Posudek diplomové práce

Posudek školitele

Autor:	Bc. Lucie Mohelníková
Název práce:	Grupová souvislost grafů
Stud. program a obor:	Informatika, Diskrétní modely a algoritmy
Rok odevzdání:	2014
Školitel:	Mgr. Robert Šámal, Ph.D.
Pracoviště:	Informatický ústav Univerzity Karlovy
Kontaktní e-mail:	samal@iuuk.mff.cuni.cz

Předložená práce zkoumá pojem grupové souvislosti, který zavedli v roce 1992 Jaeger, Linial, Payan a Tarsi. Jedná se o pojem, který zobecňuje nikde nulové toky v grafech: Je dána abelovská grupa A. Řekneme, že graf G je A-souvislý, pokud pro libovolné ohodnocení hran G hodnotami z A (tj. $h : E(G) \to A$) existuje A-tok (zobrazení $f : E(G) \to A$, které splňuje Kirchhoffův zákon), který se daným hodnotám vyhýbá (tj. $f(e) \neq h(e)$ pro všechna $e \in E(G)$). Přesně řečeno: tato definice vyžaduje, aby G byl orientovaný graf, ale snadno se ukáže, že na orientaci nezáleží, tj. grupová souvislost je vlastnost neorientovaných grafů.

Je snadno vidět, že pokud graf G je A-souvislý, tak také má nikde nulový A-tok. Pojem grupové souvislosti se ukázal jako vhodný nástroj ke zkoumání nenulových toků: je tokům blízce příbuzný, ale umožňuje některé induktivní konstrukce, které pomocí toků nejdou realizovat. Je tedy nasnadě zkoumat, které vlastnosti nenulových toků sdílí také grupová souvislost. Již v článku Jaegera a spol. se ukazuje, že na rozdíl od toků tento pojem není "monotónní": existují grafy, které jsou $\mathbb{Z}_5$-souvislé, ale nikoli $\mathbb{Z}_6$-souvislé. V tomto článku se autoři ptají, zda záleží na struktuře grupy nebo (jako u nenulových toků) jenom na její velikosti. Konkrétně se ptají, zda $\mathbb{Z}_4$-souvislost a $\mathbb{Z}_2^2$-souvislost jsou ekvivalentní vlastnosti grafů. Cílem diplomové práce bylo prozkoumat tuto (dosud otevřenou) otázku.

V Kapitolách 1–3 autorka shrnuje relevantní části teorie grafů, spec. s ohledem na nikde nulové toky a grupovou souvislost. Tento úvod je napsán přehledně a umožňuje četbu práce i někomu, kdo se v oblasti zatím neorientoval. V Kapitole 4 je popsán algoritmus pro testování zda daný graf je v dané grupě souvisloslý. Tento problém je patrně NP-úplný, a algoritmus je tedy v zásadě založený na zkoušení všech možností – nicméně je ho potřeba vhodně navrhnout, aby dával výsledky pro grafy zajímavých velikostí. V práci jsou popsány dvě verze algoritmu a srovnána jejich časová a paměťová složitost. Pro srovnání rychlostí (a nezávislé ověření správnosti) vytvořila autorka ještě druhou implementaci prostředky programování s omezujícími podmínkami.

V Kapitole 5 se přistupuje k vlastnímu hledání grafů, kde se $\mathbb{Z}_4$- a $\mathbb{Z}_2^2$-souvislost liší. Prozkoumáním nutných a postačujících podmínek pro grupovou souvislost byla vybrána speciální třída grafů, které se zdály jako vhodní kandidáti: podrozdělení kubických grafů, které nejsou snarky, s omezeními na strukturu podrozdělení. V této třídě se opravdu povedlo najít dva grafy (viz obr. 5.6), které jsou $\mathbb{Z}_4$-souvislé, ale nikoli $\mathbb{Z}_2^2$-souvislé.

V Kapitole 6 se srovnává rychlost běhu implementace v C++ a implementací pomocí CP (v Prologu). Ukazuje se, že Prolog je cca stokrát pomalejší (a tento poměr příliš nezávisí na velikosti grafu). Zdá se tedy, že asymptotická složitost obou implementací je stejná, liší se jen rychlostí použitého jazyka.

V Kapitole 7 je pro jeden z nalezených grafů uveden důkaz, že není $\mathbb{Z}_2^2$-souvislý. Důkaz bez použití počítače, že tento graf není $\mathbb{Z}_4$-souvislý se bohužel nepodařilo nalézt. Další otázka, kterou by bylo vhodné na tuto práci navázat je, zda existují grafy, které jsou $\mathbb{Z}_2^2$-souvislé ale nikoli $\mathbb{Z}_4$-souvislé. Lze tedy doufat, že práce sl. Mohelníkové, která řeší otázku otevřenou více než dvacet let, podnítí nový výzkum v oblasti grupové souvislosti.

Doporučení: Navrhuji práci přijmout jako diplomovou práci.

V Praze dne 21. srpna 2014

Robert Šámal