Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Antonín Bohata

Variační počet a jeho použití

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jana Stará, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Učitelství fyziky-matematiky pro SŠ

Praha 2015

Poděkování

Rád bych poděkoval doc. Janě Staré, vedoucí mé diplomové práce, za inspiraci, podnětné diskuze a podporu. Díky ní jsem se naučil vhodnému přístupu k matematickému formulování problémům a překonávání nástrah při jejich řešení. Její zkušenosti a rady při výběru odborné literatury byly nedocenitelné.

V neposlední řadě děkuji také i mé rodině a přátelům za velkou morální podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona. Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 10.04.2015 Antonín Bohata

Obsah

Název práce: Variační počet a jeho použití
Autor: Antonín Bohata
Katedra: Katedra didaktiky matematiky
Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jana Stará, CSc., Katedra matematické analýzy
e-mail vedoucího: stara@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce pojednává o variačním počtu a jeho aplikacích. Jsou připomenuty základní pojmy z funkcionální analýzy nutné k formulaci variačních úloh. Dále je diskutována nejjednodušší úloha variačního počtu. Zejména je uvedena dobře známá Eulerova rovnice, která je nutnou podmínkou lokálního extrému daného funkcionálu. Výsledků je poté využito k řešení různých úloh z geometrie, fyziky a ekonomie. Některé z těchto příkladů mohou být použity k výuce na střední škole.
Klíčová slova: Eulerova rovnice, funkcionály, lokální extrémy, variační počet

Title: Application of Calculus of Variation
Author: Antonín Bohata
Department: Department of Mathematics Education
Supervisor: doc. RNDr. Jana Stará, CSc., Department of Mathematical Analysis
Supervisor's e-mail address: stara@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: The thesis deals with the calculus of variation and its applications. We recall the basic concepts from functional analysis that are needed to formulation of variational problems. Further, the simplest variational problem is discussed. In particular, we present well-known Euler's equation which is a necessary condition of a local extremum of the given functional. The results are then applied to solve various examples from geometry, physics, and economy. Some of these examples can be used to teach at secondary school.
Keywords: Euler's equation, functionals, local extrema, calculus of variation

Kapitola 1

Úvod

Již na vybraných středních školách se učí základy diferenciálního počtu reálných funkcí jedné reálné proměnné. Mezi standardní úlohy v této oblasti patří nalezení maxima a minima dané funkce. Jedná se o tzv. extremální úlohy. V řadě aplikací se však vyskytují extremální úlohy přesahující tento rámec. Příkladem takové úlohy je nalezení nejkratší spojnice dvou bodů v rovině. Formulujeme-li tuto otázku pomocí integrálu, ptáme se, pro jaký integrand z vhodně zvolené třídy funkcí nabývá integrál nejmenší hodnoty. Tento problém spadá do matematického oboru zvaného variační počet.

Diplomová práce je věnována užití diferenciálního počtu (resp. variačního počtu) k řešení úloh, v nichž hledáme nejmenší (resp. největší) hodnotu zobrazení do množiny reálných čísel. Aby bylo možné práci použít pro matematické semináře (resp. nadané studenty), je práce doplněna o témata zabývající se reálnými funkcemi a souvislostí jejich maxim (resp. minim) s chováním jejich první derivace.

V následující kapitole jsou prezentovány základy variačního počtu. Po krátké motivaci následuje přehled některých výsledků z teorie normovaných lineárních prostorů. Zejména se věnujeme zobrazením z lineárního normovaného prostoru do množiny reálných čísel, kterým se říká funkcionály. Pro tato zobrazení uvádíme zobecnění pojmů jako spojitost či diferenciál, která jsou známa ze základů matematické analýzy. Dále se zabýváme lokálními extrémy funkcionálů.

Třetí kapitola pojednává o nejjednodušší úloze variačního počtu. Je uvedena nutná podmínka pro lokální extrém funkcionálu, která je známá pod názvem Eulerova rovnice. Mimoto jsou také formulovány některé její důsledky. Zmiňujeme zde také známou úlohu o brachistochroně, jenž stála u zrodu variačního počtu.

Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny různé aplikace variačního počtu. Jako geometrickou aplikaci jsme zvolili izoperimetrickou úlohu, jenž vede na extremální problém s vazbou. Z fyzikálních aplikací je uveden pohyb nabité částice v homogenním elektrickém poli a také příklad na elektrický obvod. Zmíníme se i o ekonomické aplikaci týkající se maximalizace zisku monopolní firmy.

V příloze A pak uvádíme přehled základních vět diferenciálního počtu užitečných v extremálních úlohách. Dále následují aplikace těchto vět na různé typy úloh, které mohou být využity při výuce na střední škole.

Kapitola 2

Základy variačního počtu

2.1 Motivace

V této kapitole se budeme zabývat reálnými funkcionály. Pod reálným funkcionálem rozumíme zobrazení, které jistým funkcím přiřazuje reálná čísla. Populárně řečeno se budeme zabývat „funkcemi funkcí“. Uvidíme, že mnoho úloh z matematické analýzy, geometrie, fyziky, atd. lze velmi elegantně formulovat použitím funkcionálů. Abychom si utvořili představu, tak ukážeme několik příkladů funkcionálů.

První příklad je z geometrie.

Příklad 2.1.1. Uvažujme množinu všech spojitě diferencovatelných křivek, které spojují dva různé body v rovině. Předpokládáme pro jednoduchost, že křivky jsou popsány jako grafy funkcí f, které jsou definovány na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Jestliže každé takové křivce přiřadíme její délku, dostaneme funkcionál L. Předpis pro hodnotu funkcionálu je podle [14]

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Druhý příklad je z oblasti fyziky (konkrétně teoretické mechaniky).

Příklad 2.1.2. Nechť x je libovolná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$, U je zadaná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na $[a, b]$ a m je kladné reálné číslo. Potom předpis

$$S(x) = \int_a^b \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) - U(x(t))\,\mathrm{d}t,$$

kde x je poloha částice a $\dot{x}$ je její rychlost, definuje hodnotu funkcionálu S. Jak je ukázáno v [21], slouží funkcionál S k popisu pohybu tzv. testovací částice, na kterou působí síla popsaná interakční energií U.

Jako další příklad uvážíme obecnější situaci, která bude obsahovat předchozí dva příklady jako speciální případy.

Příklad 2.1.3. Nechť f je daná spojitě diferencovatelná funkce tří proměnných a x libovolná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na intervalu $[a, b]$. Předpis

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t.$$

zadává hodnotu funkcionálu F. Tento funkcionál je dobře definovaný, neboť z předpokladů plyne, že f, x a $\dot{x}$ jsou spojité funkce. Tedy integrand je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$, a proto integrál existuje.

Když už jsme si vytvořili jistou intuitivní představu o tom, co je funkcionál, můžeme přistoupit ke zkoumání některých jeho vlastností. Například se můžeme ptát, pro které funkce z uvažované množiny funkcí má funkcionál nejmenší (největší) hodnotu, pokud ovšem takováto nejmenší (největší) hodnota funkcionálu existuje. Formulujme tedy některé základní úlohy, které motivují tuto otázku.

Příklad 2.1.4. Najděte nejkratší rovinnou křivku popsanou grafem funkce, která spojuje dva dané různé body A a B. Jinak řečeno, najděte minimum funkcionálu

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Naše geometrická intuice nám říká, že taková křivka existuje a je to úsečka s počátečním bodem A a koncovým bodem B.

Dalším příkladem je slavná úloha, tzv. úloha o brachistochroně, které hrála významnou roli při zkoumání funkcionálů a přispěla ke vzniku variačního počtu.

Příklad 2.1.5. Nechť pohyb hmotného bodu v rovině je vázán na křivku (popsanou grafem funkce) s počátečním bodem $A[t_0, x(t_0)]$ a koncovým bodem $B[t_1, x(t_1)]$, kde $x(t_1) < x(t_0)$. Předpokládejme dále, že na tento bod působí už jen gravitace Země. Každé křivce můžeme přiřadit čas, který potřebuje hmotný bod k přesunu z bodu A do bodu B. Takové přiřazení je funkcionál. Úkolem je nalézt křivku, po které bude trvat pohyb hmotného bodu nejkratší čas.

Poslední příklad bude tzv. izoperimetrická úloha, kterou vyřešil slavný matematik L. Euler, zakladatel variačního počtu.

Příklad 2.1.6. Mezi všemi uzavřenými rovinnými křivkami, které mají pevně danou konečnou délku, najděte křivku, jenž obepíná největší část roviny, tj. část roviny s největším obsahem.

Ukazuje se, že hledanou křivkou je kružnice.

2.2 Lineární normované prostory

V předchozím odstavci jsme si na názorných příkladech ukázali možnosti formulací různých úloh pomocí funkcionálů. Abychom mohli řešit (nejen) zmíněné problémy, musíme si k tomu vybudovat vhodný aparát. Proto bude nutné zavést řadu pojmů a formulovat řadu vět, které nám ulehčí řešení našich úloh. Uvidíme, že řada pojmů bude analogií k pojmům z kurzů elementární matematické analýzy. Aby formulace výsledků byla přehledná, bude účelné se postavit na trochu abstraktnější úroveň. Podrobnosti o zavedených pojmech lze nalézt v [17, 20, 28].

Definice 2.2.1. Nechť $\mathcal{L}$ je neprázdná množina prvků. Nechť je každé dvojici prvků x, y z množiny $\mathcal{L}$ přiřazen (pomocí operace zvané sčítání) prvek množiny $\mathcal{L}$ (který označíme $x+y$). Nechť pro libovolný prvek x množiny $\mathcal{L}$ a libovolné reálné číslo α je přiřazen (pomocí operace zvané násobení číslem) prvek množiny $\mathcal{L}$ (jenž označíme αx). Množina $\mathcal{L}$ spolu se zavedenými operacemi se nazývá (reálný) **lineární prostor** (nebo také vektorový prostor), jestliže jsou splněny následující axiomy:

(i) $x + y = y + x$ pro libovolné prvky x a y z $\mathcal{L}$;

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ pro libovolné prvky x, y a z z $\mathcal{L}$;

(iii) v $\mathcal{L}$ existuje prvek, označený 0 a nazývaný nulový prvek, takový, že platí $x + 0 = x$ pro každý prvek x z $\mathcal{L}$;

(iv) pro každý prvek x množiny $\mathcal{L}$ existuje prvek, označený $-x$, takový, že $x + (-x) = 0$;

(v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pro libovolné prvky x a y z $\mathcal{L}$ a libovolné reálné číslo α;

(vi) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ pro libovolný prvek x z $\mathcal{L}$ a libovolná reálná číslo α a β;

(vii) $1x = x$ pro libovolný prvek x z $\mathcal{L}$;

(viii) $0x = 0$ pro libovolný prvek x z $\mathcal{L}$.

Poznamenejme, že množinu $\mathcal{L}$ budeme (pro jednoduchost vyjadřování) značit stejným písmenem jako lineární prostor.[1]

Definice 2.2.2. Nechť $\mathcal{L}$ je lineární prostor $\mathcal{L}$, na kterém je definována reálná funkce $\|\cdot\| : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, jejíž hodnoty splňují následující axiomy:

(i) $\|x\| \geq 0$ pro každé x z $\mathcal{L}$;

(ii) pro každé x z $\mathcal{L}$ je $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$;

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ pro všechna reálná čísla α a všechna x z $\mathcal{L}$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna x a y z $\mathcal{L}$.

Každá reálná funkce definovaná na prostoru $\mathcal{L}$ splňující uvedené axiomy se nazývá **norma**.

Definice 2.2.3. Lineární prostor na kterém je definována norma se nazývá **lineární normovaný prostor**.

Následující tvrzení ilustrují zavedené pojmy. V další části textu tato tvrzení využijeme.

Tvrzení 2.2.4. *Uvažujme množinu všech funkcí, které jsou spojité na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Na této množině definujme sčítání funkcí a násobení funkce číslem standardním způsobem. Dále definujeme normu předpisem*

$$\|f\| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Platí, že množina spojitých funkcí s takto definovanými operacemi a normou je lineární normovaný prostor. Označuje se $\mathcal{C}[a, b]$.

[1] Pří pečlivějším zápisu by jsme měli vyznačit, že na dané množině jsou zavedeny operace sčítání a násobení číslem, tj. lineární prostor by měla být trojice. Pro přehlednost však ustoupíme od přesnosti a dáme přednost jednoduchosti zápisu. Určitě tento kompromis nepovede k nedorozumění.

Důkaz. Podrobné zdůvodnění tohoto tvrzení je popsáno v každé učebnici funkcionální analýzy, viz např. [17, 20, 28]. □

Tvrzení 2.2.5. *Uvažujme množinu všech funkcí, které jsou definovány na uzavřeném intervalu* $[a, b]$ *a mají spojitou derivaci na* $[a, b]$.[2] *Na této množině definujeme sčítání funkcí a násobení funkce číslem standardním způsobem. Dále definujeme normu předpisem*

$$\|f\|_1 = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{f}(t)|.$$

Platí, že tato množina je lineární normovaný prostor. Označuje se $\mathcal{C}^1[a, b]$.

Důkaz. Všechny axiomy lineárního prostoru lze docela snadno ověřit. Axiomy normy jsou až na trojúhelníkovou nerovnost zřejmé. Abychom ověřili trojúhelníkovou nerovnost uvažme, že

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_1 &\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)+g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{f}(t)+\dot{g}(t)| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{f}(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{g}(t)| \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{f}(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{g}(t)| \\
&\leq \|f\|_1 + \|g\|_1.
\end{aligned}$$

Vidíme, že jsou splněny všechny požadavky, a proto $\mathcal{C}^1[a, b]$ je lineární normovaný prostor. □

2.3 Spojité lineární funkcionály

Definice 2.3.1. Každé zobrazení z lineárního prostoru do reálných čísel se nazývá (reálný) **funkcionál**.

Jako příklady funkcionálů lze uvést reálnou funkci definovanou v $\mathbb{R}$ a také normu definovanou na lineárním prostoru.

Definice 2.3.2. Nechť $\mathcal{L}$ je lineární prostor. Funkcionál $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ se nazývá **lineární**, jestliže jeho hodnoty splňují identity:

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pro všechny prvky x, y z $\mathcal{L}$;

[2] Derivace v krajních bodech intervalu myslíme jednostranné.

(ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pro všechna x z $\mathcal{L}$ a všechna reálná čísla α.

U reálných funkcí jedné reálné proměnné bylo užitečné vědět, že jsou spojité, protože pro tyto funkce platila řada zajímavých tvrzení. Zobecněme tedy tento důležitý pojem i na funkcionály.

Definice 2.3.3. Nechť $\mathcal{L}$ je lineární normovaný prostor. Říkáme, že funkcionál f je **spojitý v bodě** $\tilde{x} \in \mathcal{L}$, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ takové, že pro všechna x splňující nerovnost $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ platí nerovnost $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$.

Definice 2.3.4. Funkcionál f se nazve **spojitý**, jestliže je spojitý v každém bodě svého definičního oboru.

Definice 2.3.5. Nechť $\mathcal{L}$ je lineární normovaný prostor a $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál. Řekneme, že f je **omezený**, jestliže existuje reálné číslo c takové, že

$$|f(x)| \leq c\,\|x\|\,, \tag{2.1}$$

pro všechna $x \in \mathcal{L}$.

Uvedeme si velice užitečnou charakteristiku spojitých lineárních funkcionálů, které se často používá k ověření spojitosti funkcionálu.

Věta 2.3.6. *Nechť $\mathcal{L}$ je lineární normovaný prostor a $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ lineární funkcionál. Pak funkcionál f je spojitý, právě když je omezený.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že funkcionál f je omezený. Tedy existuje reálné kladné číslo c tak, že $|f(x)| \leq c\|x\|$ pro všechna $x \in \mathcal{L}$. Zvolme si libovolné $x_0 \in \mathcal{L}$. Chceme ukázat, že f je spojitý v bodě x_0. Za tímto účelem volme libovolné kladné ε a položme $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Pak pro všechna $x \in \mathcal{L}$ taková, že $\|x - x_0\| < \delta$ platí

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq c\|x - x_0\| < c\delta = \varepsilon.$$

Při odhadech jsme využili linearitu funkcionálu a nerovnost (2.1), tj. omezenost funkcionálu. Ukázali jsme, že z omezenosti plyne spojitost.

Předpokládejme, že funkcionál f je spojitý v libovolném bodě x_0. Chceme ukázat, že je omezený. Protože f je spojitý funkcionál v bodě x_0, plyne z definice, že pro (například) $\varepsilon = 1$ existuje kladné δ takové, že pro všechna $x \in \mathcal{L}$ taková, že $\|x - x_0\| < \delta$ platí $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Zvolme libovolně (ale pevně) nenulový bod $y \in \mathcal{L}$ a položme $x = x_0 + \frac{\delta}{2\|y\|}y$, tj. $x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|}y$. Podle vlastností normy dostaneme $\|x - x_0\| = \left\|\frac{\delta}{2\|y\|}y\right\| = \left|\frac{\delta}{2\|y\|}\right| \|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Jestliže využijeme linearity funkcionálu f, obdržíme

$$1 > |f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| = \left|f\left(\frac{\delta}{2\,\|y\|}y\right)\right| = \frac{\delta}{2\,\|y\|}\,|f(y)|\,.$$

Odtud dostaneme, že existuje číslo $c = \frac{2}{\delta}$ tak, že platí $|f(y)| < c\,\|y\|$. Ukázali jsme, že existuje reálné číslo c tak, že $|f(y)| < c\,\|y\|$ pro všechny nenulové body y z $\mathcal{L}$. Je-li $y = 0$, zřejmě $|f(y)| = c\,\|y\|$.[3] Tímto jsme dokázali, že funkcionál f je omezený. □

Tvrzení 2.3.7. *Funkcionál f definovaný na prostoru $\mathcal{C}[a, b]$ předpisem*

$$f(x) = \int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}t$$

je spojitý lineární funkcionál.

Důkaz. Z pouček o existenci a linearitě integrálu okamžitě získáme linearitu studovaného funkcionálu.

Zaměřme se na důkaz spojitosti. Podle Věty 2.3.6 stačí zjistit, že je funkcionál omezený. Podle věty o linearitě a absolutní hodnotě integrálu získáme odhad

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \le \left|\int\limits_a^b x(t)\mathrm{d}t - \int\limits_a^b \tilde{x}(t)\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_a^b |x(t) - \tilde{x}(t)|\mathrm{d}t \le \max_{t\in[a,b]} |x(t) - \tilde{x}(t)|(b - a).$$

Jestliže si uvědomíme definici normy v prostoru $\mathcal{C}[a, b]$, tak vidíme, že existuje číslo $c = b - a$ takové, že

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \le c\,\|x - x_0\|\,.$$

Funkcionál f je omezený, a proto spojitý. □

Tvrzení 2.3.8. *Nechť α je pevně daná funkce z $\mathcal{C}[a, b]$. Funkcionál f definovaný na prostoru $\mathcal{C}[a, b]$ předpisem*

$$f(x) = \int\limits_a^b \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t$$

je spojitý lineární funkcionál.

[3] Pro $y = 0$ platí $f(y) = 0$ a $\|y\| = 0$

Důkaz. Z pouček o existenci a linearitě integrálu okamžitě získáme linearitu vyšetřovaného funkcionálu.

Obraťme se k vyšetření spojitosti. K důkazu opět využijeme Větu 2.3.6. Stačí tedy ukázat omezenost f. Pro každé $x \in \mathcal{C}[a,b]$ obdržíme z vět o integrálech, že

$$|f(x)| \leq \int_a^b |\alpha(t)||x(t)|\mathrm{d}t \leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \int_a^b |\alpha(t)|\mathrm{d}t = c\|x\|,$$

kde jsme označili $c = \int_a^b |\alpha(t)|\mathrm{d}t$. Tedy f je omezený lineární funkcionál, a proto spojitý. □

Tvrzení 2.3.9. *Nechť α_0, α_1 jsou pevně zadané funkce z $\mathcal{C}[a,b]$. Funkcionál f definovaný na prostoru $\mathcal{C}^1[a,b]$ předpisem*

$$f(x) = \int_a^b \alpha_0(t)x(t) + \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t$$

je spojitý lineární funkcionál.

Důkaz. Opět z linearity integrálu okamžitě obdržíme linearitu vyšetřovaného funkcionálu.

Nyní ke spojitosti. Pro každé $x \in \mathcal{C}^1[a,b]$ obdržíme z vět o integrálech, že

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\int_a^b \alpha_0(t)x(t) + \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |\alpha_0(t)|\,|x(t)| + |\alpha_1(t)|\,|\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b |\alpha_0(t)|\,|x(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^b |\alpha_1(t)|\,|\dot{x}(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \int_a^b |\alpha_0(t)|\,\mathrm{d}t + \max_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t)| \int_a^b |\alpha_1(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq c\left(\max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\dot{x}(t)|\right) = c\|x\|_1,
\end{aligned}$$

kde jsme označili $c = \max\left\{\int_a^b |\alpha_0(t)|\mathrm{d}t, \int_a^b |\alpha_1(t)|\mathrm{d}t\right\}$. Funkcionál f je tedy omezený. Z Věty 2.3.6 tak plyne, že f je spojitý. □

Nechť je funkcionál definovaný předpisem

$$f(x) = \int_a^b \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t$$

a nabývá nulové hodnoty pro všechny funkce z nějaké podmnožiny funkcí prostoru $\mathcal{C}[a,b]$. Ptejme se. Co lze říci o funkci α?

Analogicky můžeme vyšetřovat funkcionál daný předpisem

$$f(x) = \int_a^b (\alpha_0(t)x(t) + \alpha_1(t)\dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

a nabývající na nějaké podmnožině prostoru $\mathcal{C}^1[a,b]$ nulové hodnoty. Ptejme se. Co lze říci o funkcích α_0 a α_1?

Odpověď na tyto otázky poskytnou (v jistých případech) následující tři tvrzení. První tvrzení se často nazývá základní lemma variačního počtu.

Tvrzení 2.3.10. *Nechť α je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ a*

$$\int_a^b \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t = 0$$

pro všechny funkce $x \in \mathcal{C}[a,b]$ takové, že $x(a) = x(b) = 0$. Pak $\alpha(t) = 0$ pro všechna $t \in [a,b]$.

Důkaz. Tvrzení budeme dokazovat sporem. Předpokládejme, že funkce α je nenulová v nějakém bodě intervalu $[a,b]$ a nabývá v tomto bodě kladné hodnoty.[4] Podle předpokladu je funkce α spojitá. Proto existuje interval $[t_1,t_2] \subset [a,b]$, v jehož bodech jsou hodnoty funkce α kladné.[5] Sestrojme funkci $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$x(t) = \begin{cases} (t-t_1)(t_2-t), & t \in [t_1,t_2], \\ 0, & t \in [a,b] \setminus [t_1,t_2]. \end{cases}$$

Funkce x zřejmě splňuje předpoklady věty. Platí však

$$\int_a^b \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t)(t-t_1)(t_2-t)\mathrm{d}t > 0,$$

protože integrand v druhém integrálu nabývá kladných hodnot[6] (s vyjimkou bodů t_1, t_2, jejichž vynechání nemá na hodnotu integrálu vliv). Což je však ve sporu s

[4] Kdyby nabývala záporné hodnoty postupovali bychom analogicky.

[5] Toto tvrzení je známo z diferenciálního počtu, viz [12].

[6] Vskutku. Jestliže $t_1 < t$ a současně $t < t_2$, pak $t - t_1 > 0$ a $t_2 - t > 0$, tj. $(t-t_1)(t_2-t) > 0$.

tvrzením, že

$$\int_a^b \alpha(t)x(t)\mathrm{d}t = 0$$

pro všechny funkce $x \in \mathcal{C}[a,b]$. Náš předpoklad o nenulovosti funkce α vede ke sporu, proto musí být $\alpha(t) = 0$ pro všechna $t \in [a,b]$. □

Tvrzení 2.3.11. *Nechť α je spojitá funkce na intervalu $[a,b]$ a*

$$\int_a^b \alpha(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = 0$$

pro všechny funkce $x \in \mathcal{C}^1[a,b]$ takové, že $x(a) = x(b) = 0$. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha(t) = c$ pro všechna $t \in [a,b]$.

Důkaz. Definujme hodnotu konstanty c podmínkou

$$\int_a^b \alpha(t) - c\,\mathrm{d}t = 0;$$

tedy

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pro toto c definujme funkci $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ předpisem[7]

$$x(t) = \int_a^t \alpha(\zeta) - c\,\mathrm{d}\zeta.$$

Takto definovaná funkce x je z $\mathcal{C}^1[a,b]$ a splňuje podmínky $x(a) = x(b) = 0$.[8] Integrací zjistíme, že

$$\int_a^b [\alpha(t) - c]\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \alpha(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t - c[x(b) - x(a)] = 0$$

a navíc dosazením $\dot{x}(t) = \alpha(t) - c$ obdržíme

$$\int_a^b [\alpha(t) - c]\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int_a^b [\alpha(t) - c]^2\mathrm{d}t,$$

[7] Takto definovaná funkce je spojitá, jak plyne z věty o derivaci integrálu s proměnnou horní mezí, viz [14].

[8] Funkce x je diferencovatelná a navíc platí $\dot{x}(t) = \alpha(t) - c$ pro každé $t \in [a,b]$, jak plyne z věty o derivaci integrálu s proměnnou horní mezí, viz [14]. Protože je derivace funkce x rovna rozdílu dvou spojitých funkcí, je spojitá. Jestliže dosadíme za horní mez $t = a$, je integrál roven nule. Obdobně jestliže dosadíme $t = b$, je integrál roven nule podle definice konstanty c.

je

$$\int_a^b [\alpha(t) - c]^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Odtud plyne[9], že $\alpha(t) = c$ pro všechna $t \in [a, b]$. □

Tvrzení, které nyní uvedeme, se v [1] nazývá Du Bois - Reymondovo lemma.

Tvrzení 2.3.12. *Nechť α_0 a α_1 jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a*

$$\int\limits_a^b \alpha_0(t)x(t) + \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = 0$$

pro všechny funkce $x \in \mathcal{C}^1[a, b]$ takové, že $x(a) = x(b) = 0$. Pak α_1 je spojitě diferencovatelná a platí $\dot{\alpha_1}(t) = \alpha_0(t)$ pro všechna $t \in [a, b]$.

Důkaz. Definujme funkci $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$A(t) = \int_a^t \alpha_0(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Funkce α_0 je spojitá, a proto A je spojitě diferencovatelná. Využitím metody integrace per partes a předpokladů věty o nulových hodnotách funkce x v bodech a, b dostaneme, že

$$\int\limits_a^b \alpha_0(t)x(t)\mathrm{d}t = A(b)x(b) - A(a)x(a) - \int\limits_a^b A(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = -\int\limits_a^b A(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t.$$

Můžeme proto psát

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_a^b \alpha_0(t)x(t) + \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \alpha_0(t)x(t)\mathrm{d}t + \int\limits_a^b \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int\limits_a^b A(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t + \int\limits_a^b \alpha_1(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b [-A(t) + \alpha_1(t)]\dot{x}(t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Podle předchozího tvrzení však víme, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $-A(t) + \alpha_1(t) = c$ pro všechna $t \in [a, b]$.[10] Protože A je spojitě diferencovatelná funkce je i funkce α_1 spojitě diferencovatelná a platí $\dot{\alpha_1}(t) = \alpha_0(t)$ pro všechna $t \in [a, b]$. □

[9] Integrand je nezáporná spojitá funkce, a proto podle vět o integrálech (viz [15]) je integrand roven nule pro všechna $t \in [a, b]$.

[10] Protože funkce α_1 je spojitá podle předpokladů a funkce A je také spojitá (viz [14]), je spojitá i jejich lineární kombinace.

2.4 Diferenciál funkcionálu a Fermatova věta

V této sekci zavedeme pojem diferenciálu funkcionálu (nebo také variace funkcionálu), který je zobecněním diferenciálu reálné funkce jedné reálné proměnné v daném bodě.

Definice 2.4.1. Mějme dán lineární normovaný prostor $\mathcal{L}$. Nechť je dán funkcionál $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a $\tilde{x} \in \mathcal{L}$ je pevně zvolený prvek. Říkáme, že funkcionál f **je diferencovatelný** v bodě $\tilde{x}$, jestliže existuje spojitý lineární funkcionál φ tak, že

$$f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) = \varphi(h) + \varepsilon(h)\|h\|,$$

kde $\varepsilon(h) \to 0$ pro $\|h\| \to 0$. Takový funkcionál φ budeme nazývat **diferenciálem** funkcionálu f v bodě $\tilde{x}$.

Definice 2.4.2. Funkcionál f, který má diferenciál v každém bodě definičního oboru se nazývá **diferencovatelný funkcionál**.

Z diferenciálního počtu víme, že diferenciál reálné funkce reálné proměnné v daném bodě je určen jednoznačně. Stejné tvrzení platí i pro diferenciál funkcionálu. Než ho vyslovíme a dokážeme, tak uvedeme jedno pomocné tvrzení.

Tvrzení 2.4.3. *Nechť je dán spojitý lineární funkcionál $\varphi : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a platí*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

Pak $\varphi(h) = 0$ pro všechna $h \in \mathcal{L}$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme sporem. Nechť existuje bod $h_0 \neq 0$, takový že $\varphi(h_0) \neq 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $h_n = \frac{h_0}{n}$ a označme $\lambda = \frac{\varphi(h_0)}{\|h_0\|}$. Zřejmě $\lambda \neq 0$.[11] Platí

$$\lim_{n \to \infty} \|h_n\| = \lim_{n \to \infty} \left\| \frac{h_0}{n} \right\| = \lim_{n \to \infty} \frac{\|h_0\|}{n} = 0.$$

Podle Heineho charakteristiky limity (viz [13]) však platí[12]

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(h_n)}{\|h_n\|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(\frac{h_0}{n})}{\|\frac{h_0}{n}\|} = \lim_{n \to \infty} \frac{n\varphi(h_0)}{n\|h_0\|} = \frac{\varphi(h_0)}{\|h_0\|} = \lambda \neq 0.$$

Což je ve sporu s předpokladem, že $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$. $\square$

[11] Norma vektoru je nulová pouze pro nulový vektor, proto je $\|h_0\| \neq 0$.

[12] Heineho charakteristiku můžeme použít, protože $\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|}$ existuje díky předpokladu. Navíc $h_n \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\|h_n\| \neq 0$ pro všechna $\mathbb{N}$. Dále je, jak jsme ukázali, $\lim_{n \to \infty} \|h_n\| = 0$.

Věta 2.4.4. *Diferenciál funkcionálu je určen jednoznačně.*

Důkaz. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že funkcionál má dva různé diferenciály v daném bodě $\tilde{x}$, označme je φ_1 a φ_2. Podle definice diferenciálu funkcionálu platí

$$f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})=\varphi_1(h)+\varepsilon_1(h)\|h\|$$

a $\varepsilon_1(h)\to 0$ pro $\|h\|\to 0$. A současně

$$f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})=\varphi_2(h)+\varepsilon_2(h)\|h\|$$

a $\varepsilon_2(h)\to 0$ pro $\|h\|\to 0$. Odtud plyne, že $\varphi_1(h)-\varphi_2(h)=[\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)]\|h\|$. Tedy

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\varphi_1(h)-\varphi_2(h)}{\|h\|}=\lim_{\|h\|\to 0}[\varepsilon_1(h)-\varepsilon_2(h)]=0.$$

Protože $\varphi_1-\varphi_2$ je spojitý lineární funkcionál[13], tak podle Tvrzení 2.4.3 dostaneme $\varphi_1(h)=\varphi_2(h)$ pro všechna $h\in\mathcal{L}$. To je ve sporu s předpokladem, že $\varphi_1(h)\neq\varphi_2(h)$ pro nějaké $h\in\mathcal{L}$. □

Protože se v různých úlohách z praxe musí vyšetřovat extrémy funkcionálů, které uvažujeme na různých prostorech (např. funkcí), bude vhodné zavést definici extrému funkcionálu. Pro naše potřeby budou zejména důležité extrémy funkcionálů v prostoru spojitých funkcí $\mathcal{C}[a,b]$ a v prostoru spojitě diferencovatelných funkcí $\mathcal{C}^1[a,b]$.

Definice 2.4.5. Nechť $\mathcal{L}$ je normovaný lineární prostor. Řekneme, že funkcionál $f:\mathcal{L}\to\mathbb{R}$ má **lokální minimum** (resp. **lokální maximum**) v bodě $\tilde{x}\in\mathcal{L}$, jestliže existuje reálné kladné δ takové, že pro všechna $x\in\mathcal{L}$ splňující nerovnost $\|x-\tilde{x}\|<\delta$ platí $f(x)\geq f(\tilde{x})$ (resp. $f(x)\leq f(\tilde{x})$). Body, ve kterých funkcionál nabývá lokálního minima nebo lokálního maxima, se nazývají **lokální extrémy**.

Poznámka 2.4.6. V dalším budeme pro stručnost místo lokálních extrémů říkat pouze extrémy.

Nechť funkcionál $f:\mathcal{L}\to\mathbb{R}$ má v bodě x_0 extrém. V případě, že $\mathcal{L}=\mathcal{C}[a,b]$, nazýváme x_0 silným extrémem. Jestliže $\mathcal{L}=\mathcal{C}^1[a,b]$, pak se x_0 nazývá slabý extrém.

Následující věta je zobecněním známé věty z elementární matematické analýzy, které se často říká Fermatova věta.

[13]Protože rozdíl lineárních funkcionálů je opět lineární funkcionál (viz [3]) a rozdíl spojitých funkcionálů je spojitý funkcionál (viz [13]), tedy i $\varphi_1-\varphi_2$ je spojitý lineární funkcionál.

Věta 2.4.7. *Nechť $\mathcal{L}$ je normovaný lineární prostor. Nechť $f : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ je diferencovatelný funkcionál v bodě $\tilde{x}$, který má v bodě $\tilde{x}$ extrém. Pak diferenciál funkcionálu f v bodě $\tilde{x}$ je roven nule.*

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že podle definice diferenciálu φ funkcionálu f v daném bodě $\tilde{x}$ platí

$$f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) = \varphi(h) + \varepsilon(h) \|h\| ,$$

kde $\varepsilon(h) \to 0$, jestliže $\|h\| \to 0$. Pro dostatečně malou hodnotu $\|h\|$ má rozdíl $f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x})$ stejné znaménko jako $\varphi(h)$.

Nyní k vlastnímu důkazu. Předpokládejme pro určitost, že funkcionál f nabývá v bodě $\tilde{x}$ minima.[14] Větu budeme dokazovat sporem. Nechť existuje $h_0 \neq 0$ takové, že $\varphi(h_0) \neq 0$. Dále uvažme, že pro každé kladné číslo α platí (protože φ je lineární funkcionál) $\varphi(-\alpha h_0) = -\varphi(\alpha h_0)$. Proto můžeme udělit $\varphi(h)$ libovolné znaménko a toto znaménko bude mít i rozdíl $f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x})$. To však je ve sporu s předpokladem, že funkcionál f má v bodě $\tilde{x}$ minimum, tj. tím, že platí $f(\tilde{x} + h) - f(\tilde{x}) \geq 0$ pro všechna dostatečně malé $\|h\|$. □

Zobecněme pojem stacionárního bodu reálné funkce reálné proměnné na funkcionály.

Definice 2.4.8. Říkáme, že bod $\tilde{x}$ je **stacionárním bodem** funkcionálu f, jestliže diferenciál funkcionálu f v bodě $\tilde{x}$ je roven nule.

Řada fyzikálních problémů vede k hledání stacionárních bodů funkcionálů. Jako příklad uveďme Hamiltonův princip známý z mechaniky (viz [4, 21]).

[14] Pro maximum by byla argumentace analogická.

Kapitola 3

Nejjednodušší úloha variačního počtu

3.1 Formulace úlohy

V předchozích kapitole jsme uvedli řadu vět, které platily bez ohledu na konkrétní tvar funkcionálu. V této kapitole se zaměříme na studium speciální úlohy, tzv. „nejjednodušší úlohy variačního počtu“. Funkcionál vystupující v této úloze se často objevuje v aplikacích.

Formulace úlohy zní: Nechť f je funkce tří proměnných, která má spojité první i druhé parciální derivace podle každé z těchto proměnných. Dále uvažujme všechny spojitě diferencovatelné funkce x definované na intervalu $[a, b]$ a splňující podmínky

$$x(a) = A \quad \text{a} \quad x(b) = B,$$

kde A, B jsou libovolná reálná čísla. Úkolem je najít mezi těmito funkcemi takovou (pokud vůbec existuje), ve které funkcionál $F : \mathcal{C}^1[a, b] \to \mathbb{R}$ daný předpisem

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

nabývá (slabého) extrému.

Poznámka 3.1.1. Víme, že spojitě diferencovatelné funkce definované v intervalu $[a, b]$ tvoří lineární normovaný prostor. Jestliže si z těchto funkcí vybereme všechny, které navíc splňují podmínky $x(a) = A$ a $x(b) = B$, pak tyto funkce již obecně[1] lineární normovaný prostor netvoří. Díky tomu nelze přímo použít různé pojmy a věty (např. Fermatovu větu) z předchozí kapitoly. V předchozí kapitole jsme totiž měli funkcionály definované na lineárním prostoru a takto definovaný pojem funkcionálu jsme využívali ve všech tvrzeních. Zde uvažujeme funkcionál na přípustných funkcích, které obecně nemusí tvořit lineární prostor. Tento problém můžeme odstranit tak, že si pevně zvolíme jednu přípustnou funkci x_0. Poté definujeme nový funkcionál $\tilde{F}$ předpisem $\tilde{F}(y) = F(x_0 + y)$, kde za definiční obor bereme množinu těch funkcí $y \in \mathcal{C}^1[a, b]$ splňujících $y(a) = y(b) = 0$. Na takto definovaný funkcionál $\tilde{F}$ již můžeme využít aparát uvedený v předchozí kapitole. Tento obrat lze najít např. v [18].

Vzhledem k předchozí poznámce je užitečné zavést následující definici.

Definice 3.1.2. Funkce, mezi kterými hledáme slabý extrém funkcionálu, nazveme **přípustné funkce**.

V nejjednodušší úloze variačního počtu jsou přípustné funkce z prostoru $\mathcal{C}^1[a, b]$ a splňují podmínky $x(a) = A$ a $x(b) = B$, kde A a B jsou libovolná reálná čísla.

Vidíme, že pod nejjednodušší úlohu variačního počtu spadá úloha o nalezení nejkratší spojnice dvou různých bodů v rovině, různé fyzikální úlohy, atd.

3.2 Eulerova rovnice a její důsledky

V této sekci si položíme za úkol najít nutnou podmínku extrému funkcionálu (3.1) v nejjednodušší úloze variačního počtu. Z předchozí kapitoly víme, že podle Fermatovy věty musí být diferenciál diferencovatelného funkcionálu nulový. Potřebujeme tedy nejprve určit, zda je vyšetřovaný funkcionál diferencovatelný.

Podle definice diferenciálu φ funkcionálu F v daném bodě $\tilde{x}$ musí platit

$$F(\tilde{x} + h) - F(\tilde{x}) = \varphi(h) + \varepsilon(h)\|h\|,$$

[1] V případě, že $A = 0, B = 0$ však lineární normovaný prostor tvoří. To lze snadno ověřit. V případě, že $A \neq 0, B \neq 0$ není splněna podmínka uzavřenosti na sčítání.

kde $\varepsilon(h) \to 0$ pro $\|h\| \to 0$. Pro náš funkcionál dostaneme

$$\begin{aligned} F(\tilde{x}+h) - F(\tilde{x}) &= \int_a^b f(t, \tilde{x}(t) + h(t), \dot{\tilde{x}}(t) + \dot{h}(t))\mathrm{d}t - \int_a^b f(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b [f(t, \tilde{x}(t) + h(t), \dot{\tilde{x}}(t) + \dot{h}(t)) - f(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Jestliže na integrand použijeme Taylorovu větu (viz [13]), dostaneme

$$F(\tilde{x}+h) - F(\tilde{x}) = \int_a^b f_x(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))h(t) + f_{\dot{x}}(t, \dot{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))\dot{h}(t)\mathrm{d}t + o(h(t)),$$

f_x znamená parciální derivaci funkce f podle druhé proměnné a $f_{\dot{x}}$ značí parciální derivaci funkce f podle třetí proměnné. Integrál

$$\varphi(h) = \int_a^b f_x(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))h(t) + f_{\dot{x}}(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))\dot{h}(t)\mathrm{d}t$$

představuje předpis pro hodnoty diferenciálu[2] F v $\tilde{x}$.

Jestliže vezmeme v úvahu, že funkce $\tilde{x}$ patří do množiny přípustných funkcí, tak musí splňovat podmínky $\tilde{x}(a) = A$ a $\tilde{x}(b) = B$. Funkce $\tilde{x} + h$ patří do třídy přípustných funkcí, kdykoli funkce h splňuje $h(a) = 0$ a $h(b) = 0$. Jestliže má funkcionál F v bodě $\tilde{x}$ extrém, pak podle Fermatovy věty platí

$$\int_a^b f_x(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))h(t) + f_{\dot{x}}(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t))\dot{h}(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Podle Tvrzení 2.3.12 dostaneme pro nutnou podmínku extrému (bez vypisování argumentů)

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = 0.$$

Tento výsledek je znám jako **Eulerova rovnice**.[3]

Právě provedené úvahy shrneme do následující věty.

Věta 3.2.1. *Nechť funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ má spojité druhé parciální derivace. Nechť hodnoty funkcionálu F jsou dány předpisem*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

[2]Spojitost a linearita funkcionálu φ plyne z předpokladů o funkci f (spojitost prvních i druhých parciálních derivací) a Tvrzení 2.3.9.

[3]Poznamenejme, že jsme nepředpokládali existenci derivace $\frac{d}{dt} f_{\dot{x}}$, její existenci zaručuje Tvrzení 2.3.12.

Nechť je definičním oborem funkcionálu F množina všech funkcí $x : [a, b] \to \mathbb{R}$, které mají spojitou první derivaci a splňují podmínky $x(a) = A$, $x(b) = B$. Pak nutná podmínka k tomu, aby funkcionál F měl extrém v bodě x je, že funkce x splňuje Eulerovu rovnici

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x = 0.$$

Definice 3.2.2. Funkce, které vyhovují Eulerově rovnici se nazývají **extremály**.

Při hledání extrémů diferencovatelných funkcionálů jsou „podezřelé“ pouze funkce, které splňují Eulerovu rovnici. Proto studium Eulerovy rovnice bude hrát velký význam. Je proto přirozené se podrobněji zaměřit na její studium.

Předpokládejme navíc, že neznámá funkce x v Eulerově rovnici má navíc druhou derivaci. Eulerova rovnice je obecně nelineární obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.[4] Skutečně, jestliže podrobně rozepíšeme a upravíme výraz na levé straně Eulerovy rovnice dostaneme (bez vypisování argumentů)

$$f_{\dot{x},\dot{x}} \ddot{x} + f_{\dot{x},x} \dot{x} + f_{\dot{x},t} - f_x = 0.$$

Nyní bychom chtěli zodpovědět otázku existence a jednoznačnosti řešení Eulerovy rovnice. Tato otázka je poměrně komplikovaná, protože neřešíme Cauchyovu úlohu známou z kurzů o diferenciálních rovnicích (viz [16, 27]), ale tak zvanou okrajovou úlohu.[5] V učebnicích variačního počtu (např. [9, 29]) se uvádí věta Bernsteinova, která zaručuje existenci a jednoznačnost řešení okrajové úlohy pro nelineární diferenciální rovnici druhého řádu rozřešenou vzhledem k druhé derivaci hledané funkce[6]. Spokojíme se zde pouze s odkazem na literaturu a větu nebudeme explicitně vyslovovat.

Eulerova rovnice poskytuje pouze nutnou podmínku pro extrém, ale nikoli podmínku postačující. Problematika postačujících podmínek je složitější a můžeme ji

[4] To platí za předpokladu, že je funkce $f_{\dot{x},\dot{x}} \neq 0$ pro všechny přípustné hodnoty proměnných. Jestliže pro některé proměnné by hodnota této funkce byla nulová, tak bychom neměli rovnici druhého řádu. Tento velice nepříjemný případ vyloučíme ze svých úvah.

[5] Pod Cauchyho úlohou rozumíme hledání řešení diferenciální rovnice, které vyhovuje zadaným počátečním podmínkám v daném bodě. Jde o „lokální úlohu“. Pod okrajovou úlohou rozumíme hledání řešení, které vyhovuje diferenciální rovnici a podmínkám daným v různých bodech. Jde o „globální úlohu“.

[6] Eulerova rovnice spadá pod tento případ za předpokladu, že $f_{\dot{x},\dot{x}} \neq 0$ pro všechny přípustné hodnoty proměnných.

nalézt například v učebnicích [9, 29]. My se jimi zabývat nebudeme. V řadě praktických problémů je intuitivně zřejmé, jestli funkcionál pro danou funkci má nabývat minima (maxima). Jestliže navíc víme, že extremála je pouze jediná (podle Bersteinovy věty), tak máme problém „vyřešen“.

Na závěr odstavce se zmíníme o některých speciálních případech, ve kterých je možné redukovat (jednou integrovat) Eulerovu rovnici na rovnici prvního řádu. Jedná se o tzv. **první integrál** Eulerovy rovnice, což může být v řadě praktických úloh užitečné.[7]

První případ je, že integrand nezávisí explicitně na hledané funkci x, tj. je dán předpisem

$$F(x) = \int_a^b f(t, \dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

V tomto případě se Eulerova rovnice redukuje na (bez vypisování argumentů)

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} = 0.$$

Odtud plyne, že

$$f_{\dot{x}} = C,$$

kde C je libovolné reálné číslo. Obdrželi jsme obyčejnou (nelineární) diferenciální rovnici prvního řádu, ze které (v principu) určíme hledanou funkci x.[8]

Ilustrujme si tento případ na jednoduchém příkladu. Budeme hledat nejkratší spojnice dvou různých bodů v rovině.

Příklad 3.2.3. Najděte nejkratší rovinnou křivku, které spojuje dva dané různé body $A[0,0]$ a $B[1,1]$. Jinak řečeno, najděte minimum funkcionálu

$$L(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

mezi křivkami popsanými spojitě diferencovatelnými funkcemi x, jež jsou definovány na intervalu $[0,1]$ a platí pro ně $x(0) = 0$ a $x(1) = 1$.

Řešení: Protože integrand nezávisí explicitně na hledané funkci, první integrál je

$$\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}} = C,$$

[7] Ve fyzice se takovýmto prvním integrálům Eulerovy rovnice říká zákony zachování.

[8] Některé metody řešení takových rovnic jsou uvedeny v [27].

kde C je libovolné reálné číslo různé od nuly. Kdyby bylo $C = 0$, pak by funkce x byla konstantní a nešlo by splnit zadané počáteční podmínky. Obdrželi jsme obyčejnou nelineární diferenciální rovnici prvního řádu, která není rozřešena vzhledem k první derivaci. Pokusíme se ji proto vzhledem k první derivaci rozřešit. Zřejmě platí

$$\dot{x}(t) = C\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}.$$

Umocněním (na druhou) a úpravou dostaneme

$$\dot{x}^2(t)(1 - C^2) = C^2.$$

Protože $C \neq 0$, musí být $C \neq 1$ a $C \neq -1$. Můžeme tedy psát

$$\dot{x}^2(t) = \frac{C^2}{1 - C^2}.$$

Odtud vidíme, že pravá strana musí být kladná. Proto $-1 < C < 0$ nebo $0 < C < 1$. Můžeme tedy psát

$$\dot{x}(t) = \pm\sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}}.$$

Odtud integrací dostaneme

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}}\,t + D,$$

pro všechna $t \in [0, 1]$, kde D je libovolné reálné číslo. Jestliže použijeme podmínku $x(0) = 0$, dostaneme $D = 0$. Z podmínky $x(1) = 1$ plyne, že musíme vyloučit řešení se záporným znaménkem a navíc musí platit $\sqrt{\frac{C^2}{1-C^2}} = 1$. Řešení našeho problému tedy je

$$x(t) = t,$$

pro všechna $t \in [0, 1]$. Nalezli jsme pouze jedinou křivku podezřelou z extrému. Potřebovali bychom nějaká kritéria , které by zajistila, že se jedná skutečně o minimum (z formulace problému je to intuitivně zřejmé). Taková kritéria jsou uvedena v [9, 8]. ■

Přejděme k dalšímu případu prvního integrálu. Budeme předpokládat, že integrand neobsahuje explicitně proměnnou t, tj. je dán předpisem

$$F(x) = \int_a^b f(x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

V tomto případě sestrojíme zachovávající se výraz následujícím postupem. Eulerovu rovnici rozepíšeme a uvážením, že f nezávisí explicitně na t, dostaneme (bez vypisování argumentů)

$$f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x} - f_x = 0. \tag{3.2}$$

Jestliže vynásobíme funkcí $\dot{x}$ rovnici (3.2) obdržíme

$$f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x}\dot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x}^2 - f_x\dot{x} = 0.$$

Nyní použijeme „geniální“ trik, přičteme šikovně nulu, dostaneme

$$f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x}\dot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x}^2 + f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_x\dot{x} = 0.$$

Protože platí rovnost

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}\dot{x} - f\right) = f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x}\dot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x}^2 + f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_x\dot{x},$$

můžeme přepsat Eulerovu rovnici do tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}\dot{x} - f\right) = 0.$$

Tuto rovnici již snadno (jednou) integrujeme a obdržíme[9]

$$f_{\dot{x}}\dot{x} - f = C,$$

kde C je libovolné reálné číslo. Odtud vidíme, že výraz $f_{\dot{x}}\dot{x} - f$ je konstantní podél extremály. Rovnice $f_{\dot{x}}\dot{x} - f = C$ je obyčejnou (nelineární) diferenciální rovnicí prvního řádu.

Ukažme si ještě jiný postup, v učebnicích často používaný viz [29].[10] Zjištění faktu, že

$$f_{\dot{x}}\dot{x} - f = C,$$

prověříme výpočtem derivace podle t z výrazu $f_{\dot{x}}\dot{x} - f$ a zjištěním zda

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}\dot{x} - f\right) = 0.$$

[9] Připomeňme si, že derivaci počítáme z funkce definované na intervalu. Proto podle vět z analýzy (viz [12]) víme, že když je derivace funkce rovna nule, musí být funkce konstantní.

[10] Jeho nevýhodou je fakt, že není zřejmá konstrukce zachovávajícího se výrazu $f_{\dot{x}}\dot{x} - f$.

Skutečně platí

$$\frac{d}{dt}\left(f_{\dot{x}}\dot{x} - f\right) = f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x}\dot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x}^2 + f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_{\dot{x}}\ddot{x} - f_x\dot{x} = \left(f_{\dot{x},\dot{x}}\ddot{x} + f_{\dot{x},x}\dot{x} - f_x\right)\dot{x}.$$

Podle Eulerovy rovnice je však výraz v závorce roven nule, a proto je $f_{\dot{x}}\dot{x} - f$ konstantní. Pečlivěji bychom měli říct, že výraz je konstantní podél extremál, které jsou řešením Eulerovy rovnice. Tj. když dosadíme do tohoto výrazu extremálu, tak dostaneme konstantu (konstantní funkci).

Ilustrujeme si tento poznatek na příkladu, který má svůj původ ve fyzice. Půjde o problém brachistochrony.

Příklad 3.2.4. Zvolme v rovině souřadnou soustavu tak, že osa t bude vodorovná a osa x míří svisle dolů. Mějme dány dva různé body $A[0,0]$ a $B[t_1, x(t_1)]$, kde souřadnice $x(t_1) > 0$. Najděte takovou spojitě diferencovatelnou křivku (popsanou grafem funkce) v rovině spojující body A a B, po které se hmotný bod dostane z bodu A do bodu B za nejkratší čas. Předpokládejte, že na hmotný bod působí pouze Země gravitační silou a křivka vazbovou silou.

Řešení: Jestliže tento problém matematizujeme, tak dojdeme k problému najít minimum funkcionálu (viz [4])

$$T(x) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}}\mathrm{d}t,$$

který je definován na křivkách (popsaných funkcemi), které jsou spojitě diferencovatelné a procházení zadanými body $A[0,0]$ a $B[t_1, x(t_1)]$. Můžeme předpokládat, že $t_1 > 0$. Definiční obor hledaných funkcí je uzavřený interval, tj. $t \in [0, t_1]$.

Protože integrand nezávisí explicitně na proměnné t, tak platí

$$K = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{x(t)}\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\dot{x}(t) - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}{\sqrt{x(t)}} = \frac{-1}{\sqrt{x(t)[1+\dot{x}^2(t)]}},$$

kde K je konstanta.[11] Po umocnění a úpravě dostaneme

$$2C = x(t)[1+\dot{x}^2(t)], \tag{3.3}$$

kde jsme položili $2C = \left(\frac{1}{K}\right)^2$. Řešení rovnice (3.3) budeme hledat v parametrickém tvaru (viz [4, 27]). Položíme-li

$$\dot{x} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

[11] Poznamenejme, že hodnoty funkce x musí být kladné a hodnota konstanty $K \neq 0$.

dostaneme z rovnice (3.3) pro x vztah

$$x(\varphi) = \frac{2C}{1+\dot{x}^2} = 2C\sin^2\frac{\varphi}{2} = C(1-\cos\varphi). \tag{3.4}$$

Vztah $\dot{x} = \operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ zapíšeme jako

$$\mathrm{d}x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

Jestliže spočteme diferenciál funkce x dané vztahem (3.4) obdržíme

$$\mathrm{d}x = 2C\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi \tag{3.6}$$

Ze vztahů (3.5) a (3.6) plyne, že

$$\mathrm{d}t = \frac{2C\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi = C(\varphi-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{3.7}$$

Integrací (3.7) získáme

$$t = C(\varphi - \sin\varphi) + D.$$

Celkem dostáváme vztahy

$$\begin{aligned} t(\varphi) &= C(\varphi-\sin\varphi)+D, \\ x(\varphi) &= C(1-\cos\varphi). \end{aligned}$$

Tyto rovnice jsou parametrickým vyjádřením cykloidy (viz [23]).

Nyní bychom měli určit hodnoty konstant C a D vyhovující zadání. Nejprve nalezněme hodnoty φ_0 a φ_1 takové, že $t(\varphi_0) = 0$ a $t(\varphi_1) = t_1$. Tato úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= C\left(\varphi_0 - \sin(\varphi_0)\right) + D, \\ t_1 &= C\left(\varphi_1 - \sin(\varphi_1)\right) + D. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic můžeme (principiálně) vypočítat (jediné) číslo φ_0 a (jediné) číslo φ_1; tato čísla budou ovšem záviset na C a D. Použijeme-li okrajových podmínek na hodnoty funkce x, dostaneme rovnice (s vypsáním argumentů, na kterých závisí φ_0 a φ_1)

$$\begin{aligned} 0 &= C\left(1-\cos(\varphi_0(C,D))\right), \\ x(t_1) &= C\left(1-\cos(\varphi_1(t_1,C,D))\right). \end{aligned}$$

Z těchto rovnic můžeme (principiálně) vypočítat konstanty C a D.[12] ■

Poznámka 3.2.5. Matematicky korektnější rozbor řešení problému brachistochrony lze najít například v [7].

Třetí případ je, že integrand nezávisí explicitně na funkci $\dot{x}$, tj. je dán předpisem

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t))\mathrm{d}t.$$

V tomto případě Eulerova rovnice má tvar (bez vypisování argumentů)

$$f_x = 0,$$

není to diferenciální rovnice, ale „transcendentní“ rovnice. Protože tato rovnice neobsahuje „integrační konstanty“, nebudou její řešení (obecně) splňovat okrajové podmínky.

Poznámka 3.2.6. Elegantnější a systematickou metodu pro konstrukci prvních integrálů pomocí teorému E. Noetherové lze nalézt v [9, 29].

[12] Nalézt explicitní vzorce pro takovouto soustavu rovnic asi nepůjde a bude nutné použít „numerických postupů“, např. metodu postupných aproximací.

Kapitola 4

Aplikace variačního počtu

4.1 Geometrická aplikace

V základní úloze variačního počtu jsme na přípustné funkce kladli požadavek, aby v koncových bodech nabývaly fixních hodnot a byly diferencovatelné. V řadě problémů fyziky, nebo geometrie jsou situace, kdy máme na funkce kladeny další požadavky, např. máme pevně dánu délku grafu funkce. Takové dodatečné omezení se často nazývá vazba.

Analogický problém se objevuje v diferenciálním počtu reálných funkcí více proměnných. V případě, že hledáme maximum (minimum) funkce tří proměnných v trojrozměrném prostoru, která je definovaná na zadané ploše popsáné rovnicí. K hledání maxima (minima) pak často používáme metodu Lagrangeových multiplikátorů (viz [13]).

V případě funkcionálů je situace podobná. Metoda Lagrangeových multiplikátorů se zobecní, aby byla použitelná i na hledání maxima (minima) funkcionálů v třídě přípustných funkcí, na které se kladou další požadavky (vazby).[1] Protože naším cílem bude izoperimetrická úloha, tak se omezíme na případ, kdy přípustné křivky mají předepsanou délku.

Formulace problému: Najděte funkci (křivku) x, pro kterou funkcionál

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t$$

má extrém, kde přípustné funkce splňují okrajové podmínky $x(a) = A$, $x(b) = B$ a

[1] Metoda Lagrangeových multiplikátorů je podrobně zpracována v knize [1].

takové, že funkcionál (délka křivky x)

$$L(x) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\mathrm{d}t$$

má pevně danou hodnotu. Nechť jsou funkce x definovány na uzavřeném intervalu $[a, b]$ a mají spojité první a druhé parciální derivace na uzavřeném intervalu $[a, b]$.

Potřebovali bychom najít nutnou podmínku extrému funkcionálu F při daných omezeních. Použijeme-li Lagrangeovu myšlenku multiplikátorů, tak převedeme úlohu s vazbou na vyšetřování extrému „nevázaného“ funkcionálu. Přesněji je to popsáno v následující větě, kterou uvedeme bez důkazu (důkaz viz [1, 9]).

Věta 4.1.1. *Nechť a, b, A, B jsou daná reálná čísla a nechť l je dané kladné reálné číslo. Předpokládejme, že funkce f má spojité první i druhé parciální derivace podle všech svých proměnných. Nechť hodnoty funkcionálu F jsou dány předpisem*

$$F(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t,$$

pro všechna $t \in [a, b]$. Nechť přípustné funkce z prostoru $\mathcal{C}^1[a, b]$ splňují podmínky $x(a) = A$, $x(b) = B$, $L(x) = \int_a^b g(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t = l$, kde L je funkcionál (délky křivky) s definičním oborem, který je tvořen funkcemi z prostoru $\mathcal{C}^1[a, b]$, jenž splňují podmínky $x(a) = A$, $x(b) = B$. Nechť funkcionál F má extrém v bodě $\tilde{x}$. Pak kdykoli $\tilde{x}$ není extremála funkcionálu L, existuje konstanta λ (tzv. Lagrangeův multiplikátor) taková, že $\tilde{x}$ je extremála funkcionálu, jehož hodnoty jsou dány předpisem

$$\int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t)) + \lambda g(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t,$$

pro všechna $t \in [a, b]$, tj. $\tilde{x}$ splňuje rovnici (bez vypisování argumentů)

$$\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x + \lambda \left(\frac{d}{dt} g_{\dot{x}} - g_x \right) = 0.$$

Poznámka 4.1.2. Prakticky postupujeme tak, že nalezneme obecné řešení rovnice $\frac{d}{dt} f_{\dot{x}} - f_x + \lambda \left(\frac{d}{dt} g_{\dot{x}} - g_x \right) = 0$, které bude záviset na dvou integračních konstantách a parametru λ. Integrační konstanty a parametr λ určíme z okrajových podmínek a vztahu pro vazbu.

Příklad 4.1.3. V horní polorovině uvažte spojitě diferencovatelné křivky (popsané grafem funkce) délky $l > 2$ s koncovými body $A[-1, 0]$ a $B[1, 0]$. Mezi nimi nalezněte tu, která spolu s intervalem $[-1, 1]$ uzavírá plochu o maximálním obsahu.

Řešení: Hledáme takovou spojitě diferencovatelnou funkci x na $[-1,1]$, která maximalizuje funkcionál daný předpisem

$$F(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\mathrm{d}t$$

a navíc vyhovuje vazbové podmínce

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\mathrm{d}t = l. \tag{4.1}$$

K nalezení řešení využijeme Větu 4.1.1.[2] Budeme tedy hledat extremálu funkcionálu

$$\tilde{F}(x) = \int_{-1}^{1} x(t) + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\mathrm{d}t,$$

kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Odpovídající Eulerova rovnice je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\right) - 1 = 0.$$

Jednoduchou integrací dostaneme

$$x - C = \frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}. \tag{4.2}$$

Mimoto integrand funkcionálu $\tilde{F}$ nezávisí explicitně na t, a proto první integrál je[3]

$$\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}}\dot{x} - \left(x + \lambda\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\right) = -D.$$

První integrál dále upravíme do tvaru

$$x - D = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\dot{x}^2(t)}} \tag{4.3}$$

Vyloučením $\dot{x}$ ze vztahů (4.2) a (4.3) obdržíme

$$(t-C)^2 + (x-D)^2 = \lambda^2. \tag{4.4}$$

Hledaná křivka je tedy část kružnice.

[2]Větu lze použít, neboť předpoklad $l > 2$ zajišťuje, že extremála F není extremálou funkcionálu popisujícího vazbu.

[3]Integrační konstantu zvolíme $-D$ a nikoli D, což se dále ukáže jako vhodná volba.

V nalezené rovnici kružnice zbývá určit konstanty C, D a λ. K určení těchto konstant máme k dispozici okrajové podmínky a vazbovou podmínku. Jestliže využijeme okrajové podmínky, tak dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} (1-C)^2 + D^2 &= \lambda^2, \\ (-1-C)^2 + D^2 &= \lambda^2. \end{aligned}$$

Z nich snadno vypočteme $C = 0$ a $D^2 = \lambda^2 - 1$. Zbývá nám využít vazbovou podmínku k určení Lagrangeova multiplikátoru λ. Ze vztahu (4.4) máme

$$\dot{x} = -\frac{t-C}{x-D}.$$

Dosazením do (4.1) a úpravou získáme

$$l = \int_{-1}^{1} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - t^2}} \mathrm{d}t.$$

Integrací obdržíme

$$l = \lambda \left[\arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \right].$$

Využitím lichosti funkce arcsin dostaneme rovnici pro Lagrangeův multiplikátor λ ve tvaru

$$l = 2\lambda \arcsin\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

K nalezení řešení této rovnice je užitečné použít numerických metod, což zde však dělat nebudeme.

Poznamenejme, že jelikož x je funkce, je její graf kratší oblouk kružnice dané rovnicí (4.4). Úloha má tedy řešení pro $l < \pi$. Tento výsledek je intuitivně jasný. ■

4.2 Fyzikální aplikace

V tomto odstavci si na několika příkladech ukážeme aplikaci variačního počtu při formulaci a řešení (jednoduchých) fyzikálních problémů. Ve fyzice se dá řada problémů (např. mechaniky) formulovat pomocí Hamiltonova principu, který říká, že veličina nazývaná akce (označme ji S) má při vývoji fyzikálního systému stacionární hodnotu. Jestliže se zaměříme na mechaniku jednoho hmotného bodu, tak akce S je funkcionál, který je definovaný na množině spojitě diferencovatelných funkcí definovaných na intervalu $[t_0, t_1]$. Předpis pro hodnotu funkcionálu je tvaru

$$S(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t.$$

Navíc se předpokládá, že jsou zadány podmínky $x(t_0) = x_0$ a $x(t_1) = x_1$. Proměnná t má význam času, funkce x představuje polohu a funkce $\dot{x}$ rychlost hmotného bodu. Funkce L je tzv. Lagrangián (Lagrangeova funkce) hmotného bodu.[4]

Úkolem fyziků je sestrojit Lagrangián zkoumaného problému tak, aby dostatečně věrně popisoval fyzikální realitu. K této konstrukci neexistují žádná obecná pravidla, proto se volí heuristický přístup. Na základě několika argumentů fyzikální povahy a intuice je možné dojít k přesvědčení, že Lagrangián by měl, alespoň pro některé úlohy nerelativistické mechaniky hmotného bodu, být tvaru (podrobnosti viz [21])

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - U(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

kde m je (setrvačná) hmotnost hmotného bodu (je to kladné reálné číslo) a funkce U popisující působení ostatních objektů na vyšetřovaný hmotný bod[5] se nazývá interakční energie. Poznamenejme pro úplnost, že $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ se nazývá kinetická energie hmotného bodu.

Máme-li určen tvar Lagrangeovy funkce, tak potřebujeme sestrojit diferenciál akce a položit ho roven nule. Jak víme, dostaneme Eulerovu rovnici, kterou fyzici nazývají Lagrangeova rovnice druhého druhu (jedná se o pohybovou rovnici zkoumaného hmotného bodu). Pokud tuto rovnici vyřešíme při zadaných okrajových podmínkách, je kompletně popsán pohyb vyšetřovaného hmotného bodu.

Poznámka 4.2.1. V konstrukci Lagrangeovy funkce je jistá libovůle, protože když Lagrangeovu funkci vynásobíme nenulovým reálnám číslem, nebo přičteme derivaci diferencovatelné funkce podle času, tak tento nový Lagrangián vede na stejnou Eulerovu rovnici jako původní Lagrangián. Důkaz tohoto tvrzení je podán v [9].

Jako ilustraci vyšetříme pohyb částice v daném vnějším homogenním elektrickém poli.

[4] Předpokládá se, že má spojité první i druhé parciální derivace podle všech proměnných.
[5] Její tvar je nutno určit experimentální cestou.

Příklad 4.2.2. Uvažujme homogenní elektrické pole E orientované do kladného směru x-ové osy kartézské soustavy souřadnic. Můžeme si představovat, že toto pole je v trubici lineárního urychlovače částic. Budeme předpokládat, že urychlovač je takový, že neurychlí částici o hmotnosti m a (elektrickém) náboji q na velikou rychlost, abychom mohli použít nerelativistické mechaniky. Úkolem je najít závislost polohy částice (na ose x) na čase t. Víme, že v čase $t = 0$ je $x(0) = 0$ a v čase $t = 1$ je $x(1) = 1$.

Řešení: Jak bylo naznačeno výše, sestavíme Lagrangeovu funkci jako rozdíl kinetické energie částice a interakční energie mezi částicí a homogenním elektrickým polem. Vezměme Lagrangián ve tvaru

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) - qEx(t).$$

Podle Hamiltonova principu hledáme stacionární bod funkcionálu, jehož hodnoty jsou dány předpisem

$$S(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) - qEx(t) \mathrm{d}t,$$

a definiční obor tvoří všechny diferencovatelné funkce x, které vyhovují okrajovým podmínkám. Stacionární body musí vyhovovat Eulerově rovnici[6], tj. platí

$$\ddot{x}(t) = \frac{q}{m} E.$$

Elementární integrací dostaneme obecné řešení Eulerovy rovnice

$$x(t) = \frac{q}{m} Et^2 + C_1 t + C_2,$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Použitím okrajových podmínek určíme integrační konstanty $C_1 = 1 - \frac{qE}{m}$ a $C_2 = 0$. Řešení splňující okrajové podmínky je dáno předpisem

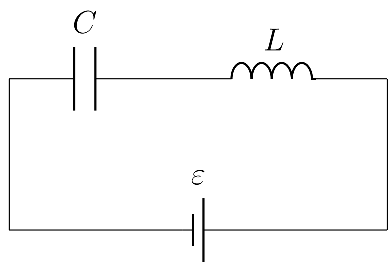
$$x(t) = \frac{q}{m} Et^2 + \left(1 - \frac{qE}{m}\right) t,$$

pro všechna $t \in [0, 1]$. Řešení rovnice existuje dokonce na $\mathbb{R}$, my jsme se však omezili jen na interval $[0, 1]$, neboť hledáme funkce s tímto definičním oborem. ■

[6] Z tvaru Lagrangiánu vidíme, že nezávisí explicitně na čase, proto můžeme snadno sestrojit první integrál Eulerovy rovnice a dostat rovnici prvního řádu. Touto cestou nepůjdeme, protože bychom dostali nelineární rovnici prvního řádu, která se obtížně řeší. V našem případě je Eulerova rovnice lineární, proto její řešení nepůsobí žádné potíže.

Další oblastí užití variačního počtu je nauka o elektrických obvodech. Stručně je tato problematika zmíněna v knize [22]. Podrobnější výklad je podán ve speciální učebnici o teorii elektrických obvodů [5]. My se omezíme na elementární příklad.

Příklad 4.2.3. Uvažujme obvod znázorněný na obrázku 4.1. Mějme zadány hodnoty indukčnosti $L = 4$, kapacity $C = 1$ a průběh funkce ε, která popisuje časový průběh elektromotorického napětí zdroje. Budeme předpokládat, že hodnoty funkce ε jsou dány předpisem $\varepsilon(t) = \sin t$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$; je to častý případ v aplikacích. Položme si za úkol určit proud, který protéká obvodem na obrázku 4.1. Budeme předpokládat, že v čase $t = 0$ byla změřena hodnota elektrického proudu $I(0) = 0$ a v čase $t = \frac{\pi}{2}$ byla hodnota elektrického proudu $I\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.



Obrázek 4.1: Elektrický obvod k Příkladu 4.2.3.

Řešení: K popisu obvodu použijeme Lagrangeovu funkci, zvolme ji ve tvaru

$$\mathscr{L}\left(I(t), \dot{I}(t)\right) = \frac{1}{2}L\dot{I}^2(t) - \frac{1}{2}\frac{I^2(t)}{C} + \dot{\varepsilon}(t)I(t).$$

První člen popisuje výkon magnetického pole, druhý výkon elektrického pole a konečně poslední člen popisuje zdroj (tj. baterii).[7] Obdobně jako v mechanice se předpokládá, že stacionární hodnota funkcionálu

$$S(I) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathscr{L}(I(t), \dot{I}(t))\mathrm{d}t$$

popisuje průběh proudu v obvodu. K nalezení stacionárních bodů potřebujeme najít řešení Eulerovy rovnice, které splňuje dané (okrajové) podmínky. Eulerova rovnice

[7]Výkon magnetického pole je analogií kinetické energie hmotného bodu, výkon elektrického pole je analogií interakční energie mezi hmotnými body. Proto podle analogie s mechanikou tvoříme rozdíl těchto výkonů.

je

$$L\ddot{I}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \dot{\varepsilon}(t). \tag{4.5}$$

Obdrželi jsme obyčejnou nehomogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu. Postup řešení takovéto rovnice je dobře znám (viz [27]). Nebudeme se pokoušet konstruovat obecné vzorce, které popisují řešení, ač to není nikterak náročné. Vyřešíme tuto rovnici pro zadaný průběh elektromotorického napětí a zadané hodnoty indukčnosti a kapacity. Rovnice (4.5) nabude tvaru

$$\ddot{I}(t) + \frac{1}{4}I(t) = \frac{\cos t}{4}. \tag{4.6}$$

Podle známého postupu (viz [27]) nalezneme nejprve obecné řešení homogenní rovnice

$$\ddot{I}(t) + \frac{1}{4}I(t) = 0.$$

K sestrojení obecného řešení homogenní rovnice stačí najít dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice a pak sestrojit jejich lineární kombinaci. Výpočtem se můžeme přesvědčit, že funkce, jejichž hodnoty jsou dány předpisy $\sin \frac{t}{2}$, pro všechna $t \in \mathbb{R}$, a $\cos \frac{t}{2}$, pro všechna $t \in \mathbb{R}$, jsou řešením homogenní rovnice a jsou lineárně nezávislé. Proto je obecné řešení homogenní rovnice dáno předpisem

$$I_h(t) = C_1 \sin \frac{t}{2} + C_2 \cos \frac{t}{2},$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Nyní obrátíme pozornost k sestrojení jednoho řešení rovnice (4.6). Použijeme metodu „speciální pravé strany“, která je podrobně rozebrána v [27].[8] Při použití metody „speciální pravé strany“ předpokládáme, že řešení je tvaru $I_n(t) = A\sin t + B\cos t$, pro všechna $t \in \mathbb{R}$, kde A, B jsou (zatím neurčená) reálná čísla. Dosazením předpokládaného tvaru řešení do rovnice (4.6) a porovnáním koeficientů při funkcích sin a cos dostaneme, že $A = 0$ a $B = -\frac{1}{3}$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice je dáno součtem obecného řešení homogenní rovnice s jedním řešením nehomogenní rovnice. V našem případě dostaneme obecné

[8] Bylo by možné použít i metody „variace konstant“, ale výpočet by nebyl tak elementární. Metody „variace konstant“ bychom museli použít v případě, že by funkce ε byla zadána obecně a sestrojovali bychom obecné vzorce.

řešení rovnice (4.6) ve tvaru

$$I(t) = C_1 \sin \frac{t}{2} + C_2 \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos t,$$

pro všechna $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Řešení rovnice existuje dokonce na $\mathbb{R}$, my jsme se však omezili jen na interval $[0, \frac{\pi}{2}]$, neboť hledáme funkce s tímto definičním oborem.

Zbývá určit konstanty C_1, C_2. Využijeme-li okrajových podmínek, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= C_2 - \frac{1}{3}, \\ 1 &= C_1 \sin \frac{\pi}{4} + C_2 \cos \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Vyřešením této soustavy lineárních algebraických rovnic obdržíme

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{3}, \\ C_1 &= \sqrt{2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

4.3 Ekonomická aplikace

V tomto odstavci si na příkladu ukážeme použití variačního počtu v ekonomii. Podíváme se na klasický Evansův model monopolní firmy, jedno z prvních použití variačního počtu v ekonomii.

Nejprve zavedeme několik ekonomických předpokladů. Budeme uvažovat monopolní firmu, která produkuje jediný výrobek. Označme písmenem q množství výrobků a $c(q)$ celkovou cenu, kterou zaplatíme za výrobu q kusů výrobků. V tomto modelu se předpokládá, že funkce c má předpis

$$c(q) = \alpha q^2 + \beta q + \gamma,$$

kde α, β, γ jsou kladná reálná čísla, $q \in [0, Q]$ a Q je pevně dané kladné reálné číslo.[9]

Dále budeme předpokládat, že nevyrábíme na sklad, tj. poptávané množství výrobků je rovno vyrobenému množství výrobků. Označme poptávané množství výrobků písmenem $\tilde{q}$. Platí $q = \tilde{q}$. Jinak řečeno, co vyrobíme, to okamžitě prodáme.

[9] Je pravda, že q by mělo být přirozené číslo, aby vystihovalo počet výrobků. Pro jednodušší matematické zpracování budeme považovat q za nezáporné reálné číslo. Pod písmenem Q si představujeme maximální množství výrobků, které je daná firma schopna vyrábět.

Poptávané množství výrobků závisí nejenom na ceně $p(t)$ výrobku v daném čase t, ale také na rychlosti změny ceny $\dot{p}(t)$ zboží v čase t. Předpokládejme, že poptávané množství výrobků v daném čase t je dáno předpisem[10]

$$\tilde{q}(t) = a - bp(t) + h\dot{p}(t),$$

kde a, b jsou kladná reálná čísla, h je nenulové reálné číslo, $t \in [0, T]$ a T je pevně dané kladné reálné číslo. Protože vyráběné množství výrobků se rovná poptávanému množství a to se mění s časem, tak se s časem musí měnit i vyráběné množství výrobků, tj. $q : t \to q(t)$, kde $t \in [0, T]$.

Zisk firmy je dán rozdílem příjmů a celkových nákladů.[11] Zisk firmy v daném čase t označíme $z(t)$. Zřejmě platí vztah

$$z(t) = p(t)\tilde{q}(t) - c(q(t)),$$

pro $t \in [0, T]$. Jestliže do tohoto vztahu dosadíme předpokládaný tvar funkcí $\tilde{q}$ a c, dostaneme po úpravě vztah pro zisk firmy v čase t ve tvaru

$$\begin{aligned} z(p(t), \dot{p}(t)) &= -\alpha h^2 \dot{p}^2(t) - h(2\alpha a + \beta)\dot{p}(t) + h(1 + 2\alpha b)p(t)\dot{p}(t) \\ &\quad -b(1 + \alpha b)p^2 + (a + 2\alpha ab + \beta b)p(t) - (\alpha a^2 + \beta a + \gamma), \end{aligned}$$

pro $t \in [0, T]$.

Protože cílem firmy je maximalizace zisku, je přirozené položit si následující otázku. Jak nastavit cenu výrobku v jednotlivých časech, abychom maximalizovali zisk v daném časovém období?

Abychom mohli na tuto otázku odpovědět, musíme si problém matematicky formulovat. Předpokládejme, že je zadána cena v čase $t = 0$, tj. $p(0) = p_0$ (cena za kterou začneme prodávat) a cena v čase $t = T$, tj. $p(T) = p_T$ (cena za kterou budeme doprodávat). Zisk za časové období $[0, T]$ bude dán funkcionálem, jehož hodnota je

$$Z(p) = \int_0^T z(p(t), \dot{p}(t))\mathrm{d}t.$$

Naším úkolem je najít (slabé) maximum funkcionálu Z při zadaných podmínkách $p(0) = p_0$ a $p(T) = p_T$.

[10] Předpis musíme zvolit tak, aby byl klesající funkcí času. Respektujeme tím tzv. „zákon klesající poptávky“, viz [10, 24].

[11] Předpokládá se ovšem, že příjmy jsou větší než celkové náklady.

Řešení: Sestavíme Eulerovu rovnici.[12] Po jednoduchých výpočtech a úpravách dostaneme

$$\ddot{p}(t) - \frac{b(1+\alpha\beta)}{\alpha h^2} p(t) = -\frac{a + 2\alpha ab + \beta b}{2\alpha h^2}.$$

Pro přehlednost si zaveďme označení $A = \frac{b(1+\alpha\beta)}{\alpha h^2}$, $B = \frac{a+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha h^2}$. Podle podmínek, které klademe na čísla a, b, h, α, β je zřejmé, že $A > 0$ a $B > 0$. S přijatým označením můžeme psát

$$\ddot{p}(t) - Ap(t) = -B.$$

Obdrželi jsme obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Nalézt její (obecné) řešení je jednoduché (viz [27]), dostaneme

$$p(t) = C_1 \exp\left(\sqrt{A}t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{A}t\right) + \frac{B}{A},$$

pro všechna $t \in [0, T]$.[13] Ještě musíme určit konstanty C_1 a C_2 tak, aby řešení vyhovovalo zadaným (okrajovým) podmínkám. Platí

$$\begin{aligned} p_0 &= C_1 + C_2 + \frac{B}{A}, \\ p_T &= C_1 \exp\left(\sqrt{A}T\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{A}T\right) + \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineární algebraických rovnic (např. Cramerovým pravidlem) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\exp\left(-\sqrt{A}T\right)(\frac{B}{A} - p_0) - \frac{B}{A} + p_T}{\exp\left(-\sqrt{A}T\right) - \exp\left(\sqrt{A}T\right)}, \\ C_2 &= \frac{(\frac{B}{A} - p_T) - \exp\left(\sqrt{A}T\right)(\frac{B}{A} - p_0)}{\exp\left(-\sqrt{A}T\right) - \exp\left(\sqrt{A}T\right)}. \end{aligned}$$

Našli jsme jedinou funkci p definovanou na intervalu $[0, T]$, která je kandidátem na (slabé) maximum. K další diskusi bychom potřebovali specifikovat parametry úlohy,

[12] Podle předchozí kapitoly bychom mohli využít prvního integrálu, protože integrand nezávisí na proměnné t. Takový postup by byl v tomto případě značně nevýhodný, protože bychom dostali nelineární obyčejnou diferenciální rovnici prvního řádu. Jestliže sestavíme Eulerovu rovnici, tak uvidíme, že bude velice snadno řešitelná.

[13] Podle zadání hledáme řešení na intervalu $[0, T]$, proto definiční obor obecného řešení Eulerovy rovnice musíme omezit z $\mathbb{R}$ na $[0, T]$.

tj. čísla a, b, h, α, β, T, p_0, p_T. Podrobnější diskuse tohoto problému je uvedena v učebnici [11]. ■

Příloha A

Diferenciální počet a jeho užití

V této příloze vyslovíme pro přehlednost (bez důkazů) několik tvrzení z elementární matematické analýzy. Podrobné důkazy těchto tvrzení jsou uvedeny ve známé učebnici [12]. Pak ukážeme použití diferenciálního počtu při řešení několika úloh. Jejich tématika bude z geometrie, fyziky a pokusíme se i o jednoduchou ekonomickou úlohu. Tyto úlohy by jistě inspirovali nadané studenty na středních školách k hlubšímu studiu metod (nejen) matematické analýzy.

A.1 Přehled vět diferenciálního počtu

Přehled pojmů a pouček z diferenciálního počtu začněme definicí derivace. Jedná se o důležitý pojem, který formalizuje okamžitou změnu nějaké veličiny (např. polohy, elektrického náboje, atd.).

Definice A.1.1. Nechť je dána reálná funkce jedné reálné proměnné (krátce funkce) f definovaná v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}$. Nechť je $x_0 \in \Omega$. **Derivací** funkce f v bodě x_0 rozumíme limitu (pokud existuje)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Derivaci funkce f v bodě x_0 značíme $\dot{f}(x_0)$.

Definice A.1.2. Funkce f definovaná v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}$ se nazývá **diferencovatelná**, jestliže má derivaci v každém bodě definičního oboru.

Vyslovili jsme definici derivace funkce v daném bodě. Bude nás zajímat, zda je tato derivace jediná, či nikoli. Odpověď je dána v následující větě.

Věta A.1.3. *Jestliže funkce f definovaná v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}$ má v bodě $x_0 \in \Omega$ derivaci, pak je derivace určena jednoznačně.*

Další věta o vlastnostech spojitých funkcí je velice užitečná. Používá se (mimo jiné) k posouzení existence řešení rovnic, jak o tom pojednáme v některém z následujících příkladů.

Věta A.1.4. *Nechť je funkce f spojitá v intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pak zobrazuje interval I na interval $J \subset \mathbb{R}$ nebo jednobodovou množinu reálných čísel.*

Definice A.1.5. Nechť funkce f je definována na množině $\Omega \subset \mathbb{R}$. Říkáme, že funkce f je

(i) **rostoucí**, jestliže $f(a) < f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$ splňující $a < b$;

(ii) **klesající**, jestliže $f(a) > f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$ splňující $a < b$;

(iii) **nerostoucí**, jestliže $f(a) \geq f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$ splňující $a < b$;

(iv) **neklesající**, jestliže $f(a) \leq f(b)$ pro všechna $a, b \in \Omega$ splňující $a < b$.

Definice A.1.6. Říkáme, že funkce f je **monotónní** na množině $\Omega \subset \mathbb{R}$, je-li nerostoucí nebo neklesající na množině Ω.

Další věta, kterou budeme používat, dává do souvislosti monotonii funkce a její derivaci.

Věta A.1.7. *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a má v každém vnitřním bodě intervalu I derivaci. Pak platí:*

(i) *Jestliže v každém vnitřním bodě x_0 intervalu I je $\dot{f}(x_0) > 0$, pak je funkce f rostoucí v intervalu I.*

(ii) *Jestliže v každém vnitřním bodě x_0 intervalu I je $\dot{f}(x_0) < 0$, pak je funkce f klesající v intervalu I.*

(iii) *Jestliže v každém vnitřním bodě x_0 intervalu I je $\dot{f}(x_0) \geq 0$, pak je funkce f neklesající v intervalu I.*

(iv) *Jestliže v každém vnitřním bodě* x_0 *intervalu* I *je* $\dot{f}(x_0) \leq 0$, *pak je funkce* f *nerostoucí v intervalu* I.

(v) *Jestliže v každém vnitřním bodě* x_0 *intervalu* I *je* $\dot{f}(x_0) = 0$, *pak je funkce* f *konstantní v intervalu* I.

Na závěr stručného přehledu uvedeme větu, která se probírá (i s důkazem) na střední škole. Poučí nás o souvislosti monotonie funkce s prostotou funkce.

Definice A.1.8. Říkáme, že funkce f definovaná na množině $\Omega \subset \mathbb{R}$ je **prostá**, jestliže pro libovolná $a, b \in \Omega$ platí implikace

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Věta A.1.9. *Nechť je funkce* f *definovaná na intervalu* $I \subset \mathbb{R}$. *Je-li funkce* f *rostoucí (resp. klesající) na* I, *pak je funkce* f *prostá na* I.

Tuto větu lze využít při zkoumání jednoznačnosti řešení dané rovnice, v případě, že existence řešení již byla prokázána. Využijeme ji v příkladech dále.

A.2 Geometrická aplikace

V této sekci si ukážeme použití metod diferenciálního počtu v geometrii.

Příklad A.2.1. Ukažte, že ze všech rovnoramenných trojúhelníků o daném obvodu má rovnostranný (a žádný jiný) největší obsah.

Řešení: Označme si písmenem $\mathcal{O}$ obvod, $\mathcal{S}$ obsah, a a c délky stran rovnoramenného trojúhelníku, v_c výšku (na stranu c).[1] Z geometrie víme, že platí vztahy $\mathcal{O} = 2a + c$ a $\mathcal{S} = \frac{cv_c}{2}$ a podle Pythagorovy věty vztah $a^2 = v_c^2 + \frac{c^2}{4}$. Pro obsah můžeme psát

$$\mathcal{S} = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Obsah trojúhelníka závisí na délkách stran. Jestliže však uvážíme tzv. vazbovou podmínku $\mathcal{O} = 2a + c$, kde $\mathcal{O}$ je pevně dané číslo, tak dostaneme pro hodnotu funkce $\mathcal{S}$ předpis

$$\mathcal{S}(c) = \frac{c}{4}\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c},$$

[1] Všechny tyto veličiny jsou kladná reálná čísla, jak plyne z jejich geometrického významu.

pro všechna $c \in (0, \frac{\mathcal{O}}{2})$.

Naším úkolem je nalezení maxima této funkce (pokud existuje). Pro limity v krajních bodech platí

$$\lim_{c \to 0^+} \frac{c}{4}\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c} = \lim_{R \to \frac{\mathcal{O}}{2}^-} \frac{c}{4}\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c} = 0.$$

Derivace vyšetřované funkce je

$$\dot{\mathcal{S}}(c) = \frac{1}{4}\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c} - \frac{\mathcal{O}c}{4\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c}} = \frac{\mathcal{O}\,(\mathcal{O} - 3c)}{4\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c}}$$

pro všechna $c \in (0, \frac{\mathcal{O}}{2})$. K nalezení stacionárních bodů řešme rovnici[2]

$$\frac{\mathcal{O}\,(\mathcal{O} - 3c)}{4\sqrt{\mathcal{O}^2 - 2\mathcal{O}c}} = 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$\mathcal{O}(\mathcal{O} - 3c) = 0.$$

Tato rovnice má pouze jediné řešení $c = \frac{\mathcal{O}}{3}$ v intervalu $(0, \frac{\mathcal{O}}{2})$. Hodnota funkce $\mathcal{S}$ v bodě $\frac{\mathcal{O}}{3}$ je $\mathcal{S}(\frac{\mathcal{O}}{2}) = \frac{\sqrt{3}\mathcal{O}^2}{36}$. Tato hodnota je maximem, protože funkce $\mathcal{S}$ je rostoucí v intervalu $\left(0, \frac{\mathcal{O}}{3}\right]$ a klesá v intervalu $\left(\frac{\mathcal{O}}{3}, \frac{\mathcal{O}}{2}\right]$. Podle vztahu $\mathcal{O} = 2a + c$ dostaneme, že pro stranu a platí $a = c$.

Z výše uvedené diskuze tak dostáváme následující závěr. Aby rovnoramenný trojúhelník měl maximální obsah při daném obvodu, tak musí mít všechny strany stejně dlouhé, tj. musí být rovnostranný.

■

Uveďme ještě jeden příklad (viz [2]), který bude vyžadovat trochu více znalostí z matematické analýzy, než které byly uvedeny v přehledu.

Příklad A.2.2. Nechť je dána v trojrozměrném euklidovském prostoru kartézská souřadná soustava s počátkem $\mathcal{O}$. Dále uvažujme bod $\mathcal{P}$, jenž má všechny souřadnice nezáporné. Označme α, β, γ úhly, které svírá úsečka $\mathcal{OP}$ (po řadě) s osami souřadnic x, y, z. Úkolem je určit souřadnice bodu $\mathcal{P}$ tak, aby součet $\alpha + \beta + \gamma$ byl minimální (maximální).

[2] Položili jsme derivaci rovnu nule.

Řešení: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že body $\mathcal{P}$ leží v množině $S \subset \mathbb{R}^3$, jenž je popsána podmínkami

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$
$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Vyjádříme-li si součet úhlů α, β, γ pomocí souřadnic bodu $\mathcal{P}$, dostaneme

$$\alpha + \beta + \gamma = \arccos(x) + \arccos(y) + \arccos(z).$$

Definujme funkci f předpisem

$$f(x,y,z) = \arccos(x) + \arccos(y) + \arccos(z),$$

kde $(x,y,z) \in S$. Funkce f je spojitá a množina S je omezená a uzavřená. Proto (podle Weierstrassovy věty) existuje maximum i minimum funkce f.

Uvažme nejprve, že jedna ze souřadnic bodu $\mathcal{P}$ je rovna nule. Nechť je to například x-ová souřadnice. Pak platí

$$f(0,y,z) = \arccos 0 + \arccos y + \arccos \sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Jestliže bude nulová y-ová nebo z-ová souřadnice dostaneme stejný výsledek. Na hranici množiny S má tak vyšetřovaná funkce f konstantní hodnotu rovnu π.

Nyní předpokládejme, že souřadnice bodu $\mathcal{P}$ jsou pouze kladné. Omezíme se tedy na množinu $\tilde{S} \subset S$ danou podmínkami

$$x > 0, y > 0, z > 0;$$
$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Množina $\tilde{S}$ je otevřená. Budeme hledat stacionární body na množině $\tilde{S}$. Použijeme k tomu metodu Lagrangeových multiplikátorů. Pro maxima (minima) funkce f existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$, tak že platí

$$\nabla\left(f(x,y,z) + \lambda h(x,y,z)\right) = 0.$$

Jestliže podrobně rozepíšeme tuto podmínku, tak vidíme, že souřadnice stacionárního bodu a číslo λ musí splňovat soustavu rovnic

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\lambda x = 0,$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2\lambda y = 0,$$
$$-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} + 2\lambda z = 0.$$

Uvážením předpokladů kladených na souřadnice bodu $\mathcal{P}$ dostaneme po úpravě[3] soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2), \\ y^2 - z^2 &= (y^2 - z^2)(y^2 + z^2), \\ x^2 - z^2 &= (x^2 - z^2)(x^2 + z^2). \end{aligned}$$

Odtud okamžitě plyne, že musí platit $x = y = z$. Použijeme-li vazbovou podmínku $h(x, y, z) = 0$, dostaneme, že bod podezřelý z extrému je $\mathcal{P}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Protože platí[4] $3 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \pi$, není v bodě $\mathcal{P}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ maximum.[5] Protože bod $\mathcal{P}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ je jediný podezřelý bod z extrému v $\tilde{S}$ a není maximem, musí být minimem.[6] Minimální hodnota funkce f je $3 \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Protože funkce f nemá maximum na množině $\tilde{S}$, tak musí mít maximum na hranici množiny S. Ve všech bodech hranice nabývá funkce f své maximální hodnoty π.

■

A.3 Fyzikální aplikace

V této sekci si ukážeme použití diferenciálního počtu ve fyzice (elektrotechnice).

Příklad A.3.1. Mějme dán zdroj elektromotorického napětí ε, který má (vnitřní) odpor R_i. Hledáme odpor R spotřebiče, při kterém by dodaný příkon P ze zdroje elektromotorického napětí byl maximální. Ztráty zanedbejte.

Řešení: Veličiny ε, R_i a R pokládáme podle jejich fyzikálního významu za kladná reálná čísla.

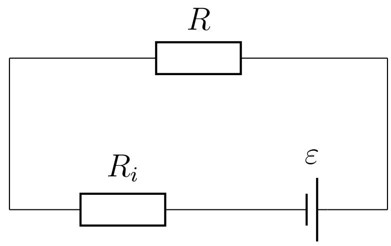
[3] Umocněním a vyloučení parametru λ.

[4] Jestliže uvážíme, že arccos je klesající funkce, tak pak platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad &\Rightarrow \quad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) > \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\Rightarrow \quad 3\arccos\left(\frac{1}{2}\right) > 3\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &\Rightarrow \quad \pi > 3\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

[5] Na hranici množiny S nabývá funkce f hodnoty rovné π.

[6] Existence minima je zajištěna uzavřeností a omezeností množiny S.



Obrázek A.1: Elektrický obvod k Příkladu A.3.1.

Z fyziky víme (viz [25]), že výkon spotřebiče je určen vztahem

$$N = RI^2,$$

kde N označuje výkon spotřebiče, R odpor spotřebiče a I elektrický proud protékající spotřebičem. Protože neuvažujeme ztráty, výkon spotřebiče se rovná jeho příkonu, tj. $N = P$. Podle druhého Kirchhofova pravidla víme (viz [25]), že musí platit

$$\varepsilon = (R + R_i)I.$$

Pro příkon můžeme psát

$$P = N = RI^2 = \frac{R\varepsilon^2}{(R + R_i)^2}.$$

Vyjádřili jsme příkon pomocí zadaných veličin, mezi kterými je veličina R proměnná.

Naším úkolem je najít maximum funkce (pokud existuje), jejíž hodnoty jsou dány předpisem

$$P(R) = \frac{R\varepsilon^2}{(R + R_i)^2}$$

pro všechna $R \in (0, +\infty)$. Platí

$$\lim_{R \to 0^+} \frac{R\varepsilon^2}{(R + R_i)^2} = \lim_{R \to +\infty} \frac{R\varepsilon^2}{(R + R_i)^2} = 0.$$

Derivace P podle R je

$$\dot{P}(R) = \frac{\varepsilon^2(R_i - R)}{(R + R_i)^3}$$

pro každé $R \in (0, +\infty)$. Pro určení stacionárních bodů položíme

$$\frac{\varepsilon^2(R_i - R)}{(R + R_i)^3} = 0.$$

Odtud plyne, že existuje jediný stacionární bod $R = R_i$. Protože zkoumaná funkce je diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru, je díky Fermatově větě nalezený stacionární bod jediným kandidátem na bod maxima. Vypočtěme-li hodnotu vyšetřované funkce v bodě $R = R_i$, dostaneme

$$P(R_i) = \frac{R_i \varepsilon^2}{4R_i}.$$

Z nalezených výsledků vidíme, že vyšetřovaná funkce je rostoucí v intervalu $(0, R_i]$ a klesající v intervalu $[R_i, +\infty)$. Proto má v bodě R_i maximum, které má hodnotu $\frac{R_i \varepsilon^2}{4R_i}$.

Z našeho výpočtu plyne, že spotřebič musí mít stejný odpor jako je vnitřní odpor zdroje. Pouze v tomto případě bude dodaný příkon maximální.

■

A.4 Ekonomická aplikace

V této sekci si na příkladu ukážeme použití metod diferenciálního počtu v ekonomii.

Příklad A.4.1. Oddělení plánování potravinářského podniku dostalo za úkol navrhnout rozměry válcové konzervy o daném (vnitřním) objemu V, která bude mít co nejmenší hmotnost. Ví, že se plechovky musí vyrábět z plechu o dané hustotě ϱ a dané tloušťce t.

Řešení: Protože plechovku můžeme považovat za povrch válce, tak hledáme (vnitřní) výšku válce h a (vnitřní) poloměr podstavy r. Z fyziky víme, že pro hmotnost plechovky m platí $m = \varrho\tilde{V}$, kde ϱ je hustota plechu a $\tilde{V}$ je objem plechu. Jestliže si představíme „rozloženou plechovku na plechu“, tak pro objem plechu potřebného na vytvoření plechovky musí platit[7]

$$\tilde{V} = (2\pi r(h + 2t) + 2\pi r^2)t,$$

pro hmotnost tedy dostaneme vztah

$$m(r) = \varrho t(2\pi r(h + 2t) + 2\pi r^2).$$

[7]Kolem kruhových podstav je obtočen obdélník plechu („tělo plechovky“).

Dále máme zadánu (vazbovou) podmínku na (vnitřní) objem plechovky $V = \pi r^2 h$. Využitím této podmínky dostaneme, že $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Vytah pro hmotnost plechovky v závislosti na (vnitřním) poloměru r je

$$m(r) = 2\varrho t \left(\frac{V}{r} + 2\pi t r + \pi r^2 \right)$$

pro všechna $r \in (0, +\infty)$.

Naším úkolem je najít minimum této funkce (pokud existuje). Derivace m podle (vnitřního) poloměru r je

$$\dot{m}(r) = 2\varrho t \left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi t + 2\pi r \right)$$

pro všechna $r \in (0, +\infty)$. Odtud plyne, že stacionární body splňují rovnici

$$r^3 + tr^2 - \frac{V}{2\pi} = 0. \tag{A.1}$$

Toto je kubická rovnice. Je otázkou, zda má rovnice (A.1) kladný reálný kořen. V kladné případě je zde ještě otázka, zda je jediný.

Uvažujme (pomocnou) funkci g, jejíž hodnoty jsou dány předpisem

$$g(x) = x^3 + tx^2 - \frac{V}{2\pi}$$

pro všechna $x \in (0, +\infty)$. Derivace této funkce je

$$\dot{g}(x) = 3x^2 + 2tx$$

pro všechna $x \in (0, +\infty)$. Protože je $\dot{g}(x) > 0$ pro všechna $x \in (0, +\infty)$, je funkce g rostoucí v intervalu $(0, +\infty)$, a proto prostá. Funkce g zobrazí interval $(0, +\infty)$ na interval $(-\frac{V}{2\pi}, +\infty)$. Protože interval $(-\frac{V}{2\pi}, +\infty)$ obsahuje číslo nula, existuje[8] řešení rovnice (A.1). Díky prostotě funkce g existuje právě jedno kladné reálné řešení rovnice (A.1). Označme si ho r_0.

Protože

$$\lim_{r \to 0^+} m(r) = \lim_{r \to +\infty} m(r) = +\infty,$$

[8] Na existenci řešení lze usuzovat i prostřednictvím „algebraické“ argumentace. Protože naše rovnice je kubická s reálnými koeficienty, tak musí mít alespoň jeden reálný kořen. O platnosti této věty se lze poučit v knize [19].

je funkce m klesající v intervalu $(0, r_0]$ a rostoucí v intervalu $[r_0, +\infty)$. Odtud plyne, že funkce m nabývá v bodě r_0 minima. Podle vztahu pro vnitřní objem plechovky $V = \pi r^2 h$ dostaneme pro hledanou (vnitřní) výšku plechovky hodnotu $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2}$.

Z výše uvedeného vidíme, že plechovka o daném (vnitřním) objemu má minimální hmotnost v případě, že (vnitřní) poloměr podstavy je r_0 a (vnitřní) výška je $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2}$.

■

Poznámka A.4.2. Pro zajímavost vypočteme (vnitřní) poloměr a (vnitřní) výšku plechovky pro číselné hodnoty $V = 1000\,\mathrm{cm}^3$ a $t = 0,1\,\mathrm{cm}$. Abychom vypočetli (vnitřní) poloměr, potřebujeme vyřešit rovnici

$$r^3 + 0,1r^2 - \frac{500}{\pi} = 0, \tag{A.2}$$

o které víme, že má právě jeden kladný kořen r_0. K nalezení tohoto řešení je užitečné se obrátit k numerickým metodám.[9] K řešení rovnice (A.2) užijeme Newtonovy metody (viz [6]). V prvním kroku zhruba odhadneme kořen rovnice (A.2) jako $r_1 = 5,5$ (číslo 5 by bylo moc malé, číslo 6 moc velké). Po několika krocích se dá aproximace řešení zlepšit na hodnotu 5,38. Můžeme tedy položit $r_0 \doteq 5,38$. S tímto přibližným výsledkem se spokojíme. Pro výpočet (vnitřní) výšky užijeme vztahu $h_0 = \frac{V}{\pi r_0^2}$ a dostaneme $h_0 \doteq 10,99$. Pro výrobu plechovky navrhneme hodnoty (vnitřního) poloměru 5,4 cm a pro (vnitřní) výšku 11,0 cm.

Ptejme se, jak se změní výsledek zanedbáním tloušťky plechu. V tomto případě musíme řešit rovnici

$$r^3 - \frac{500}{\pi} = 0,$$

jejíž jediný kladný kořen je $r_0 = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \doteq 5,42$. Odtud pro (vnitřní) výšku dostaneme $h_0 \doteq 10,83$. Pro výrobu bychom navrhli hodnoty (vnitřního) poloměru 5,4 cm a (vnitřní) výšky 10,8 cm. Tyto hodnoty jsou skoro stejné jako při započtení tloušťky plechu. To je intuitivně přirozené, protože plech měl (v našem konkrétním případě) tloušťku pouhý milimetr. Dá se očekávat, že pro plech o větší tloušťce by se výsledky, při započtení nebo zanedbání tloušťky plechu, více odlišovaly. V reálné praxi bychom museli uvážit, co by plechovka měla vydržet, a podle toho volit tloušťku plechu.

Poznámka A.4.3. Z řešení příkladu a také z numerického výpočtu v předcházející poznámce vidíme, že když nezapočteme tloušťku plechu, tak se výpočet stává docela

[9]Cardanovy vzorce, známé z algebry (viz [19]), jsou pro praktické počítání nevhodné.

snadným. Započtením tloušťky plechu se celý výpočet značně komplikuje a je nutné používat řadu vět z různých partií matematiky. S podobným zkomplikováním situace se setkáváme při zpřesňování různých modelů z praxe.

Literatura

[1] Alexejev V. M., Tichomirov V. M., Fomin S. V.: *Matematická teorie optimálních procesů*, Praha: Academia 1991.

[2] Azé D., Hiriart-Urruty J.-B.: *Analyse Variationnelle et Optimisation*, Toulouse: Cepadue 2010.

[3] Bican L.: *Lineární algebra a geometrie*, Praha: Academia 2000.

[4] Brdička M., Hladík A.: *Teoretická mechanika*, Praha: Academia 1987.

[5] Čajka J., Kvasil J.: *Teorie elektrických obvodů*, Praha: SNTL 1979.

[6] Dĕmidovič B. P., Maron J. A.: *Základy numerické matematiky*, Praha: SNTL 1966.

[7] Drábek P., Milota J.: *Lectures on Nonlinear Analysis*, Plzeň: Vydavatelský servis 2004.

[8] Fučík S., Nečas J., Souček V.: *Úvod do variačního počtu*, Praha: SPN 1972.

[9] Gelfand I. M., Fomin S. V.: *Calculus of Variations*, New Jersey: Prentice-Hall 1963.

[10] Holman R: *Ekonomie*, Praha: C. H. Beck 2002.

[11] Chiang A. C.: *Elements of Dynamic Optimization*, Singapore: McGraw-Hill 1992.

[12] Jarník V.: *Diferenciální počet I*, Praha: Academia 1984.

[13] Jarník V.: *Diferenciální počet II*, Praha: Academia 1984.

[14] Jarník V.: *Integrální počet I*, Praha: Academia 1984.

[15] Jarník V.: *Integrální počet II*, Praha: Academia 1984.

[16] Kalas J., Ráb M.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Brno: Masarykova univerzita 2001.

[17] Kolmogorov A. N., Fomin S. V.: *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*, Praha: SNTL 1975.

[18] Kopáček J. a kol.: *Příklady z matematiky pro fyziky II*, Praha: MatfyzPress 1996.

[19] Kořínek V.: *Základy algebry*, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd 1953.

[20] Kreyszig E.: *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons 1978.

[21] Landau L. D., Lifshitz E. M.: *Mechanics*, Butterworth-Heinemann 2006.

[22] Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P.: *Electrodynamics of Continuous Media*, Butterworth-Heinemann 2006.

[23] Rektorys K.: *Přehled užité matematiky*, Praha: SNTL 1963 .

[24] Samuelson P. A., Nordhaus W. D.: *Ekonomie*, Praha: Svoboda 1991.

[25] Sedlák B., Štoll I.: *Elektřina a magnetismus*, Praha: Karolinum 1993.

[26] Schwarz Š.: *Základy náuky o riešení rovníc*, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd 1958.

[27] Stěpanov V. V.: *Kurs diferenciálních rovnic*, Praha: Přírodovědecké nakladatelství 1950.

[28] Taylor A. E.: *Úvod do funkcionální analýzy*, Praha: Academia 1973.

[29] van Brunt B.: *The Calculus of Variations*, New York: Springer 2004.