativity není trajektorie tělesa v centrálním gravitačním poli „keplerovská“ elipsa, ale elipsa, jejíž osa se stáčí. Tento jev se nazývá posun perihelia[1].

Zřejmě nejznámějším příkladem posunu perihelia je stáčení perihelia Merkuru, jev známý již od poloviny 19. století, který se však podařilo uspokojivě vysvětlit až na počátku století dvacátého v rámci obecné teorie relativity. Pro pochopení významu této skutečnosti je třeba tento vědecký výsledek zasadit do historického rámce; to bude alespoň v náznacích provedeno v následujících podkapitolách.

1.1 První názory na pohyb nebeských těles v evropské kultuře

Při uvážení významu, který astronomie (a astrologie) v archaické společnosti hrála, je zřejmé, že se lidé pokoušeli pohyb nebeských těles popsat. Jeho objasnění se ovšem zakládalo na představách, které jsou cizí moderním přírodním vědám (mytologická a teologická vysvětlení apod.).

V antickém Řecku se v souvislosti s tzv. přírodními filozofy začalo k problematice přistupovat více empiricky. Začala se detailně studovat geometrie drah různých objektů, získané výsledky se staly předmětem nejrůznějších spekulací, mimo jiné i heliocentrismu, nakonec však převládl Ptolemaiův geocentrický výklad, který „ovládl pole“ až do 17. století. Docházelo jen k zpřesňování empirických dat, v důsledku čehož docházelo ke stálému zesložiťování modelu trajektorií (vkládání dalších epicyklů).

1.2 Newtonova teorie gravitace

Zcela nový pohled vnesla Newtonova teorie gravitace, která objasňuje příčiny pohybu planet. Její predikce, formulované ve třech Keplerových zákonech, dokonale odpovídaly tehdejším empirickým poznatkům. Gravitační teorie obsahuje několik zcela zásadních a převratných momentů: pohyb nebeských těles je popsatelný s pomocí pouze vzájemného silového působení; dochází tak k sjednocení základních principů nebeské a pozemské mechaniky. Newtonova teorie byla jednou z nejúspěšnějších fyzikálních teorií vůbec, jistou dobu sloužila dokonce jako modelový příklad vědecké teorie. Se zdokonalováním měřící techniky se však objevily drobné nesrovnalosti – anomální stáčení perihelia Merkuru. První pokus o vysvětlení tohoto jevu lze připsat Le Verrierovi - roku 1859 se pokusil stáčení vysvětlit přítomností dosud neobjevené planety nebo prstence mezi Sluncem a Merkurem, koncem 19. stol. se však podařilo

[1] perihelium (přísluní) je bod, kdy je planeta nejblíže Slunci

prokázat, že těleso, které by způsobilo pozorované chování dráhy planety, neexistuje. Uvažovalo se též o nepozorovaném měsíci Merkuru nebo korekci hmotnosti Venuše. Další pokusy vysvětlit stáčení perihelia byly prvním zpochybněním platnosti Newtonova gravitačního zákona po více než dvou stech letech. Řešení, které je v souladu s empirickými daty, přináší až obecná teorie relativity.

1.3 Speciální a obecná teorie relativity

Newtonova mechanika se ukazuje jako nekonzistentní s elektromagnetismem popsaným Maxwellovými rovnicemi. Východisko podává speciální teorie relativity postulátem konstantní rychlosti světla. Ústředním momentem speciální teorie relativity je neexistence nehybné vztažné soustavy a nezávisle plynoucího času. Z invariance rychlosti světla plyne závislost hmotnosti tělesa, délky a časového intervalu na vztažné soustavě pozorovatele. Speciální teorie relativity však nepopisuje gravitační působení těles.

Gravitační interakci popisuje obecná teorie relativity: gravitační pole vysvětluje jako změnu metriky okolního prostoru indukovanou hmotnými tělesy. Světočára tělesa je pak extremální dráha v tomto neeuklidovském prostoru (geodetika).

2 Stáčení perihelia Merkuru

Merkur obíhá kolem Slunce po elipse, jejíž poloosa se stáčí („předchází") o asi 1150 úhlových vteřin za století. Toto stáčení perihelia planety lze téměř beze zbytku vysvětlit v rámci nerelativistické fyziky - po odečtení vlivů, jako je gravitační pole velkých planet, zbývá nevysvětlených pouhých 43 úhlových vteřin za století.

Pokusy vysvětlit stáčení perihelia v rámci Newtonovy mechaniky selhaly; dnes obecně přijímané vysvětlení tohoto jevu podal roku 1915 Albert Einstein – předpověď obecné teorie relativity se v rámci chyby shoduje s pozorovanou hodnotou stáčení perihelia Merkuru. To se tak stalo jedním z testů platnosti obecné teorie relativity.

2.1 Stáčení perihelia jako pohyb v potenciálu tvaru $U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$, resp. $U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\gamma}{r^3}$

Následující výpočet ilustruje vliv malé korekce Newtonova gravitačního zákona: korekce potenciálu řádu r^{-2} vede na přesně řešitelný případ stáčení perihelia – fyzikální interpretace tohoto členu je uvedena ve třetí kapitole; korekce řádu r^{-3} (která odpovídá kvadrupólovému členu v multipólovém rozvoji) dává stáčení perihelia ekvivalentní předpovědi obecné teorie relativity.

Lagrangeova funkce pro pohyb planety v poli centrální síly je:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r) \tag{2.1}$$

Zachovávající se veličiny jsou tedy moment hybnosti

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \tag{2.2}$$

a energie

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r) \tag{2.3}$$

Odsud pro dφ plyne

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{J}{mr^2}\mathrm{d}t = \frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U) - \frac{J^2}{r^2}}}\mathrm{d}r \tag{2.4}$$

Pro pohyb planety, neopustí-li mezikruží omezené nějakými poloměry r_{min} a r_{max}, tedy platí

$$\Delta\varphi = 2\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{J}{r^2}\mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E-U) - \frac{J^2}{r^2}}} = -2\frac{\partial}{\partial J}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \sqrt{2m(E-U) - \frac{J^2}{r^2}}\mathrm{d}r \tag{2.5}$$

Keplerovské řešení problému má tvar:

$$r = \frac{J^2}{m\alpha(1+\epsilon\cos(\varphi-\omega))} = \frac{p}{1+\epsilon\cos(\varphi-\omega)} \approx p(1+\epsilon\cos\varphi) \tag{2.6}$$

Taylorův rozvoj je proveden pro $\epsilon \ll 1$; fázové posunutí ω lze bez újmy na obecnosti položit rovno nule.

Vyřešme nyní integrál (**??**) pro potenciální energii $U = -\frac{\alpha}{r} + \delta U$, kde druhý člen je malý v porovnání s prvním. Taylorovým rozvojem v druhém členu získáme:

$$\delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial J}\int\limits_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{2m\delta U \mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E+\frac{\alpha}{r}) - \frac{J^2}{r^2}}} = \frac{\partial}{\partial J}\left(\frac{2m}{J}\int\limits_{0}^{\pi} r^2\delta U \mathrm{d}\varphi\right), \tag{2.7}$$

od prvního ke druhému integrálu lze přejít dosazením keplerovského pohybu planety (vztah (**??**) pro $U = -\frac{\alpha}{r}$).

Pro korekci potenciálu tvaru $\delta U = -\frac{\beta}{r^2}$ získáme výsledek triviální integrací

$$\delta\varphi = -\frac{2\pi\beta m}{J^2} = -\frac{2\pi\beta}{\alpha p}, \tag{2.8}$$

kde p je parametr keplerovské elipsy definovaný ze vztahu (??). Tento člen se v obecně relativistickém vztahu nevyskytuje: problém je symetrický vůči „překlopení“ podél rovníkové roviny.

Pro korekci potenciálu $\delta U = -\frac{\gamma}{r^3}$ je třeba využít vztahu $r \cong \frac{J^2}{\alpha m}$, který plyne z newtonovského řešení (??): ϵ je malé, neboť trajektorie planety je blízká kružnici, proto stačí uvažovat pouze první člen rozvoje. Získáme tak stočení

$$\delta\varphi = -\frac{6\pi\alpha\gamma m^2}{J^4} = -\frac{6\pi\gamma}{\alpha p^2}, \tag{2.9}$$

které je ekvivalentní s předpovědí obecné relativity, jak bude ukázáno v následující podkapitole.

Stejným způsobem je problematika zpracována v [?, strana 55].

2.2 Obecně relativistický výpočet stáčení perihelia Merkuru

Odvoďme nyní vztah pro stáčení perihelia v centrálním gravitačním poli za pomoci aparátu obecné teorie relativity; uvidíme, že výsledek bude totožný se vztahem dosaženým pro kvadrupólový čklen multipólového rozvoje.

Z důvodu přehlednosti je výpočet proveden v geometrisovaných jednotkách[2].

Pro pohyb planet v centrálním gravitačním poli (planety lze považovat za hmotné body) můžeme psát obecně relativistickou rovnivi geodetiky:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\sigma}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{2.10}$$

Interval ds ve Schwartzschildových souřadnicích r, φ a ϑ má tvar

$$\mathrm{d}s^2 = -e^\lambda \mathrm{d}r^2 - r^2\mathrm{d}\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2 + e^\nu\mathrm{d}t^2, \tag{2.11}$$

kde λ a ν jsou funkcemi r:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r} \tag{2.12}$$

parametr m má význam hmotnosti tělesa budícího gravitační pole. Jediné nenulové složky metrického tensoru tedy jsou složky diagonální:

$$g_{00} = e^\nu \qquad g_{11} = e^\lambda \qquad g_{22} = r^2 \qquad g_{33} = r^2\sin^2\vartheta \tag{2.13}$$

[2]Základní konstanty κ (klasická gravitační konstanta) a c (rychlost světla) jsou položeny rovny jedné, potřebné veličiny (hmotnost a čas) tak získají rozměr délky. Zřejmě platí převodní poměry $T = \frac{t}{c}$s a $M = \frac{c^2}{\kappa}m$kg, kde velkým písmem jsou značeny veličiny v původních jednotkách.

Hodnoty Christoffelových indexů $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda}(g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\nu\lambda,\nu} - g_{\mu\nu,\lambda})$ jsou[3]

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^1_{00} = \frac{-re^{\nu-\lambda}}{2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r} & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\vartheta e^{-\lambda} & \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r} & \Gamma^2_{33} = -\sin\vartheta\cos\vartheta & \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta
\end{array}
\tag{2.14}
$$

Dosazením hodnot Christoffelových indexů (**??**) do vztahu pro geodetiku (**??**) získáme rovnice:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s}\right)^2 - & \\
-r\sin^2\vartheta e^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} - \sin\vartheta\cos\vartheta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + 2\cot\vartheta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Planety se pohybují v rovině, lze tedy bez újmy na obecnosti otočit souřadný systém tak, že $\vartheta = \pi/2$; předchozí vztahy potom přejdou na:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{e^{\nu-\lambda}}{2}\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

po integraci:

$$
\begin{aligned}
e^\lambda\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - e^\nu\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2 + 1 &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} &= \frac{H}{r^2} \\
\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} &= Ke^{-\nu},
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

[3]symbol $g_{\alpha\beta,\rho}$ označuje parciální derivaci $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho}$

kde H a K jsou integrační konstanty. Po dosazení hodnot λ a μ z (**??**) získáme relativistické rovnice pohybu planet v polárních souřadnicích:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \frac{2m}{r}\left(1 + r^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2}\right) &= K^2 - 1 \\ r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} &= H. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Význam integračních konstant H a K je zřejmý z porovnání s newtonovským řešením pohybu hmotného bodu v centrálním gravitačním poli:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{2m}{r} &= \frac{2E}{m} \\ r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{J}{m}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

V rovnici (**??**) pro pohyb planety v centrálním poli substituujme:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{u} \\ \dot{r} &= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

získáme tak obecně relativistickou obdobu klasického Binetova vzorce[4]

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{m}{H^2} + 3mu^2, \tag{2.21}$$

v níž je oproti Newtonově mechanice „navíc“ poslední člen $3mu^2 = \frac{3m}{r^2}$. Tento případ jsme řešili v minulé podkapitole, mohli bychom tedy použít předchozí výsledek; pro názornost však vyřešíme tuto diferenciální rovnici iterační metodou.

Člen $3mu^2$ je zřejmě (z rovnice (**??**)) podstatně menší než $\frac{m}{H^2}$, rozdíl proti newtonovskému výpočtu bude tedy poměrně malý. Jako první aproximaci výsledku můžeme proto použít řešení newtonovského Binetova vzorce:

$$u_0 = \frac{m}{H^2}(1 + \epsilon\cos(\varphi - \omega)) \tag{2.22}$$

kde ω je fázové posunutí, které lze bez újmy na obecnosti položit rovno nule. Řešení rovnice budeme hledat ve tvaru $u = u_0 + u_1$ Dosazením řešení (**??**) za funkci u do původní rovnice (**??**) získáme po zanedbání malého členu[5] $\frac{3m^3}{H^4}\epsilon^2\cos^2\varphi$ pro funkci u_1 vztah:

$$\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}\varphi^2} + u_1 = \frac{3m^3}{H^4}(1 - 2\epsilon\cos\varphi) \tag{2.23}$$

[4]Binetův vzorec má tvar $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \frac{m}{H^2}$ (viz např. [**?**])

[5]tento člen můžeme zanedbat, neboť dráha planety je blízká kružnici a tedy $\epsilon \ll 1$

jehož partikulární řešení je

$$u_1 = \frac{3m^3}{H^4}\left(1 - \varphi\epsilon\sin\varphi\right) \tag{2.24}$$

Pro řešení rovnice (**??**) tedy získáváme vztah

$$u = u_0 + u_1 = \frac{m}{H^2}\left(1 + \frac{3m^2}{H^2} + \epsilon\cos\varphi + \frac{3m^2}{H^2}\varphi\epsilon\sin\varphi\right) \tag{2.25}$$

v němž konstantu $\frac{3m^4}{H^4}$ lze zanedbat vůči konstantě $\frac{m}{H^2}$.

Pro malá φ můžeme dosadit Taylorovy rozvoje goniometrických funkcí – získáme tak řešení

$$u \approx \frac{m}{H^2}\left(1 + \epsilon\cos\varphi\cos\left(\frac{3m^2}{H^2}\varphi\right) + \epsilon\sin\varphi\sin\left(\frac{3m^2}{H^2}\varphi\right)\right) \tag{2.26}$$

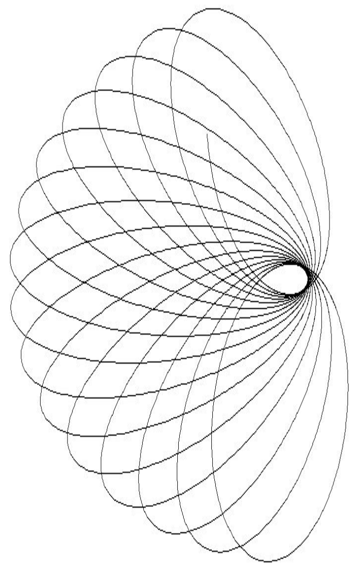
Aplikací součtového vzorce pro kosinus získáme výsledný tvar druhé aproximace řešení relativistického Binetova vzorce

$$u = \frac{m}{H^2}\left(1 + \epsilon\cos\left(\varphi - \frac{3m^2}{H^2}\varphi\right)\right) \tag{2.27}$$

Tato funkce je odvozena jen pro malá φ, počátek souřadnic je však volitelný parametr, který odpovídá konstantě ω, jíž jsme položili rovnu nule v původním řešení (**??**). Pro vhodnou hodnotu ω bychom získali totožné řešení pro libovolné φ. Vztah (**??**) proto opravdu můžeme s dostatečnou přesností považovat za rovnici pro pohyb planety. Oproti Newtonowskému řešení „přebytečný“ člen $\frac{3m^2}{H^2}\varphi$ lze interpretovat jako stočení perihelia na jeden oběh o

$$\delta\varphi = \frac{6\pi m^2}{H^2}, \tag{2.28}$$

jak znázorňuje obrázek 1.



obr.1 (stáčení perihelia pro $H = 10m$)

Stejný postup výpočtu je uveden i v [**?**, strana 208].

Proveďme konkrétní vyčíslení hodnoty stáčení perihelia Merkuru. Hmotnost Slunce je $m = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg; Merkur obíhá po dráze o poloměru $0,3871\,\mathrm{AU}$, jeho oběžná doba je $0,24085\,\mathrm{y}$ (viz [**?**]). V geometrisovaných jednotkách vychází $m = 1,474 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$, $H = r^2\dot{\varphi} = 9,050 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

Po dosazení těchto hodnot do vztahu (**??**) vychází hodnota stočení perihelia na jeden oběh $\delta\varphi = 5,004 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad}$, to je asi 42,8” za století (415 oběhů Merkuru). Skutečně pozorovaná hodnota „předcházení“ perihelia je 43,11” za století (viz [**?**, strana 234]).

3 Sommerfeldova teorie jemné struktury

Arnold Sommerfeld se pokusil objasnit jemnou strukturu spekter atomů (některé spektrální čáry jsou ve skutečnosti skupinami blízkých čar, tzv. multiplety) představou oběhu elektronů po eliptických drahách. Konkrétní výpočet pro atom vodíku bez uvážení efektů teorie relativity vedl k energetickému spektru, které bylo shodné se spektrem získaným v rámci Bohrova modelu. Relativistický výpočet jemnou strukturu spekter částečně objasňuje. Trajektorie elektronu v atomu přitom je stáčející se elipsa.

Pro jednoduchost je následující výpočet proveden pro vodíkový atom. Pro vodíkupodobný ion je zřejmě třeba uvažovat potenciální energii $-\frac{Ze^2}{r}$.

Energie elektronu v coulombickém poli protonu (speciálně relativisticky) je:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{e^2}{r}, \tag{3.1}$$

kde rychlost v polárních souřadnicích r, φ je:

$$v = \dot{\varphi}^2 r^2 + \dot{r}^2. \tag{3.2}$$

Moment hybnosti tohoto elektronu je:

$$J = \frac{m_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{3.3}$$

Z obou rovnic plyne pro tangenciální a dostředivou rychlost:

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= c^2 - \frac{c^4}{(Er + e^2)^2}(m_0^2 c^2 r^2 + J^2) \\ \dot{\varphi}^2 &= \frac{c^4 J^2}{r^2 (e^2 + Er)^2}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

což po substituci

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{u} \\ \dot{r} &= -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

přejde na binetovský vzorec

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\varphi^2} + u = \left(\frac{e}{cJ}\right)^2 (E + e^2 u) \tag{3.6}$$

Tento problém jsme opět řešili v první kapitole; pro názornost můžeme vyřešit i tuto diferenciální rovnici. Řešením (přesným) rovnice (**??**) je funkce

$$u = \frac{Ee^2}{c^2J^2 - e^4} + K_1 \sin\sqrt{1 - \frac{e^4}{c^2J^2}}\varphi + K_2 \cos\sqrt{1 - \frac{e^4}{c^2J^2}}\varphi \tag{3.7}$$

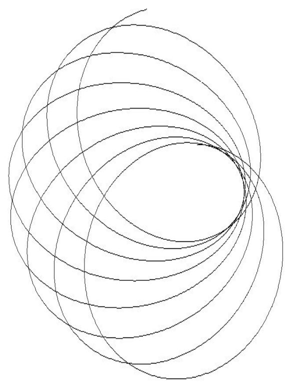
kde K_1 a K_2 jsou integrační konstanty. Položíme-li „perihelium“ do $\varphi = 0$, je $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varphi}\right)_{\varphi=0} = 0$, konstanta K_1 je proto rovna nule. Řešením vztahu (**??**) je tedy funkce

$$u = \frac{Ee^2}{c^2J^2 - e^4}\left(1 + \epsilon \cos\sqrt{1 - \frac{e^4}{c^2J^2}}\varphi\right) \tag{3.8}$$

Podle vztahu (**??**) se pericentrum elektronu „předchází“ na jeden oběh o

$$\delta\varphi = 2\pi\left(\sqrt{\frac{c^2J^2 - e^4}{c^2J^2}} + 1\right) \tag{3.9}$$

Dráha takovéhoto elektronu je znázorněna na obr. 2.



obr.2 (Sommerfeldova dráha elektronu)

Sommerfeld použil zobecnění Bohrovy kvantovací podmínky. Pokud lze separovat promenné v Hamiltonově-Jacobiho rovnici tak, že akce S získá tvar $S = S_r(J, r) + S_\varphi(J, \varphi)$ (moment hybnosti J je konstanta), je dobře definován obecný vztah pro kvantovací podmínky:

$$\oint \frac{\partial S}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i = \oint p_i \mathrm{d}q_i = n_i h, \tag{3.10}$$

kde integrace je po uzavřené křivce ve fázovém prostoru.

Momentu hybnosti $J = p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ je skutečně závislý jen na $\dot{\varphi}$, můžeme tedy aplikovat kvantovací podmínku N. Bohra pro kruhové dráhy elektronů:

$$\int_0^{2\pi} J\mathrm{d}\varphi = n_\varphi h$$

$$J = n_\varphi \hbar \tag{3.11}$$

Pro zobecnění pohybu elektronu na elipsu platí dodatečná podmínka pro hybnost $p_r = m\dot{r}$ (p_r je opět funkcí pouze $\dot{r}$); autorem této podmínky je Wilson, první aplikaci však provedl Sommerfeld (viz [**?**, strana 103 a 227]). Pokud užijeme vyjádření $\dot{r}$ pro nerelativistický pohyb, vyjde energetické spektrum shodné s Bohrovým (i

Schrödingerovým) modelem atomu vodíku. Relativistický výpočet vede k rozštěpení degenerovaných hladin energie. S využitím (**??**) získáme:

$$\oint p_r \mathrm{d}r = \oint \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_0^2c^2 + 2\frac{e^2}{c^2}E\frac{1}{r} + \left(\frac{e^4}{c^2} - J^2\right)\frac{1}{r^2}}\mathrm{d}r \ = \ n_r h$$

$$-2\pi i\left(\sqrt{\frac{e^4}{c^2} - n_\varphi^2\hbar^2} - \frac{e^2E}{c\sqrt{E^2 - m_0^2c^4}}\right) \ = \ n_r h \qquad (3.12)$$

kde integrace je provedena residuovou větou. Výrazy pod odmocninami jsou záporné, proto celkový výsledek bude reálný.

Z předchozí rovnice je energie kvantována podle vztahu

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 + \frac{e^4}{\left(n_rc^2\hbar + c\sqrt{n_\varphi^2c^2\hbar^2 - e^4}\right)^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\left(n_r + n_\varphi\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\varphi^2}}\right)^2}}} \qquad (3.13)$$

kde $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \doteq \frac{1}{137}$ je konstanta jemné struktury.

Taylorovým rozvojem energie v α získáme

$$E = m_0c^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{n}{n_\varphi} - \frac{3}{4}\right) + \dots\right), \qquad (3.14)$$

kde $n = n_r + n_\varphi$ je hlavní kvantové číslo. Člen $\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}$ odpovídá frekvencím čar Balmerovy série vodíku[6] – nerelativistický výpočet vede k degenerovanému energetickému spektru, kdy energie závisí pouze na hlavním kvantovém čísle n. Člen $\frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{n^4}\left(\frac{n}{n_\varphi} - \frac{3}{4}\right)$ je relativistická oprava. Tu si přepišme jako

$$\frac{m_0c^2\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{n_\varphi} - \frac{3}{4}\right) = \frac{m_0c^2\alpha^4}{8n^4} + \frac{m_0c^2\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{n_\varphi} - 1\right) \qquad (3.15)$$

První člen udává opravu k balmerovské vlnové délce v řádu 10^{-6}. Druhý člen $\frac{m_0c^2\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{n_\varphi} - 1\right)$ charakterizuje právě rozštěpení spektrálních čar. Tento člen je zřejmě nulový pro $n = n_\varphi$.

Pro $n = 1$ je $n_\varphi = 1$ a k rozštěpení nedochází.

Pro $n = 2$ je $n_\varphi = 1$ nebo $n_\varphi = 2$; vzniká dublet, vzdálenost spektrálních čar je (s využitím (**??**)) rovna

$$\delta\nu = \frac{\delta E}{h} = \frac{m_0c^2\alpha^4}{2h2^4} \qquad (3.16)$$

[6] Rozdíl frekvence spektrálních čar Balmerovy série splňuje vztah $\nu = R(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2})$, kde $R = \frac{mc^2\alpha^2}{4\pi\hbar}$ je Rydbergova konstanta

Bohrův model atomu s kruhovými drahami dává stejné hodnoty energie jako nerelativistický kvantově mechanický výpočet. Jeho zobecnění – Sommerfeldův relativistický model atomu s eliptickými drahami elektronů, vysvětluje rozštěpení degenerovaných energetických hladin; výsledky odpovídají relativistickému kvantově mechanickému modelu.

Sommerfeldova teorie jemné struktury ve své době uspokojivě vysvětlila pozorované jemné rozštěpení spektrálních čar, dnes je ovšem překonána kvantově mechanickou teorií, v níž pojem trajektorie ztrácí smysl.

4 Závěr

Podle obecné teorie relativity se tělesa v centrálním gravitačním poli pohybují po elipsách, jejichž osy se stáčí. Tento jev je ve Sluneční soustavě pozorovatelný u Merkuru (planeta je velmi blízko Slunci a pohybuje se po „protáhlé" elipse). Pro porovnání: pro Zemi činí stáčení perihelia spočtené podle vzorce (??) asi 3,8" za století, tedy desetkrát méně než pro Merkur.

Stáčení perihelia Merkuru je jedním z klasických ověření platnosti obecné teorie relativity; alternativní vysvětlení vyžadovala nepozorovaný disk hmoty mezi Sluncem a Merkurem nebo „zploštění" Slunce, které neodpovídá rychlosti jeho rotace. Jev lze vysvětlit též korekcí Newtonova gravitačního zákona na tvar $F \approx \frac{m^2}{r^{2+\varepsilon}}$, proto předpověď stáčení perihelia nebyla považována za tak klíčový důkaz platnosti obecné relativity jako později pozorování polohy hvězd při zatmění Slunce. Dnes je ovšem jedním ze základních testů, které dovedou upřednostnit obecnou relativitu pred alternativními teoriemi gravitace.

Roku 1974 byl objeven Hulseův-Taylorův podvojný pulsar 1913+16 – dvě neutronové hvězdy obíhající kolem společného těžiště; obecně relativistické efekty se zde silně projevují (perihelium se stáčí o 4,23° za rok, tedy o několik řádů více než u Merkuru). I zde je předpověď obecné relativity ve výborné shodě s pozorováním. Od té doby byla obecná teorie relativity potvrzena i v mnoha dalších obdobně extrémních situacích.

Literatura

[1] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*, Academia, Praha 1987

[2] Kuchař K.: *Základy obecné teorie relativity*, Academia, Praha 1968

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Механика*, Физматгиз, Москва 1958

[4] Mikulčák, J. a kol.: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky*, Prometheus, Praha 1997

[5] Зоммерфельд, А.: *Строение атома и спектры*, Государцвенное издательство технико-теоретической литературы, Москва 1956

[6] Tolman Richard C.: *Relativity, thermodynamics and cosmology*, The university press, Oxford 1949.