Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kateřina Hejdrychová

Strategie řešení slovních úloh v historickém vývoji

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika (jednooborová)

Praha 2014

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci pod vedením vedoucí bakalářské práce zpracovala samostatně a za použití pouze uvedené literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 20. června 2014

Kateřina Hejdrychová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala Prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za vstřícný a ochotný přístup a hlavně za trpělivost v průběhu tvorby mojí bakalářské práce. Velmi si cením rad, doporučení i připomínek, kterými přispěla k napsání této práce.

Abstrakt

Práce se zabývá slovními úlohami řešitelnými pomocí lineárních rovnic. Cílem práce je vytvořit sbírku typových úloh, ve které jsou zastoupeny nejen úlohy aktuální, ale i historické, vybrané z různých období vývoje matematiky.

V první části je ukázáno, jaký důraz klade Rámcový vzdělávací program na zařazování praktických úloh ve výuce matematiky. Je také zvýrazněn přínos slovních úloh pro rozvíjení matematické a finanční gramotnosti.

Druhá část je věnována historii matematiky, se zaměřením na problematiku rovnic a slovních úloh, a to jak v celosvětovém měřítku, tak i na území dnešní České republiky.

Třetí, nejobsáhlejší část je sbírkou typových úloh. Ty jsou rozdělené podle kontextu tak, jak jsou děleny obvykle v českých výukových materiálech pro základní a střední školy: úlohy o dělení na nestejné části, úlohy o pohybu, úlohy o společné práci a úlohy o směsích.

Ve sbírce jsou obsaženy tři typy úloh: Aktuální úlohy jsou převzaty ze současných učebnic a sbírek. Historické úlohy jsou převzaté z historicky významných pramenů různých zemí. Zastaralé úlohy pochází především z minulého století. Jsou to úlohy neaktuální kontextem, terminologií apod., které jsou upravené pro přínosné použití ve výuce v současné době. Součástí každé úlohy je naznačení řešení pomocí lineárních rovnic a jejich soustav.

Klíčová slova

slovní úlohy, řešení pomocí lineárních rovnic, historické souvislosti, sbírka úloh

Title: Solving strategies of word problems in their historical development

Abstract

This thesis deals with word problems which can be solved by using linear equations. Its aim is to create a collection of current and historical problems selected from different periods of the history of mathematics.

In the first part, the level of emphasis put on the use of word problems in the teaching of mathematics by the Framework Education Programme is shown.The contribution of word problems to developing mathematical and financial literacy is also highlighted

The second part deals with the history of mathematics focusing on the domains of equations and word problems, both from a worldwide and Czech perspective.

The third part is a collection of type problems. The problems are grouped according to context in the way it is usually done in Czech educational materials for primary and secondary schools: problems dealing with the division of a whole into unequal parts, problems dealing with movement, problems dealing with joint work and problems dealing with mixtures.

The collection contains three types of problems. Current problems are adopted from contemporary textbooks and collections of problems for schools. Historical problems are taken from historically significant resources from different countries. Outdated problems mainly originated in the last century. These problems are outdated from the perspectives of context, terminology etc.; in the thesis, their adaptations for teaching mathematics nowadays are proposed.

Key words: word problems, solving by linear equations, historical, relationships, collection of problems

Obsah

Úvod - motivace

Strategie řešení slovních úloh v historických souvislostech. Proč jsem si vybrala právě toto téma? Už osm let působím jako pedagog na základní škole. Možná právě proto, že jsem studovala obor český jazyk – matematika, hledám souvislosti mezi těmito dvěma předměty a považuji slovní úlohy za důležitou a neopomenutelnou část výuky.

Propojují se zde všechny nabyté znalosti a dovednosti, žáci poznávají, že matematické poučky a definice jsou použitelné i v praxi. Bohužel dnešní děti stále méně čtou. V hodinách matematiky zjišťuji, že jak se snižuje jejich čtenářská gramotnost, mají i větší problémy s převedením matematických pojmů do reálných situací.

V řadě učebnic, které naše základní škola využívá, je prostor pro řešení slovních úloh velmi omezen. Pokud chci, aby se žáci s problematikou řešení vypořádali, jsem při výuce nucena doplňovat stávající učebnice vlastními nápady. Pro úlohy nejčastěji sahám do starých učebnic, ze kterých jsem se učila nejen já, ale i do takových, které používala generace mých rodičů. Pozitivum vidím v tom, že řešení matematických slovních úloh je v podstatě neměnné, na rozdíl od vědomostí v jiných oborech, například v zeměpise, kde se za poslední dobu udály velké změny v názvech států, měst, počtu obyvatel atd.

Co je nutné aktualizovat, je slovní zadání, aby žákům připadalo srozumitelné. Kolikrát jsem se ocitla v situaci, kdy žáci nevěřícně kroutili hlavou nad úlohou, která zadávala cenu bochníku chleba 3 Kčs. Logicky už nerozumí pojmu „plnění brigády socialistické práce v celoročním plánu družstevníků JZD“. Samozřejmě většina z nich úlohu vypočítá, ale velká část slabších žáků je takovým zadáním ochuzena o důležitou část slovní úlohy, a to o jakousi kontrolu pomocí vlastního úsudku. Jako příklad uvedu: překročí-li cena 1 kg bochníku běžného chleba 70 Kč, očekávám, že žák zareaguje a bude předpokládat chybu v zadání, protože ví, že reálná cena takového bochníku chleba se pohybuje mezi 20 až 35 Kč. Pokud mu však v úlohách ze starších učebnic vyjde správným řešením odpověď, že „Cena jednoho bochníku chleba činí 3 Kčs a 20 hal“, není možné tuto logickou kontrolu provádět.

Při prezentaci různých strategií řešení vybraných slovních úloh se věnuji i historickému vývoji těchto úloh. Budu proto různá řešení prezentovat nejen na současných úlohách, ale zařadím i úlohy historické. U nich předem počítám s tím, že text je pro dnešní žáky jen těžko pochopitelný a doslova jim budu muset určité části slovního zadání „přeložit“ do běžné češtiny. Jde spíše o důkaz, že i když žáci textu příliš nerozumí po stránce jazykové, matematicky je vyřešit umí. Překvapivě jsem zjistila, že právě občasné zařazení těchto, víc než archaických, úloh v hodině svou neobvyklostí žáky pobaví a příklady je zaujmou. I přesto za nejpodstatnější pro logické uvažování žáků a jejich vlastní rozvoj považuji slovní úlohy aktuální, ve kterých dokáží výsledek odhadnout, kriticky porovnat s reálnou situací a ověřit správnost řešení.

I proto jsem se rozhodla některé úlohy zastaralé textem, ale užitečné postupem řešení a sledováním správných didaktických cílů, zaktualizovat.

V práci podávám ucelenou představu o důležitosti a systému řešení slovních úloh nejen v současné matematice teoretické, ale i v reálném životě.

Slovní úlohy - jejich význam pro školskou matematiku, aktuálnost kontextu

„K čemu budu tohle v životě potřebovat?“ S touto otázkou se na základní škole setkávám stále častěji. Žáci se znuděným výrazem mají pocit (bohužel někdy asi i oprávněný), že všechno, s čím se ve výuce setkávají, je naprosto neužitečné a pro jejich další vývoj zcela zbytečné.

Jak jsem již výše zmiňovala, já osobně považuji slovní úlohy za jednu z nejdůležitějších složek školní matematiky. Slovní úlohy jsou odpovědí na otázku o užitečnosti matematických výpočtů a strategií. Přibližují matematiku reálným situacím a z nezajímavých pouček v očích dětí dělají věc užitečnou.

Stejně jsou úlohy vnímány i v rámcovém vzdělávacím programu (RVP). Tady je konkrétně důležitost řešení slovních úloh prezentována v charakteristice vzdělávací oblasti.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrty, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.[1]

Co je tedy slovní úloha? Vyšín (1962) ve své publikaci Metodika řešení matematických úloh definuje dva druhy slovních úloh. V první řadě jsou to matematické úlohy, které jsou vysloveny slovními výroky, např. geometrické konstrukční úlohy.

Druhou kategorii slovních úloh tvoří úlohy matematického charakteru, ve kterých musíme nejdříve matematicky formulovat podmínky zadané úlohy, a jejichž témata jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd. Z takové úlohy je třeba matematickou teprve vytvořit. To je často možné několika způsoby. Do této skupiny patří většina školních úloh řešených v aritmetice a algebře na základních i středních školách.

[1] http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=6407

Ve své práci se zastavím zejména u druhého typu úloh, protože lépe odpovídají na otázku položenou v úvodu této kapitoly.

Proč jsou právě tyto úlohy pro rozvoj žáků a jejich aplikaci matematických dovedností tak důležité a nezbytné? Novým trendem v přípravě na vyučování je stanovování nejen cílů, ale také konkretizace kompetencí a dovedností, které by si žáci měli v průběhu vyučování, v každém předmětu, ale i v konkrétní hodině osvojit. Obecně sem na úrovni základního vzdělávání patří: **kompetence k učení, k řešení problémů, komunikativní, sociální a personální, občanské a pracovní kompetence**. Podle rámcového vzdělávacího programu by žáci v hodinách matematiky měli být směrováni k osvojení a rozvíjení některých kompetencí. Zde vybírám z RVP pouze ty, které se nejvíce dotýkají problematiky slovních úloh:

- *rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů*
- *vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu*
- *vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely*
- *provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému*
- *přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu*
- *rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby*[2]

Pro naplnění těchto cílů jsou slovní úlohy naprosto nepostradatelné, protože se v nich všechny potřebné dovednosti spojují a prolínají.

[2] http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=6407

Další termín, kterého jsem se v úvodu dotkla, je **čtenářská gramotnost**. Gramotnost je termín, který je v současné době hodně používaný. Nicméně význam termínu gramotnost se v pedagogických kruzích hodně změnil. *„Dříve byl za gramotného považován ten, kdo uměl na základní úrovni číst, psát a počítat. V současné společnosti znalostí získal tento pojem jiný význam a pod gramotností určité oblasti se skrývá nejenom znalost pojmů dané oblasti, jejich porozumění a pochopení v souvislostech, ale i dovednost využít je všestranně v praktickém životě.* (Faltýn, Němečková, Zelendová, 2010, str. 4)

Rozlišujeme několik typů gramotností: kromě již zmíněné čtenářské je tu ještě **matematická, přírodovědná, finanční a ICT gramotnost.**

Pro matematiku je mezi těmito typy nejdůležitější vymezení a podporování matematické gramotnosti, ale v případě slovních úloh, kterým se v práci věnuji, se jeví jako velmi důležitá i gramotnost čtenářská a finanční. Právě čtení s porozuměním je základním kamenem správného řešení slovních úloh. Bohužel stále častěji se setkávám s tím, že žáci úlohu sice přečtou, ale nedokáží aplikovat správné matematické postupy. I když nějaký postup řešení najdou, nedokáží správně formulovat odpověď, protože ani neví, co vlastně vyřešili. Také finanční gramotnost je ve velké míře rozvíjena pomocí řešení slovních úloh. Právě v kontextu této gramotnosti nejčastěji narážíme na zastaralé úlohy, které svojí neaktuálností pohled žáků spíš zkreslují, než by finanční rozhled rozšiřovaly a upevňovaly.

Jak tedy vymezit pojem **matematická gramotnost**? Nejobecnější definice, kterou jsem našla, říká: *„Matematická gramotnost je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.“*[3]

Mně osobně je bližší a srozumitelnější definice, kterou přednesl na konferenci O škole a vzdělávání F. Kuřina. *„Matematickou gramotností na úrovni n-té třídy k-tého stupně školy rozumíme schopnost porozumět matematickému textu (slovnímu, symbolickému nebo obrázkovému), schopnost vybavovat si potřebné matematické pojmy, postupy a teorie a dovednost řešit úlohy, které nemají problémový charakter. K řešení úloh problémového charakteru je třeba určitá míra tvořivosti, která představuje vyšší úroveň matematické*

[3] Definice matematické gramotnosti podle PISA 2003, Koncepce matematické gramotnosti ve výzkumu PISA. Praha: ÚIV, 2003 in: Faltýn J., Němčíková K., Zelendová E. (eds): Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele, Praha 2010 (str 22)

gramotnosti. Tato úroveň patrně nemůže být požadována od celé populace. Základní matematickou gramotnost by měl dosáhnout každý absolvent příslušného typu školy."[4]

Matematická gramotnost se dá rozdělit do několika složek:

- situace a kontexty, do nichž jsou zasazeny problémy, které mají žáci řešit, a aplikovat tak získané vědomosti a dovednosti
- kompetence, které se uplatňují při řešení problémů: matematické uvažování, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, užívání matematického jazyka, užívání pomůcek a nástrojů
- matematický obsah tvořený strukturami a pojmy nutnými k formulaci matematické podstaty problémů: kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy, neurčitost

Pro dokreslení systému gramotností ještě v krátkosti uvádím vymezení pojmů čtenářská a finanční gramotnost.

Čtenářská gramotnost je celoživotně se rozvíjející vybavenost člověka vědomostmi, dovednostmi, schopnostmi, postoji a hodnotami potřebnými pro užívání všech druhů textů v různých individuálních i sociálních kontextech. Ve čtenářské gramotnosti se prolíná několik rovin, z nichž žádná není opominutelná:

- vztah ke čtení
- doslovné porozumění
- vysuzování a hodnocení
- metakognice
- sdílení
- aplikace

Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb. Finančně gramotný občan se orientuje v problematice peněz a cen a je schopen odpovědně spravovat osobní/rodinný

[4] Kuřina, F. Problémy matematického vzdělávání. In Bečvářová, M. (eds.) *Sborník materiálů konference O škole a vzdělávání.* Praha: MATFYZPRESS, 2007 in: Faltýn J., Němčíková K., Zelendová E. (eds): Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele, Praha 2010 (str 21)

rozpočet, včetně správy finančních aktiv a finančních závazků s ohledem na měnící se životní situace.

Definice finanční gramotnosti je strukturovaná. Finanční gramotnost jako správa osobních/rodinných financí zahrnuje **tři složky**: gramotnost peněžní, cenovou a rozpočtovou.

Tolik jen ve stručnosti k pojmu gramotností jako důležité složky řešení slovních úloh v hodinách matematiky. Zdůrazňuji, že dané gramotnosti jsou zároveň vstupní podmínkou pro řešení úloh, ale jejich rozvoj je také jedním z cílů, které řešením slovních úloh v matematice sledujeme. Proto myslím, že tvoří neopominutelnou složku této problematiky a je na místě je alespoň stručně připomenout.

Slovní úlohy v historických souvislostech

Historie matematiky je velmi široké téma. Čím více informací o vývoji matematiky v průběhu historie jsem našla a přečetla, tím více dalších informací jsem si potřebovala doplnit. Protože ale toto téma není v mé práci stěžejní, vybírám z celé historie jen malé úryvky týkající se právě rovnic, jejichž použití je při řešení slovních úloh, kterým se v práci věnuji, zásadní. Následující text není uceleným a kompletním přehledem historie matematiky, ale představuje jen jakýsi nástin historických souvislostí v různých obdobích matematiky.

Starověké dějiny[5]

Většina pramenů, mezi nimi A. Kolman, dělí období matematiky do několika vývojových etap. První etapou, o které se autoři zmiňují, jsou úplné počátky matematiky, sem spadá již období starší doby kamenné, paleolitu, až k 6. tisíciletí př. n. l. Období, kdy se utvářeli první matematické pojmy, symboly a operace, ale pro tuto práci není nijak podstatné, budu se věnovat již matematice pokročilejší, a proto přejdu hned k dalším etapám, kde se již historikové zmiňují i o rovnicích.

Raně otrokářská společnost

Pod tímto názvem autoři sjednocují nejstarší období v Egyptě, Mezopotámii, ale i v Číně nebo Indii. Je to údobí od 6. tisíciletí před naším letopočtem do vzniku otrokářské demokracie ve starověkém Řecku. Vývoj v různých zemích se dá mapovat s různou intenzitou. Z důvodu možnosti zapisování informací na různé materiály odpovídá množství informací tomu, že v Mezopotámii se psalo na hliněné destičky, v Egyptě na papyrus, ale v Číně a Indii na kůru a bambus. Proto máme celkem jasnou představu o matematice egyptské a mezopotámské, ale jen matnou o zbylých územích. Nicméně vzhledem k podobnému vývoji států dá se očekávat i velmi podobný vývoj matematiky.

Z **Egypta** pocházejí nejstarší dochované psané památky. Nejvýznamnější z nich jsou Rhindův papyrus a Moskevský papyrus. Obě památky vznikly pravděpodobně jako příručky ve škole písařů, kde se učili úředníci, stavitelé, zeměměřiči, tj. nositelé vědeckých znalostí té doby. Zde docházíme k **prvnímu setkání** s rovnicemi, nebo spíše hned **se slovními úlohami**.

[5] Zpracováno podle: Balda F.: Z dějin elementární matematiky, Praha 1959;
Kolman A.: Dějiny matematiky ve starověku, Praha 1969;
Konforovič A. G.: Viznačni matematični zadači, Kijev 1981;
Struik D. J.: A Concise History of Mathematics, London 1956.

Již ve starověkém Egyptě se mluví o úlohách typu ´h´, které vedly k řešení lineární rovnicí ve tvaru $ax + bx + cx + ... + nx = p$. Jinak se jim říká úlohy o hromadách a prezentují první abstraktní úlohy řešené jednotnou metodou. Nejčastěji metodou regula falsi, neboli falešný předpoklad. (Příklad takové úlohy: „Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15." V tomto zadání nás zarazí už to, že vlastně autor nepokládá žádnou otázku a předpokládá, že řešitel sám úlohu doplní.)

V **Mezopotámii** se používala šedesátková soustava. V té jsou již poměrně složitější výpočty na úrovni „malé" násobilky, proto se široce využívaly tabulky. Zajímavostí je, že v 5. století před naším letopočtem se zde poprvé objevuje znak pro nulu. Významné úlohy jsou tu takové, které se řeší pomocí soustavy více lineárních nebo kvadratických rovnic o více neznámých. (Příklad takové úlohy: „Máme dva kruhy. Součet sedminy hmotnosti prvního kruhu a jedenáctiny hmotnosti druhého kruhu se rovná 1. Rozdíl hmotnosti prvního kruhu a její sedminy se rovná rozdílu hmotnosti druhého kruhu a její jedenáctiny. Určete hmotnost každého kruhu.")

Dalšími kulturami této doby, které zde nebudeme dále rozebírat, jsou Aztékové a Inkové, o jejichž užívání matematiky toho moc nevíme, ale podle jejich složitých staveb a kalendářů musela být na vysoké úrovni. Přeskočíme i množství dalších evropských i asijských kultur.

Starověké Řecko

Starověké Řecko se datuje od 8. - 6. století př. n. l. do 4. století př. n. l. Zatímco v Egyptě nebo Mezopotámii se vývoj matematiky v podstatě ustálil a zastavil, řecká matematika se v období od 6. století př. n. l. začala rychle rozvíjet a obohacovat. Přetvořila se v deduktivní vědu, odvozovala logické vztahy z axiomů a vět již dokázaných. Forma důkazů, se kterými Řekové přišli, se užívá dodnes. V tomto období je bádání a vývoj matematiky postaven na významných osobnostech, či školách. K nejvýznamnějším osobnostem patřili například Thales z Milétu, Pythagoras ze Samu, Zénón z Eley nebo Démokritos, Platon, Aristoteles a školy Milétská nebo Pythagorejská.

Řecká matematika se zabývala hlavně geometrií a i aritmetické důkazy byly řešeny převážně geometrickými metodami.

Helénistické období a Římské císařství

Datuje se od 4. století př. n. l. do 1. století př. n. l. Poté, co Alexandr Makedonský vytvořil ohromnou říši zahrnující Řecko, Egypt, Mezopotámii, Persii, Přední Asii a další, se mnoho vědeckých výsledků rozšířilo i do těchto ostatních zemí. Toto šíření pronikalo zejména z Řecka. Říkáme, že vzdělanci se helénizovali.

V helénistickém období měla největší význam Alexandrijská škola. Poprvé se začaly vydělovat samostatné obory jako astronomie, matematika nebo mechanika, které vytvořily počátek exaktní a soustavné přírodovědy.

Rozvoj matematiky byl vyvolán praktickými potřebami společnosti. Nové technické vynálezy se týkaly hlavně vojenské činnosti a stavitelství, proto se rozvíjely spíše ostatní přírodovědecké disciplíny. Matematika byla v praxi využitelnější a také se nedala zpochybnit její souvislost s filosofií. Stále více se však projevovalo dělení matematiky nejen na aritmetiku a geometrii, ale i na logistiku a geodézii. Toto dělení, které využívali největší z filosofů, nepovažovalo užitou matematiku za vědu, ale řadilo ji k řemeslům. S tím sice někteří jako Archimédes nebo Hérón nesouhlasili, ale později se tento názor ustálil a vytvořil tak špatnou tradici. I přes tyto vnitřní protiklady dospěla alexandrijská matematika na nejvyšší stupeň rozvoje, jaký kdy ve starověku byl.

Římané svými vpády a dobýváním zastavili rozvoj matematiky v mnoha zemích, které dobyli. Během dobytí Alexandrie roku 31 př. n. l. shořela i velká část slavné a bohaté knihovny Músea. Vědecké výzkumy a práce se tak rozmělnily mezi jednotlivé inženýry, vynálezce, matematiky, kteří sice řešili zajímavé úlohy, ale nedokázali vytvořit žádné velké zobecňující práce. I v této době zůstala centrem vědění helénistická Alexandrie.

Důležitý mezník rozvoje nauky o rovnicích znamenala Diofantova kniha Aritmetika. Diofantos z Alexandrie v ní mimo jiné vyslovil dvě pravidla pro počítání rovnic: 1. Přičíst záporné členy, aby na obou stranách rovnice byly členy kladné. 2. Stejné odečíst od stejného, aby na každé straně rovnice zůstal pouze jeden člen.

Dalším autorem, který se věnoval úlohám řešeným rovnicí, byl Metrodoros. Ten se proslavil úlohami psanými ve verších. Nejznámější z nich je Diofantův epitaf. (Jako příklad uvedu ale jinou: „ Ó přemoudrý znalče času, jaký díl dne prošel již?“ „Z toho, co už prošlo dnes, vezmi dvě třetiny, pro svůj volný čas budeš mít ještě dvakrát tolik.“)

Středověké dějiny[6]

Již dlouho před rozpadem římského císařství se rozvoj matematiky přesunul na daleký východ, matematika se rozvíjela zejména v Číně a Indii. Potom vývoj pokračoval v arabských zemích, Íránu a Střední Asii, aby se postupně přesunul do Evropy, kde v 15. - 16. století dospěl ke konci.

Čína

Jak jsem již výše uvedla, o počátku matematického vývoje v Číně nemáme dostatek podkladů. Prvním dochovaným (a hned nejdůležitějším) dílem je **Matematika v devíti knihách**, kterou napsal matematik Čang Cchang. Datace knihy je sporná, ale většinou se uvádí 2. stol. n. l. V této knize se objevuje souhrn všech tehdejších znalostí a poznatků o matematice. Spis je pro nás důležitý i proto, že se zabývá **soustavami rovnic**. Konkrétně v šesté knize *Poměrná rozdělování* jsou lineární úlohy různého typu, mj. i slovní úlohy o pohybu a společné práci. V sedmé knize o *Přebytku a nedostatku* jsou řešeny úlohy vedoucí na **soustavu dvou rovnic o dvou neznámých**. V osmé knize *Fang čcheng* pak najdeme **obecný algoritmus řešení soustav lineárních rovnic o více neznámých**. Způsob řešení připomíná dnes používanou metodu využívání determinantů, kterou známe od Leibnize.

Indie

V Indii se matematika těšila vždy velké vážnosti. Nejstarší zmínky o matematice se objevují v nábožensko-filosofických knihách, Védách. Dalším cenným pramenem jsou Pravidla provazce obsahující geometrické konstrukce. Další významná díla byla napsána mezi 5. a 16. stoletím. Výklad v indických dílech je velmi stručný a málokdy obsahuje nějaké důkazy. Ve velké části matematických děl jsou jen veršované poučky, které se učili nazpaměť a které čtenář nemůže bez dodatečného výkladu dobře pochopit. Z několika nejdůležitějších pramenů jmenujme například *Ápastamba, Zdokonalení nauky Brahmovy* nebo *Koruna vědy*. Ve všech knihách z různých období můžeme najít úlohy vedoucí k řešení lineárních rovnic a jejich soustav. (Příklad z rukopisu Bakchšálí: „*Ze čtyř lidí, kteří obětovali v chrámu, druhý*

[6] Zpracováno podle: Balda F.: Z dějin elementární matematiky, Praha 1959;
Folta J., Horský Z., Nový L., Seidlerová I., Smolka J., Teich M.: Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století, Praha 1961;
Juškevič A. P.: Dějiny matematiky ve středověku, Praha 1978;
Konforovič A. G.: Viznačni matematični zadači, Kijev 1981.

dal dvakrát více než první, třetí třikrát více než druhý a čtvrtý čtyřikrát více než třetí, a všichni dohromady dali 132. Kolik dal první?“)

Dále stojí jistě za zmínku, že v Indii rozvedli a začali používat záporná čísla. I když jsou o nich zmínky v matematických knihách v Číně, až indičtí matematici dokázali využít více jejich důležité vlastnosti.

Další důležitá informace se týká názvosloví a symboliky. Je zásadní, protože základy naší matematiky pochází zcela jistě právě z Indie.

Islámské země

Islám vznikl v 7. století na Arabském poloostrově. Muslimové v průběhu dvou století získali ohromná území, na kterých byl založen stát Arabský chalífát. Jeho součástí se stala severní Afrika, Pyrenejský poloostrov, jih Itálie, Střední Asie a Indie. Díky spojení všech těchto částí získali muslimové vědecký odkaz příslušných zemí. Poté, co přeložili velkou část vědeckých textů, např. indické siddhánty nebo díla Euklida, Apollónia, Diofanta a dalších učenců, dotvořili islámští vědci **vlastní matematickou kulturu**. Ta byla vystavěna na řešení praktických úloh, na němž dále stavěli a rozvíjeli teoretické oblasti matematiky, algebru, aritmetiku, geometrii a trigonometrii. O původní arabské matematice by se dalo napsat hodně, ale vzhledem k její vyspělosti se témata, kterými se vědci zabývali, náročností vzdalují tématu mojí práce.

Středověká Evropa

Na počátku středověku se v Evropě matematika nijak nevyvíjela. Vzhledem k neomezené nadvládě církve a silnému vlivu inkvizice nastal velký úpadek jak kultury, tak zejména vědy, která svými objevy, podle církve, popírala existenci Boha. Církev se pokoušela zcela vymýtit vlivy „pohanského Řecka a Říma. Protože ale v témže období docházelo ke stavbě monumentálních katedrál, které zcela jistě potřebovaly i přesné matematické výpočty, stejně jako prosperující hospodářství, musela církev uznat i některé vědecké objevy. Nakonec se, v době všeobecně upadající vzdělanosti i mezi šlechtou, staly právě kláštery centry vědy a vzdělanosti, kde se v knihovnách leckdy ukrývaly takové poklady jako knihy antických autorů, byť v oddělení zakázaných knih. Z hlediska matematiky zde ale nedocházelo k významnějším objevům. Kněží se spíše soustředil hlavně na jednoduché, praktické problémy, např. sestavování církevního kalendáře.

Zatímco celá kontinentální Evropa prožívala vědecký útlum, na britských ostrovech zejména v Irsku, které leželo stranou politických bouří, se kláštery stávaly kulturními centry. Jeden z představitelů irské vzdělanosti byl mnich Alcuin. Ten se proslavil na dvoře Karla Velikého, kam byl pozvaný, aby šířil vzdělání mezi negramotnou feudální šlechtou. Díky němu vznikla na území Francie a Německa spousta škol. Jeho stěžejním dílem byla sbírka *Úlohy pro bystření mladých lidí.* V této sbírce se vyskytuje spousta zajímavých úloh, mezi nimiž jsou i slovní úlohy řešené rovnicí nebo soustavou rovnic, např. úlohy o plnění nádrže několika zdroji. Dále jsou řešeny samozřejmě geometrické úlohy.

Z Itálie zmiňuji dva filosofy, kteří se významně zabývali matematikou, byli to Leonardo Pisánský (Fibonacci) a Nicole Oresme.

S rozvojem obchodu a měst se zlepšovaly i podmínky pro rozvoj věd. Matematické znalosti byly čerpány ze zbytku řeckých a římských textů, které se zachovaly v klášterech. Pro další rozvoj měly velký význam také překlady z arabštiny. V této době začínaly také vznikat první univerzity. To vzhledem k tomu, že matematika byla brána jako vedlejší věda, nemělo pro její rozvoj větší význam.

Další vývoj matematiky už se opět věnuje složitějším matematickým problémům. Proto přecházím od výkladu obecné historie matematiky (se zdůrazněním rovnic a úloh k nim vedoucích) k výkladu o vývoji matematiky v Českých zemích, zaměřeným k výuce rovnic na různých typech škol.

Vývoj vzdělávání v matematice v českých zemích[7]

„V naší literatuře existují hlasy, které svědčí o tom, že neznalost dějin vyučování matematice vede na jedné straně k opakování dřívějších chyb a na druhé straně k výzkumům, objevujícím již dávno praxí prověřené úspěšné postupy a metody, k nedostatečnému využívání dobrých zkušeností, a to jak v tvorbě osnov, učebnic, metodických prací, tak i v samotné vyučovací praxi.

[7] Zpracováno podle: Mikulčák J.: Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918, Praha 2010;
Odvárko O.:Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ Matematika a její aplikace, Havlíčkův Brod 2006;
Kraemer E. (předseda komise): Učební osnovy základní školy Matematika 5.-8. ročník, Praha 1987;
Križalkovič K. a kol.: Metodická příručka k učebnici Cvičení z matematiky pro 8. ročník ZŠ, Praha 1983;
Bobok J. a kol.: Metodická příručka k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy, Praha 1983
Gabriel, V.: Obrázky ze školství českého a rakouského v XVIII. A XIX. Století, Praha 1891.

A to je jeden z důvodů užitečnosti historie vyučování matematice, *potřeba samotné praxe vyučování matematice.* Je žádoucí analyzovat různé matematické a metodické přístupy k jednotlivým tématům, vyzdvihnout jejich klady, poukázat na zápory, zavrhnout vývojem překonané přístupy pro poučení budoucím." (Mikulčák, 2010, str. 9)

Od příchodu Slovanů do založení univerzity

V období raného feudalismu získávaly děti poznatky a dovednosti v rámci rodinné výchovy. I v této době můžeme ze srovnávací jazykovědy usuzovat, že Slované znali základní matematické pojmy. Dovedli například počítat do tisíce, sčítat, odčítat, násobit a dělit. Dále používali i pojmy z geometrie, jako míra, měřiti, kruh, úhel nebo hrana.

Po příchodu křesťanství, které k organizaci vyžadovalo kněze ovládající i čtení a psaní, byly **Konstantinem a Metodějem** založeny i první školy na našem území. V těchto školách se učila i aritmetika a prvky z astronomie. Po zrušení slovanské liturgie vznikaly při kapitulách školy latinské, kde se učili nejen budoucí kněží, ale i první úředníci státu.

S rozvojem obchodu bylo třeba znát z matematiky stále víc. Již ve třináctém století chtěl Václav II. založit první univerzitu, ale šlechta, obávající se přílišného vlivu církve, mu to znemožnila.

S ekonomickým rozvojem měst vznikaly školy městské, které zřizovala města. Z veršovaných slovníků M. Bartoloměje z Chlumce a dalších víme, že žáci městských škol museli znát číselný obor asi do milionu, psali čísla římsky i arabsky, sčítali, odčítali, násobili a dělili. Učili je ale i odmocňovat nebo sčítat konečné posloupnosti aritmetické i geometrické.

Znalost počtů potřebovali i obchodníci a řemeslníci. Používali zejména přepočty různých měr a mincí s nejrůznějšími měniteli. Významné místo mezi výpočetními praktikami měla **trojčlenka** (zlaté pravidlo aritmetiky).

Tento vývoj školy a vyučování byl v souladu s celoevropským vývojem. Dokonce podle G. Howsona se v Anglii používaly stejné knihy jako v našich školách.

Matematika na pražské univerzitě

Pražská univerzita byla založena Karlem IV. roku 1348. Úroveň vyučování matematice byla podle mistrů, kteří přišli z ciziny, vyšší než na univerzitě pařížské. Pro dosažení titulu bakalář museli studenti znát opět sčítání, odčítání, půlení, zdvojování, násobení, dělení, součet členů aritmetické posloupnosti, výpočet druhé a třetí odmocniny a provádění početních výkonů na linách (jakýsi předchůdce počítadla) pomocí kaménků. Z geometrie pak měli základní poznatky o kouli. Na titul mistr museli nastudovat ještě šest knih Eukleidových *Základů* o planimetrii.

Pro potřebu studentů na Karlově univerzitě vznikla učebnice *Algoritmus prosaycus.* Práce je nejspíš určena žákům partikulárních škol[8] a teprve v případě nedostatečné přípravy i studentům artistické fakulty univerzity. Učebnice obsahuje kapitoly odpovídající požadavkům na studenty bakalářského studia.

Rozvoj školství v době předbělohorské

V 15. století se úroveň vyučování matematice v českých školách snížila. Na městských školách se nevyučovala vůbec, na univerzitě pouze čtyři základní početní výkony.

V 16. století se řízení městských škol ujala univerzita. Rektor univerzity vydával školní řády s učebními osnovami, dosazoval učitele. Městské školy byly přípravkami pro univerzitní studium. Učila se hlavně latina, na matematiku nezbýval často čas. Taková výuka nevyhovovala městským řemeslníkům ani obchodníkům, proto vznikaly na vesnicích školy „dětinské“, ve městech pak školy „pokoutní“, ve kterých se děti učily číst, psát a počítat česky.

Z důvodu velké poptávky vzniklo v době od roku 1530 do roku 1615 pět česky psaných učebnic. V učebnicích se věnuje velká pozornost trojčlence a metodě **regula falsi**, pomocí níž se řeší úlohy dnes řešené rovnicemi. V učebnicích byly použity úlohy přebrané ze starších německých nebo italských učebnic. Klatovského učebnice (1530) obsahovala i počítání se zlomky a část úloh z praxe, kde se řeší zejména finanční matematika, úrokový počet. Další z učebnic z roku 1567 obsahuje i oddíl věnovaný ***cossu***, tj. metodě řešení úloh rovnicemi, zatím jen slovně, bez matematické symboliky.

I v této době je vývoj vyučování matematiky v našich zemích srovnatelný se zbytkem Evropy.

Úpadek školství za třicetileté války a po ní

Po třicetileté válce museli všichni vzdělaní nekatolíci odejít do exilu. Proto úroveň elementárních škol klesala. Učiteli byli často řemeslníci nebo vysloužilí vojáci, kteří neměli žádné vzdělání ani znalosti počtů. Většinu znalostí tedy prostí lidé získávali přímo v praxi.

[8] Latinské školy vyučovaly pouze latině a triviu, od 16. století k tomu přistoupila i filozofie. Tyto školy se nazývaly partikulární**,** protože byly přípravkami na skutečné studium (univerzitní).

Na jezuitských gymnáziích se matematika nevyučovala vůbec. Jediná výuka matematiky tak probíhala na piaristických přípravkách pro vyšší latinskou školu, gymnázium. Na samotných latinských školách ovšem už zase zařazena nebyla.

Na univerzitě, kterou spravovali jezuité, se matematika přednášela jen jeden rok, a to ještě nepravidelně.

Školské reformy v 18. století

Osmnácté století je charakterizováno válkami po celé Evropě a začátkem vzniku manufaktur, velkovýroby. Narůstala potřeba mít více důstojníků a úředníků, kteří by dosahovali vyššího vzdělání. Proto se postupně začalo reformovat celé školství. České země patřily správním řízením pod země habsburskké monarchie. A Rakousko-Uhersko bylo první v celé Evropě, kde se začalo školství řídit centrálně, pomocí celostátních nařízení.

Na gymnáziích se matematika vyučovala stále jen sporadicky, proto musely vysokoškolské učebnice obsahovat i úplné základy matematických poznatků. Pro studenty bylo ale nemožné zvládnout k ostatním předmětům i rozsáhlou matematickou přípravu, proto bylo rozhodnuto zvýšit úroveň znalosti matematiky na gymnáziích. Protože ale v té době neexistovaly žádné tištěné učebnice, výuka matematiky nebyla jednotná. Hlavně z venkovských gymnázií přicházeli na univerzitu žáci nepřipraveni.

Na elementárních školách nebyla situace lepší, učitelé sami postrádali jednotné vzdělávání.

To vedlo k založení vzorových hlavních škol, ve kterých se zřizovaly přípravky pro budoucí učitele.

Vznikaly také první metodické příručky. Zaujalo mě zejména doporučení pro výuku matematiky:

- předvést první příklad na tabuli a obdobný příklad dát řešit některému žáku na tabuli, ostatní žáci mají totéž řešit na svých tabulkách;
- nadiktovat žákům jinou úlohu téhož typu a nechat je samostatně řešit, procházet třídou a kontrolovat postup žáků; správný postup nekomentovat, nesprávný doprovodit jen slovy *Chyba*, ale neukázat žáku, kde udělal chybu;
- dbát na úpravnost zápisů na tabulkách, kontrolovat výpočty žáků hromadně, případně zajistit opravu souseda sousedu apod.

Zvýšení úrovně výuky matematiky umožnilo zvýšení úrovně i na gymnáziích a v konečném důsledku i na univerzitě.

Za národního obrození

Na začátku 19. století byla povinná školní docházka od šesti do dvanácti let. Dozor nad školou měli faráři. V politickém zřízení škol z roku 1805 bylo výslovně požadováno, aby učení nazpaměť bylo hlavní metodou učení. Konkrétně se přikazovalo: *„Počty neprobírat příliš hluboko až do jemných úloh a početních druhů, ale vycvičit dovednost v tzv. počítání z hlavy neboli počítání zpaměti s čísly bez číslic…“* (Mikulčák, 2010, str. 100) To zřejmě úrovni výuky moc neprospívalo. Nicméně z pohledu dnešní doby pokrokové bylo individuální vyučování, kdy učitel žákům připravoval úlohy podle úrovně, na jaké v matematice byli. Tím se ale opět velmi rozrůznila úroveň jednotlivých žáků při výstupu ze školy. V této době byla metoda řešení úloh regula falsi (předchůdce rovnic) vrcholem výuky. Tu ale, podle V. Gabriela (1891), žáci ovládali jen mechanicky. Mírně pozměněné zadání je zmátlo tak, že úlohu nedokázali vyřešit.

Proti tomuto přístupu se postavil **J. H. Pestalozzi**, který požadoval, aby se počty staly středem vyučování, aby se opíraly o názor a rozumové usuzování, nejen o mechanické výpočty.

Jeho přívrženci poněkud mírnili jeho požadavky. Požadovali, aby se při řešení úloh z praxe nepostupovalo mechanicky, ale s porozuměním. Výuka matematiky pak pomalu pokračovala jakousi střední cestou mezi řečenými krajnostmi.

V metodice pro vyučování na gymnáziích, která poprvé vyšla roku 1806, byla i část o rovnicích. V té bylo zdůrazněno, že zručnost při řešení rovnic získají žáci jen cvikem, proto musí mít učitel zásobu úloh. Tyto úlohy mají být vhodně voleny a mají mít celočíselné kořeny. Pro řešení slovních úloh velí instrukce volit úlohy blízké praxi.

Školství v přerodu – padesátá a šedesátá léta 19. století

Roku 1848 vzniklo první ministerstvo školství. To znamenalo vydávání nových předpisů. Učitelé se připravovali na své povolání celý rok, na lepších školách i dva. Byly vydané oficiální učební osnovy, učebnice i metodiky. Metodiky doporučovaly, že učitel by měl k výuce používat dialog, nechat žákům dostatek času k rozmyšlení postupu, než jim začne pomáhat. Dále byl zdůrazňován rozdíl mezi školami vesnickými a městskými.

Školská soustava následujících 80 let (od 70. let 19. století)

Povinná školní docházka byla stanovena od 6 do 14 let. Dozor nad vzděláváním měl výhradně stát. Školy se dělí na obecnou, následuje měšťanská, případně ještě jednoletý učební kurz JUK. Nově vznikaly i všeobecné řemeslnické školy, pokračovací školy nebo tovární školy.

Jako střední školy už zde figurovaly střední odborné školy a všeobecně vzdělávací střední školy, mezi které patřila gymnázia a lycea (zřizovaná pouze pro dívky).

V metodikách se zdůrazňovalo, že i nejprostší děvečky musí umět počítat, nechtějí-li upadnout do rukou lichvářů, šejdířů a být závislé na jiných. Vyučování mělo dvojí úkol; vést žáky k samostatnému uvažování a vytrénovat je v početních dovednostech. Provádění výpočtů nemá být výsledkem bezduchého kopírování předloh.

Úlohy z praxe mají být úlohy vyskytující se v praxi, mají být alespoň pravděpodobné, určitě zadané, logicky a jazykově správně formulované, konkrétní, přiměřené věku žáků, pravdivé (s užívanými měrami a cenami), z různých oborů a vyučovacích předmětů, nepříliš složité, s menšími čísly. Ale věcné vztahy se musejí žákům nejprve vysvětlit. (Močnik, 1896)

Jak metodika 19. století definuje slovní úlohy?

Jsou to problémy, které slovy popisují reálnou situaci a tím určují úlohu, která se má řešit. Často se využívají na počátku výuky jako motivace. Později pak jsou slovní úlohy vědomou aplikací získaných dovedností na řešení praktických problémů. Úlohy se dělí na počty sousudkové (řešené úsudkem), počty řetězové (které dnes řešíme trojčlenkou), počet spolkový (o dělení zisku v poměru vložených částek) a počet směšovací, který dnes řešíme pomocí rovnic. (Mikulčák, 2010)

Ve dvacátém století se již osnovy ustálily, učivo rovnic i slovních úloh se přesouvalo mezi sedmým a osmým (resp. devátým) ročníkem. Protože docházelo ke změnám délky povinné školní docházky, bylo učivo třeba rozvolnit, nebo stěsnat. V druhé polovině století byly už slovní úlohy tematicky rozdělené a metody řešení se výrazně neměnily.

Rozdělení slovních úloh podle kontextu

Slovní úlohy provázejí výuku matematiky od prvního setkání s jakoukoliv matematickou operací. Již v mateřské škole otázkami: „Kolik má kravička nohou?“ nebo „Kolik máš na talíři knedlíků?“, připravujeme dítě na setkání se slovní úlohou. V těchto triviálních počtech pravděpodobně nikoho nepřekvapí, že jsou vždy založené na reálných situacích, pevně zasazené do kontextu.

Kontext je velmi důležitý i v dalším použití slovních úloh v průběhu studia. Nebudu se nijak více zabývat úlohami řešenými na prvním stupni základní školy, kde se řeší slovní úlohy pomocí např. sčítání, odčítání atd.

I na druhém stupni základní školy řešíme velké množství slovních úloh, které můžeme rozdělit nejen podle použitých matematických dovedností. Známe a na první pohled dobře rozeznáme úlohy „na procenta“, přímou i nepřímou úměrnost řešené pomocí trojčlenky nebo různé geometrické úlohy.

Pro zpracování v bakalářské práci jsem z rozsáhlé problematiky slovních úloh ve vyučování matematice vybrala pouze malou část. V této práci se hlouběji zabývám úlohami, které se dají řešit pomocí rovnice. Pro zestručnění budu řešit pouze ty, které jsou řešitelné pomocí jedné lineární rovnice (samozřejmě i některé z nich jsou řešitelné soustavou více rovnic, ale toto alternativní řešení nebudu uvažovat).

Takové úlohy jsou v učebnicích obvykle děleny podle kontextu do několika podskupin. Ty jsou dané především už tradicí, tím, že se v této struktuře již pravidelně objevují v učebnicích matematiky, zejména pro základní školy. Já se v práci budu věnovat některým z nich.

První skupinu tvoří **slovní úlohy o dělení celku na části**. Podle J. Novotné[9] je několik typů vztahů celku a jeho částí:

a) je zadaný celek, chceme zjistit velikosti jeho částí,

b) známe velikosti částí a máme zjistit velikost celku,

c) z textu známe velikost celku a některé z částí, počítáme velikosti zbylých částí,

d) máme zadanou velikost celku i jeho částí, zajímá nás počet daných částí.

[9] Novotná J.: Analýza řešení slovních úloh, Praha 2000; Novotná J.: Zpracování informací při řešení slovních úloh, in Hejný M., Novotná J., Stehlíková N. (eds): Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky, Praha 2004 (367-378)

Dalším typem úloh řešených rovnicí jsou **slovní úlohy o pohybu.** Jsou to úlohy specifické zadáním rychlostí, dané dráhy a času jednoho nebo více objektů. I ty můžeme rozdělit podle popsané situace:

a) nejjednodušší fyzikální úlohy, kdy dopočítáváme rychlost, dráhu nebo čas pouze jednoho objektu,

b) situace, kdy se objekty pohybují po stejné dráze ve stejném směru,

c) situace, kdy objekty se pohybují po stejné dráze proti sobě.

Další typy jsou již pouze jejich rozšířením, např. pohyb po kruhové dráze nebo pohyb v pohybujícím se prostředí. Různé obtížnosti řešení dosáhneme také posunutím času startu jednotlivých objektů, nebo zadáním více než dvou objektů.

Jiný, v učebnicích samostatně uváděný, typ úloh řešených pomocí rovnic jsou **slovní úlohy o společné práci.** V takových úlohách vystupuje zpravidla několik (dva a více) subjektů vykonávajících stejnou práci s různou výkonností. Jsou to nejčastěji úlohy o dělnících, zednících, přítocích a odtocích různých vodních ploch, strojích apod.

Poslední velkou součástí skupiny rovnicemi řešených úloh, kterou se budu v práci zabývat, jsou **slovní úlohy o směsích.** Zčásti jsou to úlohy využitelné v chemii (chemické roztoky různých koncentrací) a ve fyzice (směsi kapalin o různých teplotách), dále pak míchání různých směsí potravin, krmiv, lístků atd.

Srovnání historického a současného zadání a řešení úloh

V další části práce uvedu příklady všech skupin slovních úloh, které jsem výše rozřadila do tematických kategorií. I nadále budu úlohy dělit podle stejných kritérií. V každé skupině i podskupinách uvedu několik příkladů. První úloha, označená číslicí 1, je vždy **aktuální**, vybraná z nějaké ze současných učebnic. Úloha označená číslicí 2 je vybraná **z historických pramenů**. Do takových úloh jsem nezasahovala, do učebnic nebo sbírek bych je zařadila v původním znění jako zajímavost. Poslední úlohy jsou označené číslicí 3 a jsou to **úlohy zastaralé**, tím myslím takové, které jsou vybrané z učebnic minulého století a nesplňují zásadu aktuálnosti. Takové úlohy jsem pak pod označením 3.1, případně 3.2, přepracovala, aby byly aktuální a v současných sbírkách dále použitelné. K tomu jsem použila různých postupů, které jsou vždy pod takto přepracovanou úlohou uvedené.

Úlohy jsou vybrané z učebnic, uvedených vždy hned za zadáním, všechna řešení a postupy jsou moje vlastní.

Slovní úlohy o dělení celku na nestejné části

Je zadaný celek, chceme zjistit velikosti jeho částí

Úloha 1. (aktuální) Za 5 krabic polotučného mléka a 10 rohlíků zaplatila paní Čermáková 130 Kč. Krabice mléka je o 17 Kč dražší než rohlík. Vypočítejte cenu a) 1 krabice mléka,
b) 1 rohlíku.

(*Matematika pro základní školy 8, SPN*)

Provedeme zápis pomocí neznámé x, tím si žáci shrnou všechny podstatné informace. Problém někdy nastane, když je úloha proto, aby byla obtížnější, zadaná tak, že obsahuje větší množství nadbytečných informací. V základních úlohách na úvod tématu se ale pravděpodobně s tímto problémem nesetkáme.

krabice mléka …..x Kč (5krabic…$5x$ Kč)
rohlík ………….$(x – 17)$ Kč (10 rohlíků...$10(x – 17)$ Kč)
celkem …………130 Kč

Rovnice: Ze zápisu je již snadno vidět rovnice, pomocí které najdeme řešení úlohy:

$5x + 10(x - 17) = 130$

$\underline{\underline{x = 20}}$

Pro dořešení úlohy nesmíme zapomenout výsledek rovnice dosadit do zadání (resp. do zápisu úlohy), abychom mohli odpovědět na zadané otázky.

a) Krabice mléka stojí x Kč. Odtud: Krabice mléka stojí 20 Kč.
b) Jeden rohlík je o 17 Kč levnější než krabice mléka. Proto jeden rohlík stojí 3 Kč.

Úloha 2. (historická) Ze tří přátel má jeden právě tolik korun, kolik má druhý dvacetihaléřův a třetí desetihaléřů. Všichni dohromady mají 91 K; kolik mincí má který?

(Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské 1899)

Řešení je analogické jako v předchozí úloze:

Rovnice: $x + 0{,}2x + 0{,}1x = 91$

Každý z přátel má 70 mincí.

Úloha 3. (zastaralá) Na státním statku měli nejlepší dojnice krávy č. 07 a č. 11. Obě daly za rok o 904 litrů mléka méně než nejlepší sovětská dojnice Poslušnica. Kráva č. 07 nadojila polovinu, č. 11 dala 4/9 toho množství, které nadojila Poslušnica. Kolik mléka dala za rok každá dojnice?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Rovnice: $\frac{1}{2}x + \frac{4}{9}x = x - 904$

Poslušnica nadojila 16 272 litrů mléka.

Kráva č. 07 nadojila 8 136 litrů a kráva č. 11 nadojila 7 232 litrů mléka.

Tato úloha je v současné škole nepoužitelná, zadání děti maximálně pobaví, ale v kontextu dnešní doby je nijak významně neobohatí. Myslím, že velká část dětí ani netuší, co znamená slovo dojnice. Sovětský svaz také již nějakou dobu neexistuje, a proto je v současnosti úloha neaktuální, zastaralá a pro žáky těžko uchopitelná. Nicméně takto postavená rovnice má pěkné celočíselné řešení a bylo by škoda ji nepoužít, proto je možné úlohu upravit dvěma způsoby. V prvním pouze mírně aktualizujeme zadání, ve druhém ponecháme rovnici, ale zadání zcela změníme:

Úloha 3.1 Na ekofarmě dají za rok dvě různé krávy dohromady o 904 litrů mléka méně, než třetí kráva. První z krav nadojí polovinu a druhá 4/9 množství, které sama nadojí třetí. Kolik litrů nadojí každá z krav?

Úloha 3.2 Petr potřebuje novou výbavu na lyže. Lyžařské přeskáče a vázání ho stály dohromady o 904 Kč méně než lyže. Přitom boty stojí polovinu toho, co lyže, a vázání 4/9 z ceny lyží. Kolik stojí která část lyžařského vybavení?

Známe velikosti částí a máme zjistit velikost celku

Úloha 1. (aktuální) Adam se vrátil z výletu se svým skautským oddílem. Pečlivě si zapisoval, kolik kilometrů cestovali. Do hodiny matematiky si připravil pro své spolužáky tento úkol: „Kolik kilometrů jsme celkem cestovali, jestliže jsme ušli pěšky 4/7 cesty, autobusem ujeli dvakrát méně, než jsme ušli pěšky a zbylých 14 km jsme urazili lodí?

(Matematika Rovnice a nerovnice, Prometheus)

Nejprve uděláme zápis úlohy, vyjádříme všechny části cesty pomocí neznámé *x*.

pěšky……… $\frac{4}{7}x$ km

autobusem…[$(\frac{4}{7}x)$: 2] km

lodí…………14 km

<u>celkem………x km</u>

Rovnice : $\frac{4}{7}x + (\frac{4}{7}x) : 2 + 14 = x$

$$\underline{\underline{x = 98}}$$

Správnost řešení ověříme zkouškou dosazením.

Pěšky skauti ušli 56 km, autobusem ujeli 28 km a lodí překonali 14 km, to dohromady opravdu odpovídá 98 km, řešení je tudíž správné.

Při odpovědi opět musíme dát pozor na to, aby žáci odpovídali pouze na otázku, která byla položena. Skauti celkem urazili 98 km.

Úloha 2. (historická) „Phytagore vznešený, helikónských múz potomku, na mou odpověz otázku, kolik věrných žáků máš ve svém domě, kde jako borci na závodišti usilují o prvenství?“

„Rád povím, Polykrate. Vidíš, že polovina žáků pěstuje matematiku, a zatím čtvrtina na věčnou přírodu své zkoumání obrací. Sedmina nedělá nic, jen mlčení zachovává, jen své duše očišťuje, víš, opakováním učiva. A přidej k nim tři ženy, které nevstávají tak brzy, mezi nimi nejvýznamnější je má milovaná Teano.

Hle a to jsou všichni, které vedu cestou moudrosti a snad i múz pierijských jim zjednám lásku boží.“

(Původně veršovaná úloha od Metrodora (6. stol.), v českém překladu J. Šedivého již neveršované)

Rovnice: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$

$$\underline{\underline{x = 28}}$$

Pythagoras má ve svém domě 28 žáků.

Úloha 3. (zastaralá) V JZD pracují rodiče s dcerou. Matka a dcera odpracovaly za rok dohromady 784 jednotek, otec s dcerou 812 jednotek, dcera sama 370 jednotek. Kolik dostali v této rodině za rok peněz, když v družstvu byla pracovní jednotka odměňována částkou 24 Kčs?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

dcera odpracovala……370 jednotek

matka odpracovala……784 – 370 = 414 jednotek

otec odpracoval……….812 – 370 = 442 jednotek

celkem odpracovali……370 + 414 + 442 jednotek

<u>dostali zaplaceno………*x* Kčs</u>

Rovnice:

$x = (370 + 414 + 442) \,.\, 24$

$\underline{\underline{x = 29\,424}}$

Proto platí: Celá rodina vydělala 29 424 Kčs za rok.

Úloha 3 opět zadáním nevyhovuje, dnešní zejména městské děti netuší, co je JZD. Rodinný roční výdělek cca 30 tisíc Kč je taky naprosto nereálný. Nemluvě o pojmu pracovní jednotka, který dnes nahrazujeme spíš pojmy jako směna, pracovní den atd.

Úloha 3.1 Tři sourozenci jsou na letní brigádě. Marie a Petra zabalily dohromady 784 balíků. Petra a Milan dohromady zabalili 812 balíků a Petra sama 370 balíků. Kolik si vydělali sourozenci dohromady, když za jeden zabalený balík dostali 24 Kč?

Z textu víme velikost celku a některé z částí a počítáme velikosti zbylých částí

Úloha 1. Na zalesnění paseky bylo v průběhu tří dnů vysázeno 5 400 jehličnanů. Jejich poměrně velká část byla vysázena již první den. Během druhého dne byly vysázeny 2/5 jejich zbytku. Sázení bylo dokončeno třetí den, kdy byl počet vysázených jehličnanů o 720 větší než předchozího dne. Kolik sazenic jehličnanů bylo vysázeno v jednotlivých dnech?

(Matematika pro základní školu 8, SPN)

Opět začneme zápisem.V této úloze musíme dát pozor na to, že část udanou zlomkem nezjišťujeme z celku, ale ze zbytku, po odečtení neznámé, proto bude i zápis o něco složitější.

první den vysázeno …………x stromů

druhý den vysázeno……….$\frac{2}{5}(5\,400 - x)$ stromů

třetí den vysázeno ………$\frac{2}{5}(5\,400 - x) + 720$ stromů

<u>dohromady vysázeno ……….5 400 stromů</u>

Rovnice:

$x + \frac{2}{5}(5\,400 - x) + \frac{2}{5}(5\,400 - x) + 720 = 5\,400$

$\underline{\underline{x = 1\,800}}$

První den bylo vysázeno 1 800 stromů, druhý den 1 440 stromů a třetí den 2 160 stromů.

Úloha 2. (historická) Když Kyprida spatřila, že Éros pláče, zeptala se ho:

„Co tě tak roztesknilo, mohu to vědět?“

„Šel jsem z Helikónu a nesl jsem mnoho jablek,“ říká Erós,

„ale potom mne náhle přepadly Múzy a zmocnily se sladké nůše.

Dvanáctinu v mžiku popadla Euterpé, Kleió si oddělila pětinu, Thaleia osminu.

Dvacátý díl pro sebe zabrala Malpomené a čtvrtinu Terpsichoré.

Sedminu uchvátila a jak přelud zmizela Erató. Třicet plodů si vzala Polymnia. Sto dvacet se jich dostalo Uránii a tři sta Kalliopé. A tak se vracím s prázdnýma rukama, zbylo mi jen půl stovky jablek.

(od Metrodora (6. stol.))

Rovnice:

Počet jablek, které měl Éros na začátku označíme jako *x*:

$x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{7}x - 30 - 120 - 300 \quad = 50$

$\underline{\underline{x = 3\,360}}$

Celkem měl Éros 3360 jablek. Euterpé mu vzala 280 jablek, Kleió 672 jablek, Thaleia 420 jablek, Melpomené 168, Terpsichoré 840 a Erató 480 jablek.

Úloha 3. (zastaralá) Ve třídě je 36 žáků. Na studie se hlásí 7 chlapců a jedenáct dívek. Do učebního oboru se hlásí dvakrát více chlapců než dívek, doma nezůstane žádný. Kolik je ve třídě chlapců a kolik dívek?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Rovnice:

Počet dívek, které se hlásí do učebního oboru, označíme jako *x*, počet chlapců je dvojnásobný, proto ho vyjádříme jako 2*x*.

$7 + 11 + x + 2x = 36$

$\underline{\underline{x = 6}}$

Do učebního oboru se hlásí 6 dívek a 12 chlapců. Pozor ale na položenou otázku, ta zněla, kolik je v celé třídě chlapců a kolik je dívek, odpověď proto zní: Ve třídě je 17 dívek a 19 chlapců.

Tato úloha je zastaralá především způsobem vyjadřování, proto není potřeba její zadání nijak významně měnit, jen přepsat do současné češtiny, která je dětem bližší.

Úloha 3.1 Ve třídě je 36 žáků. Na střední školy se hlásí 7 chlapců a jedenáct dívek. Na odborná učiliště se hlásí dvakrát více chlapců než dívek, doma nezůstane nikdo. Kolik je ve třídě chlapců a kolik dívek?

Máme zadanou velikost celku i jeho částí a zajímá nás počet daných částí

Při hledání tohoto typu úloh jsem narazila na problém. Vzhledem k tomu, že dané úlohy se řeší spíš úvahou a jednoduchým výpočtem, nedají se tak úplně zahrnout do učiva týkajícího se rovnic. Přesto jsem i v učebnicích pro osmý a devátý ročník nějaké příklady našla. Myslím však, že pro starší žáky jsou použitelné spíše jako matematické rozcvičky.

Úloha 1. (aktuální) Vyučovací hodina trvá 45 minut. Kolik hodin vyučování mají žáci:

a) za jeden týden při 6 hodinách denně
b) za měsíc 20 dní
c) za 5 měsíců
d) za 8 měsíců
e) za 35 týdnů

Jedna vyučovací hodina…….. 0,75 hodin

<u>Šest vyučovacích hodin……..6 . 0,75 hodin = 4,5 hodiny</u>

a) Jeden týden………(5 . 6 . 0,75) hodiny

$x = 5 . 6 . 0,75$

$\underline{\underline{x = 22,5}}$ Za jeden týden mají žáci 22,5 hodin vyučování.

b) Jeden měsíc……..(4,5 . 20) hodin

$y = 4,5 . 20$

$\underline{\underline{y = 90}}$ Za jeden měsíc mají žáci 90 hodin vyučování.

c) Pět měsíců………….(5 . 90) hodin

$z = 5 . 90$

$\underline{\underline{z = 450}}$ Za pět měsíců mají žáci 450 hodin vyučování.

d) Osm měsíců………….8 . 90 hodin

$u = 8 . 90$

$\underline{\underline{u = 720}}$ Za osm měsíců mají žáci 720 hodin vyučování

e) Pětatřicet týdnů….22,5 . 35 = 787 hodin

$v = 22,5 . 35$

$\underline{\underline{v = 787}}$ Za pětatřicet týdnů mají žáci 787 hodin vyučování

Úloha 2. (historická) Několik lidí společně kupuje berana. Když každý přispěje pěti penízi, bude chybět 45 penízů do ceny berana. Když každý přispěje sedmi penízi, budou chybět tři peníze. Kolik je lidí a jakou cenu má beran?

(Z matematiky v devíti knihách 2. století př. n. l)

Rovnice:

Počet lidí kupujících berana označíme x.

$5x + 45 = 7x + 3$

$\underline{\underline{x = 21}}$

Na koupi berana se složí 21 lidí. Beran bude stát 150 penízů.

Tato úloha je zajímavá a jako jedna z mála prezentuje právě typ úloh na dopočítání počtu částí celku. Nicméně naprosto neodpovídá původnímu pojetí bakalářské práce. Její řešení se již v době vzniku neopíralo o reálné skutečnosti, protože v jakékoliv společnosti si dovedeme těžko představit, že 21 lidí dohromady investuje do jednoho zvířete. Při sestavování úlohy autoři dbali spíš na logické schéma úvah a algoritmy pro řešení úloh. Reálný obsah už považují za praktické použití a nechávají na použití v konkrétních situacích.

Slovní úlohy o pohybu

Nejjednodušší fyzikální úlohy, kdy dopočítáváme rychlost, dráhu nebo čas pouze jednoho objektu

Protože úlohy s fyzikálními náměty jsou většinou nadčasové, nejsou úlohy v této kapitole děleny na aktuální, historické a zastaralé jako v ostatních kapitolách. Úlohy budu prezentovat pouze několika jednoduchými příklady. Vzhledem k tomu, že se jedná spíše o učivo fyziky a v době probírání dané problematiky v matematice by měli žáci učivo již zvládat, jedná se jen o připomenutí a osvěžení vzorce: $s = v \cdot t$.

Úloha: Vichřice urazí za vteřinu 45 m. Za jak dlouho se přežene přes pole dlouhé 180 m? (Za jak dlouho přes naši obec? Učitel dodá sám vzdálenost.)

(Sbírka příkladů s fyzikálními náměty 1960)

Pro řešení použijeme vzorec: $s = v \cdot t$

Rovnice pro $t = x$ vteřin:

$$180 = 45 \cdot x$$

$$\underline{\underline{x = 4}}$$

Tedy: Vichřice se přežene přes pole za 4 vteřiny.

Úloha: Vlaštovka uletí za 1 vteřinu 65 m. Jak daleko doletí za 9, 10, 20, 25 vteřin?

(Sbírka příkladů s fyzikálními náměty 1960)

Vlaštovka uletí za 9 vteřin 585 m, za 10 vteřin 650 m, za 20 vteřin 1 300 m a za 25 vteřin 1 625 m.

Úloha: Fréza se posouvá při záběru rychlostí 15 cm za minutu. Jak dlouho se bude frézovat plocha dlouhá 3 m.

(Sbírka příkladů s fyzikálními náměty 1960)

Plocha se bude frézovat 20 minut. (U této úlohy je třeba sjednotit jednotky u odpovídajících veličin.)

Situace, kdy objekty se pohybují po stejné dráze proti sobě.

Úloha 1. (aktuální) Horské chaty Větrná a Roubenka spojuje trať pro běžce na lyžích dlouhá 35 km. Z obou chat vyrazili ráno v 9 hodin proti sobě dva spolužáci – lyžaři na „běžkách“. Z chaty Větrná vyjel Mirek a běžel směrem k chatě Roubenka průměrnou rychlostí 13 km/h. Z chaty Roubenka vyjel v tutéž dobu Hynek a běžel směrem k chatě Větrná průměrnou rychlostí 15 km/h.

a) Za kolik hodin a minut běhu na lyžích se oba chlapci setkali?

b) V kolik hodin a minut se setkali?

c) Kolik kilometrů každý z nich uběhl, než se setkali?

(Matematika pro základní školu 8, SPN)

Řešení: Tato úloha se dá řešit několika způsoby. První, nejjednodušší způsob je graficky znázornit dráhu, směr i rychlost obou běžců a pomocí základního vzorce dopočítat.

Protože oba běžci vyběhli ve stejnou dobu a potkali se jistě taky ve stejnou dobu, jsou jejich časy t_1 a t_2 stejné a můžeme je obě označit x hodin.

$s_1 = v_1 . t_1$ $\qquad$ $s_2 = v_2 . t_2$

Dráha Mirka je tedy (13 . x) km, vzdálenost, kterou překonal Hynek (15 . x) km.

Dále je třeba nahlédnout, že dohromady musí oba běžci překonat celou dráhu 35 km. Proto součet obou délek drah musí být 35 km.

Rovnice:

$13x + 15x = 35$

$\underline{\underline{x = 1{,}25}}$

Odtud čas běhu je 1,25 hodiny (1 h 15 min).

Odpověď na první otázku tedy zní: Oba chlapci se potkali za 1 hodinu a 15 minut.

Druhá otázka má odpověď také zřejmou: Oba chlapci se setkali v 10 h a 15 min.

Pro poslední odpověď musíme ještě dopočítat dráhu každého z nich. Stačí vrátit se ve výpočtu k jednotlivým vzorcům:

Dráha Mirka je tedy ($13x$) km, odtud 16,25 km.

Dráha Hynka je ($15x$) km a odtud dopočítáme, že ušel 18,75km.

Dalším způsobem řešení je dosazení do tabulky, která v podstatě nahrazuje dosazení do vzorců v předchozí úloze. Doplněním této tabulky přeskočíme až k úvaze o součtu jednotlivých drah:

	Mirek	Hynek
v	13 km/h	15 km/h
t	x h	x h
s	($13x$) km	($15x$) km

Rovnice:

$13x + 15x = 35$

Odtud opět $\underline{\underline{x = 1{,}25}}$. Odpovědi budou samozřejmě stejné jako v předchozím řešení.

Náročnější varianta úlohy je, pokud objekty se nepohybují stejnou dobu. Potom nelze použít vztah $t_1 = t_2$, ale musíme vycházet z toho, že $t_1 = t_2 - t$, kde t je časový údaj, o který vyrazilo jedno auto dříve než druhé. Je třeba sjednotit jednotky času a rychlosti v úloze zadané (viz např. Úloha 1.1).

Úloha 1.1 Vzdálenost mezi městy H a K činí 110 km. Z města H do K vyjelo v 11 h auto a jelo průměrnou rychlostí 80 km/h. Proti němu z města K vyjelo v 11 h 30 min auto, jehož průměrná cestovní rychlost byla 60 km/h. V kolik hodin se tato auta setkají? Jak daleko budou v okamžiku setkání od města H?

(Matematika 8, 2. díl, Prometheus)

Řešení naznačím pomocí tabulky:

Čas, který potřebovalo první auto k překonání vzdálenosti, označíme x h, potom čas druhého vozu, který vyjel o půl hodiny později, musí být (x – 0,5) h.

	$Auto_1$	$Auto_2$
v	80 km/h	60 km/h
t	x h	(x - 0,5) h
s	$80x$ km	[$60(x - 0,5)$] km

Rovnice: $80x + 60(x - 0,5) = 110$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

Auta se setkají za jednu hodinu, tedy ve 12 hodin, 80 km od města H.

Úloha 2. (historická) Cesta vedoucí z vesnice na vrchol hory jest 12 km dlouhá. Z krajních míst jejich vyjdou současně dva turisté, z nichž urazí vystupující 60 m a sestupující 90 m za minutu. Po kolika minutách se setkají?

(Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské 1899)

Označíme x minut čas, který stráví turisté na trase výletu. Vzhledem k zadání v metrech za minutu řešení rovnice vyjde v minutách.

Rovnice:

$60x + 90x = 12000$

$$\underline{\underline{x = 80}}$$

Oba turisté se potkají po 80 minutách.

Úloha 3. (zastaralá) Z Brna jelo do Bratislavy osobní auto průměrnou rychlostí 56 km/h. Současně vyjelo z Bratislavy do Brna nákladní auto rychlostí 40 km/h. Vzdálenost obou měst je 144 km. Kdy se obě auta setkají a v jaké vzdálenosti od Brna a od Bratislavy?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Chceme dopočítat čas, který vozy potřebují k překonání vzdálenosti 144 km. Proto za čas do rovnice dosadíme *x* h.

Rovnice:

$40x + 56x = 144$

$\underline{\underline{x = 1{,}5}}$

Auta se potkají po 1h a 30 min, 84 km od Brna a 60 km od Bratislavy.

V úlohách o pohybu není tak velké množství zastaralých a neaktuálních údajů, kromě toho, že automobily jsou jiných značek a jezdí výrazně vyššími rychlostmi.

Úlohu snadno aktualizujeme rozšířením hodnoty rychlostí na dvojnásobek, tedy:

Úloha 3.1 Z Brna jelo do Bratislavy osobní auto průměrnou rychlostí 112 km/h. Současně vyjelo z Bratislavy do Brna nákladní auto rychlostí 80 km/h. Vzdálenost obou měst je 144 km. Kdy se obě auta setkají a v jaké vzdálenosti od Brna a od Bratislavy?

Opět chceme vypočítat dobu jízdy a ji proto vyjádříme jako *x* h.

Rovnice:

$80x + 112x = 144$

$\underline{\underline{x = 0{,}75}}$

Auta se potkají po 45 min, 84 km od Brna a 60 km od Bratislavy.

Situace, kdy se objekty pohybují po stejné dráze ve stejném směru

V těchto úlohách je pravidlem, že jeden objekt vyráží později než druhý. Je třeba si uvědomit, že pokud auta vyjedou ze stejného místa, musí se samozřejmě ve stejném místě potkat, proto po vyjádření drah jednotlivých objektů můžeme délky drah položit do rovnosti.

Úloha 1. Z továrny vyjelo v 8 hodin a 30 minut nákladní auto s objemným nákladem průměrnou rychlostí 20 km/h. V 9 hodin za ním vyjelo osobní auto, které jelo průměrnou rychlostí 60 km/h. V kolik hodin dostihne nákladní auto?

Pro řešení použijeme vzorce:

$s_1 = v_1 \,.\, t_1$, $s_2 = v_2 \,.\, t_2$, $t_2 = t_1 - t$, kde $t = 0{,}5$ h.

Označme dobu jízdy nákladního auta x h. Pak

$s_1 = (20 \,.\, x)$ km $s_2 = [60 \,.\, (x - 0{,}5)]$ km

Protože dráhy se jistě rovnají, dostáváme rovnici pro x, která vyjadřuje čas nákladního auta, po který je na cestě.

Rovnice:

$20x = 60(x - 0{,}5)$

$\underline{\underline{x = 0{,}75}}$

Čas jízdy nákladního auta je 0,75 h (45 minut).

Osobní auto dostihne nákladní v 9 hodin a 15 minut.

Analogicky řešíme pomocí zápisu v tabulce:

	Nákladní auto	Osobní auto
v	20 km/h	60 km/h
t	x h	$(x - 0{,}5)$ h
s	$(20x)$ km	$[60(x - 0{,}5)]$ km

Rovnice:

$20x = 60(x - 0{,}5)$, což je stejná rovnice, jako v předchozím případě.

$\underline{\underline{x = 0{,}75}}$

Čas jízdy nákladního auta je 45 minut.

Osobní auto dostihne to nákladní v 9 hodin a 15 minut.

Úloha 2. (historická) Host ujede za den 300 li (jeden li se rovná 0,576 km). Host vyjel od hostitele, ale zapomněl jeden oděv. Když po třetině dne hostitel objevil zapomenutý oděv, vydal se na cestu, aby hosta dohonil. Když předal oděv hostovi, ihned obrátil koně na zpáteční cestu, za tři čtvrti dne (od odjezdu hosta) byl opět doma. Kolik li by ujel na koni za den?

(Matematika v devíti knihách)

Řešení: tabulka

Nejprve je třeba si uvědomit, že hostitel vyjel $\frac{1}{3}$ dne po hostovi, tudíž na cestě strávil $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ dne. To znamená, že doba, po kterou byl hostitel na cestě, je $\frac{5}{12}$ dne, host byl na cestě o $\frac{1}{3}$ dne déle, tzn. $\frac{9}{12}$ dne.

	Host	Hostitel
v	300 li/den	x li/den
t	$\frac{9}{12}$ dne	$\frac{5}{12}$ dne
s	$(300.\ \frac{9}{12})$li	$(x\ .\ \frac{5}{12})$ li

Rovnice: $300.\ \frac{9}{12} = \frac{5}{12}x$

$\underline{\underline{x = 540}}$

Hostitel by ujel na koni za den 540 li.

Slovní úlohy o společné práci

Úloha 1. (aktuální) Děda a jeho dva vnuci sekali kosami horskou louku na svahu u jejich chalupy. Děda si z předchozího sekání pamatuje, že ji sám posekal za 6 hodin. Každému z vnuků by sekání celé louky trvalo 4 hodiny. Do sekání louky se pustili společně ráno v sedm hodin. V kolik hodin sekání louky skončili?

(Matematika pro základní školu 8, SPN)

Při probírání těchto úloh je možnost několika přístupů. Pamatuji si, že když jsem se učila v osmém ročníku řešit tyto úlohy, paní učitelka nám předložila algoritmus řešení jako hotovou věc a my jsme dosazovali pouze do předem daného vzorce. V době, kdy sama učím, mi toto řešení nepřijde úplně nejlepší. I když někteří slabší žáci utíkají k tomuto řešení i tak, myslím, že je důležité dát jim možnost vidět, **proč** dané zlomky do rovnice dosazujeme. Musím přiznat, že podstatu tohoto řešení jsem skutečně odhalila, až když jsem začala sama učit.

Nejprve zápis, ten je samozřejmě stejný, jen v případě řešení s porozuměním je rozšířený:

Děda sám poseká louku za…………6 hodin

První vnuk poseká louku za ………..4 hodiny

Druhý vnuk poseká louku za ……….4 hodiny

Rovnice:

Aniž bychom předem určili, co znamená *x*, nebo proč dosazujeme právě do těchto zlomků, byli jsme vedeni dosadit do typové rovnice.

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}=1$$

$$\underline{\underline{x = 1{,}5}}$$

Dohromady posekají louku za 1,5 hodiny, tzn. že práci skončí v 8:30.

Druhý způsob řešení se liší především rozšířeným zápisem

Děda sám poseká louku za…………6 hodin, takže za jednu hodinu poseká $\frac{1}{6}$ celé louky

První vnuk poseká louku za ………..4 hodiny, takže za jednu hodinu poseká $\frac{1}{4}$ celé louky

Druhý vnuk poseká louku za ……….4 hodiny, takže za jednu hodinu poseká $\frac{1}{4}$ celé louky

Nyní je důležité si uvědomit, jakou část louky posekají všichni tři společně za jednu hodinu, to můžeme vyjádřit jako, součet výše odvozených částí: $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. Kolik hodin budou takto pracovat, označíme jako *x* h.

Z toho dostáváme výraz vyjadřující část louky, kterou posekají za hodinu $(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})x$. Pak již stačí jen doplnit, jak velkou část louky mají posekat. V případě, že celou, dosazujeme 1, pokud jen její část, vyjádříme zlomkem. Celá rovnice je tedy: $(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})x = 1$

Odtud roznásobením závorky dostaneme stejnou rovnici, do které jsme dosazovali v prvním případě, ale máme představu, jak vznikla. Navíc myslím, že toto pochopení pomůže při řešení složitějších rovnic, kde každý pracuje jinak dlouhou dobu atd.

Složitější příklad, kde každý z členů pracuje jinak dlouho:

Úloha 1.1 Fajtovi měli při povodni zaplavený sklep. Začali čerpat vodu malým čerpadlem, kterému by vyčerpání trvalo 7 hodin. Po hodině práce jim sousedé přinesli silnější čerpadlo, které by tutéž práci zvládlo za 5 hodin. Jak dlouho čerpali Fajtovi vodu ze sklepa, jestliže dále pracovala obě čerpadla současně?

(Matematika 8, 2. díl, Prometheus)

Tady je nutné si uvědomit, že první čerpadlo bude pracovat *x* hodin, zatímco druhé jen *x* – 1 hodin. Potom je sestavení rovnice již snadné:

Rovnice:

$\frac{1}{7}x + \frac{1}{5}x.\,(x-1) = 1$

$\underline{\underline{x = 3{,}5}}$

Sklep bude vyčerpán za 3 hodiny a 30 minut.

Úloha může být zadaná i opačně, dopočítáváme, jak rychle pracuje jedno z čerpadel. Potom musíme dát pozor, kam v rovnici musíme dosadit neznámou *x* (pokud se ale jako v následujícím příkladu objeví neznámá ve jmenovateli, je diskutabilní, kdy tento případ slovních úloh do učiva zařadit, protože rovnice s neznámou ve jmenovateli jsou učivem až devátého ročníku, zatímco tyto typové úlohy se probírají již v osmém):

Úloha 1.2 Pracují-li dva tkalcovské stavy různé výkonnosti současně, je možné požadovaný počet metrů látky utkat za 6 hodin. Na výkonnějším stavu by bylo možné tento počet metrů látky utkat za 10 hodin. Jak dlouho by tkaní této látky trvalo méně výkonnému stavu?

(Matematika pro základní školu 8, SPN)

Rovnice:

Označme x h dobu, po kterou by tkaní trvalo pouze pomalejšímu stavu.

$\frac{1}{10} . 6 + \frac{1}{x} . 6 = 1$

$\underline{\underline{x = 15}}$

Na méně výkonném stavu by tkaní látky trvalo 15 hodin.

Úloha 2. (historická) Čtvero pramenů jest; studnu naplní prvý za den, druhý dvé k tomu třeba dnů, třetímu a čtvrtému čtyř pak jest potřebí dnů. Kdy studnu naplní prameny tyto čtyři?

(Maximus Planudes, kolem 1350)

Rovnice:

Označme x h dobu, za kterou studnu naplní všechny prameny dohromady, vyjádřenou v hodinách.

$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}) . x = 1$

$\underline{\underline{x = 0{,}5}}$

Všechny čtyři prameny naplní studnu za půl dne.

Úloha 3 (zastaralá) Dva horníci si dali na počest sjezdu KSČ závazek, že do dne sjezdu vytěží jisté množství uhlí. První z nich by sám splnil závazek za 45 směn, druhý za $67\frac{1}{2}$ směny. Za kolik směn splní závazek, budou-li pracovat společně?

(Slovní úlohy v matematice, Zdeněk Buřil, Brno 1985)

Opět úloha motivovaná dobou minulou, pro použití stačí úlohu přeformulovat:

Úloha 3.1 Dva pracovníci se rozhodli, že před nástupem na dovolenou vykonají jistou práci. První z nich by sám práci vykonal za 45 pracovních dní, druhý za $67\frac{1}{2}$ dne. Za kolik pracovních dní mohou odejít na dovolenou, budou-li pracovat společně?

Označme *x* počet dní, po které budou kolegové pracovat společně.

Rovnice: $(\frac{1}{45} + \frac{1}{67{,}5}) \,.\, x = 1$

$\underline{\underline{x = 27}}$

Oba pracovníci mohou na dovolenou odejít za 27 dní společné práce.

Slovní úlohy o směsích

Tato skupina úloh je specifická tím, že úlohy častěji vedou k řešení pomocí soustavy rovnic, jen v některých učebnicích je zařazována k předchozím typům a řešena pomocí jedné rovnice. Řešení pomocí rovnice je sice možné, nicméně jde jen o jakousi intuitivní úpravu soustavy rovnic metodou dosazovací. Proto myslím, že je rozumnější řešit úlohy o směsích až v devátém ročníku po probrání soustav dvou rovnic o dvou neznámých. V následujícím textu však budu uvažovat obě varianty řešení.

Úlohy o směsích můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupinou jsou úlohy s fyzikálními a chemickými náměty. To jsou úlohy nadčasové, proto nemůžeme moc mluvit o historických nebo zastaralých úlohách. Úlohy z různých matematických období ukážu jen ilustračně.

Druhou velkou skupinou jsou úlohy na směsi různě drahých produktů, různě velkých pokojů, počtu nohou apod. Ty, stejně jako všechny předchozí typy úloh, podléhají době a řešení je v mnoha případech potřeba upravit.

Úlohy s fyzikálními a chemickými náměty

Úloha 1. (aktuální) Připravujeme 5 litrů 40% roztoku. Máme v dostatečném množství 25% roztok a 60% roztok požadované látky. Kolik kterého z těchto dvou roztoků použijeme k namíchání roztoku potřebné koncentrace? Zastoupení rozpouštědla a rozpouštěné látky v roztoku je objemové.

(Matematika pro 9. ročník základních škol, Odvárko – Kadleček, Prometheus 2000)

Tyto úlohy opět řešíme pomocí tabulky

Vodný roztok lihu	Objem roztoku	Objem lihu v roztoku
25%	x litrů	0,25x litrů
60%	y litrů	0,60y litrů
40%	($x + y$) litrů = 5 litrů	(0,25x + 0,60y) litrů = (5 . 0,40) litrů

Odtud je vidět soustava: $x + y = 5$

$\underline{0{,}25x + 0{,}60y = 5 \;.\; 0{,}40}$

Řešením soustavy je $\underline{\underline{x = 2{,}9,\ y = 2{,}1}}$

K přípravě směsi použijeme přibližně 2,9 litru 25% roztoku a 2,1 litru 60% roztoku.

Úloha 2. (historická) Vinař má dvojí víno. Smíchá-li je v poměru 2:1, jest litr smíšeniny za 78 h; smíchá-li je v poměru 1:2, jest litr za 79 h. Zač jest litr každého druhu? Napovíme: Je-li víno mícháno v poměru 2:1, slévají se dva litry prvního druhu s jedním litrem druhého druhu; h značí haléře.

(Sbírka úloh z algebry, 1902)

Tuto úlohu lze řešit pouze soustavou rovnic, ze zadání není možné vytvořit pouze rovnici jednu. Cenu jednoho liru prvního druhu vína můžeme vyjádřit jako x h a cenu jednoho litru druhého druhu jako y h.

Soustava rovnic: $2x + y = 3 \;.\; 78$

$\underline{x + 2y = 3 \;.\; 79}$

Odtud $\underline{\underline{x = 77\ ,\ y = 80}}$. Tedy litr levnějšího vína je za 77 haléřů, litr dražšího za 80 haléřů.

Úloha 3. (V tomto případě se nejedná o úlohu zastaralou kontextem, pouze se mezi zastaralé řadí dobou vzniku. Úlohu jsem zařadila pro zdůraznění toho, že tento typ úloh si zachovává nadčasovost.)

Jak teplá bude směs 76 litrů vody 90° teplé a 15 litrů vody 6° teplé?

(Algebra 9, R. Horáček, Státní pedagogické nakladatelství Praha 1973)

Teplota směsi bude $x°$.

Rovnice: $76 . 90 + 15.6 = (76 + 15) . x$

Odtud $x = 76°$. Proto voda bude mít po smíchání teplotu 76°.

Úlohy na směsi různě drahých produktů, různě velkých pokojů, počtu nohou apod.

Úloha 1 (aktuální) Třídní pokladník Jarda bude objednávat vstupenky na divadelní představení Jehla v kupce sena. Cena dražších vstupenek je 110 Kč, levnější stojí 90 Kč. Jarda vybral celkem 2 620 Kč od 26 zájemců. Nezapsal si ale, kolik z nich si předplatilo dražší vstupenky a kolik vstupenky lacinější. Dokážeš to vypočítat?

(Matematika pro 9. ročník základních škol, Odvárko – Kadleček, Prometheus 2000)

	Cena jedné	Počet vstupenek	Cena celkem
levnější vstupenky	90 Kč	x	$90x$
dražší vstupenky	110 Kč	y	$110y$
celkem		26	2 620 Kč

Odtud soustava rovnic: $x + y = 26$

$$\underline{90x + 110y = 2\,620}$$

Řešením soustavy je: $\underline{\underline{x = 12, y = 14.}}$

Třídní pokladník objednal 12 levnějších a 14 dražších vstupenek.

Úlohu lze řešit i jednou rovnicí, pokud místo y vyjádříme počet dražších vstupenek jako $26 – x$. Potom řešíme rovnici $90x – 110(26 – x) = 2\,620$. Řešení je samozřejmě stejné.

Úloha 2 (historická) Z dvojího zboží stojí 7 kg jednoho a 4 kg druhého dohromady 20 K; 3 kg onoho s 8 kg tohoto stojí 18 K. Po čem jest 1 kg kterého?

(Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské 1899)

1 kg prvního zboží stojí x K, 1kg druhého y kg.

Soustava rovnic: $7x + 4y = 20$

$$\underline{3x + 8y = 18}$$

Odtud $\underline{\underline{x = 2,\ y = 1{,}5}}$, proto kilogram prvního zboží je za 2 K, druhého za 1,5 K.

Úloha 3 (zastaralá) Žák měl 11,40 Kčs. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 60 haléřů papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

(*Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy 1970)*

Určeme cenu trojúhelníku jako *t* Kčs, cenu štětce jako *š* Kčs.

Soustava: $t + š = 11{,}40$

$$\underline{2 \,.\, t + 0{,}60 = 11{,}40}$$

Odtud$\underline{\underline{:\ t = 5{,}40;\ š = 6}}$. Trojúhelník stál 5 Kčs a 40 h, štětec 6 Kčs.

Úloha opět v současné době nemá reálný podklad a částky za pomůcky jsou výrazně nízké, navíc výsledné částky už nevyjadřujeme v haléřích, ale v celých korunách. Pro přeformulování úlohy máme opět dvě možnosti. Můžeme změnit částky:

Úloha 3.1 Žák měl 57 Kč. Mohl za ně koupit buď trojúhelník a štětec, nebo dva takové trojúhelníky a za 3 Kč papír. Kolik stál Trojúhelník a kolik štětec?

Řešení úlohy je stejné, jen všechny částky jsou pětkrát zvětšené.

Nebo čísla ponecháme a změníme kontext:

Úloha 3.2 Pan Malý šel nakupovat před malováním bytu. Měl spočítáno, že vozík uveze právě 11,4 kg materiálu. Věděl, že může koupit kbelík bílé a kbelík tónované barvy, nebo dva kbelíky bílé a sadu štětců vážící 0.6 kg. Kolik kg váží kbelík bílé a kolik kbelík tónované barvy?

Závěr

Ve své práci jsem ukázala, jak důležité jsou slovní úlohy ve výuce. Doložila jsem, že zásadní dokumenty jako Rámcový vzdělávací program aplikace matematických poznatků na praktické situace přímo vyžaduje. Ve stručnosti jsem objasnila pojmy jako klíčové kompetence nebo matematická gramotnost. V těchto souvislostech důležitost slovních úloh přímo vystupuje.

Dále jsem se věnovala nástinu historických souvislostí, kde jsem ukázala, že nejen rovnice, ale i slovní úlohy jsou nedílnou součástí výuky matematice již od dob starověku. V této části práce jsem narazila na velké množství zajímavostí, a pokud budu práci někdy rozšiřovat, myslím, že právě v hlubším a cílenějším prozkoumání historických materiálů je velký potenciál.

Uvedla jsem historii výuky v českých zemích. I tady se rovnice objevily záhy, ale pod vlivem dalších událostí byly často potlačeny a odsunuty až k vyššímu vzdělávání. Tato část práce mě velmi bavila.

V práci jsem se omezila jen na přehled typů slovních úloh řešených pomocí rovnic (nebo jejich soustav) a možnosti aktualizace úloh zastaralých. Protože jsem se snažila nashromáždit co nejvíce materiálů, dostala se mi do ruky i sbírka úloh zkušených učitelů z Opavy (Slovní úlohy řešené rovnicemi, 1998). To je přesně typ materiálu, který chci vytvořit, protože mi řešení právě těchto typů úloh přijde velmi zajímavé a ve výuce stěžejní.

V další práci bych kromě hlubší historické analýzy ještě ráda zjistila, jaké dělení slovních úloh žákům vyhovuje nejvíce. Jestli je takové rozdělování, které je v učebnicích nejčastější, nenutí jen otrockému učení algoritmu, bez hlubšího pochopení. Myslím, že i možnost slovní úlohy řešit jako celek, bez tematického rozdělování, může mít své výhody.

Další možnost rozšíření práce vidím v ověření hypotézy, že neaktuální úlohy jsou pro žáky hůř řešitelné, než ty aktuální. Při práci s žáky základní školy si tuto domněnku pravidelně dokazuji, ale konkrétní výzkum na toto téma jsem nenašla.

Celá práce ukazuje důležitost slovních úloh ve všech historických obdobích.

Seznam použité literatury

Odborná literatura:

BALDA, F. *Z dějin elementární matematiky*. 1. vydání, Praha: SPN, 1959, 238 s. ISBN 85-0-04.

BOBOK, J. a kol. *Metodická příručka k učebnicím matematiky pro 8. ročník základní školy*. 1. vydání, Praha: SPN, 1983, 152 s. ISBN 14-474-83.

BUŘIL, Z. *Slovní úlohy v matematice*. Brno: Univerzita J. E. Purkyně, 1985, 60 s.

FALTÝN, J., K. NĚMČÍKOVÁ, E. ZELENDOVÁ (eds). *Gramotnosti ve vzdělávání Příručka pro učitele*, Praha 2010.

FOLTA, J., Z. HORSKÝ, L. NOVÝ, I. SEIDLEROVÁ, J. SMOLKA, M. TEICH. *Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století.* 1. vydání, Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1961, 432 s.

GABRIEL, V. *Obrázky ze školství českého a rakouského v XVIII. a XIX. století*. Praha: Matice lidu XXV, 1891.

HEJNÝ, M. a kol. *Teória vyučovania matematiky*. Bratislava: SPN, 1989, ISBN 80-8052-085-2.

JUŠKEVIČ, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*. 1. vydání, Praha: Academia, 1978, 448 s. ISBN 509-21-857.

KOLMAN, A. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968, 224 s. ISBN 507-21-875.

KONFOROVIČ, A. G. *Viznačni matematični zadači*. Kijev: Radanska škola, 1981, 208 s.

KRAEMER, E. (předseda komise) *Učební osnovy základní školy Matematika 5. – 8. ročník*. 1. vydání, Praha: SPN, 1987, 52 s. ISBN 14-596-87.

KRIŽALKOVIČ, K. a kol. *Metodická příručka k učebnici Cvičení z matematiky pro 8. ročník základní školy*. 1. vydání, Praha: SPN, 1983, 64 s. ISBN 14-434-83.

MIKULČÁK, J. *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*. 1. vydání, Praha: MATFYZPRESS, 2010, 313 s. ISBN 978-80-7378-112-5.

NOVOTNÁ, J. *Analýza řešení slovních úloh*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2000, 126 s. ISBN 80-7290-011-0.

NOVOTNÁ, J. Zpracování informací při řešení slovních úloh, in Hejný M., Novotná J., Stehlíková N. (eds): *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta 2004, s. 367-378, ISBN 80-7290-189-3(2. sv).

ODVÁRKO, O. *Knížka pro učitele ke školním vzdělávacím programům na druhém stupni ZŠ Matematika a její aplikace*. 1. vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2006, 111 s. ISBN 80-7196-333-X.

STRUIK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. 2. vydání, London: G. Bell and Sons Ltd., 1956, 195 s.

TRÁVNÍČEK, S. Slovní úlohy o pohybu. In Matematika – fyzika – informatika 14, 2004/2005.

VYŠÍN, J. *Metodika řešení matematických úloh*. 1. vydání, Praha: SPN, 1962, 172 s. ISBN 14-907-62.

Internetové zdroje:

Rámcový vzdělávací program. [citováno 2014-05-15]. Dostupné z: http://digifolio.rvp.cz/view/view.php?id=6407

Učebnice a sbírky úloh:

BĚLOUN, F a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vydání, Praha: Prometheus, 1998, 254 s. ISBN 80-7196-104-3.

BĚLOUN, F a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 3. vydání, Praha: SPN, 1983, 387 s. ISBN 5-42-23/3b.

BINTEROVÁ H., E. FUCHS, P. TLUSTÝ. *Matematika, Aritmetika učebnice pro osmý ročník a víceletá gymnázia*. 1. vyd. Plzeň: Fraus, 2009, 127 s. ISBN 978-8072386-840.

BUŠEK, I., V. MACHÁČEK, B. KOTLÍK, M. TICHÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník základní školy*. 1. vydání, Praha: SPN, 1992, 203 s. ISBN 80-04-26090-X.

CZUTLEK, P. a kol. *Slovní úlohy řešené rovnicemi pro žáky a učitele ZŠ,* studenty a profesory SŠ. Praha: sdružení podnikatelů HAV, 1998, 155 s.

DOMIN, K. *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské*. Kutná Hora: nákladem Karla Šolce, 1899, 319 s.

HERMAN, J., Chrápavá V. *Matematika - Tercie: Rovnice a nerovnice.* 1. vydání, Praha: Prometheus,2008, 121 s. ISBN 978-80-7196-137-6.

HORÁČEK, R. *Algebra pro devátý ročník.* 1. vydání, Praha: SPN, 1973, 187 s. ISBN 14-191-73.

JANEČEK, F. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy*. 4. vydání, Praha: Prometheus, 1997, 194 s., ISBN 80-7196-076-4.

KINDL, K. *Sbírka úloh z algebry pro základní devítileté školy*. 6. vydání, Praha: SPN, 1970, 203 s. ISBN 14-198-79.

KNEIDL F., M. MARHAN. *Početnice pro měšťanské školy dívčí (sešit druhý)*. Praha: nákladem F. Tempského, 1888.

KNEIDL, F., M. MARHAN. *Početnice pro měšťanské školy dívčí*. Praha: nákladem F. Tempského, 1888.

KNEIDL, F., M. MARHAN. *Početnice pro měšťanské školy chlapecké (sešit druhý)*. Praha: nákladem F. Tempského, 1886.

KNEIDL, F., M. MARHAN. *Početnice pro měšťanské školy chlapecké*. Praha: nákladem F. Tempského, 1888.

MARUNOVÁ, E., F. VEJSADA. *Sbírka příkladů s fyzikálními náměty pro 6. až 9. postupný ročník základní devítileté školy*. České Budějovice: kabinet matematiky a deskriptivní geometrie Ústavu pro další vzdělávání učitelů a výchovných pracovníků při pedagogickém institutu v Č. Budějovicích, 1960, 110 s. ISBN 6120-60.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. *Matematika 1 pro 9. ročník základní školy*. 2. vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2000, 88 s. ISBN 97-11-270.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. *Matematika 2 pro 8. ročník základní školy*. 2. vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 1999, 72 s. ISBN 97-11-261.

ODVÁRKO, O., J. KADLEČEK. *Matematika 2 pro 9. ročník základní školy*. 2. vydání, Havlíčkův Brod: Prometheus, 2008, 92 s. ISBN 97-11-271.

PŮLPÁN, Z. a kol. *Matematika pro základní školy 8*. zpracováno podle RVP, Praha: SPN, ISBN 978-80-7235-419-1.

ŠAROUNOVÁ, A. *Matematika 8*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 143 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6127-2.

ŽENATÁ, M. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník*. nakl. Blug, místo ani rok vydání neuvedeny. ISBN 80-7274-926-9.

ŽENATÁ, M. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník. nakl*. Blug, místo ani rok vydání neuvedeny. ISBN 80-7274-933-1.