

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Tomáš Mejstřík

Typy atmosférického proudění na základě analýzy pohybových rovnic

Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jan Bednář, CSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2006

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji Prof. RNDr. Jan Bednářovi za hodnotné rady a odborné vedení během mé práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 29. května 2006

Tomáš Mejstřík

Obsah

1	Úvod	5
2	Souřadnicové systémy	5
2.1	Souřadnicové systémy se zobecněnou vertikální souřadnicí	6
3	Pohybové rovnice	8
3.1	Pohybová rovnice v absolutní souřadnicové soustavě	8
3.2	Pohybová rovnice v relativní souřadnicové soustavě	8
3.3	Pohybová rovnice ve standartním souřadnicovém systému, složkové vyjádření	10
3.4	Pohybová rovnice v přirozeném souřadnicovém systému	11
3.5	Lamb-Gromekův tvar pohybové rovnice	13
3.6	Pohybová rovnice v systémech se zobecněnou vertikální souřadnicí	13
4	Základní typy proudění	18
4.1	Geostrofické proudění, Rossbyho číslo	18
4.2	Gradientové proudění	20
4.3	Cyklostrofické proudění	23
4.4	Inerční proudění	24
4.5	Ageostrofické proudění	27
4.6	Pseudogeostrofický vítr	30
5	Energie proudění	31
6	Závěr	32
	Literatura	33

Název práce: Typy atmosférického proudění na základě analýzy pohybových rovnic

Autor: Tomáš Mejstřík

Katedra : Katedra meteorologie a ochrany prostředí

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Jan Bednář, CSc.

e-mail vedoucího: kmop@mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme základní typy atmosférického proudění. První část je věnována odvození a tvaru pohybových rovnic v různých souřadnicových soustavách používaných v meteorologii. Hlavní část obsahuje odvození geostrofického větru jakožto nejjednoduššího aproximace atmosférického proudění. Geostrofické proudění je stacionární, rovnoměrné, nezakřivené proudění za rovnováhy sil tlakového gradientu a Coriolisovy síly. Uvážením navíc horizontálního zakřivení proudění vzniká gradientové proudění. Jiné specifické typy proudění (cyklostrofické, inerční proudění) vzniknou zanedbáním jednotlivých působících sil (síla tlakového gradientu, Coriolisova síla, odstředivá síla). Následuje rozbor ageostrofických složek proudění popisující rozdíl mezi skutečným prouděním a geostrofickou aproximací. Ke vzniku ageostrofických složek přispívají ty členy, které byly zanedbány při odvození geostrofického proudění (časové změny pole proudění a tlaku, vzestupné pohyby, tečné a normálové složky zrychlení). Klíčová slova: Pohybové rovnice, geostrofické proudění, ageostrofické proudění

Title: Types of atmospheric circulation on account of analysis of motion equation

Author: Tomáš Mejstřík

Department: Department of Meteorology and Environment Protection

Supervisor: Prof. RNDr. Jan Bednář, CSc.

Supervisor's e-mail address: kmop@mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the types of atmospheric circulation. First part is concerned with inference of motion equation at different coordinate system used in meteorology (isobaric, natural coordinate system). Main part contains derivation of geostrophic flow as a simplest approximation of atmospheric circulation. Geostrophic flow is resulting from the balance between the Coriolis force and the pressure gradient force. It blows parallel to straight isobars. If we take into account horizontal curvature, we acquire gradient flow. Other specific types of circulation (cyclostrophic, inertial flow) originate from gradient flow, when we neglect individual forces (pressure gradient force, Coriolis force, centrifugal force). Difference between real and geostrophic flow is represent by a ageostrophic flow. It is caused by components, we neglected by derivation of geostrophic flow like a vertical components to the flow, time evolution of the flow, tangent and centrifugal acceleration and friction.

Keywords: Motion equation, geostrophic flow, ageostrophic flow

1 Úvod

Proudění, tj. pohyb vzduchových hmot je jednou z typických vlastností atmosféry. Významným pro tvar a směr proudění je fakt, že Země je rotující neinerciální vztažná soustava. Vliv zemské rotace prostřednictvím Coriolisovy síly velmi mění představu o vztahu proudění a rozložení tlaku v kapalině, podle níž proudění směřuje ve směru gradientu tlaku, tj. z tlakové výše do tlakové níže.

Zjednodušeně lze popsat proudění pomocí Buys-Ballotova pravidla: „Pokud stojíme na severní polokouli tváří proti větru, nachází se tlaková níže po naší pravé straně. Na jižní polokouli je tomu přesně naopak“. Tvrzení je založeno na proudění větru podél izobar kolem tlakových níží a výší, tedy na jejich rotaci způsobené Coriolisovou silou. Za těchto předpokladů hovoříme o tzv. geostrofickém proudění. Veškeré časové změny tlakového pole a vývoj tlakových útvarů je zapříčiněný ageostrofickým prouděním. Pokud by existovalo jen geostrofické proudění, takový vývoj by neprobíhal. Ke vzniku ageostrofického proudění přispívají ty členy, které byly zanedbány při odvození geostrofického větru (časové změny v poli proudění a tlakového pole, vzestupné pohyby, tečné a normálové složky zrychlení). Vůbec za prvotní příčinu pohybu vzduchu lze považovat nerovnoměrné rozložení pole atmosférického tlaku. Ze znalosti toho pole a s využitím Buys-Ballotova pravidla získáme poměrně jednoduchý model atmosférické cirkulace. Po obou stranách osy rovníkového pásu nízkého tlaku vzduchu až k subtropickým pásům vysokého tlaku převládá ve spodní vrstvě atmosféry východní proudění, nazývané pasátové proudění. V mírných šířkách mezi pásy vysokého vzduchu a pásy nízkého vzduchu přibližně nad 60° severní a jižní šířky bude naopak západní proudění. V polárních oblastech se nalézají oblasti vysokého tlaku vzduchu. Proudění zde má východní směr.

Proudění v atmosféře je zpravidla velmi turbulentní, tj. takové, kdy setrvačné síly v proudění jsou velké vzhledem k silám vazkého tření. Turbulentní proudění je charakterizováno nepravidelnými vířivými pohyby vzduchu, což vede k vertikálnímu přenosu vzduchových částic a jejich vlastností (hybnost, teplota). Turbulentnost i při nízkých rychlostech způsobuje velmi nízká viskozita vzduchu.

Jedním z dalších faktorů ovlivňujících vítr je tření. Mezní vrstva atmosféry je nejspodnější část atmosféry, v níž je vektor proudění ovlivňován třením o zemský povrch, nad ní je pohyb částic je způsobován jen silou tlakového gradientu, silou zemské tíže a Coriolisovou silou.

2 Souřadnicové systémy

Pohybové rovnice v meteorologii je z různých případech výhodné popisovat ve speciálních souřadných systémech. Speciálním případem pravoúhlého kartézského systému je tzv. standartní souřadnicová soustava. Její osy jsou orientovány tak, že osa x směřuje z daného bodu (počátku) na východ, osa y na sever a osa z vzhůru. Použití standartního souřadnicového systému je možné v takových případech, kdy chyba vyplývající z nahrazení zakřiveného zemského povrchu tečnou rovinou procházející počátkem je zanedbatelná.

Souřadnicová soustava vzniklá z obecného pravoúhlého systému položením směru osy x ve směru horizontálního proudění vzduchu se nazývá přirozená soustava. Souřadnice ve směru větru se v tomto případě označuje zpravidla symbo-

lem s a jednotkový vektor v tomto směru \vec{t} . Druhá horizontální osa n je kolmá k ose s , směřuje od ní vlevo a příslušný jednotkový vektor se označuje \vec{n} . Vertikální osa z je totožná s odpovídající osou ve standardní souřadnicové soustavě, označení příslušného jednotkového vektoru je stejné tj. \vec{k} . Standardní i přirozená souřadná soustava jsou pravotočivými kartézskými systémy. Představují dvě kartézské soustavy navzájem pootočené o úhel α , který je roven úhlu mezi směrem horizontálního proudění a přímkou orientovanou ve směru od západu na východ.

2.1 Souřadnicové systémy se zobecněnou vertikální souřadnicí

Standardní a přirozená souřadnicová soustava se označují jako tzv. z -systémy, neboť vertikální souřadnicí je geometrická výška z . Záměnou této souřadnice lze však získat nové soustavy, které mohou být vzhledem ke způsobu měření meteorologických veličin výhodnější než z -systémy. Praktické poměry ve volné atmosféře se zpravidla znázorňují v izobarických plochách a proto je vhodné zavést souřadnicovou soustavu, tzv. p -systém, v níž se jako vertikální souřadnice místo výšky z používá tlak p . Základní transformační vzorec mezi horizontálními souřadnicemi má tvar

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)_p + \frac{\partial\beta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad (1)$$

popř.

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial\beta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \quad (2)$$

Derivace podle vertikální souřadnice z převedeme na derivace podle tlaku p prostřednictvím vzorce

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial\beta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3)$$

kteřý lze pomocí rovnice hydrostatické rovnováhy dále upravit na tvar

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = -g\rho \frac{\partial\beta}{\partial p}. \quad (4)$$

Analogií operátoru horizontálního gradientu v z -systému

$$\nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z \vec{j},$$

je v p -systému izobarický gradient

$$\nabla_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \vec{j}.$$

S přihlédnutím k (1-2) obdržíme

$$\nabla_h\beta = \nabla_p\beta + \frac{\partial\beta}{\partial p}\nabla_H p. \quad (5)$$

Transformační vztah mezi operátory horizontálního a izobarického gradientu má tvar

$$\nabla_H \beta = \nabla_p \beta + g\rho \frac{\partial \beta}{\partial p} \cdot \nabla_p z. \quad (6)$$

Ke studiu adiabatických dějů v atmosféře je vhodná souřadnicová soustava ve které je vertikální souřadnice z nahrazena potenciální teplotou Θ . Tímto způsobem je vytvořený tzv. Θ -systém. Transformační vztahy mezi parciálními derivacemi a diferenciálními operátory v z -systému a v Θ -systému jsou obdobné jako v případě p -systému:

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_\Theta + \frac{\partial \beta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_\Theta + \frac{\partial \beta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \beta}{\partial \Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \quad (9)$$

Z těchto vztahů též vyplývá

$$\nabla_h \beta = \nabla_\Theta \beta + \frac{\partial \beta}{\partial \Theta} \nabla_H \Theta. \quad (10)$$

Dosadíme-li za obecnou veličinu β výšku určité izentropické hladiny, dostaneme

$$\nabla_\Theta z = -\frac{\partial z}{\partial \Theta} \nabla_H \Theta, \quad (11)$$

neboť zřejmě platí $\nabla_H z = 0$. Dalšími úpravami dojdeme k transformačnímu vztahu

$$\nabla_H \beta = \nabla_\Theta \beta - \frac{\partial \beta}{\partial z} \nabla_\Theta z. \quad (12)$$

Dalším používaným souřadnicovým systémem v dynamické meteorologii je tzv. σ -systém, tj. souřadnicová soustava v níž je vertikální souřadnice z nahrazena veličinou σ definovanou vztahem

$$\sigma = \frac{p - p_\tau}{p_s - p_\tau}, \quad (13)$$

kde p značí tlak jako proměnnou veličinu, p_s je tlak na zemském povrchu a p_τ je konstantní tlak na horní hranici uvažované vrstvy atmosféry. Uvažujeme-li celou tloušťku atmosféry, je zřejmě $p_\tau = 0$ tzn.

$$\sigma = \frac{p}{p_s}. \quad (14)$$

Z (14) popř. (13) vyplývá, že $\sigma = 0$ na horní hranici atmosféry popř. na horní hranici uvažované oblasti, kdežto $\sigma = 1$ při $p = p_s$, což platí na zemském povrchu. Zcela analogicky jako v přecházejících případech, odvodíme

$$\nabla_H \beta = \nabla_\sigma \beta - \frac{\partial \beta}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \nabla_\sigma z \quad (15)$$

a uvažujeme-li $\beta = p$, získáme s využitím rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\nabla_H p = \nabla_\sigma p + g\rho \nabla_\sigma z. \quad (16)$$

3 Pohybové rovnice

3.1 Pohybová rovnice v absolutní souřadnicové soustavě

Pohybové rovnice popisující pohyb vzduchu získáme druhého Newtonova pohybového zákona, podle nějž je výsledná síla působící na danou částici rovna součinu hmotnosti této částice a zrychlení, které působící síla vyvolává. Platnost tohoto zákona je pouze v souřadném systému nepohyblivém vůči stálícím, tento nazýváme absolutní souřadnicovou soustavou. Jednotlivé osy lze zvolit takto: počátek položíme do středu Země, osu z ztotožníme se osou zemské rotace, souřadnicové osy x , y leží z roviny rovníku, jsou na sebe kolmé a pevně orientovány vzhledem ke stálícím. Takto zvolený souřadnicový systém je nezávislý na zemské rotaci a pohyb atmosféry vůči němu je ovlivňován těmito silami vztaženými k jednotce hmotnosti:

1. síla tlakového gradientu \vec{b}
2. gravitace \vec{g}_a
3. síla tření \vec{F}

Nyní lze pro zrychlení \vec{v}_a pohybu vzduchové částice podle druhého Newtonova zákona psát:

$$\vec{v}_a = \vec{b} + \vec{g}_a + \vec{F}, \quad (17)$$

kde \vec{v}_a je velikost zrychlení vůči absolutní souřadné soustavě. Tento vztah popisuje princip zachování hybnosti a je označován jako pohybová rovnice v absolutní souřadné soustavě.

3.2 Pohybová rovnice v relativní souřadnicové soustavě

Měření v atmosféře se zpravidla vztahují k určitému místu spojené s otáčející se Zemí, proto nelze pohybovou rovnici (17) použít pro praktický popis pohybů v atmosféře. Tuto rovnici je výhodné převést do tvaru odpovídající souřadnicové soustavě rotující společně se zemským tělesem (tzv. relativní souřadnicové soustavě). Síla tlakového gradientu, gravitace a třecí síla jsou nezávislé vůči výběru referenční soustavy, z (17) získáme vhodný vztah tak, že zrychlení \vec{v}_a vyjádříme pomocí \vec{v}_r vztahované k relativnímu systému. Mějme tedy relativní souřadnicovou soustavu s počátkem ve středu Země, rotující společně se Zemí úhlovou rychlostí $\vec{\Omega}$, souřadnicové osy x , y pokládáme do roviny rovníku. Rychlost \vec{v}_a dané vzduchové částice pozorovaná vzhledem k relativní soustavě je rovna součtu

relativní rychlosti vůči Zemi \vec{v}_r a rychlosti \vec{v}_e pohybu bodu pevně spojeného se Zemí, ve kterém se daná vzduchová částice nachází, tj.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e, \quad (18)$$

rychlost \vec{v}_e lze vyjádřit vztahem

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (19)$$

kde \vec{r} značí polohový vektor vzhledem ve zvolenému počátku souřadnicové soustavy. Z předchozích dvou rovnic dostáváme

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (20)$$

rychlost pohybu lze též definovat jako časovou změnu polohového vektoru, platí též vztah

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}, \quad (21)$$

popisující vztah mezi změnami polohového vektoru pozorovanými v absolutní a v relativní souřadné soustavě. Rovnice (21) ovšem platí pro libovolný vektor, tj. i pro \vec{v}_a takže lze psát:

$$\frac{d_a \vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{v}_a. \quad (22)$$

Dosadíme-li za \vec{v}_a z (20), zavedeme symboly $d\vec{v}_a/dt \equiv \vec{v}_a$, $d\vec{v}_r/dt \equiv \vec{v}_r$, $d\vec{r}/dt \equiv \vec{v}_a$, potom obdržíme za předpokladu časové konstantnosti $\vec{\Omega}$:

$$\vec{v}_a = \frac{d}{dt}(\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{v}_r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}). \quad (23)$$

poslední člen na pravé straně jde dále rozepsat jako:

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{\Omega}(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) - \vec{R}(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}) = -\Omega^2 \vec{R}, \quad (24)$$

kde \vec{R} představuje průmět polohového vektoru \vec{r} do roviny rovníku. Rovnici (23) tak přepíšeme do tvaru

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r - \Omega^2 \vec{R} \quad (25)$$

a dosadíme-li odtud za \vec{v}_a do (17), získáme

$$\vec{v}_r = \vec{b} + \vec{g}_a + \Omega^2 \vec{R} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{F}. \quad (26)$$

Člen $\Omega^2 \vec{R}$ reprezentuje odstředivé zrychlení (odstředivou sílu zemské rotace vztahenou na jednotku hmotnosti) a sečteme-li jej s gravitačním zrychlením \vec{g}_a obdržíme tíhové zrychlení \vec{g} . Takto získáme z předchozí rovnice tento tvar

$$\vec{v} = \vec{b} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{F}, \quad (27)$$

přičemž u symbolů rychlosti a zrychlení již vynecháme index r . Tato rovnice (27) je hledanou pohybovou rovnicí v souřadnicové soustavě, která rotuje

společně se Zemí. Třetí člen na pravé straně představuje tzv. Coriolisovu sílu, tj. urychlující sílu zemské rotace, působící kolmo jak k ose zemské rotace, tak i ke směru pohybu uvažované částice. Tato síla se projevuje pouze u částic pohybujících se vzhledem k Zemi a jejím působením jsou vzduchové částice uchylovány v horizontální rovině na severní polokouli vpravo resp. vlevo na jižní polokouli vůči směru pohybu.

3.3 Pohybová rovnice ve standartním souřadnicovém systému, složkové vyjádření

Vektorovou rovnici (27) lze rozepsat pro jednotlivé složky uvažované ve standartním souřadnicovém systému. Označme v_x, v_y, v_z po řadě složky vektoru rychlosti proudění a $\dot{v}_x \equiv dv_x/dt, \dot{v}_y \equiv dv_y/dt$ a $\dot{v}_z \equiv dv_z/dt$ potom představuje odpovídající složky individuálního zrychlení pohybu dané částice. Složky síly tlakového gradientu b_x, b_y, b_z vztažené k jednotce hmotnosti vzduchu vyjádříme z rovnice hydrostatické rovnováhy ve tvaru:

$$b_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad b_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad b_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (28)$$

a složky Coriolisovy síly c_x, c_y, c_z (taktéž vztahované k jednotce hmotnosti) získáme rozepsáním vektorového součinu z třetího členu pravé strany (27), tj.

$$\begin{aligned} c_x &= -2(\Omega_y v_z - \Omega_z v_y), \\ c_y &= -2(\Omega_z v_x - \Omega_x v_z), \\ c_z &= -2(\Omega_x v_y - \Omega_y v_x). \end{aligned} \quad (29)$$

Vzhledem k tomu, že vektor úhlové rychlosti zemské rotace míří ve směru zemské rotační osy, platí ve standartním souřadnicovém systému pro jeho složky

$$\Omega_x = 0, \quad \Omega_y = \cos \varphi, \quad \Omega_z = \Omega \sin \varphi, \quad (30)$$

Když $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ je velikost úhlové rychlosti zemské rotace a φ značí zeměpisnou šířku ($\varphi > 0$, resp. $\varphi < 0$ na severní resp. jižní polokouli). Nebudeme-li pro zjednodušení uvažovat sílu tření \vec{F} , což lze v tzv. volné atmosféře, tj. nad mezní vrstvou zemského ovzduší. Rozepíšeme-li potom rovnici (27) pro jednotlivé složky, dosadíme-li z předchozích rovnic a dále ze skutečnosti, že \vec{g} má ve standartním souřadnicovém systému složky $g_x = g_y = 0, g_z = -g$, dostaneme následující tři složkové rovnice

$$\dot{v}_x \equiv \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2v_z \Omega \cos \varphi + 2v_y \Omega \sin \varphi, \quad (31)$$

$$\dot{v}_y \equiv \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2v_x \Omega \sin \varphi, \quad (32)$$

$$\dot{v}_z \equiv \frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2v_x \Omega \cos \varphi, \quad (33)$$

které můžeme podle Eulerova vztahu upravit do tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - 2v_z \Omega \cos \varphi + 2v_y \Omega \sin \varphi, \quad (34)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2v_x \Omega \sin \varphi, \quad (35)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2v_x \Omega \cos \varphi. \quad (36)$$

Tyto soustavy parciálních diferenciálních rovnic platí pro všechny druhy pohybů vyskytujících se v atmosféře u kterých lze zanedbat sílu tření. Složkové rovnice je možno zjednodušit na základě řádového odhadu jednotlivých členů. Podle měřítkové analýzy (viz Tabulka 1) můžeme rovnice po zanedbání členů zpravidla řádově menších ve srovnání ostatními psát ve tvaru

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2v_y \Omega \sin \varphi, \quad (37)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2v_x \Omega \sin \varphi, \quad (38)$$

zatímco v (36) stačí ponechat první dva členy na pravé straně a ostatní zanedbat. Tímto postupem přejde (36) na tvar

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = 0, \quad (39)$$

který odpovídá zřejmě rovnici hydrostatické rovnováhy.

Omezíme-li se na horizontální proudění (tj. zanedbáme-li vertikální složku rychlosti proudění v_z) lze (37 - 38) převést na vektorovou rovnici

$$\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} + f \vec{v} \times \vec{k}, \quad (40)$$

kde $f \equiv 2\Omega_z = 2\Omega \sin \varphi$ označujeme jako Coriolisův parametr, \vec{k} představuje jednotkový vertikálně orientovaný vektor a $\nabla_{HP} \equiv (\partial p / \partial x, \partial p / \partial y)$ horizontální gradient atmosférického tlaku.

3.4 Pohybová rovnice v přirozeném souřadnicovém systému

V přirozeném souřadnicovém systému vyjadřujeme vektor rychlosti horizontálního proudění \vec{v} ve tvaru

$$\vec{v} = v \vec{t}, \quad (41)$$

kde v značí jeho velikost a \vec{t} jednotkový vektor ve směru uvažovaného proudění. Derivací tohoto výrazu totálně podle času t , obdržíme výraz pro individuální zrychlení pohybu, tj.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + v \frac{d\vec{t}}{dt}, \quad (42)$$

Označíme-li potom ds délku elementu trajektorie uraženého danou vzduchovou částicí, můžeme psát

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \left(\frac{d\xi}{ds} \vec{n} - \frac{1}{r_z} \vec{k} \right), \quad (43)$$

přičemž \vec{n} představuje jednotkový horizontální vektor orientovaný kolmo a vlevo vzhledem ke směru proudění, \vec{k} jednotkový vektor ve směru vertikální osy z , $d\xi$ značí úhel stočení průmětu trajektorie do horizontální roviny, jenž odpovídá dráhovému úseku ds . Derivace $d\xi/ds$ potom reprezentuje křivost K_{tH} průmětu trajektorie do horizontální roviny (tzv. horizontální křivost) tj.

$$K_{tH} = \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{R_H}. \quad (44)$$

Symbol R_H zde značí poloměr horizontální křivosti. tj. poloměr oskulační kružnice, která aproximuje průběh dané křivky v dostatečně malém okolí daného bodu nalézajícího se na této křivce. Horizontální rovina je tečná rovina k zemskému povrchu v místě, kde se právě daná vzduchová částice nachází. Horizontálním pohybem je však rozuměn pohyb v hladině $z = \text{konst}$, tzn. že daná vzduchová částice sleduje ideální tvar zemského tělesa a její trajektorie má vůči zmíněné referenční horizontální rovině vertikální křivost

$$K_{tv} = -\frac{1}{r}, \quad (45)$$

pro niž se odpovídající poloměr křivosti rovná vzdálenosti od středu Země r . Odchylku r v příslušném místě od středního zemského poloměru r_z lze v tomto případě zanedbat. Z uvedeného vysvětlení je zřejmé, že

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\xi}{ds} \vec{n} - \frac{1}{r_z} \vec{k} = K_{tH} \vec{n} + K_{tv} \vec{k} \quad (46)$$

a výraz v závorce na pravé straně (43) pak představuje vektorový součet horizontální a vertikální křivosti trajektorie vzduchové částice, která sleduje ideální tvar zemského povrchu. Dosadíme-li za $d\vec{t}/dt$ do (42) z (43 - 44), získáme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + K_{tH} v^2 \vec{n} - \frac{v^2}{r_z} \vec{k}. \quad (47)$$

Vektor rychlosti horizontálního proudění \vec{v} má v přirozeném souřadnicovém systému tvořeném osami s, n, z složky $v_s = v, v_n = 0, v_z = 0$, odpovídající složky úhlové rychlosti rotace Země označme $\Omega_s, \Omega_n, \Omega_z$ a Coriolisovo zrychlení je potom vyjádřeno ve tvaru

$$\vec{c} = -2\Omega \times \vec{v} = -2v\Omega_z \vec{n} + 2v\Omega_n \vec{k}. \quad (48)$$

Výraz $2\Omega_z$ představuje Coriolisův parametr f , tj.

$$\vec{c} = -vf\vec{n} + 2v\Omega_n \vec{k}, \quad (49)$$

dále gradient tlaku v přirozeném souřadném systému je dán

$$\nabla p \equiv \frac{\partial p}{\partial s} \vec{t} + \frac{\partial p}{\partial n} \vec{n} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}, \quad (50)$$

potom s použitím rovnic (47 - 50) lze vektorovou rovnici (27) psát jako

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}\vec{t} + K_{tH}v^2\vec{n} - \frac{v^2}{r_z}\vec{k} = & - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\vec{t} + \frac{\partial p}{\partial n}\vec{n} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) - \\ & - v f\vec{n} + 2\Omega_n\vec{k} - g\vec{k} - F\vec{t}, \end{aligned} \quad (51)$$

neboť tíhové zrychlení \vec{g} má velikost g a působí ve směru záporně orientované vertikální osy z , kdežto síla tření \vec{F} o velikosti F směřuje proti vektoru rychlosti horizontálního proudění. Rozepsáním rovnice (51) na jednotlivé složky obdržíme

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} - F, \quad (52)$$

$$K_{tH}v^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - fv, \quad (53)$$

$$-\frac{v^2}{r_z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + 2v\Omega_n. \quad (54)$$

3.5 Lamb-Gromekův tvar pohybové rovnice

Jiné vyjádření pohybové rovnice získáme rozepsáním rovnice (27) pomocí Eulerova vztahu

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{b} + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{F}, \quad (55)$$

popř.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{F}. \quad (56)$$

Využitím vektorové úpravy

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \quad (57)$$

získáme pro $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ vztah

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (58)$$

a dosadíme-li jej do (27), obdržíme tzv. Lamb-Gromekův tvar pohybové rovnice

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{F}. \quad (59)$$

3.6 Pohybová rovnice v systémech se zobecněnou vertikální souřadnicí

V systémech se zobecněnou vertikální souřadnicí používáme místo geometrické výšky z určité termodynamické veličiny, např. tlak vzduchu p , potenciální teplotu Θ , nebo veličinu σ . Důvody pro zavedení těchto souřadnicových systémů

jsou různé. Nevýhodou z -systému je např. to, že integrační oblast není ohraničena shora. Naproti tomu v p -systému lze na předpokládané horní hranici atmosféry položit okrajovou podmínku $p = 0$. Mimo to je p -systém vhodný pro přímé zpracování výsledků z aerologických měření, neboť z měření aerologických sond získáváme hodnoty teplot a vlhkosti vzduchu přímo v jednotlivých izobarických hladinách. Jako další příklad lze uvést σ -systém, jehož hlavní předností je to, že základní hladina $\sigma = 1$ odpovídá reliéfu zemského povrchu. Tato souřadnicová soustava je vhodná pro numerické modely atmosféry zahrnující vliv orografie (členitosti) terénu. V Θ -systému lze naproti tomu snadno formulovat zákonitosti a průběh adiabatických dějů v nenasyceném vzduchu.

Při odvozování vektorového tvaru pohybové rovnice, popř. jejího složkového tvaru, v právě zmiňovaných souřadnicových soustavách jsou „horizontální“ souřadnice x, y voleny analogicky jako v z -systému. Avšak věcný rozdíl je v tom, že tyto osy neleží v rovině $z = 0$, ale v ploše určité konstantní hodnoty tlaku p , potenciální teploty Θ , nebo veličiny σ . Výrazy typu $dx/dt, dy/dt$, reprezentující příslušné složky rychlosti pohybu vzduchových částic, se však nemění při transformaci ze z -systému do uvedených soustav se zobecněnou vertikální souřadnicí. Eulerův vztah má po formální stránce stejný tvar ve všech zmiňovaných souřadnicových soustavách. Vertikální rychlost v systému se zobecněnou vertikální souřadnicí v , reprezentující p, Θ, σ však definujeme jako

$$\omega = \frac{dv}{dt}, \quad (60)$$

kde veličinu ω nazýváme zobecněná (generalizovaná) vertikální rychlost v daném systému. Jelikož derivace podle z nahrazujeme derivacemi podle $v = p, \Theta, \sigma$, píšeme výraz typu $v_z \partial / \partial z$ ve tvaru $\omega \partial / \partial v$.

V dalším postupu se nejprve v pohybové rovnici omezíme na horizontální pohyb v rovině $z = \text{konst}$, tzn.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_H}{dt} &\equiv \frac{\partial \vec{v}_H}{\partial t} + (\vec{v}_H \cdot \nabla_H) \vec{v}_H + v_z \frac{\partial \vec{v}_H}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla_H - 2\Omega \times \vec{v}_H + \vec{F}, \end{aligned} \quad (61)$$

když

$$\vec{v}_H = \vec{v}_H(v_x, v_y, 0)_{z=\text{konst}}, \quad \nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right)_{z=\text{konst}}.$$

Při transformaci poslední rovnice do p -systému nahradíme vertikální rychlost v_z zobecněnou vertikální rychlostí $\omega = dp/dt = \dot{p}$, horizontální složky rychlosti v_x, v_y vztáhneme k izobarickým plochám $p = \text{konst}$ a pro vyjádření horizontálního gradientu tlaku $\nabla_H p$ použijeme transformační vzorec (6) mezi operátory horizontálního a izobarického gradientu, do nějž dosadíme $\beta = p$. S využitím že $\nabla_H p = 0$ a $\partial p / \partial p = 1$, obdržíme vektorový tvar pohybové rovnice odpovídající proudění v izobarické ploše

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} + (\vec{v}_p \cdot \nabla_p) \vec{v}_p + \dot{p} \frac{\partial \vec{v}_p}{\partial p} = -g \nabla_p z - 2\Omega \times \vec{v}_p + \vec{F}. \quad (62)$$

S přihlédnutím k definici geopotenciálu Φ , dostáváme výsledek

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} \equiv \frac{\partial\vec{v}_p}{\partial t} + (\vec{v}_p \cdot \nabla_p)\vec{v}_p + \dot{p} \frac{\partial\vec{v}_p}{\partial p} = -\nabla_p \Phi - 2\Omega \times \vec{v}_p + \vec{F}, \quad (63)$$

v němž $\vec{v}_p = \vec{v}_p(v_x, v_y, 0)_{p=\text{konst}}$ představuje vektor rychlosti proudění v příslušné izobarické ploše, kdežto

$$\nabla_p = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right)_{p=\text{konst}}.$$

Vzájemný vztah mezi zobecněnou vertikální rychlostí v p -systému $\omega = \frac{dp}{dt}$ a vertikální rychlostí $v_z = dz/dt$ obdržíme z rovnice hydrostatické rovnováhy a ze stavové rovnice, neboť

$$\omega = \frac{dp}{dz} \frac{dz}{dt} = -g\rho v_z = -\frac{gp}{RT} v_z, \quad (64)$$

kde R zde značí měrnou plynovou konstantu, ρ hustotu vzduchu a T termodynamickou teplotu.

Obdobně lze postupovat v Θ -systému nebo v σ -systému a odvodíme tak rovnice pro rychlost proudění v hladinách konstantní potenciální teploty Θ (izentropických hladinách) nebo konstantní hodnoty veličiny σ . Vztáhneme-li složky proudění v_x, v_y k izentropickým hladinám $\Theta = \text{konst}$, nahradíme-li $\partial/\partial z$ parciální derivací podle Θ , zavedeme-li zobecněnou vertikální rychlost $\omega = d\Theta/dt \equiv \dot{\Theta}$ a použijeme transformační vztah (12), získáme ze (62) po přihlédnutí k rovnici hydrostatické rovnováhy

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_\Theta}{dt} &\equiv \frac{\partial\vec{v}_\Theta}{\partial t} + (\vec{v}_\Theta \cdot \nabla_\Theta)\vec{v}_\Theta + \dot{\Theta} \frac{\partial\vec{v}_\Theta}{\partial \Theta} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla_\Theta p - \nabla_\Theta \Phi - 2\Omega \times \vec{v}_\Theta + \vec{F}, \\ \vec{v}_\Theta &= \vec{v}_\Theta(v_x, v_y, 0)_{\Theta=\text{konst}}, \quad \nabla_\Theta = \nabla_\Theta \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right)_{\Theta=\text{konst}} \end{aligned} \quad (65)$$

Uvažujeme-li celý vertikální rozsah atmosféry, platí v (13) $p_\tau = 0$, potom $\sigma = p/p_s$, když p_s značí tlak vzduchu v úrovni zemského povrchu. Použijeme-li v hladině konstantní σ diferenciální operátor ∇ , získáme

$$\nabla_\sigma = \nabla_\sigma(\sigma p_s) = \sigma \cdot \nabla_\sigma p_s + p_s \cdot \nabla_\sigma \sigma = \sigma \cdot \nabla_\sigma p_s, \quad (66)$$

neboť

$$\nabla_\sigma \sigma = 0. \quad (67)$$

Po dosazení za $\nabla_\sigma p$ do (16) získáme

$$\nabla_H p = \sigma \cdot \nabla_\sigma p_s + g\rho \cdot \nabla_\sigma z = \sigma \nabla_\sigma \cdot \nabla_\sigma \Phi, \quad (68)$$

potom získáme pohybovou rovnici v hladině $\sigma = \text{konst}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_\sigma}{dt} &\equiv \frac{\partial\vec{v}_\sigma}{\partial t} + (\vec{v}_\sigma \cdot \nabla_\sigma)\vec{v}_\sigma + \dot{\sigma} \frac{\partial\vec{v}_\sigma}{\partial \sigma} = \\ &= -\frac{1}{\rho} \sigma \cdot \nabla_\sigma p_s - \nabla_\sigma \Theta - 2\Omega \times \vec{v}_\sigma + \vec{F}. \end{aligned} \quad (69)$$

Označíme-li $\omega = dp/dt \equiv \dot{p}$, popř. $\dot{\sigma} \equiv d\sigma/dt$ zobecněné vertikální rychlosti v p -systému popř. v σ -systému, lze snadno odvodit vztah pro jejich vzájemnou transformaci. S využitím $\sigma = p/p_s$ získáme

$$\omega = \frac{d}{dt}(\sigma p_s) = \dot{\sigma} p_s \sigma \frac{dp_s}{dt},$$

dále pomocí Eulerova vzorce upravíme na výsledný tvar

$$\omega = \dot{\sigma} p_s + \sigma \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{v}_\sigma \cdot \nabla_\sigma p_s \right). \quad (70)$$

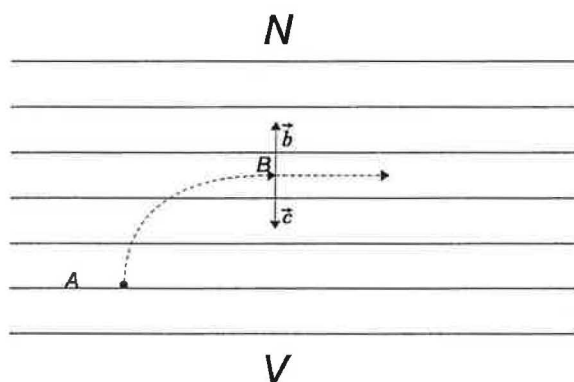
Tabulka 1: Řádové odhady velikosti členů ve složkovém vyjádření pohybové rovnice

horizontální složky rychlosti	$U \sim 10 \text{ m.s}^{-1}$	
vertikální rychlost	$W \sim 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$	
horizontální délkové měřítko	$L \sim 10^6 \text{ m}$	
vertikální délkové měřítko	$H \sim 10^4 \text{ m}$	
prostorové změny tlaku	$\Delta P \sim 10 \text{ hPa} (10^3 \text{ Pa})$	
časové měřítko	$L/U \sim 10^5 \text{ s}$	
poloměr Země	$r_z \sim 10^7 \text{ m}$	
hustota vzduchu	$\rho_0 \sim 10^0 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	
Coriolisův parametr	$f_0 \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$	
$\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}$	$\frac{U^2}{L}$	10^{-4} m.s^{-2}
$2\Omega v_y \cdot \sin \varphi, 2\Omega v_x \cdot \sin \varphi$	$f_0 U$	10^{-3} m.s^{-2}
$\frac{v_x v_z}{r_z}, \frac{v_y v_z}{r_z}$	$\frac{UW}{r_z}$	10^{-8} m.s^{-2}
$2\Omega v_z \cdot \cos \varphi$	$f_0 W$	10^{-6} m.s^{-2}
$\frac{v_x v_y \cdot \text{tg} \varphi}{r_z}, \frac{v_x^2 \text{tg} \varphi}{r_z}$	$\frac{U^2}{r_z}$	10^{-5} m.s^{-2}
$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{\Delta P}{\rho_0 L}$	10^{-3} m.s^{-2}

4 Základní typy proudění

4.1 Geostrofické proudění, Rossbyho číslo

Hlavní příčinou pohybu vzduchu v atmosféře je nehomogenita tlakového pole. K základním tlakovým útvarům patří tlakové níže (cyklony), tlakové výše (anticyklony). Takovéto útvary jsou charakterizovány uzavřenými izobarami či izohypsami kolem centra těchto útvarů. Neuzavřené izobary (izohypsy) označují brázd nízkého a hřebeny vysokého tlaku vzduchu. V důsledku rozdílného rozložení tlaku na zemském povrchu působí na vzduchové částice horizontální složky síly tlakového gradientu, které se snaží vyrovnat zmíněné tlakové rozdíly. Bez působení další síly v atmosféře by se částice pohybovaly kolmo k izobarám a došlo by v poměrně krátkém časovém intervalu k vyrovnání těchto změn a tím by bylo zamezeno dlouhodobějšímu trvání tlakových útvarů. Mějme tedy situaci, kdy se částice nachází v bodě A (obr. 1) a ta se začne působením horizontálního tlakového gradientu pohybovat do míst nižšího tlaku vzduchu (N). Jakmile však začne její pohyb vůči zemskému povrchu, začne na částici působit i Coriolisova síla, která stáčí její trajektorii na severní polokouli vpravo (na jižní polokouli vlevo) a to tak dlouho, dokud se neustaví rovnováha mezi horizontálními složkami síly tlakového gradientu a Coriolisovy síly v bodě B. Působící síly jsou stejně velké, opačného směru, tzn. že daná vzduchová částice se dále pohybuje rovnoměrným a přímočarým pohybem (neuvažujeme-li sílu tření) podél zakreslených přímkových izobar.



Obrázek 1: Vznik geostrofického proudění

Provedeme-li měřítkovou analýzu (viz Tabulka 1) jednotlivých členů rovnice (40), dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= -\frac{1}{\rho}\nabla_H p + f\vec{v} \times \vec{k} \\ 10^{-4} &\approx -10^0 \cdot 10^{-3} + 10^{-4} \cdot 10^1\end{aligned}$$

tedy zrychlení vyskytující se na levé straně rovnice (40) zpravidla bývá u velkoprostorových atmosférických pohybů o jeden až dva řády menší než velikosti

členů na pravé straně této rovnice, zrychlení je tak reprezentováno relativně malým rozdílem dvou velkých členů vyjadřujících působení horizontálního tlakového gradientu a Coriolisovy síly. Z měření v reálné atmosféře není obvykle možné určit tento rozdíl s dostatečnou přesností, a proto často předpokládáme nulové zrychlení a horizontální složky síly tlakového gradientu a Coriolisovy síly přesně v rovnováze, tj. stejně velké, ale opačného směru. Takové horizontální stacionární proudění nazýváme geostrofickým prouděním nebo geostrofickým větrem.

Vztah pro výpočet rychlosti geostrofického větru \vec{v}_g získáme z rovnice (40), položíme-li v ní $\vec{v} = 0$ a členy na pravé straně vektorově vynásobíme zprava jednotkovým vektorem \vec{k} orientovaným ve směru vertikální souřadnicové osy z . Úpravou vektorového součinu dostaneme

$$f\vec{v} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) - \vec{k} \cdot (f\vec{v} \cdot \vec{k}) = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} \times \vec{k}.$$

Druhý člen na levé straně je pro horizontální proudění nulový ($\vec{v} \cdot \vec{k} = 0$ pro horizontální proudění), tím dostaneme pro rychlost geostrofického větru v z -systému vzorec

$$\vec{v}_g = -\frac{1}{\rho f} \nabla_{HP} \times \vec{k} = -\frac{\alpha}{f} \nabla_{HP} \times \vec{k}, \quad (71)$$

z jehož rozboru plyne, že geostrofický proud směřuje rovnoběžně s izobarami a na severní polokouli se vyšší hodnoty tlaku nacházejí vpravo od směru proudění, nižší tlak je vlevo (na jižní polokouli naopak). Tento závěr se označuje jako Buys-Ballotovo pravidlo. Protože při zavedení pojmu geostrofického větru používáme předpoklad, podle něž je celkové (nejen tečné, ale i normálové) zrychlení pohybu vzduchu rovno nule, musí mít izobary (izohypsy) v tomto případě přímkový tvar. Přihlédneme-li k (16), obdržíme vyjádření rychlosti geostrofického větru v p -systému

$$\vec{v}_g = -\frac{g}{f} \nabla_p z \times \vec{k} = -\frac{\alpha}{f} \nabla_p \Phi \times \vec{k}, \quad (72)$$

resp. σ -systému

$$\vec{v}_g = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\sigma}{f} \nabla_\sigma p + \frac{\rho}{f} \nabla_\sigma \Phi \right) \times \vec{k}. \quad (73)$$

Ve vzorcích (71- 73) značí ρ hustotu vzduchu, α jeho měrný objem, f Coriolisův parametr, p tlak vzduchu, g velikost tíhového zrychlení a Φ geopotenciál.

Geostrofický vítr je prvním přiblížením reálného proudění v atmosféře a jen málokdy odpovídá skutečnému větru. Nicméně pro atmosférické pohyby velkých měřítek probíhá v mírných a vysokých zeměpisných šířkách neustálé přizpůsobování skutečného proudění ke geostrofickému větru. Jestliže se pole proudění a tlaku vzduchu v dané oblasti výrazně odchyluje od podmínky geostrofické aproximace, dode během relativně krátkého časového intervalu několika hodin k přestavbě obou polí tak, se skutečný pohyb vzduchu přiblíží geostrofickému proudění. Tento poznatek platí však pouze ve volné atmosféře kde proudění není ovlivňováno třením o zemský povrch. Geostrofická aproximace je rovněž nepoužitelná v nízkých zeměpisných šířkách, neboť pro horizontální proudění klesá na rovníku velikost horizontální složky Coriolisovy síly k nule.

Bezrozměrný poměr velikosti zrychlení pohybu vzduchových částic a velikostí Coriolisova zrychlení se nazývá Rossbyho číslo Ro . Použijeme-li jako U , L , f_0

měřítkové charakteristiky rychlosti horizontálního proudění, rozměrů tlakových útvarů a Coriolisova parametru, je z rozměrové analýzy zřejmé, že

$$Ro = \frac{U^2/L}{f_0 U} = \frac{U}{f_0 L}. \quad (74)$$

Zvolíme-li za L poloměr křivosti proudnic, který lze nahradit poloměrem křivosti izobar či izohyps, pak v případě geotrofického větru platí $L \rightarrow 0$ a tedy $Ro \rightarrow 0$. Za běžných situací dosahují poloměry křivosti řádově 10^5 m, horizontální rychlosti větru $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a Coriolisův parametr $f_0 = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (viz Tabulka 1), z čehož dostáváme řádový odhad pro $Ro \approx 10^0$. Provedeme-li obdobný odhad pro tornádo (rychlost $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a poloměr 300 m) dotaneme Ro řádově 10^3 . Je tedy vidět, že v takovém případě klesá význam Coriolisovy síly a geotrofická aproximace je nevhodující.

4.2 Gradientové proudění

Geotrofický vítr je předchozí kapitole zaveden jako ideální horizontální proudění v atmosféře, jehož celkové (tečné i normálové) zrychlení se rovná nule. V tomto případě musí mít proudnice přímkový tvar a vzhledem k tomu, že geotrofický vítr směřuje podél izobar (izohyps), je zřejmé, že nutnou, ale nikoli postačující podmínkou pro přesný souhlas skutečného a geotrofického proudění je přímkový tvar izobar (izohyps). V reálných případech jsou izobary a izohypsy jistým způsobem (cyklonálně nebo anticyklonálně) zakřiveny, a proto se skutečným podmínkám více blíží tzv. gradientové proudění, neboli gradientový vítr, u nějž sice předpokládáme nulové tečné, ale nenulové normálové zrychlení.

Chceme-li nyní získat vzorec vhodný ke stanovení rychlosti gradientového větru, dosadíme na levou stranu rovnice (40) vektor normálového zrychlení, který lze vyjádřit ve tvaru $-K_H v \vec{v} \times \vec{k}$, kde \vec{v} značí vektor rychlosti horizontálního proudění, v velikost této rychlosti, \vec{k} jednotkový vektor orientovaný ve vertikálním směru a K_H je křivost proudnice definovaná jako převrácená hodnota velikosti poloměru křivosti v uvažovaném bodě, přičemž ($K_H > 0$, resp. $K_H < 0$ při cyklonálním, resp. anticyklonálním zakřivení na severní polokouli, na jižní polokouli opačně). Místo křivosti proudnic lze s dostatečnou přesností použít křivost izobar nebo izohyps. Tímto postupem dostaneme z (40)

$$-K_H v \vec{v} \times \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} + f \vec{v} \times \vec{k},$$

a po vektorovém vynásobení vektorem \vec{k} zprava získáme

$$(-K_H v \vec{v} \times \vec{k}) \times \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} \times \vec{k} + (f \vec{v} \times \vec{k}) \times \vec{k},$$

což lze rozepsáním vektorového součinu dále upravit do tvaru

$$K_H v \vec{v} (\vec{k} \cdot \vec{k}) = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} \times \vec{k} - f \vec{v} (\vec{k} \cdot \vec{k}),$$

následně dostáváme

$$\vec{v} \left(1 + \frac{K_H v}{f} \right) = -\frac{1}{\rho f} \nabla_{HP} \times \vec{k}.$$

Člen na pravé straně rovnice je dle (71) roven rychlosti geostrofickému větru, můžeme tedy psát

$$\vec{v} \left(1 + \frac{K_H v}{f} \right) = \vec{v}_g, \quad (75)$$

Odtud dostáváme

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_g}{1 + K_H v f^{-1}}$$

kde v představuje vektor rychlosti gradientového větru, který budeme v dalším značit symbolem \vec{v}_{gr} .

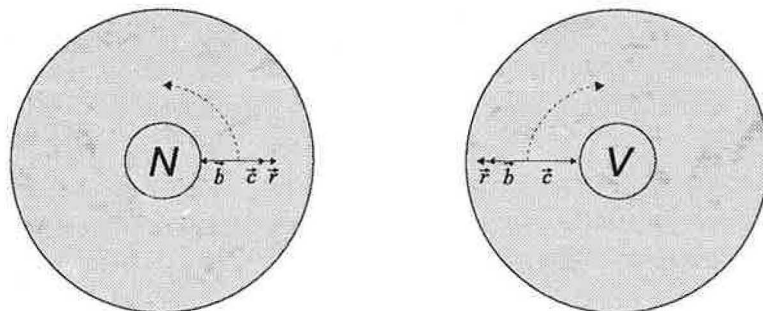
Dopustíme se zanedbatelné chyby, pokud na pravé straně posledního výrazu použijeme místo velikosti rychlosti gradientového proudění velikost geostrofického větru. Tj

$$\vec{v}_{gr} = \frac{\vec{v}_g}{1 + K_H v_g f^{-1}} \quad (76)$$

a tento vztah se obvykle používán pro výpočet vektoru rychlosti gradientového větru. Je zřejmé, že v případě cyklonálního zakřivení izobar (izohyps) má druhý člen ve jmenovateli kladnou hodnotu a rychlost gradientového větru je pak menší než rychlost geostrofického proudění. Naproti tomu při anticyklonálním zakřivení převyšuje velikost rychlosti gradientového větru geostrofickou rychlost. Tento závěr je platný pro severní i jižní polokouli, neboť při přechodu rovníku se mění znaménko nejen křivosti ale i Coriolisova parametru f .

V případě gradientového větru jsou ve vzájemné rovnováze síla horizontálního tlakového gradientu \vec{b} , horizontální složka Coriolisovy síly \vec{c} a odstředivá síla \vec{r} vyvolaná horizontálním zakřivením proudnic. Vertikální složka Coriolisovy síly je meteorologii zpravidla zanedbávána, neboť má ve srovnání se silou tíže nejméně o čtyři řády menší hodnotu, proto dále místo o horizontální složce Coriolisovy síly mluvit přímo o Coriolisově síle.

Působení a vzájemnou orientaci tří právě zmíněných sil pro cyklonální, resp. anticyklonální zakřivení proudnic na severní polokouli ukazuje obr. 2 na němž čárkovaná šipka znázorňuje směr gradientového proudění.



Obrázek 2: Rovnováha sil při gradientovém proudění

Nezjednodušené vyjádření velikosti rychlosti gradientového proudění v_{gr} obdržíme tak, že rovnici (75) přepíšeme za předpokladu

$$1 + \frac{K_H v_{gr}}{f} > 0 \quad (77)$$

pro velikosti vektoru $\vec{v} \equiv \vec{v}_{gr}$ a \vec{v}_g , tj.

$$v_{gr} \left(1 + \frac{K_H v_{gr}}{f} \right) = v_g \quad v_{gr} > 0, \quad v_g > 0. \quad (78)$$

Odtud získáme kvadratickou rovnici

$$v_{gr}^2 + \frac{f}{K_H} v_{gr} - \frac{f}{K_H} v_g = 0, \quad (79)$$

jejíž dvě řešení mají tvar

$$v_{gr} = -\frac{f}{2K_H} \pm \left(\frac{f^2}{4K_H^2} + \frac{f}{K_H} v_g \right)^{1/2}. \quad (80)$$

Rychlost gradientového proudění bereme $v_g > 0$, proto má fyzikální význam pouze kořen

$$v_{gr} = -\frac{f}{2K_H} + \left(\frac{f^2}{4K_H^2} + \frac{f}{K_H} v_g \right)^{1/2} = \frac{f}{2K_H} \left[\left(1 + \frac{4K_H v_g}{f} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (81)$$

přičemž musí být splněna podmínka

$$1 + \frac{K_H v_g}{f} > 0. \quad (82)$$

Tato podmínka je pro cyklonální zakřivení splněna vždy (na severní i jižní poloce), avšak při anticyklonálním zakřivení je třeba předpokládat

$$4v_g \left| \frac{K_H}{f} \right| < 1, \quad \text{tzn.} \quad v_g < \left| \frac{f}{4K_H} \right|. \quad (83)$$

Neuvažujeme případ, kdy je nulová rychlost geostrofického i gradientového proudění. Tato situace by zřejmě mohla nastat jen v situacích, kdy je tlakové pole v horizontálních rovinách dokonale homogenní, tedy nepůsobí síla horizontálního tlakového gradientu.

Zavedeme-li pojem barické proudění jako takové proudění v atmosféře, kdy síla horizontálního tlakového gradientu a Coriolisova síla směřují na vzájemně opačné strany, potom geostrofický vítr vždy představuje barické proudění. Podmínka (77) pak znamená, že směr gradientového proudění předpokládáme shodný se směrem geostrofického větru, tzn. že i gradientové proudění je barickým prouděním. Naopak takové proudění, kdy síla horizontálního tlakového gradientu a Coriolisova síla jsou orientovány na tutéž stranu proudnice, označujeme jako antibarické. Pro antibarické gradientové proudění je třeba v (75) předpokládat

$$1 + \frac{K_H v_{gr}}{f} < 0$$

což zřejmě nemůže být splněno pro cyklonální zakřivení proudnic na severní i jižní polokouli. Místo (78) potom použijeme

$$v_{gr} \left(1 + \frac{K_H v_{gr}}{f} \right) = -v_g,$$

opět získáme kvadratickou rovnici

$$v_{gr}^2 + \frac{f}{K_H} v_{gr} + \frac{f}{K_H} v_g = 0, \quad (84)$$

jejímž řešením je

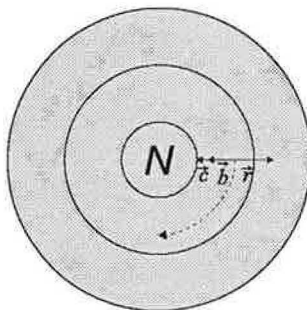
$$v_{gr} = -\frac{f}{2K_H} + \left(\frac{f^2}{4K_H^2} - \frac{f}{K_H} v_g \right)^{1/2} = \frac{f}{2K_H} \left[\left(1 - \frac{4K_H v_g}{f} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (85)$$

nyní musí být splněna podmínka

$$1 - \frac{K_H v_g}{f} > 0. \quad (86)$$

již vyhovuje jakékoliv anticyklonální zakřivení proudnic.

Antibarické proudění se nikdy nevyskytuje jako součást velkoprostorové atmosférické cirkulace. Vyskytuje se u některých vzdušných vírů (zejména v nízkých zeměpisných šířkách), jejichž poloměry dosahují desítek nebo stovek metrů. Situace je znázorněna na obr. 3.



Obrázek 3: Rovnováha sil při antibarickém gradinetovém proudění

4.3 Cyklostrofické proudění

V cirkulacích malých měřítek nabývá Coriolisova síla řádově menších hodnot ve srovnání se silou horizontálního tlakového gradientu a s odstředivou silou r . Zanedbáme-li ji úplně, dostaneme z gradientového větru tzv. cyklostrofické proudění odpovídající rovnováze mezi silou horizontálního tlakového gradientu a odstředivou silou horizontálního zakřivení proudnic. Coriolisovu sílu lze zanedbat

v nízkých zeměpisných šířkách i pro cirkulační systémy velkých rozměrů, neboť Coriolisův parametr a tím i horizontální složka Coriolisovy síly v nízkých zeměpisných šířkách klesají k nule. Na levou stranu rovnice (40) dosadíme normálové zrychlení $-K_H v \vec{v} \times \vec{k}$ a na pravé straně zanedbáme Coriolisovu sílu $f \vec{v} \times \vec{k}$, získáme vztah

$$-K_H v \vec{v} \times \vec{k} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP},$$

který po vynásobení jednotkovým vektorem \vec{k} zprava a úpravou vektorového součinu upravíme do tvaru

$$K_H v \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} \times \vec{k}, \quad (87)$$

s využitím (71) pak platí

$$K_H v_c \vec{v}_c = -\frac{1}{\rho} \nabla_{HP} \times \vec{k} = f \vec{v}_g, \quad (88)$$

kde \vec{v}_c představuje vektor rychlosti cyklostrofického proudění a v_c velikost této rychlosti ($v_c > 0$). Z (88) vyplývá, že při cyklonálním zakřivení proudnic je (na obou polokoulích) směr cyklostrofického proudění totožný se směrem geostrofického větru, přičemž velikost cyklostrofické rychlosti v_c je dána vztahem

$$v_c^2 = \frac{1}{\rho} \left| \frac{\nabla_{HP} \times \vec{k}}{K_H} \right| = \frac{f}{K_H} v_g. \quad (89)$$

Poslední členy ve výrazech (88 - 89) jsou však v těsné blízkosti rovníku nepoužitelné, neboť zde $f \rightarrow 0$ a geostrofická aproximace pozbývá významu. V tomto případě je nutno se v (88 - 89) omezit na první část uvedených vztahů. V přirozeném souřadném systému pak dostáváme

$$v_c^2 = -\frac{1}{K_H} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (90)$$

Kde n reprezentuje horizontální souřadnici kolmou ke směru proudění.

4.4 Inerční proudění

Jiným příkladem proudění ve volné atmosféře je tzv. inerční proudění. Vzniká tehdy, když makroskopická částice vzduchu pronikne do oblasti s nulovým horizontálním gradientem atmosférického tlaku. Neuvažujeme-li rovníkovou zónu, má rovnice rovnovážného horizontálního proudění v tomto případě tvar

$$-K_H v \vec{v} \times \vec{k} = f \vec{v} \times \vec{k} \quad (91)$$

a vyjadřuje rovnováhu mezi odstředivou silou vznikající v důsledku horizontálního zakřivení proudnic a Coriolisovou silou. Pokud by hodnota Coriolisova parametru byla nezávislá na zeměpisné šířce, pohyb zmíněné vzduchové částice by probíhal po tzv. inerční kružnici, do jejíhož středu směřuje vektor Coriolisovy síly \vec{c} , zatímco odstředivá síla \vec{r} je stejně velká, ale opačného směru. Protože Coriolisova síla směřuje na severní (jižní) polokouli vpravo (vlevo) vzhledem ke

směru proudění, obíhají vzduchové částice na obou polokoulích po inerční kružnici v anticyklonálním smyslu.

Pro velikost rychlosti inerčního proudění v_{in} lze z (91) odvodit vztah

$$v_{in} = -\frac{f}{K_H}, \quad (92)$$

přičemž křivost inerční kružnice se rovná převrácené hodnotě jejího poloměru R_{in} , tzn.

$$v_{in} = -fR_{in}, \quad R_{in} < 0 \quad \text{pro severní polokouli} \quad (93)$$

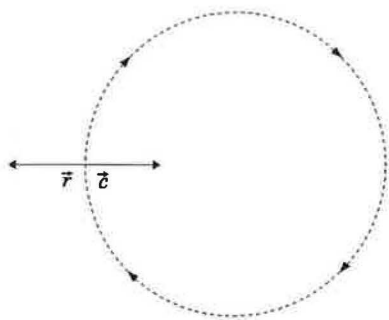
Dobu oběhu vzduchové částice po inerční kružnici T_{in} nazýváme inerční periodou a vyjádříme ji vztahem

$$T_{in} = 2\pi|R_{in}|v_{in}, \quad (94)$$

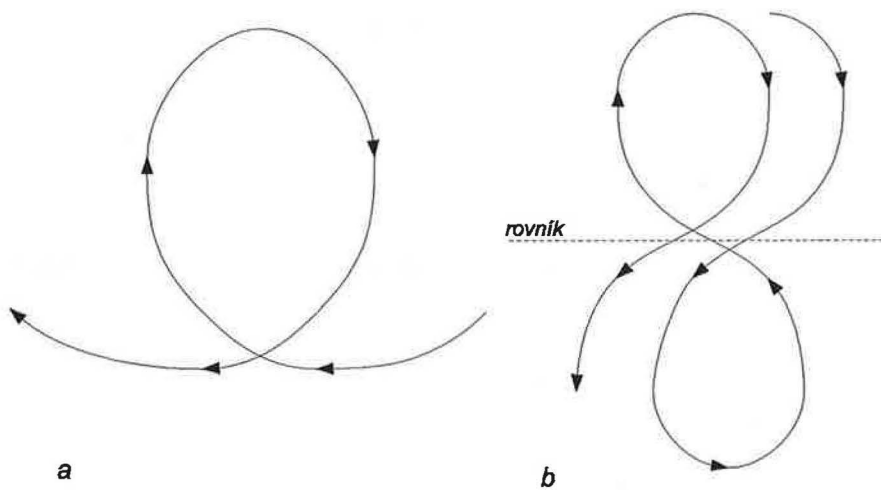
nebo po přihlédnutí k (93)

$$T_{in} = 2\pi|f|. \quad (95)$$

Pro určitou zeměpisnou šířku a danou rychlost proudění lze z (93) určit velikost poloměru inerční kružnice. Dosadíme-li $v_{in} = 10m \cdot s^{-1}$, pak pro střední zeměpisné šířky obdržíme $|R_{in}| \approx 100km$. Pokud budeme uvažovat šířkovou závislost Coriolisova parametru f , pak pro určitou danou v_{in} vyplývá z (93), že poloměr R_{in} je větší v části blíže rovníku a trajektorie vzduchových částic vykonávajících inerční pohyb se deformují a místo kružnice nabývají podoby znázorněné na obr. 5a. Pokud vzduchová částice překročí rovník, změní se směr působení Coriolisovy síly a trajektorie částic odpovídá tvaru na obr 5b.



Obrázek 4: Inerční proudění na severní polokouli bez šířkové závislosti Coriolisova parametru



Obrázek 5: Inerční proudění na severní polokouli a přes rovník

4.5 Ageostrofické proudění

Geostrofické proudění je jen aproximací skutečného proudění a málokdy je situace v atmosféře taková, že odpovídá geostrofickému proudění. Geostrofická aproximace představuje ideální rovnovážné horizontální a stacionární proudění v atmosféře, kdy jsou v rovnováze horizontální složky síly tlakového gradientu a Coriolisovy síly a pohyb makroskopických vzduchových částic nemá tečné ani normálové zrychlení. Stav, který by byl popsán pouze geostrofickým prouděním by reprezentoval situaci úplné dynamické rovnováhy, tj i bez časového vývoje v poli atmosférického tlaku. Veškeré dynamické změny v atmosféře, časový vývoj pole tlaku vzduchu, jeho přestavby apod. jsou podmíněny ageostroficitou atmosférického proudění. Vektorový rozdíl mezi rychlostí skutečného (aktuálního) proudění vzduchu \vec{v} rychlostí geostrofického větru \vec{v}_g se označuje jako rychlost ageostrofického proudění \vec{v}_{ag} . Tedy vektor rychlosti skutečného proudění si lze představit jako součet vektoru rychlosti geostrofického a vektoru ageostrofického proudění, tj.

$$\vec{v} = \vec{v}_g + \vec{v}_{ag}. \quad (96)$$

Vektor rychlosti ageostrofického proudění \vec{v}_{ag} má proto podstatný význam pro dynamiku dějů v zemském ovzduší, a to přesto, že jeho velikost je obvykle značně (často řádově) menší ve srovnání s velikostí geostrofické rychlosti.

Při odvození vztahu pro výpočet rychlosti ageostrofického proudění \vec{v}_{ag} vyjdeme z pohybové rovnice v relativním souřadnicovém systému (27).

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \nabla p - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{g} + \vec{F}, \quad (97)$$

kde $\alpha = 1/\rho$ značí měrný objem vzduchu, p atmosférický tlak, ∇ diferenciální operátor ($\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$), $\vec{\Omega}$ vektor úhlové rychlosti zemské rotace, \vec{g} tíhové zrychlení a \vec{F} sílu tření vztahenou k jednotce hmotnosti vzduchu. První, resp. druhý člen na pravé straně reprezentuje sílu tlakového gradientu, resp. Coriolisovu sílu působící na jednotku hmotnosti. Označíme-li opět \vec{k} jednotkový vektor orientovaný ve směru vertikální souřadnicové osy z , lze (97) přepsat do tvaru

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\alpha \nabla_H p - \alpha \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} + \vec{k} g + \vec{F}, \quad (98)$$

v němž g představuje velikost vektoru tíhového zrychlení a ∇_H dvojrozměrný diferenciální operátor ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$). Vynásobením naposled uvedeného vztahu jednotkovým vektorem \vec{k} zprava získáme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{k} = -\alpha \nabla_H p \times \vec{k} + 2\vec{\Omega} v_z - 2\Omega_z \vec{v} + \vec{F} \times \vec{k}, \quad (99)$$

přičemž v_z značí vertikální složku vektoru rychlosti proudění a Ω_z tutéž složku úhlové rychlosti zemské rotace. Druhý člen na pravé straně lze rozepsat jako

$$2\vec{\Omega} v_z = 2\vec{\Omega}_H v_z + 2\vec{\Omega}_z v_z, \quad (100)$$

kde Ω_H , resp. Ω_z představuje orientovaný průmět vektoru $\vec{\Omega}$ do horizontální roviny, resp. do směru vertikální osy z . Po vydělení rovnice (99) Coriolisovým parametrem $f = 2\Omega_z$ dostaneme

$$\vec{v} = -\frac{\alpha}{f} \nabla_H p \times \vec{k} - \frac{1}{f} \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{k} + \frac{2}{f} \vec{\Omega}_H v_z + \frac{2}{f} \Omega_z v_z + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}, \quad (101)$$

První člen na pravé straně představuje rychlost geostrofického proudění, tzn. že vzhledem k (96) lze psát

$$\vec{v}_{ag} = -\frac{1}{f} \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{k} + \frac{2}{f} \vec{\Omega}_H v_z + \frac{2}{f} \Omega_z v_z + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}, \quad (102)$$

nebo omezíme-li se pouze na horizontální složky proudění

$$\vec{v}_{ag} = -\frac{1}{f} \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{k} + \frac{2}{f} \vec{\Omega}_H v_z + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}. \quad (103)$$

Rozepsáním totální derivace $\partial\vec{v}/\partial t$ prostřednictvím Eulerova vztahu, obdržíme z (103)

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ag} = & -\frac{1}{f} \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \times \vec{k} - \frac{1}{f} [(\vec{v}_H \cdot \nabla_H)\vec{v}] \times \vec{k} - \\ & -\frac{1}{f} v_z \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \times \vec{k} + \frac{2}{f} \vec{\Omega}_H v_z + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}, \end{aligned} \quad (104)$$

kde \vec{v}_H značí orientovaný průmět vektoru rychlosti proudění do horizontální roviny.

Diskutujme nyní jednotlivé šleny na pravé straně (104). První z nich reprezentuje složku ageostrofického proudění spojenou s nestacionárností pohybového pole v ovzduší. Při analýze atmosférického proudění velkoprostorového měřítka se nedopustíme zpravidla podstatnější chyby, dosadíme-li v tomto členu za \vec{v} rychlost geostrofického větru \vec{v}_g danou v z -systému vztahem (71). Tímto způsobem obdržíme za předpokladu časově konstantního měrného objemu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f} \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \times \vec{k} &= \frac{\alpha}{f^2} \left(\nabla_H \frac{\partial p}{\partial t} \times \vec{k} \right) \times \vec{k} = \\ &= \frac{\alpha}{f^2} \nabla_H \frac{\partial p}{\partial t} (\vec{k} \cdot \vec{k}) + \vec{k} \cdot \left(\nabla_H \frac{\partial p}{\partial t} \cdot \vec{k} \right) = \\ &= \frac{\alpha}{f^2} \nabla_H \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \quad (105)$$

neboť skalární součin vzájemně kolmých vektorů \vec{k} a $\nabla_H(\partial p/\partial t)$ je nulový. Mluvíme pak o izalobarické (alobarické) složce ageostrofického proudění, jejíž vektor směřuje do oblasti gradientu poklesu tlakové tendence. Vyjádříme-li tuto složku v p -systému, tzn. použijeme-li místo (71) vztah (72), získáme

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial\vec{v}_g}{\partial t} \times \vec{k} = -\frac{g}{f^2} \nabla_p \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{f^2} \nabla_p \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (106)$$

kde g značí velikost tíhového zrychlení, z výšku dané izobarické plochy $p = \text{konst}$ a Φ geopotenciál. V tomto případě se obvykle užívá názvu izallohyptická (allohyptická) složka ageostrofického proudění.

Druhý člen na pravé straně (104) je výhodné popisovat v přirozeném souřadnicovém systému. Vektor rychlosti proudění \vec{v} zde máme jako $v\vec{t}$, když \vec{t} značí jednotkový vektor orientovaný ve směru proudění (tj. ve směru souřadnicové osy s). Platí tedy

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial s} \vec{t} + v \frac{\partial\vec{t}}{\partial s}. \quad (107)$$

Vektor derivace $\partial t/\partial s$ je kolmý k \vec{t} (ke směru proudění) a lze jej zřejmě vyjádřit výrazem $K_H \vec{n}$, kde K_H reprezentuje horizontální křivost proudnic a \vec{n} jednotkový horizontální vektor směřující kolmo a vlevo na směr proudění. Tak můžeme psát

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f}[(\vec{V}_H \cdot \nabla_H)\vec{V}] \times \vec{k} &= -\frac{1}{f}v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{t} \times \vec{k} - \frac{1}{f}v^2 K_H \vec{n} \times \vec{k} = \\ &= \frac{1}{f}v \frac{\partial v}{\partial s} \vec{n} - \frac{\partial 1}{\partial f} K_H v^2 \vec{t} = \\ &= \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \vec{n} - \frac{1}{f} K_H v^2 \vec{t}. \end{aligned} \quad (108)$$

První člen ve výsledku na pravé straně (108) reprezentuje tzv. kinetickou složku ageostrofického proudění, směřující kolmo a vlevo vzhledem ke směru proudění, jestliže jeho rychlost podél proudnic vzrůstá. V opačném případě zmenšování rychlosti proudění tato složka míří vpravo od proudnice. Druhý člen představuje cyklostrofickou složku ageostrofického proudění, orientovanou při cyklonálním (anticyklonálním) zakřivení proudnic proti směru (ve směru) vzdušného proudu. Taktéž pro případ kinetické a cyklostrofické složky se za rychlost proudění \vec{v} obvykle dosazuje geostrofická rychlost \vec{v}_g , což lze vzhledem k tomu, že v cirkulačních systémech synoptického měřítká bývá rozdíl vektoru rychlosti skutečného a geostrofického proudění řádově menší než samotný vektor geostrofické rychlosti. Třetí člen na pravé straně (104), označovaný jako konvekční složka ageostrofického proudění, závisí na vertikálním stříhu rychlosti proudění $\partial \vec{v}/\partial z$ a na velikosti i znaménku vertikální rychlosti v_z . Rychlost proudění opět aproximujeme geostrofickou rychlostí \vec{v}_g a dále použijeme pro vyjádření vertikálního stříhu geostrofického větru v z -systému vztah

$$\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial z} = -\frac{g}{fT} \nabla_H T \times \vec{k},$$

Pak obdržíme po úpravě

$$-\frac{1}{f} v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \times \vec{k} = -\frac{g v_z}{f^2 T} \nabla_H T, \quad (109)$$

kde T značí teplotu vzduchu v kelvinech, f Coriolisův parametr a g velikost tíhového zrychlení. Konvekční složka ageostrofického proudění působí při vzestupném pohybu vzduchu ($v_z > 0$) ve směru poklesu horizontálního gradientu teploty, naopak u sestupných pohybů ($v_z < 0$) míří v horizontální rovině do nejteplejšího vzduchu. V p -systému obdržíme pro tuto složku vyjádření

$$\frac{\omega}{f^2 T} \nabla_p T,$$

když ω značí zobecněnou vertikální rychlost $\omega \equiv dp/dt$ a ∇_p dvojrozměrný diferenciální operátor ($\partial/\partial x, \partial/\partial y$) uvažovaný v hladině konstantního tlaku p . Předposlední člen na pravé straně (104) představuje složku ageostrofického proudění, která při vzestupných pohybech ($v_z > 0$, $\omega < 0$) směřuje na severní polokouli ($f > 0$) ve směru průmětu vektoru úhlové rychlosti do horizontální roviny tečné v daném místě k povrchu Země, tzn. k severu. Při sestupných pohybech ($v_z < 0$, $\omega > 0$) je orientována v opačném směru, tj. k jihu. Obrácené závěry platí

pro jižní polokouli, kde $f < 0$.

Poslední člen na pravé straně rovnice (104) charakterizuje ageostrofickou složku proudění spojenou s existencí síly tření. Tato složka se významně uplatňuje pouze v mezní vrstvě atmosféry, ve volné atmosféře je zanedbatelná. Vzhledem k tomu, že síla tření vždy působí proti směru pohybu vzduchu, směřuje tato ageostrofická složka kolmo ke směru proudění, a to na severní (jižní) polokouli vlevo (vpravo), tj. u barického proudění vždy do strany s nižším atmosférickým tlakem.

Aproximujeme-li tedy v izallobarické, kinetické, cyklostrofické a konvekční složce ageostrofického proudění rychlost větru geostrofickou rychlostí v_g , obdržíme v z -systému toto vyjádření ageostrofické rychlosti

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ag} = & -\frac{\alpha}{f^2} \nabla_H \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_g^2}{2} \right) \vec{n} - \frac{1}{f} K_H v_g^2 \vec{t} - \\ & - \frac{g v_z}{f^2 t} \nabla_H T + \frac{2}{f} \vec{\Omega}_H v_z + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}. \end{aligned} \quad (110)$$

Ekvivalentní vztah v p -systému má zřejmě tvar

$$\begin{aligned} \vec{v}_{ag} = & -\frac{g}{f^2} \nabla_p \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v_g^2}{2} \right) \vec{n} - \frac{1}{f} K_H v_g^2 \vec{t} - \\ & - \frac{\omega}{f^2 t} \nabla_p T + \frac{2\omega}{f g \rho} \vec{\Omega}_H + \frac{1}{f} \vec{F} \times \vec{k}. \end{aligned} \quad (111)$$

přičemž pro první člen na pravé straně se používá název izallohypťická (allohypťická) složka ageostrofického proudění. Pokud jde o orientaci izallobarické (izallohypťické), cyklostrofické a konvekční složky ageostrofického proudění, platí uvedené závěry pro severní i jižní polokouli. Kinetická složka však má na jižní polokouli opačnou orientaci vzhledem k proudnici, než odpovídá popsané situaci platné pro severní polokouli.

4.6 Pseudogeostrofický vítr

Jiné vyjádření horizontálního proudění získáme z pohybové rovnice v Lamb-Gromekově tvaru (59). Uvažujeme horizontální proudění, tj. $\vec{v} = \vec{v}(v_x, v_z, 0)$ a zanedbáváme sílu tření. Vynásobením této rovnice zprava vektorem \vec{k} dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{k} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \times \vec{k} - [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] \times \vec{k} = \\ = -\frac{1}{\rho} \nabla p \times \vec{k} - f(\vec{k} \times \vec{v}) \times \vec{k} \end{aligned} \quad (112)$$

Třetí člen na levé straně upravíme rozepsáním vektorového součinu

$$\begin{aligned} [\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})] \times \vec{k} &= -\vec{v}[\vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{v})] + (\nabla \times \vec{v})(\vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= \vec{v} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \equiv \vec{v} \xi, \end{aligned} \quad (113)$$

kde $\xi \equiv \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y$ nazýváme relativní vorticitou proudění. Poslední člen na pravé straně zjednodušíme

$$\begin{aligned} -f(\vec{k} \times \vec{v}) \times \vec{k} &= f\vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{v}) - f\vec{v}(\vec{k} \cdot \vec{k}) \\ &= -f\vec{v}, \end{aligned} \quad (114)$$

Tím dostaneme po úpravě z (112)

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{\xi + f} \nabla_{Hp} \times \vec{k} - \frac{\alpha}{\xi + f} \nabla_H \left(\frac{v^2}{2} \right) \times \vec{k} - \frac{\alpha}{\xi + f} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{k} \quad (115)$$

nebo v p -systému

$$\vec{v} = \frac{\alpha}{\xi + f} \nabla_p \Phi \times \vec{k} - \frac{\alpha}{\xi + f} \nabla_p \left(\frac{v^2}{2} \right) \times \vec{k} - \frac{\alpha}{\xi + f} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{k} \quad (116)$$

První člen na pravé straně (115), resp. (116) je označován jako pseudogeostrofický vítr (pseudogeostrofické proudění). Je zřejmé, že pro přímkové proudnice, kdy platí $\xi = 0$, se tento člen zjednoduší na vyjádření rychlosti geostrofického proudění. Druhý člen na pravé straně (115 - 116) bývá označován jako pseudokinetický vítr, třetí člen na pravé straně (115 - 116) se uplatňuje pouze v nestacionárním poli proudění a je analogem izalobarické složky ageostrofického proudění.

5 Energie proudění

Primárním zdrojem energie pro vznik, vývoj a udržování všeobecné cirkulace atmosféry i všech dílčích cirkulací v zemském ovzduší je sluneční záření. Teplo dodané atmosférickému systému zvyšuje jeho vnitřní a tím i potenciální energii. Rozložení příkonu je však velmi nerovnoměrné, a to nejen v závislosti na zeměpisné šířce a rozložení pevnin a oceánů, ale též díky prostorovým a časovým změnám propustnosti atmosféry, proměnlivému množství oblačnosti a dalším fyzikálním faktorům. To však působí nerovnoměrné rozložení vnitřní a potenciální energie. V důsledku nerovnoměrného rozložení potenciální a vnitřní energie pak v ovzduší dochází k produkci kinetické energie a rozvíjí se proudění v nejobecnějším smyslu. Avšak na kinetickou energii se nemůže transformovat veškerá potenciální a vnitřní energie obsažená ve vzduchu, ale pouze její menší část, která bývá označována jako dostupná potenciální energie. Pokud je pohybové pole v atmosféře takové, že horizontální rozložení hustoty vzduchu je přísně homogenní a platí podmínka hydrostatické rovnováhy, pak atmosféra sice obsahuje obrovskou potenciální a vnitřní energii, která je však prostorově rozložena tak, že nemůže být transformována na kinetickou energii, tzn. že dostupná potenciální energie je v tomto případě nulová. Pod pojmem dostupná potenciální energie tedy zpravidla rozumíme rozdíl mezi tzv. úplnou potenciální energií (tj. součet vlastní potenciální a vnitřní energie) a úplnou potenciální energií při vhodném rovnovážném stavu. Součet dostupné potenciální energie a kinetické energie je konstantní, uvažujeme-li atmosféru jako energeticky izolovaný systém. Rozvoj pohybů vzduchu pak probíhá na úkor dostupné potenciální energie. Označíme-li \tilde{E}_v vnitřní energii atmosférického systému v určitém výchozím nerovnovážném stavu a $\tilde{E}_{v, \min}$ vnitřní energii

referenčního stavu s minimální úplnou potenciální energií, pak bude dostupná potenciální energie \tilde{E}_D dána vztahem

$$\tilde{E}_D = \chi(\tilde{E}_v - \tilde{E}_{v \text{ min}}) = \frac{c_p}{c_v}(\tilde{E}_v - \tilde{E}_{v \text{ min}})$$

Dostupná potenciální energie představuje pouze 0,5 % a z této malé části se v kinetickou energii reálně transformuje asi jen desetina.

Vezmeme-li v úvahu celkový příkon sluneční energie, který na horní hranici atmosféry činí přibližně $1,73 \cdot 10^{17}$ W, tak z této energie je pouze malá část (v řádu procent) využita na kinetickou energii proudění atmosféry. Z toho malého podílu je ještě méně použito na samotné časové změny pole proudění vlivem ageostrofických složek proudění.

Porovnáme-li energii využitou na tyto změny s veškerou antropogenní energií (v současnosti řádově dosahuje 10^{13} W), dojdeme k poměrně překvapivému výsledku, že nejsou tyto hodnoty o mnoho řádů odlišné. Při rozvoji technologií výroby energie (termojaderná fúze) by nemuselo být nereálné zvýšení antropogenní energie o řád, čímž by došlo k řádovému vyrovnání těchto hodnot.

6 Závěr

Atmosférické proudění je ovlivňováno působením zejména silou tlakového gradientu, Coriolisovou silou, odstředivou silou a třením. Omezeníme-li se na horizontální pohyby, stacionární pole tlaku a zanedbání síly tření získáme gradientové proudění. Geostrofické, resp. cyklostrofické, resp. inerční proudění představuje dílčí případy, které dostáváme z gradientového proudění, zanedbáme-li zakřivení proudnic, resp. Coriolisovu sílu, resp. sílu horizontálního tlakového gradientu. Vezmeme-li v úvahu faktory zanedbané při odvození geostrofického proudění, potom dostaneme ke geostrofickému navíc ageostrofické složky a jejich součet je stále obecnější aproximací skutečného proudění. K nejvýznamějším ageostrofickým složkám patří izallohypťichý člen působící ve směru gradientu tlakové tendence. Další složkou je kinetické složka uplatňující se při působení tečného zrychlení. Cyklostrofická složka závisí na zakřivení proudnic a konvekční složka na horizontálním rozložení teploty. Alternativní vyjádření prouděné získáme z pohybové rovnice v Lamb-Gromekově tvaru. Takto získané proudění je nazývané pseudogeostrofické a je závislé i na relativní vorticitě.

Reference

- [1] Bednář J.: *Meteorologie*, Portál, Praha, 2003, str. 45.
- [2] Brdička M.: *Mechanika kontinua*, Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1959, str. 401.
- [3] Horský J., Novotný J., Štefaník M.: *Mechanika ve fyzice*, Academia, Praha, 2001, str. 155.
- [4] Kopáček J., Bednář J.: *Jak vzniká počasí*, Karolinum, Praha, 2005, str. 120.
- [5] Pechala F., Bednář J.: *Příručka dynamické meteorologie*, Academia, Praha, 1991, str. 171.
- [6] Škoda M., Zikmunda O.: *Objektivní metody předpovědi v synoptické meteorologii*, Hydrometeorologický ústav, Praha, 1966, str. 45.