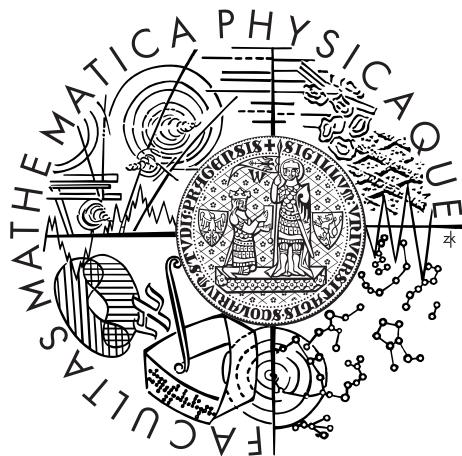


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Matěj Nekvinda

Některé modifikace modelů ARCH pro finanční časové řady

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Rád bych poděkoval Prof. Ciprovi za odborné vedení této práce, cenné rady, které mi mnohokrát pomohly, a celkovou spolupráci, bez níž by tato práce nemohla vzniknout.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Některé modifikace modelů ARCH pro finanční časové řady

Autor: Matěj Nekvinda

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se zabýváme modelováním finančních časových řad, a především jejich volatility, metodami odvozenými od modelu ARCH. Nejdříve uvádíme obecné vlastnosti finančních časových řad, následují modifikace modelu ARCH, a to konkrétně GARCH, EGARCH, GJR-GARCH a stručněji GARCH-M, IGARCH, FIGARCH a QGARCH, vhodné pro jejich modelování. U jednotlivých modelů je posané jejich chování, které zpravidla vystihuje určité vlastnosti finančních časových řad. Dále je zmíněn postup při praktické analýze finančních časových řad a také je provedena demonstrace použití modelů GARCH, EGARCH a GJR-GARCH pro modelování řady hodnot akciového indexu FTSE 100 spolu s diagnostickými testy a predikcí.

Klíčová slova: finanční časová řada, podmíněná heteroskedasticita, modelování volatility, GARCH

Title: Some modifications of models ARCH for financial time series

Author: Matěj Nekvinda

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This work deals with modelling time series, especially their volatility, by methods based on the ARCH model. In the beginning, we describe the general features of financial time series, afterwards we focus on the ARCH model modifications. The described modifications are GARCH, EGARCH, GJR-GARCH and briefly GARCH-M, IGARCH, FIGARCH and QGARCH. Along with the models, there is a description of their behaviour, which frequently reflects some features of financial time series. We also mention the process of practical financial time series analysis. In the end, we demonstrate the application of GARCH, EGARCH and GJR-GARCH models for modelling values of FTSE 100 index together with diagnostic tests and prediction.

Keywords: financial time series, conditional heteroskedasticity, volatility modeling, GARCH

Obsah

1	Úvod	2
2	Finanční časové řady	3
3	Model GARCH	5
3.1	GARCH(m,s)	5
3.2	GARCH(1,1)	6
4	Modifikace modelu GARCH	9
4.1	EGARCH	9
4.2	GJR-GARCH (Threshold GARCH)	11
4.3	GARCH-M	12
4.4	IGARCH	13
4.5	FIGARCH	14
4.6	QGARCH	14
5	Praktická analýza finanční časové řady pomocí modelů ARCH	15
6	Závěr	26
	Literatura	27
	Seznam obrázků	28
	Seznam tabulek	29

Kapitola 1

Úvod

Tématem této bakalářské práce jsou modifikace modelů ARCH sloužící pro analýzu finančních časových řad, a to jak jejich úrovně, tak především jejich volatility. Toto téma je v současném světě velmi aktuální především pro lidi, kteří působí na finančních trzích. Základy autoregresním modelům s podmíněnou heteroskedasticitou (ARCH) položil Engle (1982), další modifikace těchto modelů vznikaly ke konci 80. a především v 90. letech minulého století. Jedná se tedy o poměrně mladý matematický obor a modelování finančních časových řad touto metodou zatím v podstatě nebylo překonáno.

V této práci si nejdříve přiblížíme obecné vlastnosti finančních časových řad, jako jsou podmíněná heteroskedasticita, shlukování volatility, pákový efekt a další. Následně popíšeme modely GARCH, především model prvního rádu GARCH(1,1), který je v praxi nejpoužívanější. Ukážeme, které vlastnosti finančních časových řad tento model vystihuje, popíšeme postup při praktickém použití tohoto modelu spolu s testy pro diagnostiku modelu a zmíníme jeho nedostatky. Jako reakci na absenci některých důležitých vlastností tohoto modelu představíme především modifikace EGARCH, GJR-GARCH, stručněji potom několik dalších, které tyto nedostatky různými způsoby řeší.

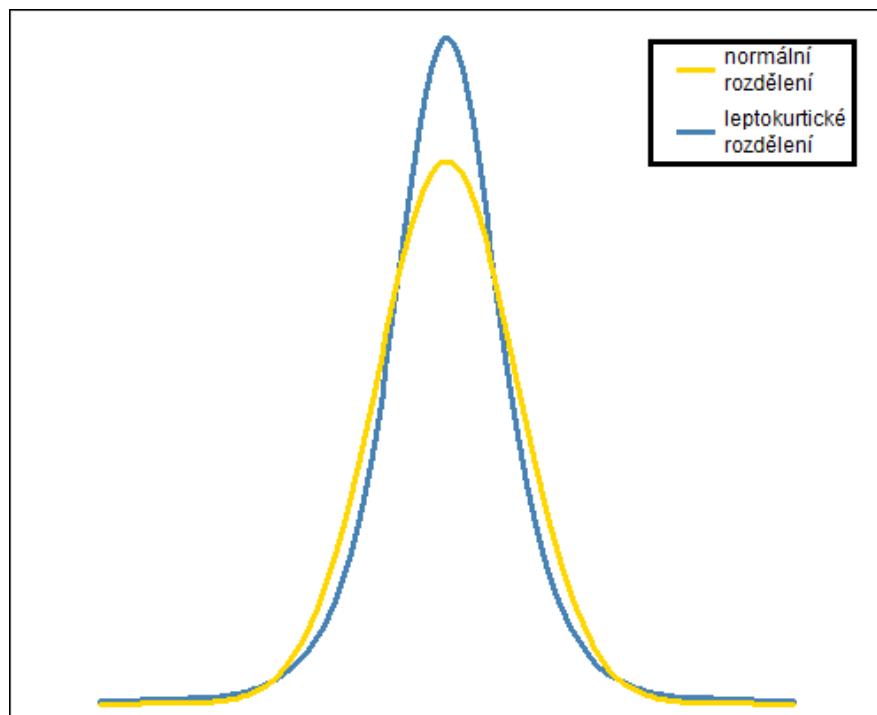
Na závěr použijeme modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) k analýze indexu FTSE 100 Londýnské burzy z let 2000–2004, respektive jeho denních logaritmických výnosů a modelování jejich volatility. Následně těmito modely předpovídáme úroveň a volatilitu indexu FTSE 100 pro rok 2005 a výsledky porovnáme se skutečnými hodnotami. Analýzu provedeme v programu EViews7 a doplněníme ji výstupy z tohoto programu a vhodnými grafy.

Kapitola 2

Finanční časové řady

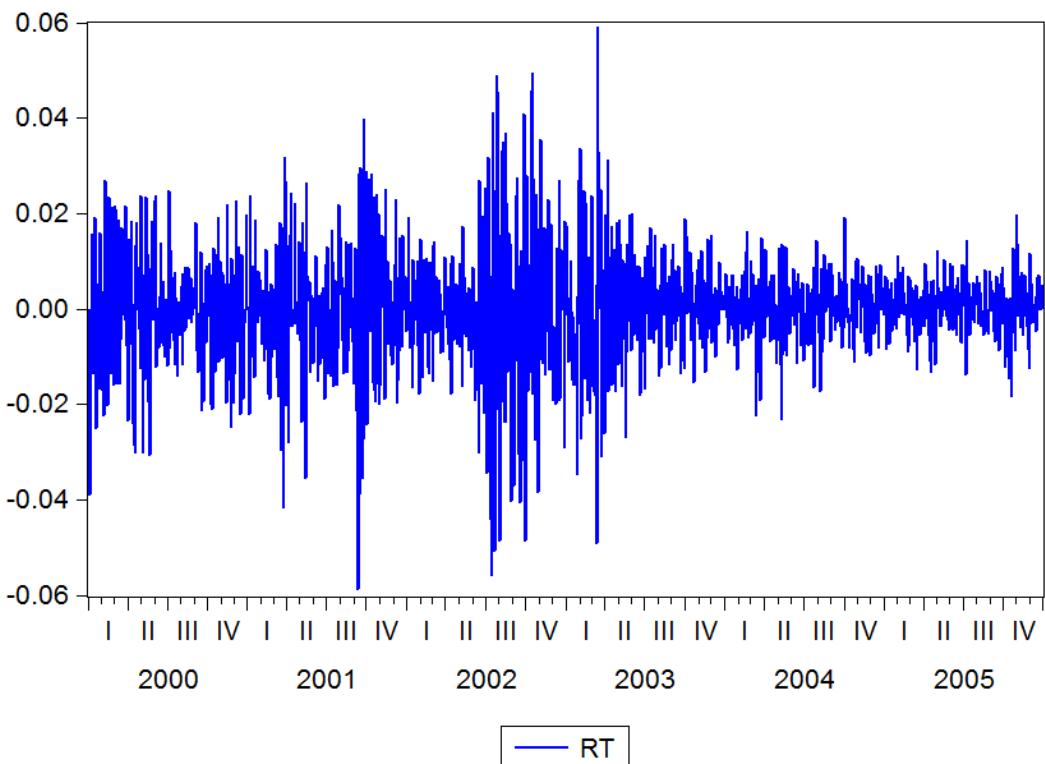
Obecně jsou časové řady jakékoli posloupnosti pozorování uspořádané v čase od minulosti do přítomnosti. Pokud jsou data, která řady sledují, finančního charakteru, mluvíme o časových řadách finančních. Tyto řady mají některé specifické vlastnosti (viz např. Cipra (2008)):

- **nelinearita:** vztahy ve financích jsou často nelineární, tedy na jejich popis je v mnoha ohledech lepší použít nelineární model;
- **leptokurtické rozdělení:** míra zisku finančních aktiv mívá rozdělení, které je oproti normalnímu špičatější, tj. od střední hodnoty se hustota snižuje strměji, a má těžší konce, tzn. dále od střední hodnoty je hustota naopak větší, přičemž hustota a rozptyl zůstává stejný; důležitou charakteristikou takového rozdělení je kladný koeficient špičatosti;



Obrázek 2.1: Porovnání normálního a leptokurtického rozdělení

- **podmíněná heteroskedasticita** (*conditional heteroskedasticity*): volatilita (směrodatná odchylka) finančních časových řad je proměnlivá v čase;
- **shlukování volatility** (*volatility clustering/bursting*): volatilita má tendenci se shlukovat do období s vysokou a nízkou volatilitou, tzn. větší změny v míře zisku bývají spíše následovány velkými změnami a naopak;
- **pákový efekt** (*leverage effect*): jde o tendenci volatility reagovat jinak na cenový nárůst a pokles; růst ceny se z pravidla projevuje nižším zvětšením volatility než srovnatelný cenový pokles.



Obrázek 2.2: Logaritmická míra výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2005

V analýze finančních časových řad se snažíme nacházet modely, které by co nejlépe dokázaly podchytit jejich výše zmíněné specifické vlastnosti. Důležité je přitom modelování a předpovídání volatility, která je v současné době základní mírou rizikovosti finančních aktiv (můžeme ji využít při tvorbě optimálního portfolia či analýze hodnoty v riziku – VaR).

Kapitola 3

Model GARCH

V současné době jedním z nejlepších nástrojů k modelování finančních časových řad a jejich volatility jsou modely typu GARCH (z anglického *generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, tedy zobecněná autoregresní podmíněná heteroskedasticita). Obecný model GARCH navrhl Bollerslev (1986), přičemž vyšel z modelu ARCH prezentovaného Englem (Engle, 1982). O tomto tématu později pojednává též Arlt a Arltová (2003) a Cipra (2008). GARCH modely vychází ze dvou předpokladů:

- modely finančních řad mají v čase proměnnou volatilitu (jsou tzv. heteroskedastické);
- volatilita závisí na druhých mocninách minulých přepovědních chyb (odchylek od podmíněné střední hodnoty) e_t^2 a druhých mocninách svých předchozích hodnot (neboli zpožděných podmíněných rozptylů) σ_t^2 .

3.1 GARCH(m,s)

Na základě těchto podmínek můžeme definovat model GARCH(m,s) jako

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.1)$$

kde y_t je hodnota řady v čase t , μ_t je střední hodnota řady v čase t , ϵ_t jsou nezávislé stejně rozdělené (iid) náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, které mají normální, t - nebo GED rozdělení. Přitom α_i, β_j jsou koeficienty, které musí splňovat

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) < 1, \quad (3.2)$$

kde pro $i < m$ klademe $\alpha_i = 0$ a pro $j > s$ klademe $\beta_j = 0$. Poslední nerovnost je zároveň postačující podmínkou pro existenci rozptylu veličin e_t , který má tvar

$$\text{var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i)}. \quad (3.3)$$

Jak se k tomuto tvaru dostaneme, bude dále ukázáno na modelu GARCH(1,1).

Podmíněná střední hodnota μ_t může být modelována různým způsobem. Často jde o střední hodnotu, která odpovídá nějakému lineárnímu regresnímu modelu. Například pokud by μ_t odpovídala modelu AR(p), dostali bychom pro GARCH(m,s) tvar

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

3.2 GARCH(1,1)

V praxi se z modelů GARCH používá především model GARCH (1,1), na který se nyní zaměříme. Jeho tvar je zřejmě z předchozího

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \beta_1 \geq 0, \alpha_1 + \beta_1 < 1. \quad (3.4)$$

Nyní ukážeme, že **střední hodnota** veličin e_t je nulová

$$\mathbb{E}(e_t) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e_t | \Omega_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t \mathbb{E}(\epsilon_t)) = 0, \quad (3.5)$$

protože σ_t je zřejmě Ω_{t-1} měřitelná s nulovou střední hodnotou.

Pro **rozptyl** veličin e_t platí

$$\begin{aligned} \text{var}(e_t) &= \mathbb{E}(e_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e_t^2 | \Omega_{t-1})) = \mathbb{E}(\sigma_t^2) = \mathbb{E}(\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2) = \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \text{var}(e_{t-1}) + \beta_1 \text{var}(\sigma_{t-1}), \end{aligned}$$

navíc, protože $\text{var}(\sigma_{t-1}) = \text{var}(e_{t-1})$ a řada e_t je slabě stacionární, máme

$$\text{var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}. \quad (3.6)$$

Zde vidíme, že poslední podmínka vztahu (3.4) zaručuje, že tento rozptyl je kladné číslo. Navíc je to postačující podmínka pro stacionaritu řady e_t .

Nakonec ještě ukážeme tvar koeficientu **špičatosti** veličin e_t . Opět budeme předpokládat $\epsilon_t \sim N(0,1)$ a vyjdeme ze vztahu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e_t^4) &= E(E(e_t^4 | \Omega_{t-1})) = \mathbb{E}(\epsilon_t^4) \mathbb{E}(\sigma_t^4) = 3 \mathbb{E}((\sigma_t^2)^2) = 3 \mathbb{E}((\alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2)^2) = \\ &= 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \text{var}(e_{t-1}) + 2\alpha_0\beta_1 \text{var}(\sigma_{t-1}) + 2\alpha_1\beta_1 \mathbb{E}(e_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) + \alpha_1^2 \mathbb{E}(e_{t-1}^4) + \\ &\quad + \beta_1^2 \mathbb{E}(\sigma_{t-1}^4)), \end{aligned}$$

protože $\mathbb{E}(e_{t-1}^2 \sigma_{t-1}^2) = \frac{1}{3} \mathbb{E}(e_{t-1}^4)$ a $\mathbb{E}(\sigma_{t-1}^4) = \frac{1}{3} \mathbb{E}(e_{t-1}^4)$, s použitím (3.6) máme

$$\mathbb{E}(e_t^4) - 3\alpha_1^2 \mathbb{E}(e_{t-1}^4) - \beta_1^2 \mathbb{E}(e_{t-1}^4) - 2\alpha_1\beta_1 \mathbb{E}(e_{t-1}^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{(1 - (\alpha_1 + \beta_1))^2}.$$

Celkem dostaneme

$$\mathbb{E}(e_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{(1 - (\alpha_1 + \beta_1))^2(1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}, \quad (3.7)$$

a pro **koeficient špičatosti** e_t tedy platí

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}(e_t^4)}{(\text{var}(e_t))^2} - 3 = \frac{3(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2)}{1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} - 3 = \frac{6\alpha_1^2}{1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \geq 0 \quad (3.8)$$

za platnosti postačující podmínky $1 - 2\alpha_1^2 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 > 0$.

Pokud bychom chtěli použít metodu GARCH (1,1) na analýzu a predikci volatility finanční časové řady, postup by byl následující:

1. Odhad modelu:

Pro odhad parametrů modelů s podmíněnou heteroskedasticitou se obvykle používá metoda maximální věrohodnosti, protože použití metody nejmenších čtverců není z několika důvodů vhodné. Pro příslušnou hustotu platí vztah

$$f(e_1, \dots, e_n) = f(e_n|\Omega_{n-1}) \cdot \dots \cdot f(e_2|\Omega_1) \cdot f(e_1),$$

kde n je délka časové řady. Pokud máme $\epsilon_t \sim N(0,1)$, má (podmíněná) věrohodnostní funkce tvar

$$f_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right), \quad t = 2, 3, \dots, n,$$

přičemž zřejmě $e_t = y_t - \mu_t$. Hodnoty t začínají až od 2, protože podmiňujeme počáteční hodnotou e_1 . Logaritmická věrohodnostní funkce je tedy tvaru

$$l_t = -\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log(\sigma_t^2) - \frac{(e_t)^2}{2\sigma_t^2}, \quad t = 2, 3, \dots, n. \quad (3.9)$$

Za volatility do vztahů (3.9) rekurzivně dosazujeme $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2, t = 2, 3, \dots, n$. Maximizace logaritmické věrohodnostní funkce pro získání odhadů parametrů se poté řeší softwarově (například program EViews nabízí řadu metod).

2. Diagnostika modelu:

Po odhadnutí modelu GARCH můžeme získat

- předpovědní chyby \hat{e}_t získané jako $\hat{e}_t = y_t - \hat{\mu}_t$, kde μ_t se nejčastěji modeluje pomocí nějakého autoregresního modelu;
- odhad rozptylu $\hat{\sigma}_t^2$ vypočtené modelem GARCH jako jednokrokové předpovědi z rovnice volatility;
- standardizované odchylky \hat{e}_t vypočtené jako podíl \hat{e}_t a $\hat{\sigma}_t$.

Pro diagnostiku modelu GARCH provádíme testy popsané např. Ciprou (Cipra, 2008), a to

- Q-testy pro ověření správnosti odhadnuté rovnice střední hodnoty pomocí řady $\{\hat{\epsilon}_t\}$;
- Q-testy pro ověření správnosti odhadnuté rovnice volatility pomocí řady $\{\hat{\epsilon}_t^2\}$;
- LM-test (založený na Lagrangeových multiplikátorech) pro dodatečnou ARCH strukturu řady $\{\hat{\epsilon}_t\}$, která ještě nebyla zohledněna;
- test normality Bera-Jarque pro odhadnutý GARCH model nebo výpočet koeficientu špičatosti řady $\{\hat{\epsilon}_t\}$.

3. Předpovědi volatility:

Se znalostí odhadů koeficientů α_0, α_1 a β_1 lze volatilitu předpovídat z rovnice (3.4), tedy ($t = n$ je počet členů řady)

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2(t) = \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2.$$

Pro předpověď $\hat{\sigma}_{t+2}^2(t)$ bychom potřebovali ještě nějaký odhad e_{t+1}^2 , ale protože

$$\sigma_{t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \sigma_{t+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{t+1}^2 (\epsilon_{t+1}^2 + 1)$$

a platí $E(\epsilon_{t+1}^2 - 1 | \Omega_t) = 0$, máme také

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2(t) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_{t+1}^2(t),$$

obecně tedy

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_{t+\tau-1}^2(t), \quad \tau > 1. \quad (3.10)$$

Postupným dosazením dostaneme

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \frac{\alpha_0(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{\tau-1})}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} + (\alpha_1 + \beta_1)^{\tau-1} \hat{\sigma}_{t+1}^2(t), \quad (3.11)$$

takže pro $\tau \rightarrow \infty$ máme

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) \rightarrow \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)}. \quad (3.12)$$

Tedy předpovídaný rozptyl konverguje k rozptylu předpovědních chyb e_t (3.6).

Kapitola 4

Modifikace modelu GARCH

Klasický model GARCH dobře modeluje vlastnosti finančních časových řad jako podmíněnou heteroskedasticitu a shlukování volatility (rozptyl závisí vždy na svých předchozích hodnotách, ale pouze v omezeném časovém úseku). Finanční časové řady však mají i další vlastnosti, které se už tomuto modelu vystihnout nedají. Jde především o pákový efekt (tj. asymetrické chování při reakci na cenový nárůst a pokles), který model GARCH nemůže zohlednit už jen proto, že pracuje pouze s druhými mocninami předchozích volatilit. Díky snaze ho zdokonalit postupem času vzniklo velké množství modifikací, které se snažili tento a jiné problémy různými způsoby řešit. V této kapitole obsáhlji pohovoříme o modelech E-GARCH a GJR GARCH (Threshold GARCH), které jsou zaměřené především na řešení problému s asymetrií a dále zmíníme i některé další známé modifikace spolu s jejich stěžejními vlastnostmi.

4.1 EGARCH

Model EGARCH (z anglického *exponencial GARCH*) navrhl Nelson (1991). Podmíněný rozptyl σ_t^2 zřejmě musí být nezáporný. GARCH model toto zajišťuje tím, že σ_t^2 je lineární kombinací kladných náhodných veličin s kladnými koeficienty. Jiná možnost, jak tohoto dosáhnout, je položit $\log(\sigma_t^2)$ rovno lineární kombinaci vhodných funkcí zpožděných hodnot ϵ_t závisejících na čase, tedy:

$$\log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g(\epsilon_{t-i}), \quad \beta_1 = 1. \quad (4.1)$$

Abychom zajistili asymetrii, hodnota $g(\epsilon_t)$ musí záviset jak na velikosti, tak na znaménku ϵ_t . Jako vhodná možnost se ukazuje volit

$$g(\epsilon_t) = \psi_1 \epsilon_t + \psi_2 (|\epsilon_t| - \mathbb{E} |\epsilon_t|), \quad (4.2)$$

tedy $g(\epsilon_t)$ jako lineární kombinaci ϵ_t a $|\epsilon_t|$, kde navíc platí, že $\{g(\epsilon_t)\}_{t=0}^{\infty}$ je iid posloupnost náhodných veličin s nulovou střední hodnotou. Asymetrie $g(\epsilon_t)$ je vidět z následujícího vztahu:

$$g(\epsilon_t) = \begin{cases} (\psi_1 + \psi_2) \epsilon_t - \psi_2 \mathbb{E}(|\epsilon_t|), & \text{je-li } \epsilon_t \geq 0, \\ (\psi_1 - \psi_2) \epsilon_t - \psi_2 \mathbb{E}(|\epsilon_t|), & \text{je-li } \epsilon_t < 0. \end{cases}$$

Nyní si rozebereme vliv chování funkce $g(\epsilon_t)$ definované v (4.2) ve vztahu (4.1). Nejdříve předpokládejme, že $\psi_1 = 0$ a $\psi_2 > 0$. Potom se $\log(\sigma_{t+1}^2)$ zvětší (zmenší), pokud je $|z_t|$ větší (menší) než jeho střední hodnota. Dále pokud bychom měli $\psi_1 < 0$ a $\psi_2 = 0$, $\log(\sigma_{t+1}^2)$ se zvětší (zmenší), když je znaménko ϵ_t záporné (kladné), tedy snížení hladiny řady přispívá ke zvýšení volatility.

Pro $\log(\sigma_{t+1}^2)$ však často používáme jednodušší vztah než reprezentaci pomocí nekonečné řady v (4.1). V mnoha aplikacích je vhodné definovat model EGARCH jako

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \log(\sigma_t^2) = \alpha_0^* + \frac{1 + \theta_1 B + \dots + \theta_p B^p}{1 - \gamma_1 B - \dots - \gamma_s B^s} g(\epsilon_{t-1}), \quad (4.3)$$

kde B je operátor časového posunu (B^j zpozdí veličinu v čase o j časových jednotek, tedy $B^j y_t = y_{t-j}$). Poslední rovnici v (4.3) můžeme zjednodušit následujícími úpravami

$$(1 - \gamma_1 B - \dots - \gamma_s B^s) \log(\sigma_t^2) = (1 - \gamma_1 B - \dots - \gamma_s B^s) \alpha_0^* + (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_p B^p) g(\epsilon_{t-1}),$$

kde $g(\epsilon_t) = \psi_1 \epsilon_t + \psi_2 (|\epsilon_t| - E |\epsilon_t|)$, tedy celkem máme z předchozího ($m = p + 1$) model EGARCH(m, s):

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \epsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^m \beta_j |\epsilon_{t-j}| + \sum_{k=1}^s \gamma_k \log(\sigma_{t-k}^2) \quad (4.4)$$

pro upravené a zjednodušené koeficienty (vztahy k předchozím koeficientům jsou: $\alpha_0 = (1 - \gamma_1 B - \dots - \gamma_s B^s) \alpha_0^* - (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_m B^m) \psi_2 E |\epsilon_t|$ a $\alpha_i = \psi_1 \theta_{i-1}$, $\beta_j = \psi_2 \theta_{j-1}$ pro všechna $i, j = 1, \dots, m$ ($\theta_0 = 1$)), který byl v obdobném tvaru popsán Ciprou (Cipra, 2008).

Ve vztahu (4.4) můžeme vidět, že pro $\alpha_i < 0$ nastává pákový efekt.

V praxi nejpoužívanější EGARCH model je nejjednodušší EGARCH(1,1), který má tvar

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \log(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1} + \beta_1 |\epsilon_{t-1}| + \gamma_1 \log(\sigma_{t-1}^2). \quad (4.5)$$

4.2 GJR-GARCH (Threshold GARCH)

Model GJR Garch navrhli Glosten, Jagannathan a Runkle (1993) a nezávisle na nich také Zakoian (1994), který však tento model pojmenoval Threshold GARCH. GJR-GARCH si bere za cíl modelovat asymetrii, respektive pákový efekt, avšak volí odlišnou (a možná přirozenější) cestu, než dříve zmíněný EGARCH. Rozptyl zde budeme, podobně jako u standardního modelu GARCH modelovat pomocí jeho předchozích hodnot a minulých předpovědních chyb, avšak abychom dosáhli kýženého pákového efektu, je třeba, aby byl v případě záporných minulých předpovědních chyb vliv na současnou volatilitu větší než v případě jejich nezápornosti. S přihlédnutím k této úvaze definujeme, podobně jako Cipra (2008), model GJR-GARCH(m,s) jako

$$y_t = \mu_t + e_t, e_t = \sigma_t \epsilon_t, \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^m \gamma_k e_{t-k}^2 I_{t-k}^-, \quad (4.6)$$

$$I_t^- = \begin{cases} 1 & \text{pro } e_t < 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i, \gamma_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$), $\beta_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, s$).

Exponenciální a GJR-GARCH mají podobné vlastnosti, a to především asymetrii ve volatilitě. Zároveň se ale výrazně liší v přístupu k modelování volatility. Druhý zmíněný tvoří volatilitu jako funkci minulých předpovědních chyb, nikoli normovaných veličin $\epsilon_t = e^t / \sigma_t$ jako v případě modelu EGARCH. Díky tomu je GJR-GARCH blíž klasické formulaci modelu GARCH.

Nejjednodušší, zato však široce používaný, je model GJR-GARCH(1,1) tvaru

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 e_{t-1}^2 I_{t-1}^-. \quad (4.7)$$

Pro použití metody GJR-GARCH(1,1) na analýzu a predikci finanční časové řady bychom postupovali obdobně, jako v kapitole 3.2. Drobná změna by zřejmě nastala v rekurzivním dosazování volatilit do vztahu (3.9), kam bychom nyní za volatility dosazovali $\sigma_t^2 = \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \gamma_1 e_{t-1}^2 I_{t-1}^-$, $t = 2, 3, \dots, n$.

Volatilitu bychom se znalostí koeficientů modelu GJR-GARCH(1,1) předpovídali z rovnice

$$\hat{\sigma}_{t+1}^2(t) = \hat{\sigma}_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 + \gamma_1 e_{t-1}^2 I_{t-1}^-$$

a podobně jako pro předpověď GARCH(1,1) bychom dostali obecnou rovnici

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) \hat{\sigma}_{t+\tau-1}^2(t), \quad \tau > 1. \quad (4.8)$$

Před konstrukcí asymetrických modelů EGARCH a GJR-GARCH je vhodné statisticky otestovat asymetrické chování řady. Většinou pracujeme s veličinami \hat{e}_t vypočtenými pomocí klasického modelu GARCH, kde následně pomocí t -testu, F-testu či LM-testu v lineárních modelech typu

$$\hat{e}_t^2 = \delta_0 + \delta_1 I_{t-1}^- + \epsilon_t, I_t^- = \begin{cases} 1 & \text{pro } \hat{e}_{t-1} < 0, \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\hat{e}_t^2 = \delta_0 + \delta_1 I_{t-1}^- \hat{e}_{t-1} + \epsilon_t; \quad (4.10)$$

$$\hat{e}_t^2 = \delta_0 + \delta_1 I_{t-1}^- + \delta_2 I_{t-1}^- \hat{e}_{t-1} + \delta_3 I_{t-1}^+ \hat{e}_{t-1} + \epsilon_t, I_{t-1}^+ = 1 - I_{t-1}^-, \quad (4.11)$$

testujeme významnost parametrů, a to

- δ_0 v (4.9) ukazuje na asymetrii volatility v dané časové řadě;
- δ_0 a δ_1 v (4.10) ukazuje na asymetrii volatility a vliv velikosti záporných odchylek e_t na volatilitu v dané časové řadě;
- $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ a δ_3 v (4.11) ukazuje na asymetrii volatility a vliv velikosti kladných i záporných odchylek e_t na volatilitu v dané časové řadě.

4.3 GARCH-M

V modelu GARCH-M (z anglického *GARCH-in-mean*), o kterém pojednává např. Arlt a Arltová (2003) a Cipra (2008), vstupuje rozptyl přímo do rovnice podmíněné střední hodnoty. Pro GARCH(m,s)-M máme tvar

$$y_t = \mu_t + \gamma_1 g(\sigma_t^2) + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (4.12)$$

kde nejčastěji $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$ nebo $g(\sigma_t^2) = \sigma_t$. Tato modifikace reflekтуje závislost výnosu aktiva na jeho volatilitě, což v praxi často nastává. Pro výrazně kladný parametr γ_1 vede zvýšené riziko (volatilita) ke zvýšení úrovně celé řady.

Pro další úvahy nyní předpokládejme model GARCH(1,1)-M, kde $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$, tedy tvaru

$$y_t = \mu_t + \gamma_1 \sigma_t^2 + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (4.13)$$

Zaměříme se na rozdíly mezi střední hodnotou procesu $E(y_t)$ a rozptylem $\text{var}(y_t)$ modelu GARCH(1,1)-M ve srovnání s obyčejným modelem GARCH(1,1), pro který zřejmě $E(y_t^*) = \mu_t$ a $\text{var}(y_t^*) = \text{var}(e_t^2)$. Pro GARCH(1,1)-M z (4.13) ale platí

$$E(y_t) = \mu_t + \gamma_1 E(\sigma_t^2) = \mu_t + \alpha_0 \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)} \right) \text{ a}$$

$$\text{var}(y_t) = \text{var}(e_t^2) + \gamma_1^2 \text{var} \frac{e_t^2}{\sigma_t^2},$$

tedy vidíme, že jak střední hodnota, tak rozptyl jsou pro model GARCH(1,1)-M větší než v případě standardního GARCH(1,1) modelu.

4.4 IGARCH

Model IGARCH (z anglického *integrated GARCH*, integrovaný GARCH) je, jak zmiňuje např. Cipra (2008), vlastně model GARCH s jednotkovým kořenem autoregresního polynomu, tedy model $\text{IGARCH}(m,s)$ má tvar modelu $\text{GARCH}(m,s)$ jako v (3.1), kde navíc platí

$$\sum_{i=1}^{\max\{m,s\}} (\alpha_i + \beta_i) = 1, \quad (4.14)$$

z čehož plyne neexistence rozptylu veličin e_t (3.3). V souvislosti s tím u modelu EGARCH mluvíme o takzvané *persistenci v rozptylu* - zatímco v modelu GARCH stacionární ve volatilitě konvergují předpovědi druhých mocnin volatility s rostoucím časem k nepodmíněnému rozptylu předpovědních chyb (3.12), v integrovaném GARCH modelu zůstává současná informace významná pro předpovědi pro všechny další časové okamžiky.

Pro nejjednodušší a z této třídy nejpoužívanější model $\text{IGARCH}(1,1)$ máme zřejmě tvar

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) \sigma_{t-1}^2, \quad \alpha_0 > 0, 0 \leq \alpha_1 \leq 1. \quad (4.15)$$

Předpovědní vztah definovaný v (3.10) se zjednoduší do tvaru

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = \alpha_0 + \hat{\sigma}_{t+\tau-1}^2(t), \quad \tau > 1,$$

neboli

$$\hat{\sigma}_{t+\tau}^2(t) = (\tau - 1)\alpha_0 + \hat{\sigma}_{t+1}^2(t), \quad \tau > 1. \quad (4.16)$$

Zde můžeme vidět, že vliv současných volatilit na předpovědi opravdu přetrvává, tedy vidíme zmíněnou *persistenci v rozptylu*.

Rozptyl v modelu $\text{IGARCH}(m,s)$ lze rovněž vyjádřit pomocí operátoru časového posunu B jako

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(B)e_t^2 + \beta(B)\sigma_{t-j}^2,$$

kde značíme $\alpha(B) = \sum_{i=1}^m \alpha_i B^i$ a $\beta(B) = \sum_{j=1}^s \beta_j B^j$, tedy pokud definujeme $v_t := e_t^2 - \sigma_t^2$, podobně jako Arlt a Arltová (2003) máme

$$(1 - \alpha(B) - \beta(B))e_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(B))v_t.$$

Zároveň ze vztahu (4.14) víme, že má polynom $(1 - \alpha(B) - \beta(B))$ jednotkový kořen, takže jde ekvivalentně zapsat jako $\theta(B)(1-B)$, kde $\theta(B) = \sum_{i=1}^{\max\{m,s\}-1} (\theta_i B^i)$ je stupně $\max\{m,s\} - 1$. Rovnice pro rozptyl v $\text{IGARCH}(m,s)$ má tedy tvar

$$\theta(B)(1 - B)e_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(B))v_t. \quad (4.17)$$

4.5 FIGARCH

Model FIGARCH (z anglického *fractional IGARCH*) popsali např. Arlt a Arltová (2003). Tvar obecného modelu FIGARCH(m,s) je

$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \theta(B)(1 - B)^d e_t^2 = \alpha_0 + (1 - \beta(B))v_t, \quad (4.18)$$

kde $0 < d < 1$ a $\theta(B), \beta(B)$ jsou jako v (4.17). Hlavní význam tohoto modelu tkví v jeho reakci na takzvané šoky, tedy v podstatě jak dlouho přetrvá vliv současné informace pro budoucí předpovědi. V případě modelu FIGARCH se šoky do podmíněného rozptylu zmenšují pomaleji než u klasického modelu GARCH, avšak jejich vliv nepřetrvává věčně jako v případě modelu IGARCH. Vzhledem k pomalému (hyperbolickému) zmenšování reakce na šok mluvíme o modelu FIGARCH jako o modelu s dlouhou pamětí.

4.6 QGARCH

Jako poslední zmíníme model QGARCH (z anglického *quadratic GARCH*, kvadratický GARCH), který navrhl Sentana (1995). Jeho obecný tvar QGARCH(m,s) je

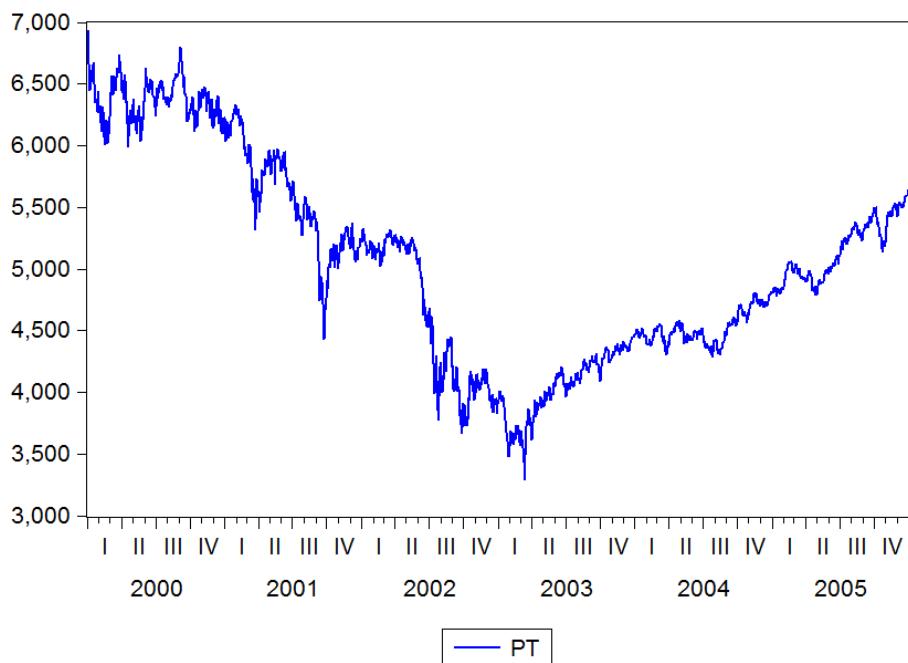
$$y_t = \mu_t + e_t, \quad e_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i e_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^s (\beta_j \sigma_{t-j}^2) + \sum_{k=1}^m (\gamma_k e_{t-k}^2). \quad (4.19)$$

Vidíme, že do rovnice volatility zde vstupuje i první mocnina předpovědních chyb e_t . Díky tomu model zohledňuje asymetrii. Zároveň je velmi podobný standardnímu modelu GARCH, díky čemuž se až na asymetrii chová velmi podobně a můžeme o něm dělat až na drobné změny podobné závěry a používat ho podobnou metodikou.

Kapitola 5

Praktická analýza finanční časové řady pomocí modelů ARCH

V této kapitole aplikujeme některé z výše uvedených modelů na časovou řadu vývoje indexu FTSE 100 (z anglického *Financial Times Stock Exchange*) Londýnské burzy, který zahrnuje sto společností s nejvyšší tržní kapitalizací, jejichž akcie se na této burze obchodují. K analýze použijeme program EViews, konkrétně verzi EViews7. Budeme pracovat s indexem FTSE 100 z let 2000–2005, přičemž budeme postupně pomocí modelů GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) analyzovat řadu denních logaritmických výnosů tohoto indexu z let 2000–2004 (viz obrázek 2.2) a budeme předpovídат vývoj indexu pro rok 2005. Denní hodnoty indexu FTSE ze zmíněných let lze vidět na obrázku 5.1.



Obrázek 5.1: Denní hodnoty indexu FTSE 100 v letech 2000–2005

Na obrázku 5.2 je uveden výstup EViews7 pro zmíněná data a modely. Rovnice střední hodnoty v modelech odpovídá vždy lineárnímu regresnímu modelu ARMA(1,1) (viz např. Cipra (2008)).

Dependent Variable: DLOG(PT)				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/28/15 Time: 09:17				
Sample (adjusted): 1/05/2000 12/31/2004				
Included observations: 1303 after adjustments				
Convergence achieved after 12 iterations				
Bollerslev-Wooldridge robust standard errors & covariance				
MA Backcast: 1/04/2000				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
$GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)$				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.668587	0.132519	5.045208	0.0000
MA(1)	-0.738911	0.121030	-6.105169	0.0000
Variance Equation				
C	1.65E-06	6.29E-07	2.616719	0.0089
RESID(-1)^2	0.104451	0.023844	4.380664	0.0000
GARCH(-1)	0.885079	0.021921	40.37641	0.0000

Dependent Variable: DLOG(PT)				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/28/15 Time: 09:17				
Sample (adjusted): 1/05/2000 12/31/2004				
Included observations: 1303 after adjustments				
Convergence achieved after 17 iterations				
Bollerslev-Wooldridge robust standard errors & covariance				
MA Backcast: 1/04/2000				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
$LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1))@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*RESID(-1)@SQRT(GARCH(-1)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))$				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.693279	0.116076	5.972634	0.0000
MA(1)	-0.752902	0.105065	-7.166071	0.0000
Variance Equation				
C(3)	-0.170240	0.037348	-4.558268	0.0000
C(4)	0.061084	0.019446	3.141193	0.0017
C(5)	-0.116371	0.019478	-5.974376	0.0000
C(6)	0.987237	0.003134	315.0060	0.0000

Dependent Variable: DLOG(PT)				
Method: ML - ARCH				
Date: 03/28/15 Time: 09:20				
Sample (adjusted): 1/05/2000 12/31/2004				
Included observations: 1303 after adjustments				
Convergence achieved after 18 iterations				
Bollerslev-Wooldridge robust standard errors & covariance				
MA Backcast: 1/04/2000				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
$GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(6)*GARCH(-1)$				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
AR(1)	0.688062	0.113713	6.050859	0.0000
MA(1)	-0.755389	0.101982	-7.407068	0.0000
Variance Equation				
C	1.56E-06	4.24E-07	3.691010	0.0002
RESID(-1)^2	-0.021159	0.014436	-1.465642	0.1427
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.145267	0.026963	5.387554	0.0000
GARCH(-1)	0.929217	0.015117	61.46769	0.0000

Obrázek 5.2: Výstup EViews7 s odhadnutými modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) pro denní logaritmickou míru zisku indexu FTSE 100 v letech 2000–2004

Z tabulek snadno vyčteme odhady koeficientů jednotlivých modelů:

- pro model GARCH(1,1):

$$y_t = 0,6686y_{t-1} - 0,7389e_{t-1} + e_t, e_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 = 0,1045e_{t-1}^2 + 0,8851\sigma_{t-1}^2;$$

- pro model EGARCH(1,1):

$$y_t = 0,6933y_{t-1} - 0,7529e_{t-1} + e_t, e_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \log(\sigma_t^2) = -0,1702 - 0,1164\epsilon_{t-1} + 0,0611|\epsilon_{t-1}| + 0,9872 \log(\sigma_{t-1}^2);$$

- pro model GJR-GARCH(1,1):

$$y_t = 0,6881y_{t-1} - 0,7554e_{t-1} + e_t, e_t = \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 = -0,0212e_{t-1}^2 + 0,9292\sigma_{t-1}^2 + 0,1453e_{t-1}^2 I_{t-1}^-.$$

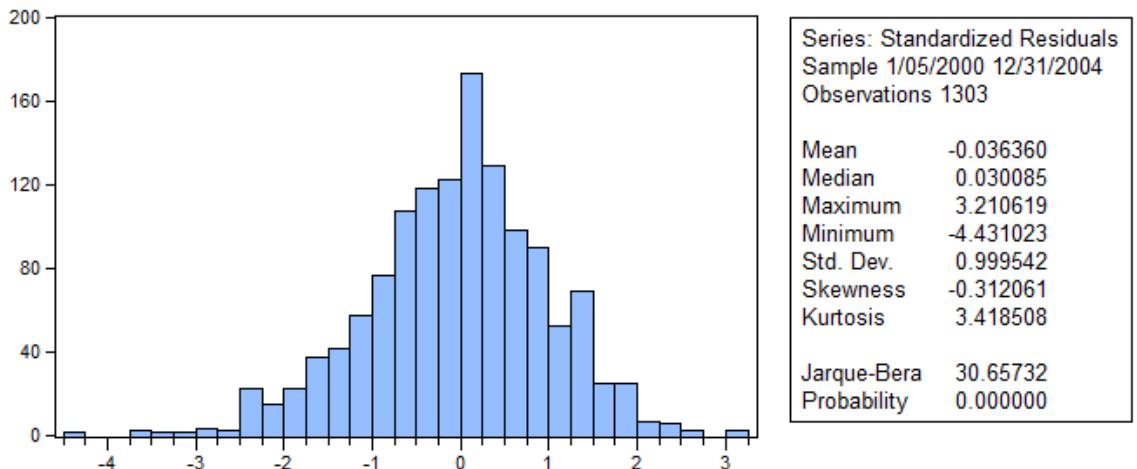
Koeficient α_0 je u modelů GARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) velmi malý, a proto ho v rovnicích zanedbáváme. Q-testy pro standardizované odchylky a jejich druhé mocniny provedené v EViews7 potvrzují správnost odhadnutých rovnic. Díky tomu nám nevadí, že odhad parametru α_1 u modelu GJR-GARCH(1,1) vychází jako nevýznamný. Po provedení LM-testu, vidíme (viz obrázek 5.3), že odchylky navíc nevykazují dodatečnou ARCH strukturu. Na histogramech standardizovaných odchylek jednotlivých modelů (viz obrázky 5.4, 5.5 a 5.6) s popisnými statistikami je vidět výrazně kladná špičatost jejich rozdělení, takže by bylo zřejmě vhodnější pro modely předpokládat t - nebo GED rozdělení.

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	0.824831	Prob. F(1,1300)	0.3639
Obs*R-squared	0.825577	Prob. Chi-Square(1)	0.3636

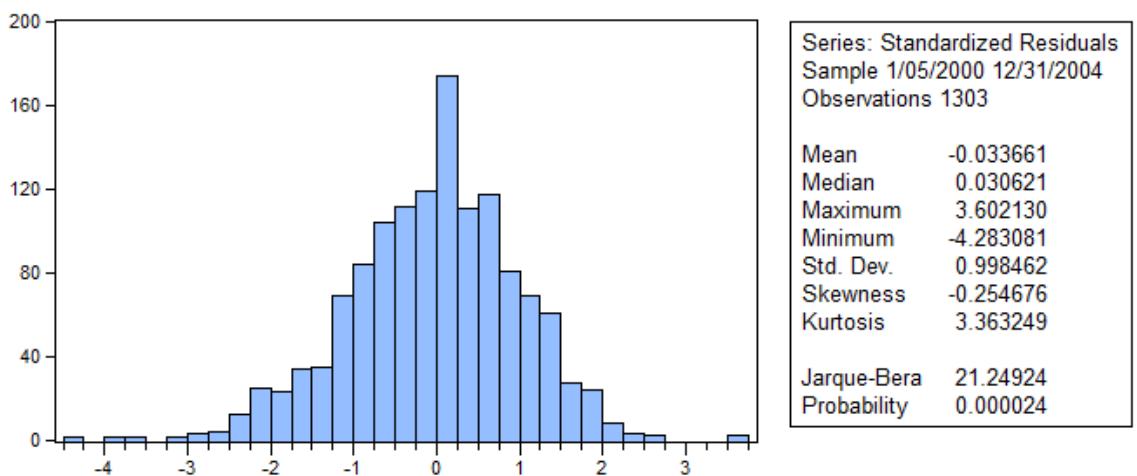
Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	1.047329	Prob. F(1,1300)	0.3063
Obs*R-squared	1.048095	Prob. Chi-Square(1)	0.3059

Heteroskedasticity Test: ARCH			
F-statistic	1.980789	Prob. F(1,1300)	0.1595
Obs*R-squared	1.980818	Prob. Chi-Square(1)	0.1593

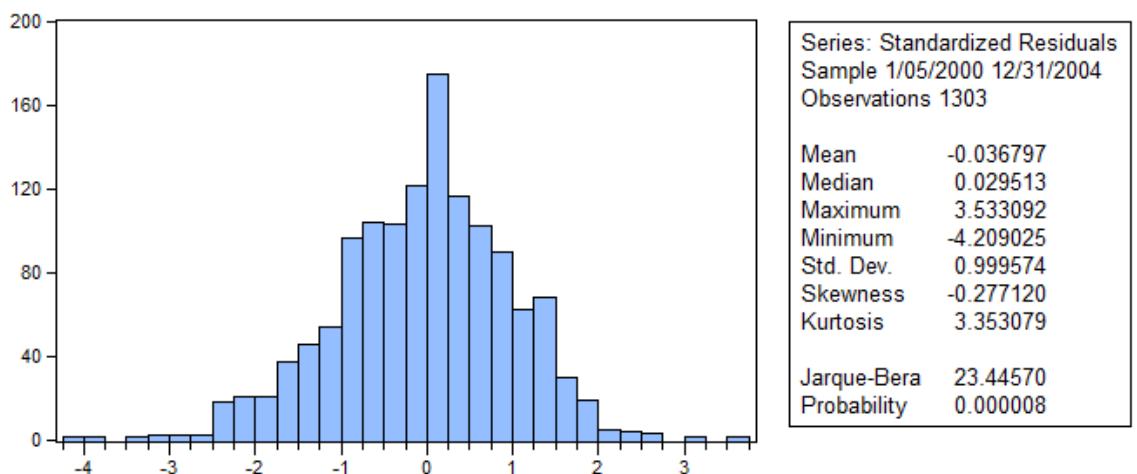
Obrázek 5.3: ARCH LM-test pro odhadnuté modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1)



Obrázek 5.4: Histogram standardizovaných odchylek modelu GARCH(1,1)

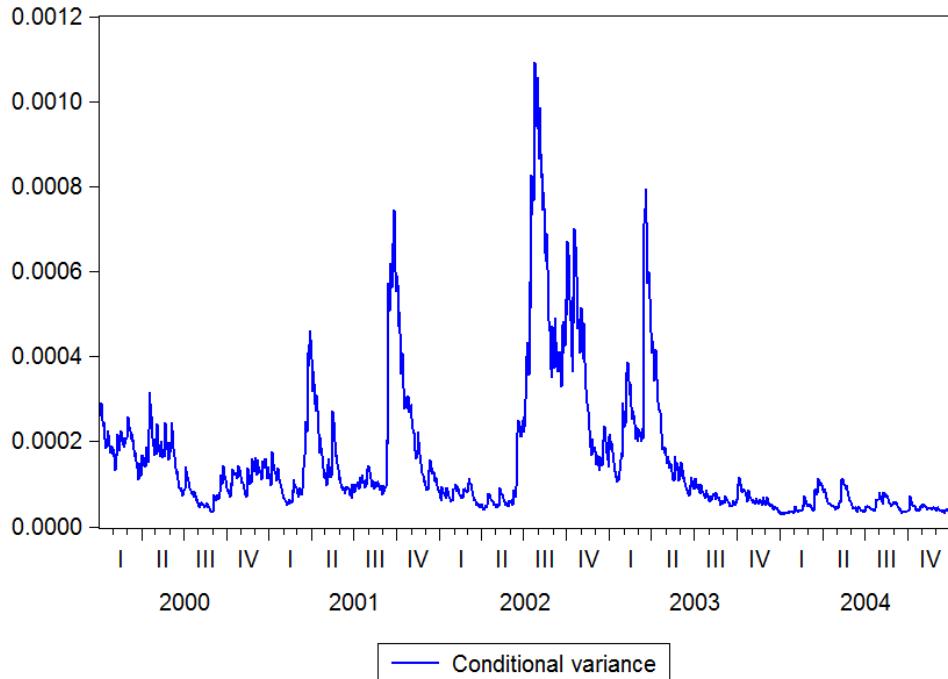


Obrázek 5.5: Histogram standardizovaných odchylek modelu EGARCH(1,1)



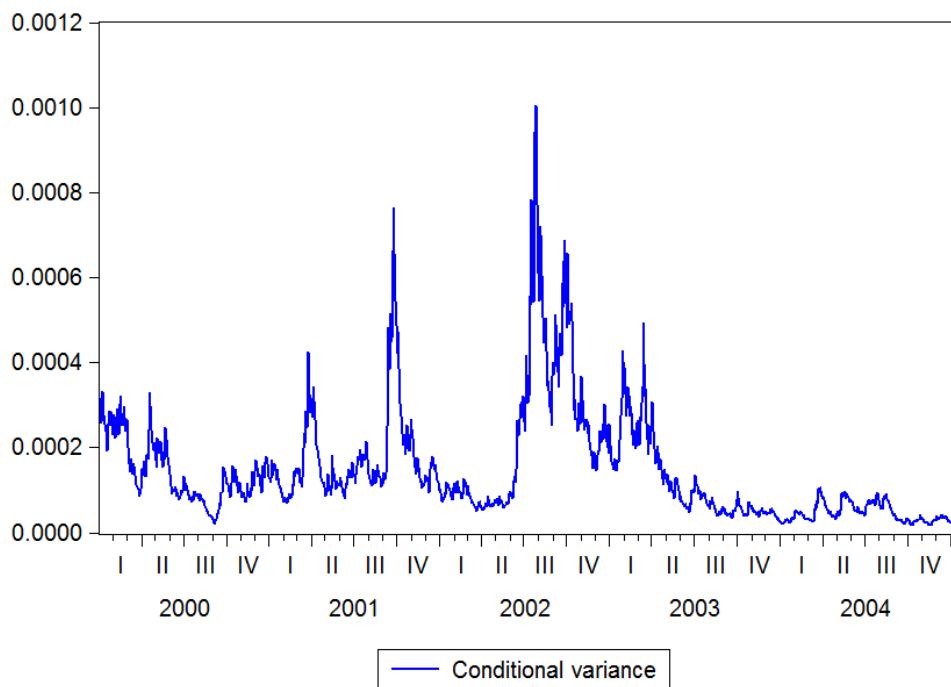
Obrázek 5.6: Histogram standardizovaných odchylek modelu GJR-GARCH(1,1)

Podmíněný rozptyl (druhou mocninu volatility) denních logaritmických měr zisku pro index FTSE 100 odhadnutou na základě zkounstruovaných modelů GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) v programu EView7 můžeme vidět na obrázcích 5.7, 5.8 a 5.9.

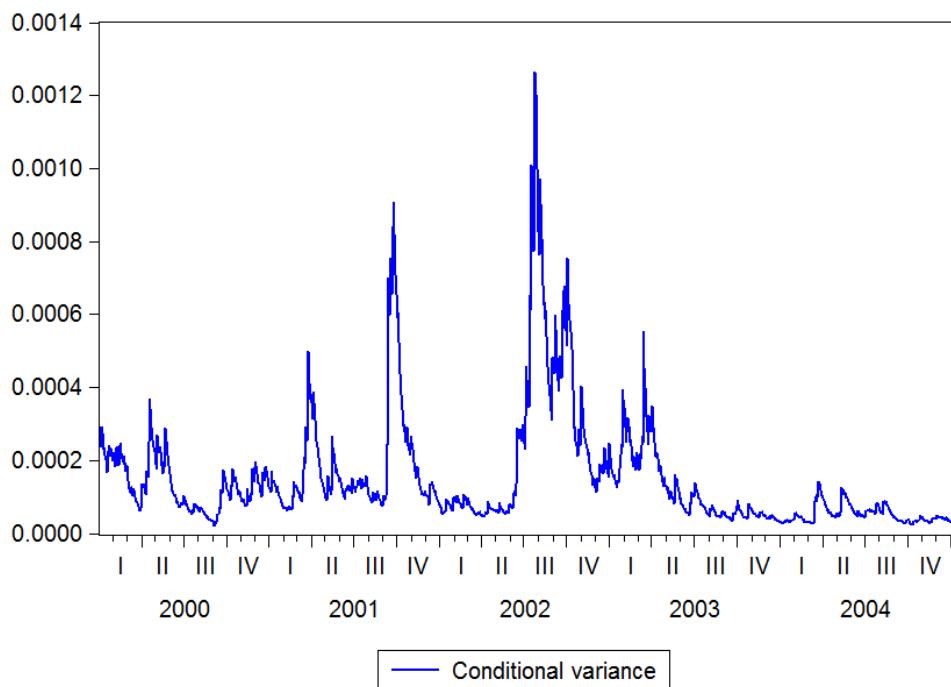


Obrázek 5.7: Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou GARCH(1,1)

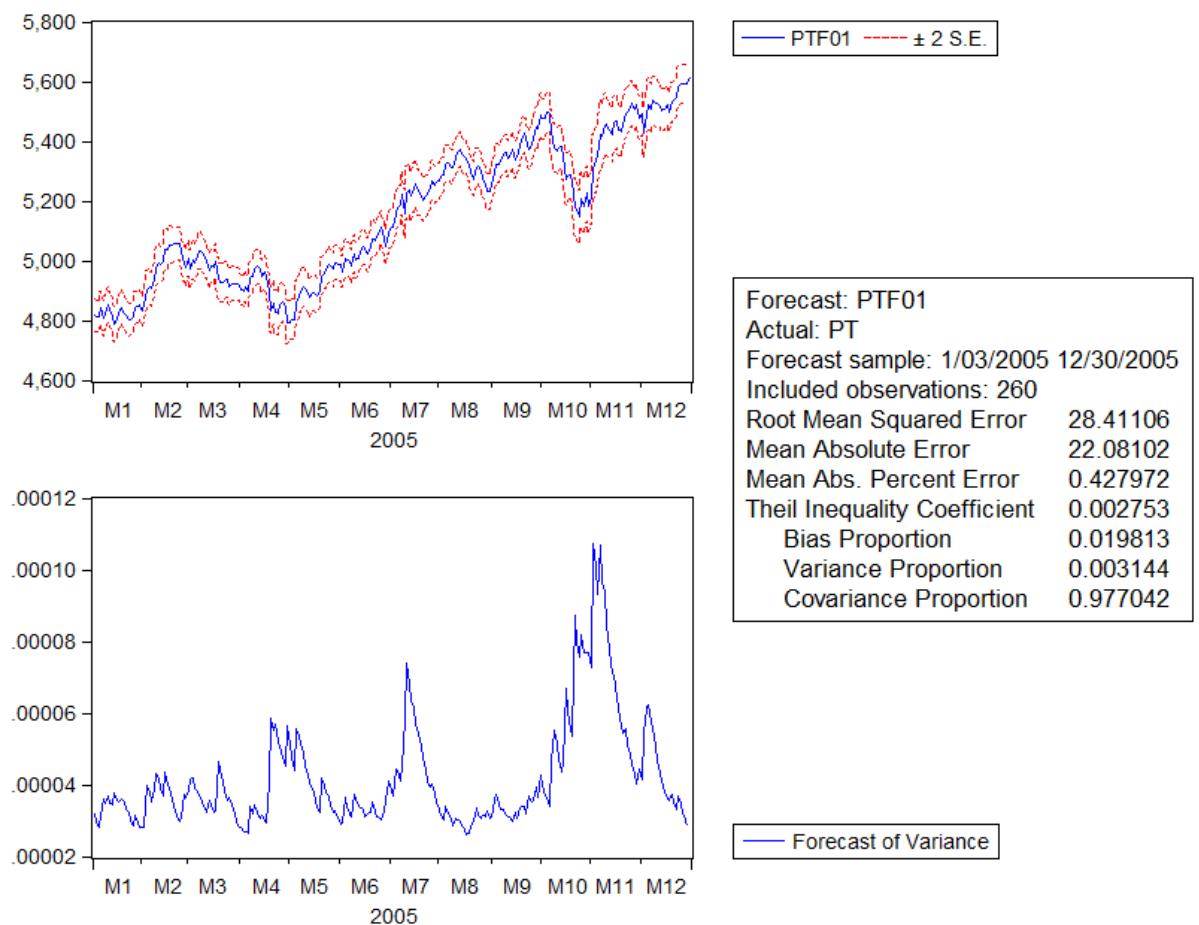
Naše modely nám kromě předpovědí volatility mohou složit i k předpovědím vlastní úrovně časové řady. Na obrázcích 5.10, 5.11 a 5.12 tyto předpovědi zkonstruované programem EViews7 vidíme. Na prvním grafu je vždy předpověď denních hodnot indexu FTSE 100 a na druhém jejich rozptyl, vše pro rok 2005, a to postupně pro modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1). Tyto předpovědi lze srovnat s pravými denními hodnotami indexu FTSE 100 v roce 2005 na obrázku 5.13. Reálný vývoj je velmi podobný předpovědím (v tabulce 5.1 je vidět srovnání předpovězených a reálných hodnot indexu FTSE 100 v roce 2005), a kvůli nedostatečnému grafickému rozlišení ho tudíž bylo nutné uvést na zvláštním obrázku.



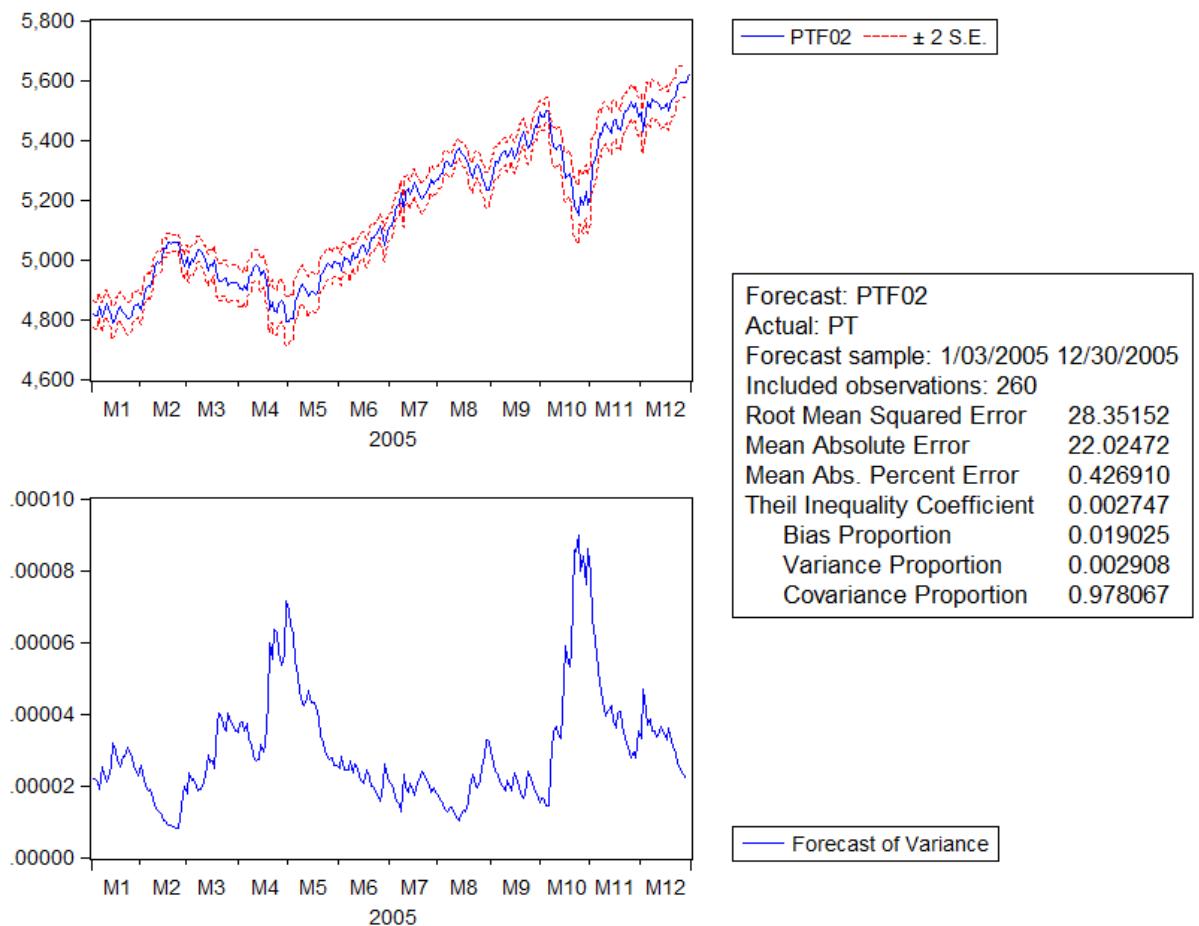
Obrázek 5.8: Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou EGARCH(1,1)



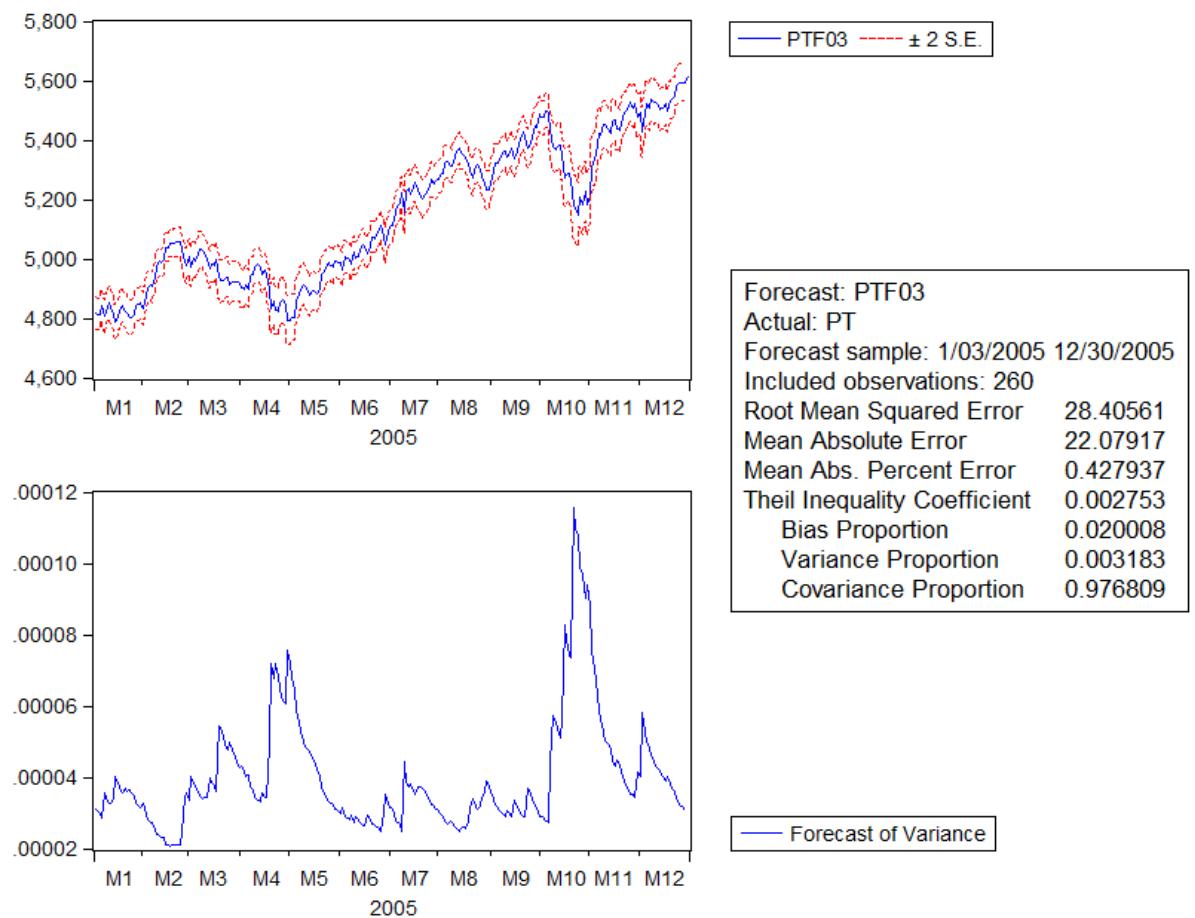
Obrázek 5.9: Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou GJR-GARCH(1,1)



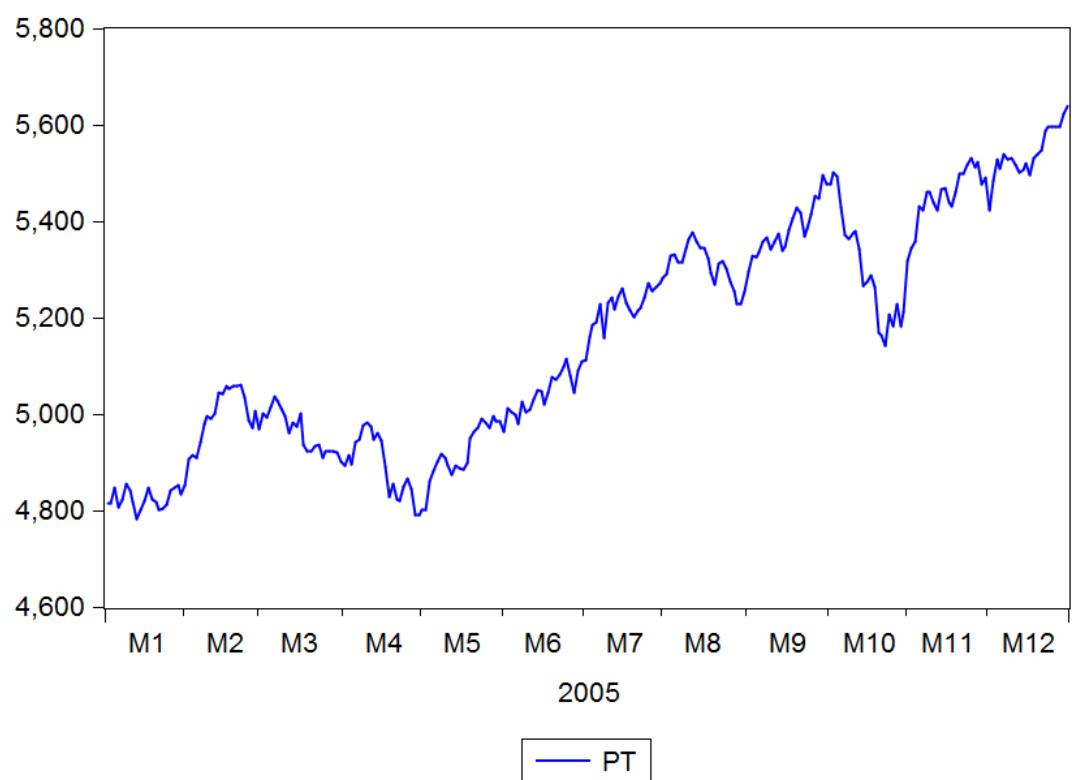
Obrázek 5.10: Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou GARCH(1,1)



Obrázek 5.11: Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou EGARCH(1,1)



Obrázek 5.12: Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou GJR-GARCH(1,1)



Obrázek 5.13: Denní hodnoty indexu FTSE 100 v roce 2005

Datum	index FTSE	před. GARCH	před. EGARCH	před. GJR-GARCH
3.1.2005	4814,3	4818	4818,2	4817,9
17.1.2005	4820,8	4801,4	4801,2	4801,3
31.1.2005	4832,8	4851,6	4851,8	4851,6
14.2.2005	5044,2	4996,7	4997	4996,6
28.2.2005	5006,8	4976	4975,4	4975,8
14.3.2005	4982	4965,4	4964,9	4965,3
28.3.2005	4922,5	4923,4	4923,4	4923,5
11.4.2005	4983,6	4973,4	4973,9	4973,5
25.4.2005	4849,3	4823,5	4823,1	4823,5
9.5.2005	4918,9	4898	4898,6	4898,2
23.5.2005	4971,8	4958,6	4959,1	4958,7
6.6.2005	4999,4	5003,5	5003,6	5003,5
20.6.2005	5077,6	5043,6	5043,8	5043,6
4.7.2005	5161	5111,2	5111,4	5111,2
18.7.2005	5230,8	5256,5	5256,8	5256,4
1.8.2005	5282,3	5268,7	5268,9	5268,7
15.8.2005	5345,8	5357,3	5357,4	5357,2
29.8.2005	5228,1	5258,9	5258,5	5258,8
12.9.2005	5359,3	5340,2	5340,2	5340,1
26.9.2005	5413,6	5385,8	5385,7	5385,7
10.10.2005	5362,3	5378,7	5377,7	5378,4
24.10.2005	5142,1	5171,4	5170,6	5171,5
7.11.2005	5423,6	5421,7	5423	5421,9
21.11.2005	5498,9	5458,3	5458,5	5458,3
5.12.2005	5528,1	5485,5	5485,6	5485,5
19.12.2005	5531,6	5496,6	5496,4	5496,6

Tabulka 5.1: Porovnání reálných a předpovězených hodnot indexu FTSE 100 v roce 2005, v tabulce je uvedena každá desátá hodnota

Kapitola 6

Závěr

V této práci jsme popsali možnosti analýzy finančních časových řad pomocí různých modifikací autoregresních modelů s podmíněnou heteroskedasticitou. Nejdříve jsme se seznámili s obecnými vlastnostmi finančních časových řad, které jsme se pokusili zohlednit v prezentovaných modelech. Jako první byl zmíněn model GARCH, který kromě podmíněné volatility dobře vystihuje i její shlukování. Na prvním rádu tohoto modelu (GARCH(1,1)) jsme popsali a dokázali některé jeho vlastnosti jako nulovost střední hodnoty předpovědních chyb e_t , tvar jejich rozptylu a jejich koeficientu špičatosti, který vyšel kladný, což je v souladu s leptokurtickým rozdělením dat finančního charakteru. Dále jsme ukázali, jak by se tento model použil pro praktickou analýzu finanční časové řady, tedy jak se provádí odhady jeho koeficientů, jaké testy je vhodné použít pro jeho diagnostiku a jak se pomocí něj předpovídá volatilita.

V další kapitole jsme se zaměřili na další modifikace, a to především EGARCH a GJR-GARCH, které se, na rozdíl od klasického modelu GARCH, chovají asymetricky, a tedy dokáží modelovat pákový efekt, který je ve finančních časových řadách často zřetelný. Dále jsou popsány testy asymetrie, které je vhodné před použitím těchto dvou modelů provést. Z dalších je zmíněn model GARCH-M, kde rozptyl vstupuje přímo do rovnice podmíněné střední hodnoty, model IGARCH, který je vlastně modelem GARCH, avšak s jednotkovým kořenem autoregresního polynomu. Tento model se vyznačuje tzv. persistencí v rozptylu. Nakonec jsou velmi stručně uvedeny modely FIGARCH a QGARCH.

V poslední kapitole jsme na základě modelů GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) analyzovali řadu denních hodnot, respektive jejich logaritmických výnosů, indexu FTSE 100 v letech 2000–2004. K této analýze jsme využili program EViews7. Pro modelování střední hodnoty jsme u všech modifikací použili tvar lineárního regresního modelu ARMA(1,1). Nejdříve jsme odhadli koeficienty modelů, dále provedli Q-testy, LM-testy a test normality, které tvary našich modelů verifikovaly. Následně jsme přistoupili k modelování volatility, respektive podmíněného rozptylu, který jsme znázornili graficky. Na závěr jsme předpověděli úroveň a podmíněné rozptyly řady denních hodnot indexu FTSE 100 pro rok 2005. Tyto předpovědi jsme spolu se skutečnými hodnotami řady v tomto roce pro názornost zobrazili graficky a pro porovnání uvedli předpovězené a reálné hodnoty indexu do tabulky.

Literatura

- ARLT, J. a ARLTOVÁ, M. (2003). *Finanční časové řady*. Grada Publishing, Praha. ISBN 80-247-0330-0.
- BOLLERSLEV, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. 1. vydání. Ekopress, s.r.o., Praha. ISBN 978-80-86929-43-9.
- ENGLE, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with the estimates of the variance of United Kingdom inflations. *Econometrica*, **50**, 987–1007.
- GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. a RUNKLE, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, **48**, 1779–1801.
- NELSON, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in assets returns a new approach. *Econometrica*, **59**(2), 347–370.
- SENTANA, E. (1995). Quadratic ARCH models. *Review of Economic Studies*, **62**, 639–661.
- ZAKOIAN, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **18**, 931–955.

Seznam obrázků

2.1	Porovnání normálního a leptokurtického rozdělení	3
2.2	Logaritmická míra výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2005	4
5.1	Denní hodnoty indexu FTSE 100 v letech 2000–2005	15
5.2	Výstup EVViews7 s odhadnutými modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1) pro denní logaritmickou míru zisku indexu FTSE 100 v letech 2000–2004	16
5.3	ARCH LM-test pro odhadnuté modely GARCH(1,1), EGARCH(1,1) a GJR-GARCH(1,1)	17
5.4	Histogram standardizovaných odchylek modelu GARCH(1,1) . .	18
5.5	Histogram standardizovaných odchylek modelu EGARCH(1,1) .	18
5.6	Histogram standardizovaných odchylek modelu GJR-GARCH(1,1)	18
5.7	Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou GARCH(1,1)	19
5.8	Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou EGARCH(1,1)	20
5.9	Rozptyl denní logaritmické míry výnosnosti indexu FTSE 100 v letech 2000–2004 modelovaný metodou GJR-GARCH(1,1)	20
5.10	Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou GARCH(1,1)	21
5.11	Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou EGARCH(1,1)	22
5.12	Předpověď indexu FTSE 100 a jeho rozptylu pro rok 2005 modelovaná metodou GJR-GARCH(1,1)	23
5.13	Denní hodnoty indexu FTSE 100 v roce 2005	24

Seznam tabulek

- 5.1 Porovnání reálných a předpovězených hodnot indexu FTSE 100
v roce 2005, v tabulce je uvedena každá desátá hodnota 25