Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ivan Krch

Míry rizika ve financích a pojišťovnictví

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční matematika

Praha 2015

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu práce prof. RNDr. Tomáši Ciprovi, DrSc. za jeho odbornou pomoc, cenné rady a komentáře, které mi poskytl při psaní této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 26. 4. 2015 Ivan Krch

Název práce: Míry rizika ve financích a pojišťovnictví

Autor: Ivan Krch

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Hlavním cílem této práce je pojednat o rizikových mírách, které se využívají ve financích a pojišťovnictví. Tato práce je zaměřena na popis jejich matematických vlastností a jejich vzájemných vztahů. V této práci jsou vyloženy koherentní rizikové míry, spektrální rizikové míry a pokřivené rizikové míry. Velká pozornost je také věnována hodnotě v riziku, která do jisté míry prostupuje všemi výše zmíněnými rizikovými mírami. Pozornost je také soustředěna na použití uvedených rizikových měr na ilustrativních případech, které objasňují uvedené vlastnosti. Dále jsou demonstrovány uvedené míry na kvantifikování rizika portfolia vycházejícího z reálných dat.

Klíčová slova: riziko, riziková míra, VaR

Title: Risk measures in finance and insurance

Author: Ivan Krch

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main aim of this thesis is to examine risk measures which are used in finance and insurance. This work is focused on describing their mathematical characterizations and their relationships. In this thesis are discussed coherent risk measures, spectral risk measures and distorted risk measures. Considerable attention is given to value at risk which is connected to a certain extent with all risk measures which are mentioned above. Attention is also aimed on using of these risk measures on illustrative examples which make their characteristic clear. Further there are demonstrated risk measures for quantification risk of portfolio based on real data.

Keywords: risk, risk measure, VaR

Obsah

Úvod

Práce se zabývá vlastnostmi měr rizika s důrazem na rizikové míry, které se používají v oblasti financí. Pro tyto rizikové míry popíšeme základní matematické vlastnosti, které splňují a které jsou v praxi vyžadovány. Uvedeme několik skupin rizikových měr a pro tyto skupiny budeme jejich teoretické vlastnosti ilustrovat na početních příkladech.

Hlavní skupinou rizikových měr, kterou se zde budeme zabývat jsou koherentní rizikové míry. Tyto rizikové míry jsou provázány s dalšími skupinami rizikových měr, které zde uvedeme. Jedná se o skupiny spektrálních rizikových měr a také pokřivených rizikových měr (distorted risk measures). Ukážeme, že skupina koherentních rizikových měr splňuje požadavky, které bychom od rizikové míry intuitivně očekávali. Jedním z takových hlavních požadavků je subaditivita, kdy sloučením portfolia dostaneme stejné nebo nižší riziko než při portfoliu rozděleném. Tento požadavek je jedním z několika, které v následujícím textu zavedeme. Na základě tohoto požadavku důkladně rozebereme rizikovou míru VaR (hodnotu v riziku), která patří mezi jedny z nejznámějších a nejpoužívanějších rizikových měr. Tuto rizikovou míru také aplikujeme na několik příkladů, abychom ukázali její klady a zápory.

Ve financích jsou rizikové míry důležitým nástrojem k hodnocení jednotlivých investic, jak ukážeme na příkladě s reálnými finančními daty.

Kapitola 1

Základní pojmy

V této kapitole připomene základní pojmy a definice z oblasti pravděpodobnosti, které jsou nutné pro zavedení některých rizikových měr a jejich aplikace. Dále v této kapitole zavedeme pojem rizika a jeho základní dělení podle oblastí, v nichž riziko vzniká.

1.1 Základní pojmy pravděpodobnosti

Jak uvedeme dále tak, na riziko nahlížíme jako na nejistotu z budoucích událostí. Na základě této představy o riziku je důležité, abychom hned na začátku připomněli pojem pravděpodobnosti. Jako definici použijeme Kolmogorovu definici pravděpodobnosti.

Definice 1.1 (Kolmogorova definice pravděpodobnosti). *Nechť Ω je libovolná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin Ω. Funkci $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ nazveme pravděpodobností, když platí*

1. $P(\Omega) = 1,$
2. $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathbb{R}$,
3. $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \quad A_i \cap A_j = \emptyset$ *pro libovolná* $i \neq j$.

Definice 1.2 (Náhodná veličina). *Měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B})$, kde $\mathcal{X}$ je nějaká množina a $\mathcal{B}$ nějaká σ-algebra na $\mathcal{X}$, nazýváme náhodná veličina.*

S touto definicí potřebujeme zavést ještě dvě základní funkce, které nám pak pomohou lépe definovat některé míry rizika, a to distribuční funkci a kvantilovou funkci.

Definice 1.3 (Distribuční funkce). *Funkce*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

se nazývá distribuční funkce náhodné veličiny X.

Definice 1.4 (Kvantilová funkce). *Nechť $F_X(x)$ je distribuční funkce reálné náhodné veličiny X. Funkce*

$$F_X^{-1}(u) = \inf(x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq u), \quad 0 < u < 1 \tag{1.2}$$

se nazývá kvantilová funkce.

1.2 Riziko

Pro zavedení pojmu rizika budeme uvažovat účastníka trhu jako v [4]. Tedy uvažujme účastníka trhu s portfoliem v časovém intervalu $[0,T]$. Toto portfolio je tvořeno k pozicemi V_i pro $1 \leq i \leq k$. Označíme e_i náhodnou veličinu označující hodnotu i-té pozice v čase T (např. směnný kurz, cena akcie) a označme velikost i-té pozice v čase T jako $V_i(T)$ (např. nominální hodnota měny, počet akcií). Poté pro takovéhoto účastníka definujeme riziko následujícím způsobem.

Definice 1.5 (Riziko). *Rizikem portfolia účastníka popsaného výše rozumíme čistou budoucí hodnotu*

$$V = \sum_{i=1}^{k} e_i V_i(T). \tag{1.3}$$

Předpokládáme, že všechny možné pozice na konci sledovaného období jsou známy. Také předpokládáme, že dané pozice v čase T jsou likvidní. Kdybychom tento předpoklad uvolnili, bylo by zapotřebí mnohem komplikovanějších modelů ke stanovení rizika portfolia.

Z definice rizika vidíme, že odpovídá nejistotě spojené s budoucími výnosy. Rizika jako taková můžeme rozdělit podle původu budoucí nejistoty. Jedno z možných dělení rizik je na finanční rizika a nefinanční rizika:

Finanční riziko

- kreditní riziko
- tržní riziko
- riziko likvidity

Nefinanční riziko

- operační riziko
- riziko modelu

Kreditní riziko je riziko, které vychází z neuhrazení smluvních závazků z důvodu selhání protistrany. V bankovnictví toto riziko představuje $50 - 70\%$ všech rizik.

Tržní riziko je riziko změny budoucí hodnoty pozice kvůli změně tržních podmínek, na kterých daná pozice závisí.

Riziko likvidity je riziko, že daný subjekt ztratí schopnost dostát svým finančním závazkům v době jejich splatnosti.

Operační riziko se týká rizika ztráty spojeného s nepatřičným vnitřním procesem nebo jeho selháním.

Riziko modelu je riziko plynoucí z nesprávného použití modelu pro ocenění daného instrumentu.

Kapitola 2

Míra rizika

V této kapitole zavedeme pojem míry rizika a nejčastější požadované vlastnosti, které by měla splňovat. Na základě těchto vlastností zavedeme různé skupiny rizikových měr. Jako první uvedeme koherentní rizikové míry, z nichž pak odvodíme spektrální rizikové míry a pokřivené rizikové míry. Na závěr kapitoly detailněji rozebereme hodnotu v riziku definovanou již na začátku této kapitoly. Zároveň jsou také připojeny demonstrační příklady pro jednotlivé uvedené rizikové míry.

2.1 Riziková míra

Předtím, než definujeme rizikovou míru, budeme definovat konvexní kužel. V obecném pojetí rizikové míry bude konvexní kužel sloužit jako definiční obor této míry.

Definice 2.1 (Konvexní kužel)**.** *Množina $K \in \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní kužel, jestliže splňuje následující vlastnosti*

$$\emptyset \in K,$$

$$\forall x,y \in K, \quad \forall \alpha \in (0,1) \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)\, y \in K,$$

$$\forall y \in K, \quad \alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha y \in K.$$

Definici rizikové míry a následně náhodnou veličinu reprezentující rozdělení ztrát uvedeme dle [9].

Definice 2.2 (Riziková míra)**.** *Označme $L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ množinu všech náhodných veličin na $(\Omega,\mathcal{F})$, které jsou skoro jistě konečné. Nechť konvexní kužel $\mathcal{M} \subset L^0(\Omega,\mathcal{F},P)$ představuje portfolio ztrát přes časový úsek Δ. Pak definujme rizikovou míru jako funkci*

$$\varrho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

V této práci budeme vždy uvažovat náhodnou veličinu, která bude reprezentovat rozdělení ztrát. Na takovouto náhodnou veličinu lze nahlédnout jako na rozdíl hodnot portfolia. Tedy pokud uvažujeme nějaké portfolio sestávající z finančních aktiv, pak jeho hodnotu v čase s označíme jako $V(s)$. Předpokládáme, že daná hodnota $V(s)$ je v čase s známa. Pro daný časový horizont Δ definujeme ztrátu přes časový úsek $[s, s+\Delta]$ jako

$$L_{[s,s+\Delta]} = -\left(V(s+\Delta) - V(s)\right).$$

Tedy z pohledu času s není hodnota veličiny $V(s+\Delta)$ známa (předpokládáme, že takováto hodnota je známa až v okamžiku $s+\Delta$). Z uvedené definice ztráty přes časový úsek je patrné, že negativní hodnota této náhodné veličiny znázorňuje zhodnocení portfolia a naopak kladná hodnota znázorňuje snížení hodnoty portfolia. V následujícím textu používáme pro náhodnou veličinu reprezentující rozdělení ztrát přes časový úsek zjednodušené označení $L \equiv L_{[s,s+\Delta]}$. Rizikovou míru definovanou v 2.2 lze interpretovat tak, že $\varrho\,(L)$ představuje výši kapitálu, který je třeba přidat k této pozici se ztrátou L tak, aby po přidání obnosu $\varrho\,(L)$ již daná pozice byla akceptovatelná. Z uvedené interpretace lze nahlédnout, že pozice s rizikovou mírou $\varrho\,(L) \leq 0$ jsou akceptovatelné bez potřeby dodat jakýkoliv kapitál. Dokonce pro $\varrho\,(L) < 0$ lze kapitál v dané pozici odebrat.

Následující výčet axiomů z [3] představuje nejčastěji požadované vlastnosti od výše definované rizikové míry. Pro konkrétní skupinu rizikových měr pak požadujeme, aby splňovala pouze některé z těchto axiomů. Nelze nalézt rizikovou míru, která by splňovala všechny dané vlastnosti, neboť některé z axiomů si navzájem odporují.

Axiom 2.1 (Subaditivita). *$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ splňuje $\varrho\,(L_1 + L_2) \leq \varrho\,(L_1) + \varrho\,(L_2)$.*

• Tento axiom udává velmi důležitou vlastnost rizikových měr. Neboť absencí subaditivity bychom dostali, že pouhým dělením portfolia by bylo možné docílit menšího rizika, než bylo riziko původního portfolia.

Axiom 2.2 (Invariance vůči posunu). *$\forall L \in \mathcal{M}, \forall l \in \mathbb{R}$ splňuje $\varrho\,(L + l) = \varrho\,(L) + l$.*

• Z axiomu 2.2 vyplývá, že pokud pozici, která vede ke ztrátě L, přidáme nebo ubereme hodnotu ve výši l, pak riziko této nové pozice je stejné jako původní pozice upravená, právě o tuto hodnotu l.

• Pokud přidáme k pozici vedoucí ke ztrátě L hodnotu $\varrho\,(L)$. Pak tato operace vede k upravené pozici vedoucí ke ztrátě $\tilde{L} = L - \varrho\,(L)$, kde $\varrho(\tilde{L}) = \varrho\,(L) - \varrho\,(L) = 0$.

Axiom 2.3 (Pozitivní homogenita). *$\forall L \in \mathcal{M}, \forall \lambda > 0$ splňuje $\varrho\,(\lambda L) = \lambda \varrho\,(L)$.*

• Pokud budeme předpokládat platnost axiomu 2.1, platí

$$\varrho(nL) = \varrho(L + \cdots + L) \leq n\varrho(L).$$

Tedy pro n stejných portfolií je přirozené v právě uvedeném vztahu uvažovat rovnost, neboť v takovéto kombinaci portfolia nezískáváme diverzifikaci ztrát.

Axiom 2.4 (Monotónnost). *$\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}$, $L_1 \leq L_2$ skoro jistě splňují $\varrho(L_1) \leq \varrho(L_2)$.*

• Pokud zachováváme interpretaci rizikové míry jako výši kapitálu, který je nutno přidat k pozici vedoucí ke ztrátě L, aby již byla akceptovatelná, pak význam axiomu 2.4 je zcela zřejmý, neboť pro pozici vedoucí k větší ztrátě je při dané rizikové míře nutné dodat více kapitálu, abychom danou pozici dorovnali.

Axiom 2.5 (Konvexnost). $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{M}, \forall \lambda \in [0,1]$ *splňují* $\varrho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2) \leq \lambda\varrho(L_1) + (1-\lambda)\varrho(L_2)$.

• Právě uvedený axiom má podobný význam jako axiom 2.1. Neboť konvexnost zaručuje, že pouhou konvexní kombinací portfolia nelze dosáhnout nižšího rizika, než bylo riziko původního portfolia.

Axiom 2.6 (Imunita vůči posunu). $\forall L \in \mathcal{M}, \forall l \in \mathbb{R}$ *splňuje* $\varrho(L+l) = \varrho(L)$.

• Vidíme, rizikové míry nemohou splňovat současně axiom 2.6 a axiom 2.2. Axiom 2.6 je využíván rizikovými mírami založených na rozptylu. Neboť pro takovou rizikovou míru platí

$$\mathrm{var}(L+l) = \mathrm{E}[(L+l) - \mathrm{E}(L+l)]^2 = \mathrm{E}[L + l - \mathrm{E}(L) - l]^2 = \mathrm{var}(L).$$

Axiom 2.7 (Nezápornost). $\forall L$ *nekonstantní splňuje* $\varrho(L) > 0$ *a* $\forall L$ *konstantní splňuje* $\varrho(L) = 0$.

• Daný axiom nezápornosti lze interpretovat pro riziko, jako nejistotu z budoucí hodnoty portfolia. Pokud máme konstantní riziko, pak v tomto případě žádná nejistota nehrozí. Naopak pro nekonstantní hodnoty zde určitá nejistota nastává. Stejně jako u předchozího axiomu i tento axiom je využíván rizikovými mírami zakládajících se na rozptylu. Neboť $\mathrm{var}(L) > 0$ a $\mathrm{var}(l) = 0$, kde L je náhodná veličina a l je konstanta.

Předtím než uvedeme jednotlivé skupiny rizikových měr, budeme definovat hodnotu v riziku (Value at risk, VaR) podle [9], které se důkladněji budeme věnovat ke konci této kapitoly (je důležitá v souvislosti s koherencí rizikových měr).

Definice 2.3 (Hodnota v riziku, VaR). *Pro předem dané* $\alpha \in (0,1)$ *definujeme VaR daného portfolia na hladině spolehlivosti* α *jako nejmenší číslo* l *pro, které platí, že pravděpodobnost ztráty* $L > l$ *není větší než* $(1-\alpha)$*, tj.*

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}. \quad (2.2)$$

V takovéto definici hodnoty v riziku se za α nejčastěji volí hodnoty $\alpha = 0.95$ nebo $\alpha = 0.99$. Ve vzorci (2.2) z pravé strany je patrné, že VaR na hladině spolehlivosti α je α kvantil daného rozdělení ztrát. Možná interpretace VaR je, že s pravděpodobností $(1-\alpha)$ ztráta daného portfolia nepřekročí hodnotu VaR_α.

2.2 Koherentní rizikové míry

V této části se budeme zabývat koherentními rizikovými mírami, pro tuto část byl primární zdroj [9].

Definice 2.4 (Koherentní riziková míra). *Nechť $\mathcal{M}$ je konvexní kužel, který leží v definičním oboru rizikové míry ρ. Pokud ρ splňuje axiomy 2.1 - 2.4 pak se riziková míra ρ nazývá koherentní na $\mathcal{M}$.*

V definici 2.3 jsme zavedli hodnotu v riziku. Tato riziková míra však není koherentní, neboť nesplňuje požadavek subaditivity (axiom 2.1), toto porušení subaditivity bude demonstrováno později, ale některé rizikové míry odvozené od hodnoty v riziku již koherentní jsou zde uvedeme podmíněnou hodnotu v riziku. Následující věta z [1] udává základní vlastnosti pro koherentní rizikové míry.

Věta 1. *Nechť ρ_i jsou koherentní rizikové míry pro $i = 1, \ldots, n$. Pak*

a) pro každou konvexní kombinaci je $\rho = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i$ pro $(\alpha_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1)$ koherentní riziková míra.

b) pro jednodimenzionální rizikovou míru ρ_α, $\alpha \in [a,b]$ a pro libovolnou míru $d\mu(\alpha)$ na $[a,b]$, takovou že $\int_a^b d\mu(\alpha) = 1$ platí, že $\rho = \int_a^b \rho_\alpha d\mu(\alpha)$ je koherentní.

Důkaz. Axiom 2.1, 2.3, 2.4 jsou zřejmé. Ukážeme Axiom 2.2
a)

$$\begin{aligned}\rho(L+l) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i(L+l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\rho_i(L)+l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho_i(L) + \sum_{i=1}^{n} l\alpha_i \\ &= \rho(L) + l\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \rho(L) + l.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\rho(L+l) &= \int_a^b \rho_\alpha(L+l) d\mu(\alpha) = \int_a^b (\rho_\alpha(L)+l) d\mu(\alpha) \\ &= \int_a^b \rho_\alpha(L) d\mu(\alpha) + l\int_a^b d\mu(\alpha) = \rho(L) + l.\end{aligned}$$

□

Definice 2.5 (Podmíněná hodnota v riziku). *Nechť L je ztráta s distribuční funkcí F_L a $|L|$ má střední hodnotu $\mathrm{E}(|L|) < \infty$. Definujeme podmíněnou hodnotu v riziku na hladině spolehlivosti $\alpha \in (0,1)$ jako*

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du, \tag{2.3}$$

kde F_L^{-1} je kvantilová funkce pro F_L.

Integrál v definici CVaR lze přepsat tak, aby bylo patrné, že tato riziková míra je odvozená od VaR. Tedy daný vzorec (2.3) za použití definice 1.4 přepíšeme do tvaru

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du.$$

CVaR nám umožňuje odhadnout výši ztráty pokud ztráta překročí VaR. Neboť z interpretace hodnoty v riziku víme pouze, s jakou pravděpodobností daná ztráta překročí tuto hodnotu, ale již není možné zjistit, jak se chová daná ztráta v $(1-\alpha)\%$ případů. Tato vlastnost je demonstrována ke konci tohoto oddílu věnovaného podmíněné hodnotě v riziku. Nyní uvedeme větu, která tomuto náhledu na CVaR dá jasnější charakter.

V některých případech je vhodné vyjádřit CVaR pomocí distribuční funkce F_L. Taková interpretace je vhodná při práci s pokřivenými rizikovými mírami, které budou popsány v podkapitole 2.4. Využijeme ideu uvedenou v [3] a označíme $S_L(x) = 1 - F_L(x)$. Pak platí pro $\alpha \in (0{,}1)$.

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\left((1-\alpha)q_\alpha + \int_{q_\alpha}^{\infty} S_L(x)dx\right). \tag{2.4}$$

Fakt, že daná rovnost platí vychází z jednoduchého náhledu na funkci $S_L(x)$ z jejího vztahu k q_α.

Věta 2. *Pro integrovatelnou ztrátu L se spojitou distribuční funkcí F_L a libovolné $\alpha \in (0,1)$ platí*

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{\mathrm{E}(L; L \geq q_\alpha(L))}{1-\alpha} = \mathrm{E}(L|L \geq VaR_\alpha). \tag{2.5}$$

Důkaz. Mějme náhodnou veličinu $U \sim R(0,1)$ a F_L^{-1} kvantilovou funkcí náhodné veličiny L. Použijeme vztah, kde náhodná veličina $F_L^{-1}(U)$ má distribuční funkci F_L. Chceme ukázat, že $\mathrm{E}(L; L \geq q_\alpha(L)) = \int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du$. Za předpokladu spojitosti F_L, což nám zaručí F_L^{-1} ryze rostoucí, sestavíme následující rovnosti.

$$\mathrm{E}(L; L \geq q_\alpha(L)) = \mathrm{E}(F_L^{-1}(U); F_L^{-1}(U) \geq F_L^{-1}(\alpha)) = \mathrm{E}(F_L^{-1}(U); U \geq \alpha).$$

Z poslední rovnosti již dostáváme požadovanou rovnost tedy $\mathrm{E}(F_L^{-1}(U); U \geq \alpha) = \int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du$. Druhé vyjádření CVaR, tj. $CVaR_\alpha = \mathrm{E}(L|L \geq VaR_\alpha)$ získáme pomocí vztahu $P(L \geq q_\alpha(L)) = 1 - \alpha$.

□

Vzorec (2.5) nám umožňuje nahlédnout na CVaR jako střední hodnotu ztráty za podmínky, že ztráta překročí hodnotu v riziku. Z této interpretace vychází jednoduché pozorování

$$CVaR_\alpha(L) \geq VaR_\alpha(L).$$

Předtím než si ukážeme, že tato riziková míra skutečně patří do koherentních rizikových měr, je nutné uvést tvrzení, které pomůže ukázat následnou subaditivitu CVaR.

Tvrzení 3. *Pro posloupnost $(L_i)_{i\in\mathbb{N}}$, kde L_i jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s distribuční funkcí F_L, označíme $L_{1,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$ pořádkovou statistiku. Pak platí*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{\lfloor n(1-\alpha)\rfloor} L_{i,n}}{\lfloor n(1-\alpha)\rfloor} = CVaR_\alpha(L).$$

Důkaz. Viz C. Acerbi, D. Tasche (2002) [2] □

Věta 4. *Podmíněná hodnota v riziku je koherentní riziková míra*

Důkaz. Invariance vůči posunu: chceme $\varrho(L+l) = \varrho(L) + l$. Použijeme vyjádření $CVaR_\alpha(L) = \mathrm{E}(L|L \geq VaR_\alpha)$ z vlastnosti podmíněné střední hodnoty dostáváme že $\mathrm{E}(L+l|L \geq VaR_\alpha) = \mathrm{E}(L|L \geq VaR_\alpha) + \mathrm{E}(l|L \geq VaR_\alpha) = CVaR_\alpha(L)+l$. Pozitivní homogenita: opět použijeme stejné vyjádření podmíněné hodnoty v riziku a z vlastností podmíněné střední hodnoty dostáváme rovnosti pro $\lambda > 0$ $CVaR_\alpha(L) = \mathrm{E}(\lambda L|L \geq VaR_\alpha) = \lambda\mathrm{E}(L|L \geq VaR_\alpha)$. Monotónnost plyne z vyjádření $CVaR_\alpha(L) = \dfrac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du$ a z faktu, že pro $L_1 \leq L_2$ je i $VaR_\alpha(L_1) \leq VaR_\alpha(L_2)$ což je zřejmé z definice VaR. Zbývá dokázat subaditivitu.
Uvažujme posloupnost náhodných veličin $L_1, \cdots, L_n$ a k nim příslušnou pořádkovou statistiku $L_{1,n} \geq \cdots \geq L_{n,n}$. Pro pevně zvolené m, $1 \leq m \leq n$ platí

$$\sum_{i=1}^{m} L_{i,n} = \sup\{L_{i_1} + \cdots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m\}.$$

Nyní uvažujme dvě náhodné veličiny L a $\tilde{L}$ se sdruženou distribuční funkcí F a posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů $(L_1, \tilde{L}_1), \cdots, (L_n,\tilde{L}_n)$. Označíme $(L+\tilde{L})_i := L_i + \tilde{L}_i$ a pořádkovou statistiku $(L+\tilde{L})_{i,n}$. Pak

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(L+\tilde{L})_{i,n} &= \sup\{(L+\tilde{L})_{i_1}) + \cdots + (L+\tilde{L})_{i_m}) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m\} \\ &\leq \sup\{L_{i_1} + \cdots + L_{i_m} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m\} \\ &\quad + \sup\{\tilde{L}_{i_1} + \cdots + \tilde{L}_{i_m} : 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq m\} \\ &= \sum_{i=1}^{m} L_{i,n} + \sum_{i=1}^{m} \tilde{L}_{i,n}.\end{aligned}$$

Volbou $m = \lfloor n(1-\alpha) \rfloor$ a limitním přechodem pro $n \to \infty$ a za použití tvrzení 3 dostáváme $CVaR_\alpha(L+\tilde{L}) \leq CVaR_\alpha(L) + CVaR_\alpha(\tilde{L})$. □

Následující tvrzení dává jasnou strukturu jak spočítat hodnotu v riziku pro ztráty pocházející z normálního rozdělení.

Tvrzení 5. *Nechť ztráta $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Pro pevné $\alpha \in (0,1)$ platí*

$$CVaR_\alpha(L) = \mu + \sigma\frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha},$$

kde ϕ označuje hustotu standardního normálního rozdělení.

Důkaz. Ztrátu $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ můžeme přepsat jako $L = \mu + K\sigma$, kde $K \sim N(0,1)$. Díky vlastnostem koherentních měr dostáváme výraz

$$CVaR_\alpha(L) = CVaR_\alpha(\mu + K\sigma) \overset{Axiom 2.2}{=} \mu + CVaR_\alpha(K\sigma) \overset{Axiom 2.3}{=} \mu + \sigma CVaR_\alpha(K).$$

Nyní stačí ukázat, že $CVaR_\alpha(K) = \dfrac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha)}{1-\alpha}$. Tato rovnost plyne jednoduše úpravou vzorce (2.3):

$$\begin{aligned} CVaR_\alpha(K) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du = \frac{1}{1-\alpha}\int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} y\phi(y)dy = \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[-\phi(y)\right]_{\Phi^{-1}(\alpha)}^{\infty} = \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne pomocí substituce $u = \phi(y)$. Navíc víme, že pro normální rozdělení platí $F_L^{-1}(u) = \Phi^{-1}(u)$. □

Nyní pro názornost uvedeme demonstrační příklad, abychom ukázali jakou informaci nám CVaR poskytuje.

Příklad. Uvažujme finanční instrument D jehož očekávané ztráty jsou uvedeny s příslušnými pravděpodobnostmi v tabulce.

80%	15%	4%	1%
−100	−1	100	10000

Z těchto hodnot vypočteme CVaR. Pro tento výpočet budeme uvažovat hladinu spolehlivosti $\alpha = 0.95$ a požijeme vzorec 2.5. Z uvedené tabulky je patrné, že $VaR_\alpha(D) = -1$ a tedy $CVaR_\alpha(D) = (0.04 \cdot 100 + 0.01 \cdot 10000) \cdot 0.05^{-1} = 2080$.

2.3 Spektrální rizikové míry

V této podkapitole uvedeme spektrální rizikové míry (SRM) s využitím [5] a [1]. Spektrální rizikové míry jsou rizikové míry, které jsou upraveny na základě averze k riziku daného účastníka při zachování vlastnosti koherence. SRM jsou tedy jistým váhovým průměrem, kde pro váhovou funkci stanovíme jisté nutné předpoklady. Jeden z intuitivních požadavků na tuto funkci bude, aby horší dopady byly brány v potaz s větší váhou. S tím pak souvisí, že takto vytvořená riziková míra účastníka trhu, který má větší averzi k riziku, bude nabývat vyšších hodnot, než riziková míra účastníka s nižší averzí k riziku. Následující definice uvádí několik nutných předpokladů ke stanovení SRM.

Definice 2.6. *Měřitelná funkce $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ se nazývá přípustné rizikové spektrum, pokud splňuje*

1. *$\phi(p)$ je nezáporná,*
2. *$\phi(p)$ je neklesající,*
3. *$\int_0^1 \phi(p)dp = 1$.*

Nyní před zavedením definice SRM, ukážeme vytvoření nové rizikové míry za pomoci CVaR dle [1]. Připomene vzorec CVaR na hladině spolehlivosti α:

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du.$$

Označíme míru $d\mu(\alpha)$ pro $\alpha \in [0,1]$ s využitím věty 1, b) dostáváme, že

$$M_\mu(L) = \int_0^1 (1-\alpha)CVaR_\alpha(L)d\mu(\alpha) = \int_0^1 \int_\alpha^1 F_L^{-1}(p)dpd\mu(\alpha) \tag{2.6}$$

je koherentní riziková míra, pokud je splněna podmínka

$$\int_0^1 (1-\alpha)d\mu(\alpha) = 1. \tag{2.7}$$

S využitím Fubiniho věty lze rovnost (2.6) přepsat jako

$$\begin{aligned} M_\mu(L) &= \int_0^1 \int_0^p F_L^{-1}(p)d\mu(\alpha)dp = \int_0^1 F_L^{-1}(p) \int_0^p d\mu(\alpha)dp \\ &= \int_0^1 F_L^{-1}(p)\phi(p)dp \equiv M_\phi(L), \end{aligned}$$

a tedy normalizační podmínku (2.7) lze přepsat pro funkci ϕ jako

$$\int_0^1 \phi(p)dp = \int_0^1 \int_0^p d\mu(\alpha)dp = \int_0^1 \int_\alpha^1 dpd\mu(\alpha) = \int_0^1 (1-\alpha)d\mu(\alpha) = 1. \tag{2.8}$$

Z odvození plyne, že $M_\mu(L) = M_\phi(L)$, což je nová riziková míra pro libovolnou míru $d\mu(\alpha)$ splňující normalizaci. Rovnost mezi nimi nastává, pokud $\phi(p) = \int_0^p d\mu(\alpha)$. Pro každou kladnou rostoucí funkci $\phi(p)$ splňující normalizaci (2.8) je rovnost splněna, pokud $d\mu(\alpha) = d\phi(\alpha)$.

Definice 2.7 (Spektrální riziková míra)**.** *Nechť funkce ϕ je přípustné rizikové spektrum. Spektrální rizikovou míru generovanou rizikovým spektrem ϕ definujeme jako*

$$M_\phi(L) = \int_0^1 \phi(u)F_L^{-1}(u)du. \tag{2.9}$$

Poznámka. V našem případě uvažujeme rozdělení ztrát, pokud bychom uvažovali rozdělení zisků, pak je nutné pozměnit požadavky na přípustné rizikové spektrum. Úvaha takového rozdělení by vedla ke změně bodu dvě v definici 2.6 (bylo by nutné uvažovat rizikové spektrum, které je klesající). S tím je spojená změna definice SRM tak, že $M_\phi(X) = -\int_0^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)dp$, kde X je náhodná veličina představující zisky.

Věta 6. *Nechť $M_\phi(L)$ je definována jako*

$$M_\phi(L) = \int_0^1 F_L^{-1}(u)\phi(u)du$$

a $\phi \in \mathcal{L}^1([0,1])$. $M_\phi(L)$ je koherentní riziková míra právě tehdy, když ϕ je přípustné rizikové spektrum.

Důkaz. Ukážeme, že vlastnosti v definici 2.6 jsou nezbytné, aby byla splněna vlastnost koherence.
U vlastnosti 1 uvažujme, že $\exists I = [q_1,q_2] \subset (0,1)$ tak, že platí $\int_I \phi(u)du < 0$. Nyní označíme dvě náhodné veličiny $Y \geq X$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{F},P)$ tak, že $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ s pravděpodobnostmi:

ω	$P(\omega)$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
ω_1	q_1	X_1	$Y_1 = X_1$
ω_2	$q_2 - q_1$	X_2	$Y_2 = X_2 + a$
ω_3	$1 - q_2$	X_3	$Y_3 = X_3,$

předpokládáme $X_1 < X_2 < X_3$ a $a > 0$ tak, že $Y_1 < Y_2 < Y_3$. Pak platí

p	$F_X^{-1}(p)$	$F_Y^{-1}(p)$
$p \in (0, q_1]$	X_1	Y_1
$p \in (q_1, q_2]$	X_2	Y_2
$p \in (q_2, 1]$	X_3	Y_3

Z uvedených tabulek již plyne

$$M_\phi(Y) - M_\phi(X) = \int_0^1 \phi(u)(F_Y^{-1}(u) - F_X^{-1}(u))du = a \int_I \phi(u)du < 0,$$

což je v rozporu s axiomem 2.4.
Vlastnost 2, tedy vlastnost, že funkce ϕ je rostoucí, lze vyjádřit jako

$$\int_{q-\epsilon}^{q} \phi(u)du \le \int_{q}^{q+\epsilon} \phi(u)du$$

pro $\forall q \in (0,1)$ a $\forall \epsilon > 0$ takové, že $[q-\epsilon, q+\epsilon] \subset [0,1]$.
Jako u vlastnosti 1 i zde použijeme důkaz sporem. Tedy uvažujme, že $\exists q \in (0,1)$ a $\exists \epsilon > 0$ takové, že $[q-\epsilon, q+\epsilon] \subset (0,1)$, pro něž platí

$$\int_{q-\epsilon}^{q} \phi(u)du > \int_{q}^{q+\epsilon} \phi(u)du.$$

Nyní uvažujeme tři náhodné veličiny $X, Y, X+Y$, pro jednoduší značení označíme $Z = X + Y$ na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega,\mathcal{F},P)$ s elementárními jevy $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,\omega_3,\omega_4\}$. Uvažujeme následující

ω	$P(\omega)$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$	$Z(\omega)$
ω_1	$q - \epsilon$	X_1	Y_1	$Z_1 = X_1 + Y_1$
ω_2	ϵ	X_2	Y_3	$Z_2 = X_2 + Y_3$
ω_3	ϵ	X_3	Y_2	$Z_3 = X_3 + Y_2$
ω_4	$1 - q - \epsilon$	X_4	Y_4	$Z_4 = X_4 + Y_4$

Číslování je zvoleno tak, aby platilo $X_i < X_j$, pokud $i < j$. Předpokládáme, že platí $X_2 + Y_3 < X_3 + Y_2$.
Opět ukážeme tabulku kvantilových funkcích zvolených náhodných veličin.

p	$F_X^{-1}(p)$	$F_Y^{-1}(p)$	$F_Z^{-1}(p)$
$p \in (0,q-\epsilon] \equiv I_1$	X_1	Y_1	Z_1
$p \in (q-\epsilon, q] \equiv I_2$	X_2	Y_2	Z_2
$p \in (q,q+\epsilon] \equiv I_3$	X_3	Y_3	Z_3
$p \in (q+\epsilon,1] \equiv I_4$	X_4	Y_4	Z_4

Tedy

$$\begin{aligned} M_\phi(Z) - M_\phi(X) - M_\phi(Y) &= \int_0^1 \phi(u)(F_Z^{-1}(u) - F_X^{-1}(u) - F_Y^{-1}(u))du \\ &= \sum_{i=1}^{4} \int_{I_i} \phi(u)(Z_i - X_i - Y_i)du \\ &= (Y_3 - Y_2)\Big(\int_{I_2} \phi(u)du - \int_{I_3} \phi(u)du \Big) > 0. \end{aligned}$$

Pak je uvedená vlastnost v rozporu s axiomem 2.1.
Ještě je důležité ukázat vztah s axiomem 2.2. Tento vztah je patrný z rozpisu

$$\begin{aligned} M_\phi(L+a) = \int_0^1 \phi(u)F_{L+a}^{-1}(u)du &= \int_0^1 \phi(u)(F_L^{-1}(u) + a)du \\ = M_\phi(L) + a \int_0^1 \phi(u)du. \end{aligned}$$

To odpovídá danému axiomu pouze pokud $\int_0^1 \phi(u)du = 1$. □

Jak jsme již zmiňovali na začátku předchozí kapitoly, tak hodnota v riziku není koherentní rizikovou mírou a na základě věty 6 je zřejmé, že není ani spektrální rizikovou mírou. Pokud by mělo platit

$$VaR_\alpha(L) = M_\phi(L) = \int_0^1 F_L^{-1}(u)\phi(u)du.$$

Pak je nutné volit $\phi(u) = \delta(u - \alpha)$, kde δ značí Diracovu delta funkci, neboť pro ni platí $\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c)$, $\forall c \in (a,b)$. Pak platí

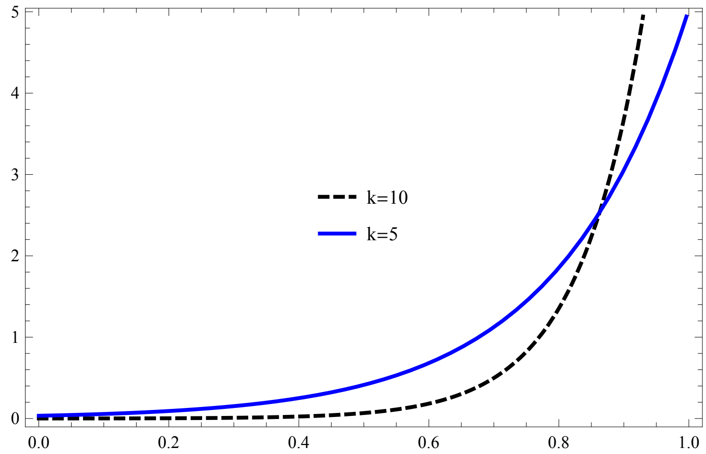
$$\int_0^1 F_L^{-1}(u)\phi(u)du = \int_0^1 F_L^{-1}(u)\delta(u-\alpha)du = F_L^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(L).$$

Takto zkonstruovaná riziková míra však není spektrální riziková míra, neboť Diracova delta funkce nesplňuje požadavky stanovené definicí 2.6, konkrétně nesplňuje bod 2. Diracova delta funkce je funkce, pro kterou platí $\delta(0) = \infty$ a $\delta(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy VaR není spektrální rizikovou mírou.
Pro druhou zmiňovanou rizikovou míru z předchozí kapitoly tedy pro CVaR ukážeme, že již patří mezi spektrální rizikové míry. Úkolem je tedy ukázat, že

$$CVaR_\alpha(L) = M_\phi(L) = \int_0^1 F_L^{-1}(u)\phi(u)du.$$

S využitím vzorce (2.3) položíme $\phi(u) = \dfrac{1}{1-\alpha}\mathbb{I}_{\{\alpha \le u \le 1\}}$. Tato funkce je přípustné rizikové spektrum dle definice 2.6. Neboť pro $\forall \alpha \in (0,1)$ je $\phi(u)$ nezáporná, neklesající a $\int_0^1 \dfrac{1}{1-\alpha}\mathbb{I}_{\{\alpha \le u \le 1\}} = 1$, tedy platí

$$\begin{aligned} \int_0^1 F_L^{-1}(u)\phi(u)du &= \int_0^1 F_L^{-1}(u)\frac{1}{1-\alpha}\mathbb{I}_{\{\alpha \le u \le 1\}}du \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u)du = CVaR_\alpha(L). \end{aligned}$$



Obrázek 2.1: Průběh přípustného rizikového spektra pro různé volby parametrů funkce $\phi_k(p)$.

Lze tedy tvrdit, že CVaR náleží mezi spektrální rizikové míry.

V úvodu SRM jsme zmínili, že na tyto rizikové míry lze nahlížet jako na jistý váhový průměr. Tedy, že účastník trhu může zohlednit svou averzi k riziku. Pokud nahlédneme na CVaR jako na SRM, pak rizikové spektrum pro CVaR je po částech konstantní funkce, daná averze k riziku zde není nijak zohledněna.

Nyní uvedeme příklad rizikové míry, kde využijeme odvozenou funkci z [5], u které se již averze k riziku projeví.

Příklad. Uvažujme funkci

$$\phi(p) = \frac{ke^{-k(1-p)}}{1-e^{-k}}, \tag{2.10}$$

pro $k > 0$. Parametr k ve funkci $\phi(p)$ se nazývá Arrow-Prattův koeficient absolutní averze k riziku, který vychází z užitkové funkce $U(x) = -e^{-kx}$. Čím větší je tento parametr volen, tím větší je averze k riziku. V našem případě si danou rizikovou míru ukážeme pro dvě volby koeficientu, a to pro $k = 5$ a $k = 10$. Pro konkrétní volbu parametru označíme funkci $\phi_k(p)$. Průběh této funkce pro naši volbu parametrů je znázorněn na obrázku 2.1. Snadno nahlédneme, že takto definovaná funkce je přípustné rizikové spektrum, neboť postupně platí

1. pro $k > 0$ je zřejmě $\phi_k(p) > 0$.
2. $$\frac{d}{dp}\phi_k(p) = \frac{k^2e^{-k(1-x)}}{1-e^{-k}} > 0$$

   pro $\forall k > 0$.
3. $$\int_0^1 \phi_k(p)dp = 1.$$

Uvažujme náhodnou veličinu označující rozdělení ztrát portfolia $L \sim N(0{,}1)$. Označme spektrální rizikovou míru jako

$$M_\phi^k(L) = \int_0^1 \phi_k(u) F_L^{-1}(u) du.$$

Pak pro konkrétní hodnoty dostáváme

$k = 5$: $M_\phi^5(L) = 1.08157$,

$k = 10$: $M_\phi^{10}(L) = 1.50499$.

2.4 Pokřivené rizikové míry - Distorted risk measures

V této části si představíme další skupinu rizikových měr. Tato skupina se nazývá pokřivené rizikové míry (známější anglický název distorted risk measures, zde pro tyto rizikové míry budeme používat český název), neboť k jejich vytvoření se používá pokřivujících funkcí. Na tyto funkce budou opět kladeny speciální předpoklady, jako tomu bylo u spektrálních rizikových měr. Pro jejich zavedení bylo použito [7] a [3].

Definice 2.8 (Pokřivující funkce)**.** *Funkce $g : [0{,}1] \to [0{,}1]$ se nazývá pokřivující funkce pokud splňuje vlastnosti:*

1. *$g(0) = 0$ a $g(1) = 1$,*
2. *g je neklesající.*

Na takto definovanou pokřivující funkci lze nahlédnout, stejně jako tomu bylo u spektrálních rizikových měr, tedy jako na funkci vah. Neboť daná funkce je neklesající a tedy větší ztráty budou zohledněny více nebo stejně než ztráty menší. Tuto podobnost se SRM dále v této podkapitole využijeme a ukážeme, že za jistých omezení na pokřivující funkci se tyto rizikové míry rovnají.

Definice 2.9 (Pokřivená riziková míra)**.** *Riziková míra $\rho_g(L)$ definovaná jako*

$$\rho_g(L) = \int_{-\infty}^0 [g(S_L(x)) - 1]\, dx + \int_0^\infty g(S_L(x)) dx, \tag{2.11}$$

kde $S_L(x) = P(L > x) = 1 - F_L(x)$, se nazývá pokřivená riziková míra.

Nyní ukážeme konkrétní zápis vybraných rizikových měr pomocí pokřivující funkce. K tomuto účelu použijeme již dříve použité míry VaR a CVaR, které jsou obě pokřivené rizikové míry. Jako první uvažujme zápis VaR.
Definujeme pokřivující funkci

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1 - \alpha \\ 0, & x < 1 - \alpha. \end{cases} \tag{2.12}$$

Takto definovaná funkce zřejmě splňuje požadavky stanovené v definici 2.8. Abychom ukázali, že takto definovaná pokřivující funkce skutečně určuje VaR, je nutné si uvědomit následující implikace

$$
\begin{aligned}
x < q_\alpha \Rightarrow S_L(x) \geq 1-\alpha \Rightarrow g(S_L(x)) = 1,\\
x > q_\alpha \Rightarrow S_L(x) < 1-\alpha \Rightarrow g(S_L(x)) = 0,
\end{aligned}
$$

kde q_α značí α-kvantil náhodné veličiny L. S jejich využitím dostaneme postupně:

1. pro $q_\alpha \leq 0$

$$
\begin{aligned}
\rho_g(L) &= \int_{-\infty}^{0} [g(S_L(x)) - 1]\, dx + \int_0^\infty g(S_L(x)) dx\\
&= \int_{-\infty}^{q_\alpha} (1-1) dx + \int_{q_\alpha}^{0} (-1) dx + \int_0^\infty 0 dx = q_\alpha.
\end{aligned}
$$

2. pro $q_\alpha > 0$

$$
\begin{aligned}
\rho_g(L) &= \int_{-\infty}^{0} [g(S_L(x)) - 1]\, dx + \int_0^\infty g(S_L(x)) dx\\
&= \int_{-\infty}^{0} (1-1) dx + \int_{0}^{q_\alpha} 1 dx + \int_{q_\alpha}^\infty 0 dx = q_\alpha.
\end{aligned}
$$

Tedy ze vzorce (2.2) víme, že $VaR_\alpha(L) = q_\alpha$.

Nyní chceme vyjádřit CVaR jakožto pokřivenou rizikovou míru. Definujeme funkci

$$
g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1-\alpha \\ \dfrac{x}{1-\alpha}, & x < 1-\alpha. \end{cases} \tag{2.13}
$$

Takto definovaná funkce splňuje definici 2.8. Obdobně jako u funkce (2.12) ukážeme, jakých hodnot daná funkce g nabývá pro konkrétní hodnotu x.

$$
\begin{aligned}
x < q_\alpha \Rightarrow S_L(x) \geq 1-\alpha \Rightarrow g(S_L(x)) = 1,\\
x > q_\alpha \Rightarrow S_L(x) < 1-\alpha \Rightarrow g(S_L(x)) = \frac{S_L(x)}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Pro lepší znázornění výsledků opět rozdělíme na dva případy

1. pro $q_\alpha \leq 0$

$$
\begin{aligned}
\rho_g(L) &= \int_{-\infty}^{0} [g(S_L(x)) - 1]\, dx + \int_0^\infty g(S_L(x)) dx\\
&= \int_{-\infty}^{q_\alpha} (1-1) dx + \int_{q_\alpha}^{0} \left(\frac{S_L(x)}{1-\alpha} - 1\right) dx + \int_0^\infty \frac{S_L(x)}{1-\alpha} dx\\
&= q_\alpha + \frac{1}{1-\alpha} \int_{q_\alpha}^\infty S_L(x) dx.
\end{aligned}
$$

2. pro $q_\alpha > 0$

$$\rho_g(L) = \int_{-\infty}^{0} [g(S_L(x)) - 1]\,dx + \int_0^\infty g(S_L(x))dx = \int_{-\infty}^{0} (1-1)dx$$
$$+ \int_0^{q_\alpha} 1dx + \int_{q_\alpha}^\infty \frac{S_L(x)}{1-\alpha}dx = q_\alpha + \frac{1}{1-\alpha}\int_{q_\alpha}^\infty S_L(x)dx.$$

Zřejmě pokřivující funkce (2.13) udává hodnoty shodné s vyjádřením (2.4). Ukázali jsme tedy, že funkce CVaR a VaR jsou pokřivené rizikové míry.
V úvodu této podkapitoly jsme zmínili, že za jistých okolností se SRM a pokřivené rizikové míry rovnají. Využijeme vztahu popsaném v [8] a uvedeme následující větu.

Věta 7. *Nechť L je náhodná veličina se spojitou distribuční funkcí. Nechť ϕ je po částech spojité přípustné rizikové spektrum pro náhodnou veličinu $-L$ tak, že $M_\phi(-L)$ je konečné. Pak platí, že $\rho_g(L) \equiv M_\phi(-L)$ je pokřivená riziková míra s konkávní pokřivující funkcí splňující $g'(u) = \phi(u)$.*

Důkaz. Uvažujme náhodnou veličinu $-L$ se spektrální rizikovou mírou $M_\phi(-L) = -\int_0^1 \phi(u)F_{-L}^{-1}(u)du$. Označíme $\phi = g'$. Pak jednoduchou transformací $u = F_{-L}(x)$ dostáváme následující

$$M_\phi(-L) = -\int_0^1 \phi(u)F_{-L}^{-1}(u)du = -\int_{-\infty}^\infty \phi\left(F_{-L}(x)\right) f_{-L}(x)xdx,$$

kde $f_{-L}(x)$ je hustota náhodné veličiny $-L$. Přitom platí

$$M_\phi(-L) = -\int_{-\infty}^\infty xd\tilde{g}(x), \tag{2.14}$$

kde používáme $\tilde{g} = g \circ F_{-L}(x)$. Rozpisem levé strany vzorce (2.14) dostáváme následující

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty xd\tilde{g}(x) &= \int_{-\infty}^0 xd\tilde{g}(x) + \int_0^\infty xd\tilde{g}(x) \\
&= -\int_{-\infty}^0 d\tilde{g}(x)\int_x^0 ds + \int_0^\infty d\tilde{g}(x)\int_0^x ds \\
&= -\int_{-\infty}^0 ds\int_{-\infty}^s d\tilde{g}(x) + \int_0^\infty ds\int_s^\infty d\tilde{g}(x) \\
&= -\int_{-\infty}^0 \tilde{g}(s)ds + \int_0^\infty (1-\tilde{g}(s))ds
\end{aligned}$$

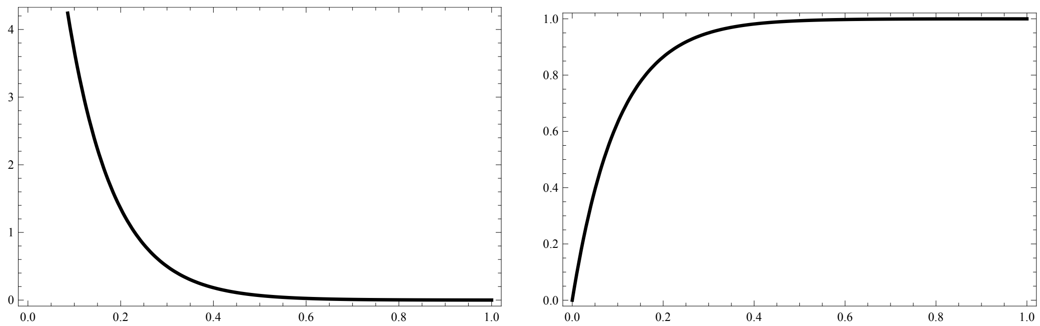
ve třetí rovnosti jsme použili Fubiniho větu a ve čtvrté rovnosti jsme využili faktu, že $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Nyní označíme $S_L(x) = P(L \geq x)$. Díky spojitosti platí

$$F_{-L}(x) = P(-L \leq x) = P(L \geq -x) = S_L(-x).$$

Na základě předchozí rovnosti a s použitím substituce $x = -t$ dostáváme, že

$$\int_{-\infty}^\infty xd\tilde{g}(x) = -\int_{-\infty}^0 \left(g\left(S_L(t)\right) - 1\right)dt - \int_0^\infty g\left(S_L(t)\right)dt = -\rho_g(L).$$

□



(a) $\phi_{10}(u) = \frac{10e^{-10x}}{1-e^{-10}}$ (b) $g_{10}(u) = -\frac{e^{10-10x}}{e^{10}-1} + 1.00005$

Obrázek 2.2: Funkce použité v příkladu pro konkrétní volbu parametru $k = 10$.

K této větě uvedeme demonstrační příklad, kde použijeme modifikaci pro přípustné rizikové spektrum z příkladu na konci kapitoly o spektrálních rizikových mírách.

Příklad. Nechť L je náhodná veličina označující rozdělení ztrát portfolia taková, že $L \sim N(0,1)$. Pak pro náhodnou veličinu $-L$ uvažujme funkci ve tvaru

$$\phi_k(x) = \frac{ke^{-kx}}{1-e^{-k}}. \tag{2.15}$$

Tato funkce je pro $k > 0$ přípustné rizikové spektrum ve smyslu poznámky za definicí 2.6. Stejně jako v předchozím příkladě i zde platí, že čím je parametr k volen větší, tím větší je investorova averze k riziku. Za parametr k zde budeme volit stejné hodnoty jako dříve tj. $k = 5$ a $k = 10$.

Na základě věty 7 označíme $g'_k(u) = \phi_k(u)$ tak, aby funkce $g_k(u)$ vyhovovala definici 2.8. Tedy pro naší konkrétní volbu parametru dostáváme

$$g_5(u) \doteq -\frac{e^{5-5u}}{e^5-1} + 1.00678\,, \quad g_{10}(u) \doteq -\frac{e^{10-10x}}{e^{10}-1} + 1.00005\,.$$

Dosazením do příslušných rovnic pro spektrální rizikové míry pak pro pokřivené rizikové míry dostáváme shodné výsledky jako u příkladu uvedeném na konci kapitoly o spektrálních rizikových mírách. Na obrázku 2.2 jsou uvedené právě použité funkce pro parametr $k = 10$.

2.5 Hodnota v riziku - VaR

Tato část je věnována nejpoužívanější rizikové míře, a to hodnotě v riziku. Tuto rizikovou míru jsme již uvedli v definici 2.3 a ukázali některé její vlastnosti jako například, že VaR náleží do pokřivených rizikových měr a naopak, že nesplňuje požadavky pro spektrální rizikové míry.

Na začátku kapitoly koherentních rizikových měr jsme uvedli, že VaR nesplňuje důležitý axiom subaditivity 2.1. Předtím než budeme demonstrovat, že VaR není subaditivní, ukážeme vlastnosti, které má s koherentními rizikovými mírami společné. S využitím vzorce (2.2) dostáváme následující vlastnosti:

Axiom 2.2: mějme náhodnou veličinu L a $k \in \mathbb{R}$ pak pro $\alpha \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(L+k) &= \inf\{l : P(L+k > l) \le 1-\alpha\} = \inf\{l : P(L > l-k) \le 1-\alpha\} \\ &= \inf\{l-k+k : P(L > l-k) \le 1-\alpha\} \\ &= \inf\{z+k : P(L < z) \le 1-\alpha\}. \end{aligned}$$

Axiom 2.3: pro náhodnou veličinu $\hat{L} = nL$ a pro $\alpha \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned} VaR_\alpha(\hat{L}) &= \inf\{l : P(nL > l) \le 1-\alpha\} = \inf\left\{l : P\left(L > \frac{l}{n}\right) \le 1-\alpha\right\} \\ &= \inf\left\{\frac{l}{n}n : F_L\left(\frac{l}{n}\right) \ge \alpha\right\} = \inf\{kn : F_L(k) \ge \alpha\}, \end{aligned}$$

kde F_L je distribuční funkce náhodné veličiny L.
Axiom 2.4: pro náhodné veličiny L_1, L_2 takové, že platí $L_1 \le L_2$, a pro $\alpha \in (0,1)$ platí

$$\begin{aligned} P(L_2 > l) \ge P(L_1 > l) &\Rightarrow P(L_2 \le l) \le P(L_1 \le l) \\ &\Rightarrow \inf\{l : F_{L_2}(l) \ge \alpha\} \ge \inf\{l : F_{L_1}(l) \ge \alpha\}, \end{aligned}$$

kde F_{L_1}, F_{L_2} jsou distribuční funkce příslušných náhodných veličin.
Axiom 2.1: abychom ukázali, že VaR tento axiom nesplňuje, použijeme ideu příkladu z [9].

Příklad. Uvažujme 4 dluhopisy (D_1,D_2,D_3,D_4) takové, že cena každého dluhopisu je 5000, v době splatnosti dluhopisu dluhopis vyplatí 5500, každý dluhopis defaultuje s pravděpodobností 0.04 (v takovém případě dluhopis nevyplatí nic. Dluhopisy jsou navzájem nezávislé).

Označíme Y_i pro $i \in \{1,2,3,4\}$ pravděpodobnost defaultu i-tého dluhopisu. Tedy $Y_i \sim Alt(0.04)$. Pak rozdělení ztrát příslušného i-tého dluhopisu lze zapsat jako $L_i = 5000Y_i - 500(1-Y_i) = 4500Y_i - 500$.

Mějme dvě portfolia tvořené právě čtyřmi dluhopisy. Portfolio A je tvořené pouze dluhopisem D_1 a portfolio B obsahuje všechny čtyři dluhopisy. Pro $\alpha = 0.95$ platí

A:

$$L_A = 4L_1 \overset{Axiom\ 2.3}{\Rightarrow} 4VaR_{0.95}(L_1) = 4(-500) = -2000.$$

Vidíme, že $VaR_{0.95}(L_A) < 0$, tedy na základě takovéhoto hodnocení je tato pozice akceptovatelná.

B:

$$\begin{aligned} L_B &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 4500\sum_{i=1}^{4} Y_i - 2000 \\ &\overset{Axiom\ 2.2,\ 2.3}{\Rightarrow} 4500VaR_{0.95}(\sum_{i=i}^{4} Y_i) - 2000. \end{aligned}$$

Víme, že součet čtyř nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením s parametrem 0.04 má binomické rozdělení s parametry $(4, 0.04)$. Tedy kvantil odpovídající $VaR_{0.95}$ z binomického rozdělení s uvedenými parametry je roven 1. Tedy

$$VaR_{0.95}(L_B) = 4500 - 2000 = 2500.$$

Protože $VaR_{0.95}(L_B) > 0$, je nutné k této pozici dodat dodatečný kapitál, aby tato pozice byla akceptovatelná.

Za definicí 2.5 jsme zmínili, že hodnota VaR udává pouze hodnotu ztráty, kterou by finanční instrument neměl při dané hladině spolehlivosti překročit. Následující ukázkový příklad demonstruje, jak tato omezená informace o finančním instrumentu může být zásadní při rozhodování o investici. Tato vlastnost bývá často součástí kritiky VaRu.

Příklad. Uvažujme dva finanční instrumenty D_1,D_2, jejichž očekávané ztráty jsou uvedeny v tabulkách.

D_1 :

80%	15%	4%	1%
−100	−1	100	10000

D_2 :

90%	5%	5%
−1000	−1	40

Evidentně instrument D_2 je pro potencionálního investora výhodnější, neboť oproti D_1 poskytuje s vyšší pravděpodobností vyšší výnos. U instrumentu D_1 s pravděpodobností 1% hrozí ztráta 10000. Pokud bychom nastavili hladinu spolehlivosti $\alpha = 0.95$, pak výsledné hodnoty VaR jsou následující

$$VaR_{0.95}(D_1) = VaR_{0.95}(D_2) = -1.$$

Tedy čistě na základě VaRu bychom dané finanční instrumenty mohli hodnotit jako stejně rizikové.

V [9] lze nahlédnout, jak se chová hodnota v riziku, pokud máme náhodnou veličinu popisující rozdělení ztrát pocházející z nějakého normálního rozdělení, tedy uvedeme obdobné tvrzení jako tvrzení 5 pro CVaR.

Tvrzení 8. *Nechť ztráta $L \sim N(\mu, \sigma^2)$ pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Pro pevné $\alpha \in (0, 1)$ platí*

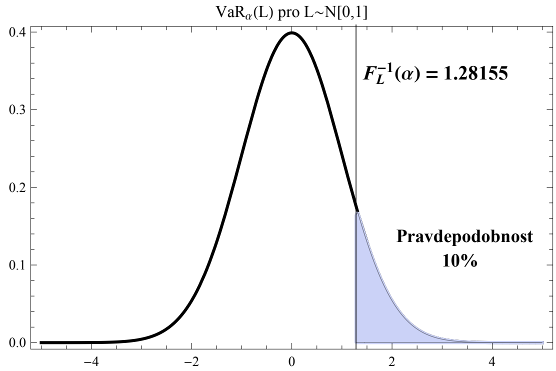
$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha),$$

kde ϕ značí distribuční funkci normovaného normálního rozdělení.

Důkaz. Označíme $K \sim L(0,1)$, pak platí $L = \mu + \sigma K$ a tedy

$$VaR_\alpha(L) = VaR_\alpha(\mu + \sigma K) \overset{Axiom\ 2.2,\ 2.3}{=} \mu + \sigma VaR_\alpha(K).$$

To je požadované tvrzení, neboť platí $VaR_\alpha(K) = \Phi^{-1}(\alpha)$. □



Obrázek 2.3: Rozdělení ztrát pro $L \sim N(0,1)$ s vyznačeným VaR na hladině spolehlivosti $\alpha = 0.9$.

V právě uvedeném tvrzení používáme VaR z náhodné veličiny z normovaného náhodného rozdělení. Na obrázku 2.3 je znázornění jak vypadá hodnota v riziku z takovéto náhodné veličiny. V tomto případě je hladina spolehlivosti rovna $\alpha = 0.9$. Za těchto podmínek je VaR přibližně roven hodnotě 1.28155.

Hodnotu v riziku lze pro daný finanční instrument počítat i z historických dat, pokud jsou dostupná. Tento neparametrický přístup v [6] je vhodné použít, pokud rozdělení ztrát finančního instrumentu není známé.

Pokud určujeme hodnotu v riziku neparametrickým způsobem, pak předpokládáme, že máme k dispozici napozorovaná data z určitého předem daného období. Tedy pokud uvažujeme období délky T, pak množinu napozorovaných dat označíme $L = \{L_1, L_2, \cdots, L_T\}$. Prvky z množiny L setřídíme vzestupně, tedy $L_{1_i} \leq L_{2_i} \leq \cdots \leq L_{T_i}$.

Pokud uvažujeme hladinu spolehlivosti na úrovni $\alpha \in (0,1)$, pak určíme výběrový α-kvantil jako

$$VaR_\alpha(L) = \begin{cases} L_{(\lfloor T\alpha \rfloor + 1)_i}, & T\alpha \notin \mathbb{N} \\ \frac{1}{2}\left(L_{(T\alpha)_i} + L_{(T\alpha+1)_i}\right), & T\alpha \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Kapitola 3

Příklad s reálnými daty

V této kapitole ukážeme použití rizikových měr uvedených v předchozí kapitole na reálná data. Tato data jsme získali pomocí programu *Wolfram Mathematica 9*.

Konkrétně se v této kapitole budeme zabývat portfoliem, které je složené ze dvou aktiv. Jedná se o akcie společností GE Capital (GE) a First Solar, Inc. (FSLR). Dané výpočty jsou vztaženy na vývoj akcií v jednom kalendářním roce, zde uvažujeme vývoj uvedených akcií v roce 2014, tedy od 1. ledna 2014 do 31. prosince 2014 (celkem se jedná o 252 obchodních dnů). Na obrázku 3.1 lze detailně nahlédnout, jak se dané akcie vyvíjely v čase.

Nyní si na takovémto portfoliu předvedeme, jak vypadají rizikové míry uvedené v předchozí kapitole. V tomto příkladu budeme uvažovat hladinu spolehlivosti na úrovni $\alpha = 0.95$. Jako první uvedeme hodnotu v riziku.

Pro výpočet hodnoty v riziku použijeme vzorec (2.16). Na základě tohoto vzorce již vypočteme hledané hodnoty:

GE Capital:

$$VaR_\alpha(L_{GE}) = 0.4,$$

First Solar, Inc.:

$$VaR_\alpha(L_{FSLR}) = 2.86.$$

Tento příklad nám dává znovu možnost zdůraznit fakt, který jsme v tomto textu již několikrát zmínili, a to že VaR porušuje axiom 2.1, a to pokud uvažujeme napozorovanou ztrátu sloučeného portfolia, ne každé akcie zvlášť. Pak hodnota v riziku takového portfolia je rovna

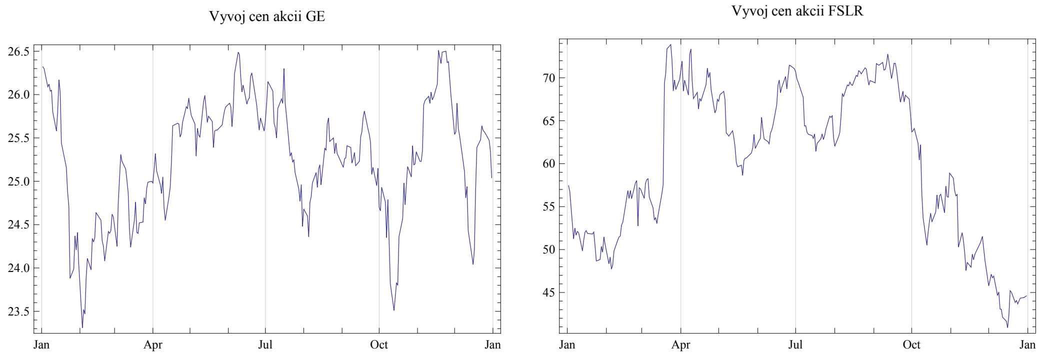
$$VaR_\alpha(L_{GE+FSLR}) = VaR_\alpha(L_{GE} + L_{FSLR}) = 3.28 > 2.86 + 0.4 = 3.26.$$

Tedy rozdělením portfolia je velikost kapitálu, který je nutný dodat k dané pozici nižší, než je tomu u sloučeného kapitálu.

Nyní pro uvedené portfolio spočteme podmíněnou hodnotu v riziku i pro tuto rizikovou míru využijeme právě vypočtené hodnoty pro VaR a s použitím vzorce (2.5) ihned získáme CVaR pro hladinu spolehlivosti $\alpha = 0.95$. Tedy

GE Capital:

$$CVaR_\alpha(L_{GE}) = \mathrm{E}(L_{GE} | L_{GE} \geq VaR_\alpha(L_{GE})) = 0.516923,$$



(a) (b)

Obrázek 3.1: Vývoj cen akcií v roce 2014 pro společnosti (a) GE Capital a (b) First Solar, Inc.

First Solar, Inc.:

$$CVaR_\alpha(L_{FSLR}) = \mathrm{E}(L_{FSLR}|L_{FSLR} \geq VaR_\alpha(L_{FSLR})) = 4.10615.$$

Z uvedených výpočtů zřejmě platí již dříve zmíněný fakt, že $VaR_\alpha(L) \leq CVaR_\alpha(L)$. Dále spočteme podmíněnou hodnotu v riziku sloučeného portfolia a srovnáme s právě vypočtenými hodnotami $0.516923 + 4.10615 = 4.62307$.

$$CVaR_\alpha(L_{GE+FSLR}) = CVaR_\alpha(L_{GE} + L_{FSLR}) = 4.62308 \leq 4.62307.$$

To jsme ve spojitosti s větou 4 očekávali.

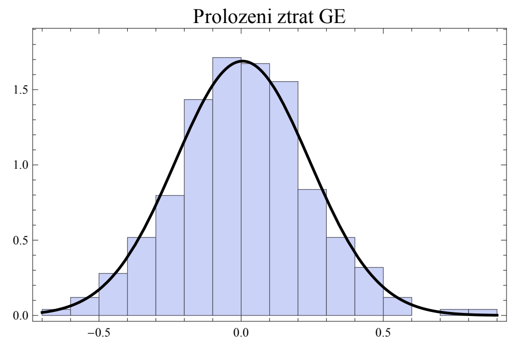
Pokud bychom chtěli hodnotit rizikovost portfolia pomocí spektrálních rizikových měr nebo pomocí pokřivených rizikových měr, pak je vhodné pracovat se spojitými rozděleními. Proto opět za pomoci softwaru *Wolfram Mathematica 9* zjistíme příslušné parametry pro normální rozdělení a t-rozdělení takové, že nejlépe prokládají příslušné ztráty daných akcií. Na obrázku 3.2 jsou zobrazeny histogramy jednotlivých ztrát akcií i ztrát sloučeného portfolia společně s příslušnou hustotou.

Abychom ověřili, že proložení příslušnými rozděleními na obrázku 3.2 odpovídá skutečnému rozdělení ztrát, otestujeme uvedená data a příslušná rozdělení za pomoci Kolmogorovova-Smirnova testu. Tento test pro každé proložení testuje, zda empirická distribuční funkce ztrát se příliš neliší od distribuční funkce, která ji prokládá. Tedy mějme nulovou hypotézu $H_0 : F_L(x) = F_0(x)$ proti alternativě $H_1 : F_L(x) \neq F_0(x)$, kde F_0 je distribuční funkce příslušná hustotě, která prokládá ztráty. Protože daná data pocházejí ze sledovaného období jednoho roku, máme dostatek pozorování, abychom daný test mohli použít.

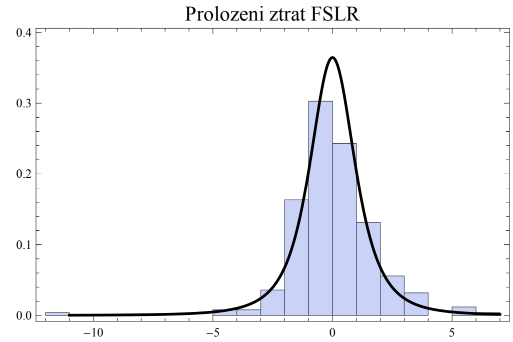
Pro hladinu testu $\alpha = 0.05$ dostáváme na základě Kolmogorovova-Smirnova testu tyto p-hodnoty:

	GE	FSLR	sloucene
$p-$ hodnota	0.8178	0.5230	0.1739

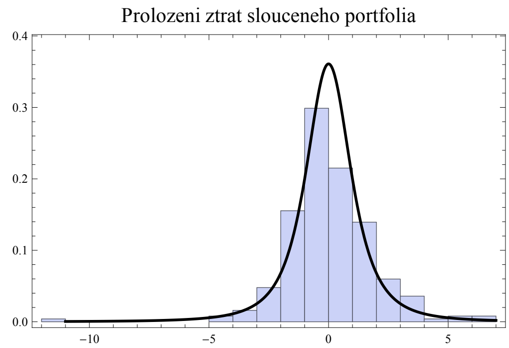
Z uvedené tabulky je patrné, že na základě tohoto testu nelze zamítat nulovou hypotézu ve prospěch alternativy. Tedy využijeme proložení hodnot k následujícím výpočtům.



(a)



(b)



(c)

Obrázek 3.2: Proložení ztrát daných akcií normálním rozdělením a t-rozdělením. (a) jsou proložená data akcií GE Capital, kde parametry pro normální rozdělení jsou $\mu = 0.0051$, $\sigma = 0.2362$. (b) jsou proložená data akcií First Solar, Inc., kde počet stupňů volností v t-rozdělení je $\nu = 2.71$. (c) jsou proložené ztráty sloučeného portfolia, kde počet stupňů volnosti v t-rozdělení je $\nu = 2.44$.

Pro výpočet SRM z těchto finančních instrumentů zvolíme opět funkci (2.10) vycházející z užitkové funkce. Opět danou funkci budeme uvažovat pro dvě volby parametru pro $k = 10$ a $k = 15$. Již víme, že tato funkce je přípustné rizikové spektrum. Označíme $\hat{L}_{GE} \sim N(0.0051, 0.0558)$, $\hat{L}_{FSLR} \sim t_{2.71}$ a $\hat{L}_{GE+FSLR} \sim t_{2.44}$.

GE Capital:

$$M_\phi^k(\hat{L}_{GE}) = \int_0^1 \phi_k(u) F^{-1}_{\hat{L}_{GE}}(u) du,$$

$k = 10$: $M_\phi^{10}(\hat{L}_{GE}) = 0.360389$,

$k = 15$: $M_\phi^{15}(\hat{L}_{GE}) = 0.410349$.

First Solar, Inc. :

$$M_\phi^k(\hat{L}_{FSLR}) = \int_0^1 \phi_k(u) F^{-1}_{\hat{L}_{FSLR}}(u) du,$$

$k = 10$: $M_\phi^{10}(\hat{L}_{FSLR}) = 2.66298$,

$k = 15$: $M_\phi^{15}(\hat{L}_{FSLR}) = 3.24743$.

Složené: $k = 10$: $M_\phi^{10}(\hat{L}_{GE+FSLR}) = 2.91811$,

$k = 15$: $M_\phi^{15}(\hat{L}_{GE+FSLR}) = 3.59613$.

Opět je zde demonstrováno, že SRM splňují axiom 2.1 pro přípustné rizikové spektrum. Protože platí

$k = 10$:

$$\begin{aligned} M_\phi^{10}(\hat{L}_{GE}) + M_\phi^{10}(\hat{L}_{FSLR}) &= 0.360389 + 2.66298 \\ &= 3.02367 \geq 2.91811 = M_\phi^{10}(\hat{L}_{GE+FSLR}), \end{aligned}$$

$k = 15$:

$$\begin{aligned} M_\phi^{15}(\hat{L}_{GE}) + M_\phi^{15}(\hat{L}_{FSLR}) &= 0.410349 + 3.24743 \\ &= 3.65778 \geq 3.59613 = M_\phi^{15}(\hat{L}_{GE+FSLR}). \end{aligned}$$

Při aplikaci pokřivených rizikových měr na tento případ budeme postupovat dle věty 7 a příkladu za touto větou následujícím. Uvažujeme funkci (2.15), zde budeme tuto funkci aplikovat pouze pro jeden parametr, a to $k = 15$.
Opět budeme uvažovat funkci

$$\phi_{15}(x) = \frac{15e^{-15x}}{1 - e^{-15}}.$$

Na základě věty 7 uvažujme funkci

$$g_{15}(x) = 1 - \frac{e^{15-15x}}{e^{15} - 1}.$$

Tato funkce je pokřivující funkce dle definice 2.8. Pak lze spočítat pokřivenou rizikovou míru

GE Capital:

$$\rho_{g_{15}}(L_{GE}) = \int_{-\infty}^{0} g_{15}(S_{\hat{L}_{GE}}(x)) - 1dx + \int_{0}^{\infty} g_{15}(S_{\hat{L}_{GE}}(x)dx = 0.410349.$$

First Solar, Inc.:

$$\rho_{g_{15}}(L_{FSLR}) = \int_{-\infty}^{0} \left(g_{15}(S_{\hat{L}_{FSLR}}(x)) - 1\right) dx + \int_{0}^{\infty} g_{15}(S_{\hat{L}_{FSLR}}(x)dx = 3.24743.$$

Složené:

$$\begin{aligned} \rho_{g_{15}}(L_{GE+FSLR}) &= \int_{-\infty}^{0} \Big(g_{15}(S_{\hat{L}_{GE+FSLR}}(x)) - 1\Big) dx + \int_{0}^{\infty} g_{15}(S_{\hat{L}_{GE+FSLR}}(x))dx \\ &= 3.59613. \end{aligned}$$

Opět je zde demonstrovaná vlastnost z věty 7, totiž axiom 2.1 je splněn. Protože platí

$$\rho_{g_{15}}(L_{GE}) + \rho_{g_{15}}(L_{FSLR}) = 0.410349 + 3.24743 = 3.65778 \geq 3.59613 = \rho_{g_{15}}(L_{GE+FSLR}).$$

Závěr

V této práci bylo hlavním cílem zavést obecný pojem rizikové míry. Tuto míru jsme v obecném smyslu zavedli a dále ukázali speciální rizikové míry, se kterými se na finančních trzích pracuje. Zejména byl kladen důraz na (podmíněnou) hodnotu v riziku. U nichž jsme ukázali jejich výhody a nevýhody. Pro hodnotu v riziku jsme demonstrovali, jakým způsobem narušuje naše úvahy absence vlastnosti subaditivity, na druhou stranu jsme ukázali jednoduchost ve výpočtu této rizikové míry. Podmíněná hodnota v riziku naopak byla zavedena jako vylepšení hodnoty v riziku za účelem napravit hlavní nedostatek hodnoty v riziku. U podmíněné hodnoty v riziku jsme také ukázali, že patří mezi hlavní skupinu rizikových měr, a to mezi koherentní rizikové míry.

Tato skupina rizikových měr prostupovala i do dalších námi uvedených skupin. Konkrétně mezi spektrální rizikové míry a pokřivené rizikové míry (distorted risk measures). U těchto dvou skupin jsme ukázali zajímavé spojitosti s ostatními rizikovými mírami. Mezi hlavní takové vlastnosti patří to, že za jistých okolností jsou pokřivené rizikové míry a spektrální rizikové míry shodné (tuto vlastnost jsme dokázali a následně demonstrovali na příkladu v kapitole o pokřivených rizikových mírách). Podobně byla vyšetřována shoda spektrálních a koherentních rizikových měr (tato vlastnost je také dokázaná a demonstrována na podmíněné hodnotě v riziku).

Pro praktické znázornění popsaných vlastností jednotlivých rizikových měr je v této práci zahrnuta aplikace uvedených rizikových měr na reálná data zaznamenávající vývoj vybraných akcií na finančním trhu. Přičemž jsme získali hodnoty, které odpovídali popsané teorii.

Seznam použité literatury

[1] C. Acerbi. *Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion.* Journal of Banking & Finance 26, 2002, p. 1505 - 1518.

[2] C. Acerbi, D. Tasche. *On the Coherence of Expected Shortfall.* Journal of Banking & Finance 26, 2002, p. 1487 – 1503.

[3] L. Ambrož. *Měření rizika ve financích.* Ekopress, Praha 2011. ISBN 978-80-86929-76-7.

[4] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath. *Coherent Measures of Risk.* Mathematical Finance, Vol. 9, No. 3, 1998, p. 203-228.

[5] K. Dowd, J. Cotter, G. Sorwar. *Spectral Risk Measures: Properties and Limitations.* Journal of Financial Services Research 34, 2008, p. 61-75.

[6] J. Dupačová, J. Hurt, J. Štěpán. *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers, 2002. ISBN 1-4020-0840-6.

[7] D. Guégan, B. Hassani. *Distortion Risk Measure or the Transformation of Unimodal Distributions into Multimodal Functions.* Springer, New York 2014.

[8] H. Gzyl, S. Mayoral. *On a Relationship Between Distorted and Spectral Risk Measures.* MPRA Paper, University Library of Munich, Germany 2006.

[9] A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts. *Quantitative Risk Management: concepts, techniques, and tools.* Princeton University Press, Princeton and Oxford 2005. ISBN 0-691-12255-5.