Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Zadražil

Metody řešení diferenciálních rovnic

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2015

Rád bych poděkoval všem, kteří mne při psaní bakalářské práce podporovali. Obzvláště pak RNDr. Jakubu Staňkovi, Ph.D. za odbornou pomoc a vstřícné vedení.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Metody řešení diferenciálních rovnic

Autor: Tomáš Zadražil

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Cílem práce je představit čtenáři základní metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Pro názornost jsou zvolené metody demonstrovány na řešených úlohách, z nichž některé mají praktický charakter. Text se snaží být přátelský i k neodbornému uživateli, proto upřednostňuje slovní projev před hromaděním matematických výrazů. Cílovou skupinou jsou studenti vysokých škol a středoškolští pedagogové vedoucí výběrové semináře z matematiky. Základním předpokladem pro proniknutí do předkládané látky je znalost pojmů derivace, určitý a neurčitý integrál.

Klíčová slova: obyčejné diferenciální rovnice, aplikace diferenciálních rovnic, řešené diferenciální rovnice

Title: Methods of solving differential equations

Author: Tomáš Zadražil

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: RNDr. Jakub Staněk, Ph.D., Department of Mathematics Education

Abstract: The goal of this work is to introduce some elementary methods of solving ordinary differential equations to the reader. These methods are then exemplified by means of using solved samples and particular illustrations from practice. The text intends to be friendly to an inexpert user, therefore it prefers verbal expressions to accumulation of mathematic expressions. The target groups are university students and secondary school teachers who teach optional seminars of mathematic. The knowledge of derivatives, definite and indefinite integrals is required to understand this text.

Keywords: ordinary differential equations, application of differential equations, solved differential equations

Obsah

Úvod

Objev kalkulu, základů matematické analýzy, je spjat se jmény Isaaca Newtona, jednoho z nejvýznamnějších fyziků vůbec a Gottfrieda Leibnize, slavného německého myslitele a matematika. Jejich velký objev kráčel ruku v ruce s jejich sporem o prvenství. Britská královská společnost dala z počátku za pravdu Newtonovi. Ovšem, jak se později ukázalo, Leibniz byl označen za plagiátora právě Newtonovou rukou. Celý spor skončil až Leibnizovou smrtí roku 1716. Dnes se většina historiků přiklání k názoru, že jak Newton, tak Leibniz objevili kalkulus nezávisle na sobě. [4]

Svého času umožňovalo zavedení derivací matematické uchopení fyzikální problematiky pohybu. Soudobé nadšení tímto objevem vedlo k silné víře v univerzálnost diferenciálních rovnic, jakožto prostředku k snadnému poznání zákonitostí našeho světa. Naneštěstí, není obecně snadné sestavit diferenciální rovnice popisující daný děj, jako není snadné dobrat se jejich řešení. Přesto diferenciální rovnice dodnes nacházejí své uplatnění v mnoha disciplínách. [7]

Následující text je zamýšlen jako praktická příručka. Za svůj cíl si klade seznámit čtenáře se základními metodami řešení obyčejných diferenciálních rovnic a na konkrétních příkladech z praxe pak demonstrovat jejich využití.

Celá řada dalších úloh s fyzikální tematikou vedoucích na diferenciální rovnice je k nalezení například v [13].

1. Základní názvosloví

1.1 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici popisující vztah mezi hledanou neznámou funkcí a jejími derivacemi.
Je-li hledaná funkce funkcí jedné proměnné, hovoříme o *obyčejné diferenciální rovnici*. Jedná-li se o funkci více proměnných, alespoň dvou, hovoříme o *parciální diferenciální rovnici*. Je-li nakonec dáno m diferenciálních rovnic o n neznámých, hovoříme o *soustavě m diferenciálních rovnic o n neznámých*.
Diferenciální rovnice, případně jejich soustavy, dále rozlišujeme dle *řádu*, tedy řádu nejvyšší derivace hledané funkce vyskytující se v dané rovnici, případně v dané soustavě rovnic. Řád diferenciální rovnice musí být alespoň jedna, jinak hovoříme o takzvané funkcionální rovnici. [9][12]

Zadání následujícího příkladu je volně převzato z [8].

Příklad 1
Jestliže C je kapacita a Q náboj kondenzátoru, pak jeho vybíjení skrze rezistor o odporu R popisuje diferenciální rovnice[1]

$$\dot{Q} = -\left(\frac{R}{C}\right) Q\,.$$

Protože celková velikost náboje kondenzátoru Q závisí na jediné proměnné, a to sice na době vybíjení t, neboli Q je funkcí času $Q = Q(t)$, jedná se o obyčejnou diferenciální rovnici.
Povšimněme si dále, že funkce $Q(t)$ se v rovnici vyskytuje nejvýše ve své první derivaci, řád rovnice proto bude jedna a my tak celkově hovoříme o obyčejné diferenciální rovnici prvního řádu.

1.2 Řešení diferenciální rovnice obecně

Za *řešení* diferenciální rovnice považujeme každou funkci vyhovující dané diferenciální rovnici. Jedním konkrétním řešením rozumíme *partikulární řešení*. Partikulární řešení, které již dále nelze prodloužit, zveme *řešení maximální* (více podrobností o maximálním řešení nalezneme například v [7] na straně 3). Konečně pak vzorcem, obsahujícím při vhodné volbě konstant všechna řešení partikulární, rozumíme *řešení obecné*. Jinými slovy, obecné řešení obsahuje všechna řešení partikulární. [7]

[1] Tečka, dle Newtonovy notace, ve fyzice značí derivaci podle času. Toto značení Newton zavedl ve svých Principiích v rámci zjednodušení matematického zápisu. Fyziky totiž nejčastěji zajímají právě změny veličin s časem. [10] Dále v textu se však častěji setkáme se standardním značením derivace pomocí čárky.

1.3 Počáteční podmínky a obecné řešení

Je-li naším úkolem vyřešit danou diferenciální rovnici na blíže nespecifikovaném intervalu a bez blíže specifikovaných podmínek, obvykle se tím myslí nalézt její obecné řešení na maximálním možném intervalu. Máme-li naopak nalézt řešení vyhovující určitým počátečním podmínkám, je tím myšleno jedno konkrétní partikulární řešení splňující tyto podmínky. Obvykle jej získáme z obecného řešení určením konkrétní podoby příslušných konstant. Bližší informace o počátečních podmínkách nalezneme například v [5] na stranách 35 - 40.

Vraťme se ještě jednou k příkladu 1, kdy $\dot{Q} = -\left(\frac{R}{C}\right) Q$ byla obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu popisující vybíjení kondenzátoru skrze rezistor. Zanedlouho si ukážeme, jak se dobrat řešení této rovnice. Pro tentokrát nám ale postačí vědomí, že její obecné řešení má tvar

$$Q = K\mathrm{e}^{-\frac{R}{C}t}\,,$$

kde K je integrační konstanta, jejíž konkrétní hodnotu určíme z počáteční podmínky $Q(0) = Q_0$, a to tak, že ve výše uvedeném vztahu pro obecné řešení položíme $t = 0$. Celkově tak obdržíme partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce

$$Q = Q_0\mathrm{e}^{-\frac{R}{C}t}\,.$$

1.4 Otázka řešitelnosti

Pro naše účely postačí předpokládat, že každá rozumně zadaná diferenciální rovnice je řešitelná. Jak uvidíme dále v textu, příroda nabízí pestrou paletu takovýchto „rozumných“ rovnic.[2] Vzpomeňme příklad jedna, kdy diferenciální rovnice $\dot{Q} = -\left(\frac{R}{C}\right) Q$ popisovala vybíjení kondenzátoru skrze rezistor, tedy reálný fyzikální děj. S tímto vědomím se budeme zabývat nanejvýš rozsahem platnosti nalezeného řešení. Otázkou řešitelnosti se zabývá například zdroj [9] na stranách 6 - 9 nebo zdroj [5] na stranách 16 - 35, 46 - 53, 126 - 135 a 220 - 226.

[2] Skutečnost, že zákony přírody lze zachytit pomocí matematiky, vystihuje nejlépe citace Richarda Feynmana, amerického teoretického fyzika a držitele Nobelovy ceny za kvantovou elektrodynamiku.

„Pro ty, kteří neznají matematiku, je složité dostat se k takovým pocitům jako je krása, nejhlubší krása přírody… Pokud se chcete něco dozvědět o přírodě, oceňovat přírodu, je nutné rozumět jazyku, kterým mluví.“

2. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Na úvod poznamenejme, že v následujícím textu jsou jednotlivé typové rovnice uváděny v upravených tvarech, například $y' = f(y, x)$. Před zahájením výpočtu je proto nutné řešené rovnice na tento tvar nejprve upravit. Dále si uvědomme, že diferenciální rovnice jsou zpravidla řešitelné vícero způsoby. Za vhodné řešení obvykle považujeme to nejefektivnější ve smyslu časové úspory a elegance provedení.

2.1 Rovnice typu $y' = f(x)$, přímá integrace

Za předpokladu, že lze pravou stranu rovnice integrovat na intervalu I (čímž budeme nadále v tomto kontextu rozumět, že k dané funkci lze na I nalézt příslušnou primitivní funkci), získáme hledané obecné řešení přímou integrací

$$y(x) = \int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Obdržíme tak

$$y(x) = F(x) + C\,,$$

kde C je integrační konstanta a $F(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ na I. Řešení celé diferenciální rovnice tak přechází v hledání primitivní funkce. [9]

Příklad 2
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ na $\mathbb{R}$. Dále určete řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$.

Zadaná rovnice je patrně tvaru $y'(x) = f(x)$. Funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ je dále definovaná a spojitá na $\mathbb{R}$. Lze ji tudíž bez problému integrovat[3]

$$y = \int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

Pro řešení integrálu dále zavedeme substituci $w = 1+x^2$, kde $\mathrm{d}w = 2x\mathrm{d}x$. Získáme tak

$$y = \int \frac{\mathrm{d}w}{w} = \ln|w| + C\,,$$

po zpětné substituci pak

$$y = \ln|1 + x^2| + C\,,$$

kde C je integrační konstanta.

Absolutní hodnotu v argumentu logaritmu můžeme vypustit, neboť $(1 + x^2) > 0$ pro všechna reálná čísla. Námi hledané obecné řešení proto bude mít na $\mathbb{R}$ tvar

$$y = \ln(1 + x^2) + C\,.$$

[3] O skutečnosti, že ke každé funkci spojité na intervalu I existuje na I primitivní funkce, pojednává věta 49 na straně 58 ve zdroji [6].

Dalším úkolem bylo určit partikulární řešení vyhovující počáteční podmínce $y(0) = 0$. Pro tento účel využijeme získané obecné řešení, kdy pro konkrétní podobu konstanty C položíme $x = 0$. Nebo-li

$$y(0) = \ln(1 + 0^2) + C \Rightarrow 0 = \ln(1) + C \Rightarrow C = 0\,.$$

Pro hledané partikulární řešení vyhovující dané počáteční podmínce tak konečně bude platit

$$y = \ln(1 + x^2)\,.$$

Příklad 3

Uvažme *volný pád*, pohyb tělesa o hmotnosti m v homogenním tíhovém poli Země o konstantním gravitačním zrychlení g. Těleso vypustíme ve výšce h_0 nad povrchem země při $v_0 = 0$. Účinek odporových sil prostředí zanedbejme. Naším úkolem je určit funkce popisující rychlost a výšku tělesa v libovolném čase. Jinými slovy, hledáme funkce $v(t)$ a $x(t)$.

Protože se těleso pohybuje po přímce kolmé k povrchu Země, vystačíme si s jednodimenzionálním přiblížením, kdy na těleso působí pouze tíhová síla $F_g = -mg$ proti směru osy x a x-ová souřadnice značí aktuální výšku tělesa nad povrchem, viz obrázek 2.1.

Z druhého Newtonova zákona $F = ma$, volně přeloženého jako: „když zrychlení, tak síla“ [10], získáváme pohybovou rovnici

$$ma = -mg\,.$$

Obě strany krátíme m. Dále využijeme skutečnosti, že zrychlení udává změnu rychlosti za čas [10]. Což v řeči derivací znamená $a = \dot{v}$. Celou rovnici tak přepíšeme následujícím způsobem

$$\dot{v} = -g\,,$$

čímž obdržíme obyčejnou diferenciální rovnice ve tvaru $y'(x) = f(x)$. Uvědomíme si, že konstantní funkce $f(x) = g$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Získanou diferenciální rovnici proto můžeme řešit přímou integrací

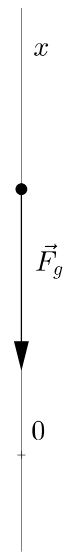
$$v = -\int g \mathrm{d}t = -gt + C\,,$$

kde C je integrační konstanta, jejíž přesnou hodnotu určíme z počáteční podmínky $v(0) = 0$. Ve vztahu pro v proto položíme $t = 0$, nebo-li

$$0 = -0 + C \Rightarrow C = 0\,.$$

Celkově tak získáme partikulární řešení ve tvaru

$$v(t) = -gt\,.$$



Obrázek 2.1: Volný pád

Zbývá určit funkci $x(t)$, popisující polohu tělesa v čase t. I v tomto případě si uvědomíme, že rychlost vyjadřuje změnu polohy za čas [10]. Což v řeči derivací znamená $v = \dot{x}$. Vztah pro $v(t)$ tak přepíšeme následujícím způsobem

$$\dot{x} = -gt\,.$$

Opět před sebou máme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru $y'(x) = f(x)$. Lineární funkce $f(x) = gt$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Získanou diferenciální rovnici proto můžeme opět řešit přímou integrací

$$x = \int -gt\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + C\,,$$

kde C je integrační konstanta. Dále využijeme počáteční podmínky $x(0) = h_0$. Po dosazení

$$h_0 = 0 + C \Rightarrow C = h_0$$

tak konečně získáme hledané partikulární řešení ve tvaru

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h_0\,.$$

2.2 Rovnice typu $y' = f(x)g(y)$ a separace proměnných

Výraz $f(x)g(y)$ v sobě skrývá skutečnost, že jsme schopni pravou stranu rovnice rozložit na součin funkce $f(x)$, závislé pouze na proměnné x s funkcí $g(y)$, závislé na y.

Například $x^2 - x^2\cos y$ snadno přepíšeme na $x^2(1 - \cos y)$, pak $f(x) = x^2$ a $g(y) = 1 - \cos y$. Naproti tomu ve výrazu $x^{y-3x} - y$ bychom rozklad na součin $f(x)g(y)$ hledali jen velmi těžko.

Vraťme se ale zpět k rovnici $y' = f(x)g(y)$. Dělením $g(y)$ ji rozdělíme na stranu proměnné x a na stranu proměnné y.

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)\,,$$

což lze udělat, jestliže $g(y) \neq 0$. $\big($V případě, kdy $g(y) = 0$ patrně řešíme rovnici $y'(x) = 0$, jejímž řešením je konstantní funkce vyhovující podmínce $g(y) = 0.\big)$

Lze-li dále rovnici integrovat, získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x\,,$$

a tedy

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C\,.$$

Přičemž $G(y)$ rozumíme primitivní funkci k $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ primitivní funkci k $f(x)$ a C integrační konstantou.

Hledanou funkci $y(x)$ konečně vyjádříme pomocí inverzní funkce

$$y(x) = G^{-1}\big(F(x) + C\big)\,.$$

[9]

Užité „lze-li rovnici integrovat“ však vyžaduje hlubší zdůvodnění, než pouhé připsání neurčitých integrálů. Uvědomme si, že y je funkce proměnné x, nebo-li $y = y(x)$. Řešená rovnice $\frac{y'}{g(y)} = f(x)$ tak má ve skutečnosti podobu

$$\frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)} = f(x)\,.$$

Jestliže se ale levá strana rovná pravé a pravou lze integrovat, můžeme dle proměnné x integrovat i stranu levou, nebo-li

$$\int \frac{y'(x)}{g\big(y(x)\big)}\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Využijeme-li substituci $y = y(x)$, kde $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$, celkově získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Příklad 4
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y' = x^2 + x^2y^2$.

Zadanou rovnici nejprve separujeme na stranu proměnné x a stranu proměnné y

$$\begin{aligned} y' &= x^2(1 + y^2) \\ \frac{y'}{1 + y^2} &= x^2\,. \end{aligned}$$

Funkce $f(x) = x^2$ a $g(y) = 1 + y^2$ jsou spojité na $\mathbb{R}$. Funkce $g(y)$ je dále na $\mathbb{R}$ nenulová. Můžeme proto přikročit k integraci

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \int x^2\mathrm{d}x\,.$$

Obě strany rovnice obsahují tabulkové integrály, jejichž řešením obdržíme

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^3}{3} + C\,.$$

Hledanou funkci $y(x)$ nakonec získáme pomocí funkce inverzní jako

$$y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3} + C\right).$$

Zadání následujícího příkladu je volně převzato z [3].

Příklad 5
Určete rychlost chemické reakce látek A, B, víte-li, že je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací reagujících látek. Předpokládejte dále, že během vytváření nového produktu se vždy kombinuje jedna molekula látky A s jednou molekulou látky B, a že jsou počáteční koncentrace obou látek navzájem různé.

Označme nejprve $a(t)$ koncentraci látky A a $b(t)$ koncentraci látky B v čase t. Aby reakce vůbec mohla započít, a tedy úloha měla smysl, musely být v čase $t = 0$ nutně počáteční koncentrace $a_0, b_0 > 0$.

Jelikož se spolu molekuly kombinují po jedné, klesají koncentrace obou látek téže rychlostí. Nebo-li

$$\dot{a} = \dot{b}\,.$$

Označíme-li dále $k(t)$ úbytek koncentrace $a(t)$, respektive $b(t)$, v čase t, bude úbytek popsán rovnicemi

$$\begin{aligned} k(t) &= a_0 - a(t) \\ k(t) &= b_0 - b(t)\,. \end{aligned}$$

Z nichž vyvodíme rovnice

$$a(t) = a_0 - k(t) \tag{2.1}$$
$$b(t) = b_0 - k(t)\,. \tag{2.2}$$

Derivujeme-li následně (2.1), (2.2) dle času t, obdržíme

$$\dot{k} = -\dot{a} = -\dot{b}\,.$$

Rychlost chemické reakce v čase t tedy popisuje $\dot{k}(t)$. Ze zadání víme, že je tato rychlost přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací reagujících látek. Nebo-li

$$\dot{k} = cab;\ c > 0\,,$$

kde konstantu úměrnosti c je možno určit experimentálně.

Po dosazení (2.1), (2.2) získáme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými

$$\dot{k} = c(a_0 - k)(b_0 - k)\,.$$

Pro $k \neq a_0$, $k \neq b_0$ rovnici upravíme na

$$\frac{\dot{k}}{(a_0 - k)(b_0 - k)} = c$$

a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}k}{(a_0 - k)(b_0 - k)} = \int c\mathrm{d}t\,.$$

Racionální funkci na levé straně nejprve pro $a_0 \neq b_0$ (viz zadání úlohy) upravíme pomocí rozkladu na parciální zlomky

$$\int \left(\frac{1}{b_0 - a_0} \frac{1}{a_0 - k} - \frac{1}{b_0 - a_0} \frac{1}{b_0 - k} \right) \mathrm{d}k = \int c \mathrm{d}t \,.$$

Následně určíme příslušné primitivní funkce jako

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 - b_0} \big(\ln |a_0 - k| - \ln |b_0 - k| \big) &= ct + K;\ K \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{a_0 - b_0} \ln \frac{|a_0 - k|}{|b_0 - k|} &= ct + K \,. \end{aligned}$$

Vzhledem ke skutečnosti, že výrazy $a_0 - k$, $b_0 - k$ představují nezáporné koncentrace látek A, B v čase t a námi stanovené dvojici podmínek $k \neq a_0, b_0$, můžeme odstranit obě absolutní hodnoty. Vynásobíme-li dále rovnici výrazem $a_0 - b_0$, získáme celkově

$$\ln \frac{a_0 - k}{b_0 - k} = (a_0 - b_0)(ct + K) \,.$$

Po následném odlogaritmování pak

$$\frac{a_0 - k}{b_0 - k} = \mathrm{e}^{K(a_0 - b_0)} \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} \,. \tag{2.3}$$

Než vyjádříme hledanou funkci $\dot{k}(t)$, nejprve pro zjednodušení určíme konstantu K z počáteční podmínky $k(0) = 0$ $\big($v čase $t = 0$ byl úbytek koncentrace nulový, reakce totiž ještě neprobíhala$\big)$. Po položení $t = 0$ obdržíme

$$\frac{a_0 - 0}{b_0 - 0} = \mathrm{e}^{K(a_0 - b_0)} \mathrm{e}^0 \Rightarrow K = \frac{1}{a_0 - b_0} \ln \frac{a_0}{b_0} \,.$$

Rovnici (2.3) dále s využitím vztahu pro K přepíšeme jako

$$\frac{a_0 - k}{b_0 - k} = \frac{a_0}{b_0} \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} \,.$$

Ze získané rovnice následně vydobudeme předpis pro funkci $k(t)$. Konkrétně

$$\begin{aligned} a_0 - k &= \frac{a_0}{b_0} \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} (b_0 - k) \\ \frac{a_0}{b_0} \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} k - k &= a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - a_0 \\ k(t) &= a_0 b_0 \frac{\mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - 1}{a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - b_0} \,. \end{aligned}$$

Hledanou funkci, popisující rychlost probíhající chemické reakce, konečně určíme jako derivaci získané funkce $k(t)$ dle času t. Za využití věty o derivaci podílu tak obdržíme

$$\dot{k}(t) = a_0 b_0 \frac{c(a_0 - b_0) \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} (a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - b_0)}{(a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - b_0)^2} +$$

$$- \frac{(\mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - 1) a_0 c (a_0 - b_0) \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t}}{(a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - b_0)^2} = c a_0 b_0 (a_0 - b_0)^2 \frac{\mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t}}{(a_0 \mathrm{e}^{c(a_0 - b_0)t} - b)^2} \,.$$

Než zcela opustíme metodu separace proměnných, uvažme rovnici typu $y'(x) = f(y)$, jíž lze touto metodou také řešit. Separace v tomto případě vede na rovnici

$$\frac{y'}{f(y)} = 1\,.$$

Za předpokladu, že $f(y) \neq 0$, a že lze levou stranu rovnice integrovat, získáme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int 1 \mathrm{d}x\,.$$

po následné integraci pak

$$F(y) + C = x\,,$$

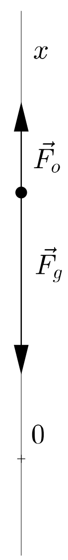
kde C je integrační konstanta a $F(y)$ primitivní funkce k $\frac{1}{f(y)}$. Pomocí inverzní funkce následně určíme hledanou funkci

$$y(x) = F^{-1}(x - C)\,.$$

Někdy ovšem bývá praktické ponechat si funkci $x(y)$, jak demonstruje následující úloha. [9]

Příklad 6

Vraťme se ještě jednou k volnému pádu z příkladu 3. Situace je velmi podobná. Těleso o hmotnosti m je vypuštěno rychlostí $v_0 = 0$ v homogenním tíhovém poli Země o konstantním gravitačním zrychlení g. Nyní však uvažujeme působení odporových sil prostředí. Naším úkolem je vyjádřit vzorec zachycující čas t, v němž těleso dosáhlo rychlosti v.[4]



Obrázek 2.2: Volný pád

Protože se těleso pohybuje po přímce kolmé k povrchu Země, vystačíme si opět s jednodimenzionálním přiblížením, kdy na těleso působí pouze tíhová síla F_g proti a odporová síla F_o ve směru osy x, viz obrázek 2.2.

Velikost odporové síly je přímo úměrná rychlosti pohybu tělesa. Můžeme ji proto popsat vztahem

$$F_o = kv\,.$$

[4] Při volném pádu těleso zrychluje až do okamžiku, kdy dojde k vyrovnání sil F_o a F_g, a tedy těleso dosáhne takzvané mezní rychlosti. Od tohoto okamžiku již těleso dále nezrychluje.

Na těleso tak působí výsledná síla

$$F = kv - mg\,,$$

kde k je konstanta charakteristická pro dané těleso.[5] Vyjdeme-li opět z druhého Newtonova zákona, získáme pohybovou rovnici

$$ma = kv - mg\,.$$

I v tomto případě využijeme vědomosti, že zrychlení je derivace rychlosti podle času

$$m\dot{v} = kv - mg\,.$$

Po krácení obou stran rovnice m získáváme obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru $y' = f(y)$

$$\dot{v} = \frac{kv}{m} - g\,,$$

kdy lineární funkce $f(y) = \frac{kv}{m} - g$ je spojitá na $\mathbb{R}$. Funkce $f(y)$ je dále nulová až v okamžiku, kdy dojde k rovnováze sil, a tedy k dosažení mezní rychlosti. Omezíme-li se na rychlosti před dosažením rovnováhy sil, můžeme výrazem $\frac{kv}{m} - g$ rovnici vydělit. Nebo-li

$$\frac{\dot{v}}{\frac{kv}{m} - g} = 1\,.$$

Funkci $t(v)$ lze proto vyjádřit jako

$$t = \int \frac{1}{\frac{kv}{m} - g}\mathrm{d}v = \int \frac{m}{kv - mg}\mathrm{d}v\,.$$

Integrál řešíme zavedením substituce $w = kv - mg$, kde $\mathrm{d}w = k\mathrm{d}v$

$$t = \frac{m}{k}\int \frac{1}{w}\mathrm{d}w = \frac{m}{k}\ln|w| + C\,,$$

po zpětné substituci pak

$$t = \frac{m}{k}\ln|kv - mg| + C\,.$$

Hodnotu integrační konstanty C, určíme z počáteční podmínky $v(0) = 0$. Položíme-li tak následně $v = 0$, $t = 0$, obdržíme

$$0 = \frac{m}{k}\ln|0 - mg| + C \Rightarrow C = -\frac{m}{k}\ln|-mg| = \frac{m}{k}\ln\frac{1}{mg}\,.$$

Pro hledanou funkci $t(v)$ tak celkově získáváme vztah

$$t(v) = \frac{m}{k}\ln|kv - mg| + \frac{m}{k}\ln\frac{1}{mg} = \frac{m}{k}\ln\frac{|kv - mg|}{mg}\,.$$

[5] Právě účinek odporových sil prostředí a s ním spojená charakteristická konstanta k je to, co činí onen propastný rychlostní rozdíl mezi pozvolna klesajícím ptačím pírkem a k zemi střemhlav se řítícím kusem betonu.

2.3 Rovnice typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, homogenní rovnice

Prvním krokem na cestě k řešení homogenní diferenciální rovnice je mnohdy její identifikace. Poznáme ji tak, že dosadíme-li do pravé strany této rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$ za x a y jejich t-násobky tx a ty, přičemž $t > 0$, zůstane hodnota pravé strany nezměněna. Jinými slovy

$$f(tx, ty) = f(x, y),\ t > 0\,.$$

Můžeme poté rovnou psát, že y' je funkcí $\frac{y}{x}$, nebo-li

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)\,.$$

Vidíme-li ovšem v zadané rovnici přímo závislost y' na $\frac{y}{x}$, pak můžeme rovnou říci, že se jedná o homogenní diferenciální rovnici a tento krok přeskakujeme.

Například diferenciální rovnice $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ je homogenní, neboť dosadíme-li tx za x a ty za y na pravé straně rovnice, získáme

$$f(tx, ty) = \frac{txty}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{txty}{t^2(x^2 + y^2)} = \frac{xy}{(x^2 + y^2)} = f(x, y)\,.$$

Mohli jsme ale přímo vytknout v čitateli i jmenovateli x^2, čímž bychom získali

$$y' = \frac{x^2 \frac{y}{x}}{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})} = \frac{\frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,,$$

kde je patrné na první pohled, že $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, a že se tedy jedná o homogenní diferenciální rovnici. [9]

Již víme, že před sebou máme homogenní diferenciální rovnici. Pro její řešení zavedeme substituci

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}\,,$$

Poté lze funkci $y(x)$ vyjádřit jako

$$y(x) = u(x)x$$

a s tím spojenou derivaci $y'(x)$ pak

$$y'(x) = u'(x)x + u(x)\,.$$

Řešená rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ tak celkově nabude tvaru

$$u'x + u = f(u)\,,$$

kdy $f(u)$ reprezentuje pravou stranu původní rovnice po zavedení substituce. Zjevně jsme získali diferenciální rovnici, jíž pro $f(u) \neq u$ a $x \neq 0$ umíme řešit separací proměnných (2.2)

$$\frac{u'}{f(u) - u} = \frac{1}{x}\,.$$

Výše uvedený vztah můžeme chápat jako obecný vzorec pro řešení homogenních diferenciálních rovnic. Mnohdy je však snazší k $u(x)$ dojít nyní osvojeným postupem.

Od $u(x)$ konečně přejdeme pomocí užitého substitučního vztahu zpět k hledané funkci $y(x)$, konkrétně

$$y(x) = u(x)x\,.$$

[9][12]

Příklad 7
Zjistěte, zda-li je $y' = -\frac{x+y}{x}$ homogenní diferenciální rovnicí. Následně nalezněte její obecné řešení na $\mathbb{R}/\{0\}$.

Zadaná diferenciální rovnice je zjevně homogenní, neboť

$$f(tx, ty) = -\frac{tx + ty}{tx} = -\frac{t(x+y)}{tx} = -\frac{x+y}{x} = f(x,y),\ t > 0\,.$$

Výraz na pravé straně rovnice nejprve upravme pro snazší zavedení substituce $u(x) = \frac{y}{x}$ vytknutím x v čitateli i jmenovateli zlomku

$$y' = -1 - \frac{y}{x}\,.$$

Po zavedení substituce na pravé straně rovnice získáme kýženou funkci

$$f(u) = -1 - u\,.$$

Předpis pro $f(u)$ následně dosadíme do vzorce $\frac{u'}{f(u)-u} = \frac{1}{x}$, získáme tak

$$\begin{aligned}\frac{u'}{-1-u-u} &= \frac{1}{x}\\ \frac{u'}{-1-2u} &= \frac{1}{x}\,.\end{aligned}$$

Obě strany rovnice dále vynásobíme minus jedničkou a integrujeme

$$\int \frac{du}{1+2u} = -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Integrál na levé straně řešíme zavedením substituce $w = 1 + 2u$, kde $\mathrm{d}w = 2du$. Po dosazení tak získáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w} &= -\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x\\ \frac{1}{2}\ln|w| &= -\ln|x| + C\end{aligned}$$

po zpětné substituci pak

$$\frac{1}{2}\ln|1+2u| = -\ln|x| + C\,.$$

Přeznačíme $K = \mathrm{e}^C$ a dle pravidel pro počítání s logaritmy rovnici upravíme následujícím způsobem

$$\ln \sqrt{|1+2u|} = \ln \frac{K}{|x|}\,.$$

Z rovnosti logaritmů plyne rovnost jejich argumentů

$$\sqrt{|1+2u|} = \frac{K}{|x|}\,.$$

Abychom získali u, nejprve obě strany rovnice umocníme na druhou

$$\begin{aligned} |1+2u| &= \left(\frac{K}{|x|}\right)^2 \\ 1+2u &= \frac{\pm K^2}{x^2}\,. \end{aligned}$$

Přeznačíme-li následně $\pm K^2 = L$, můžeme odstranit absolutní hodnoty na obou stranách rovnice, aniž bychom tím porušili původní rovnost

$$1+2u = \frac{L}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{x^2}-1\right)\,.$$

Hledanou funkci $y(x)$ konečně vyjádříme za pomoci získané funkce $u(x)$ z užitého substitučního vztahu jako

$$\begin{aligned} y(x) &= xu(x) \\ y(x) &= x\frac{1}{2}\left(\frac{L}{x^2}-1\right)\,. \end{aligned}$$

2.4 Rovnice typu $y' + a(x)y = b(x)$, lineární rovnice

Rovnici $y' + a(x)y = b(x)$ zveme *homogenní*, jestliže $b(x) \equiv 0$.[6] V opačném případě hovoříme o rovnici *nehomogenní* nebo také o *rovnici s pravou stranou.*

Nutno poznamenat, že název homogenní má ve smyslu lineárních diferenciálních rovnic zcela odlišný význam než v případě homogenních diferenciálních rovnic (2.3). Vyvarujme se proto jejich záměně či případnému ztotožnění!

Zaměřme se nejprve na řešení homogenní rovnice

$$y' + a(x)y = 0\,.$$

Převedeme-li člen $a(x)y$ na pravou stranu, obdržíme

$$y' = -a(x)y\,,$$

[6] Znak „≡“, volně překládáme jako „identicky rovno“, v tomto kontextu užíváme pro zdůraznění skutečnosti, že je hodnota funkce $b(x)$ na uvažovaném intervalu konstantně nulová, nezávisle na volbě x.

tedy rovnici se separovanými proměnnými (2.2). Povšimněme si nejprve, že $y = 0$ je vždy triviálním řešením této rovnice. Uvážíme proto pouze ostatní případy, kdy $y \neq 0$ a rovnici y vydělíme

$$\frac{y'}{y} = -a(x)\,.$$

Lze-li dále rovnici integrovat, získáme

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int a(x)\mathrm{d}x\\ \ln(Ky) &= -\int a(x)\mathrm{d}x;\ K \in \mathbb{R};\ Ky > 0\,.\end{aligned}$$

Následným odlogaritmováním pak obdržíme[7]

$$\begin{aligned}Ky &= \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x};\ K = \frac{1}{C}\\ y &= C\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.\end{aligned}$$

Z podmínky pro K plyne $C \in \mathbb{R}/\{0\}$. Pokud ovšem uvažovanou množinu rozšíříme o možnost $C = 0$, zahrneme do výsledného vzorce i zmiňované triviální řešení $y = 0$.

Nyní již máme k dispozici obecné řešení homogenní rovnice, pro jednoduchost, $y_h = Cy_0$, pak $y_0 = \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$. Označme dále y_p libovolné jedno řešení vyhovující rovnici s pravou stranou

$$y' + a(x)y = b(x)\,.$$

K nalezení tohoto partikulárního řešení y_p využijeme metodu zvanou variace konstant, spočívající v nahrazení konstanty C ze vztahu pro y_h funkcí $C(x)$, jinými slovy

$$y_p = C(x)y_0 = C(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Abychom získali konkrétní podobu funkce $C(x)$, musíme nejprve vyjádřit derivaci

$$y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - C(x)a(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Dosadíme-li následně y_p a y_p' do řešené nehomogenní rovnice $y' + a(x)y = b(x)$, získáme

$$\begin{aligned}C'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - C(x)a(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + C(x)a(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= b(x)\\ C'(x)\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= b(x)\,.\end{aligned}$$

Povšimněme si, že členy s $C(x)$ se odečetly, což lze považovat za kontrolu správnosti při řešení konkrétních lineárních rovnic.

Výsledkem je diferenciální rovnice vedoucí na přímou integraci. Nejprve osamostatníme $C'(x)$ na straně levé

$$C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\,.$$

[7] Získaný výsledný vzorec pro obecné řešení homogenní rovnice bývá v literatuře také zván obecný integrál homogenní rovnice. [12]

Následně přímou integrací určíme funkci

$$C(x) = \int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\,,$$

a s její pomocí pak konečnou podobu partikulárního řešení rovnice s pravou stranou

$$y_p = \int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Nyní máme k dispozici jak obecné řešení homogenní rovnice y_h, tak i partikulární řešení rovnice s pravou stranou y_p. Uvažme dále součet $y = y_h + y_p$. Dosadíme-li takto vyjádřené y do řešené rovnice s pravou stranou, získáme

$$(y_h + y_p)' + a(x)(y_h + y_p) = b(x)\,,$$

s využitím věty o derivaci součtu pak

$$y_h' + y_p' + a(x)y_h + a(x)y_p = b(x)\,.$$

Vhodným přeuspořádáním a uzávorkováním levé strany, konečně získáme

$$\big(y_h' + a(x)y_h\big) + \big(y_p' + a(x)y_p\big) = b(x)$$

Dále využijeme skutečnosti, že y_h řeší homogenní rovnici, nebo-li $y_h' + a(x)y_h = 0$, a y_p pak rovnici s pravou stranou, nebo-li $y_p' + a(x)y_p = b(x)$. Celkově tak obdržíme

$$(0) + \big(b\big)(x)) = b(x)\,.$$

To ale znamená, že námi navrhované $y = y_h + y_p$ je opět řešením rovnice s pravou stranou a vzhledem k libovůli v konstantě C se ve skutečnosti jedná přímo o řešení obecné.

S přihlédnutím k dříve odvozeným vztahům, tak pro obecné řešení rovnice s pravou stranou y plyne vztah[8]

$$\begin{aligned}
&y = y_h + y_p\\
&y = Cy_0 + C(x)y_0\\
&y = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.
\end{aligned}$$

Při řešení lineárních diferenciálních rovnic však raději upřednostněme nyní osvojený postup před memorováním právě získaných vzorců. [9]

[8] Získaný výsledný vzorec pro obecné řešení nehomogenní rovnice bývá v literatuře také zván obecný integrál nehomogenní rovnice. [12]

Příklad 8
Nalezněte obecné řešení lineární diferenciální rovnice $y' - y\cos x = \cos x$.

V souladu s osvojeným postupem nejprve určíme pomocí separace proměnných obecné řešení homogenní rovnice

$$y' - y\cos x = 0\,.$$

Člen $y\cos x$ převedeme na pravou stranu a pro $y \neq 0$ rovnici dělíme y, získáme tak

$$\frac{y'}{y} = cosx\,.$$

Funkce na obou stranách rovnice jsou spojité, rovnici proto můžeme integrovat

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \cos x \mathrm{d}x\,,$$

nebo-li

$$\ln(Ky) = \sin x;\; Ky > 0\,.$$

Po následném odlogaritmování pak obdržíme

$$Ky = \mathrm{e}^{\sin x}$$
$$y_h = C\mathrm{e}^{\sin x};\; C = \frac{1}{K}\,.$$

Ze získaného obecného řešení homogenní rovnice y_h následně za pomoci variace konstant vyjádříme partikulární řešení rovnice s pravou stranou

$$y_p = C(x)\mathrm{e}^{\sin x}$$

a s tím spojenou derivaci

$$y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{\sin x} + \cos x C(x)\mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

Pro konkrétní podobu funkce $C(x)$ dosadíme y_p a y_p' do řešené rovnice $y' - y\cos x = \cos x$, získáme tak

$$C'(x)\mathrm{e}^{\sin x} + \cos x C(x)\mathrm{e}^{\sin x} - \cos x C(x)\mathrm{e}^{\sin x} = \cos x\,.$$

V souladu s obecným postupem se členy s $C(x)$ odečtou.

$$C'(x)\mathrm{e}^{\sin x} = \cos x$$
$$C'(x) = \cos x \mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

Získáme tak diferenciální rovnici se spojitou funkcí na pravé straně, vedoucí na přímou integraci

$$C(x) = \int \cos x \mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\,.$$

Pro řešení integrálu zavedeme substituci $w = -sinx$, kde $\mathrm{d}w = -cosx\mathrm{d}x$. Celkově tak získáváme

$$C(x) = -\int \mathrm{e}^{w}\mathrm{d}w$$
$$C(x) = -\mathrm{e}^{w} + L;\; L \in \mathbb{R}\,.$$

Protože hledáme jedno konkrétní řešení rovnice s pravou stranou, volíme $L = 0$. Nebo-li

$$C(x) = -\mathrm{e}^{w}\,,$$

po zpětné substituci pak

$$C(x) = -\mathrm{e}^{-\sin x}\,.$$

Skrze $C(x)$ ze vztahu $y_p = C(x)\mathrm{e}^{\sin x}$ následně vyjádříme partikulární řešení rovnice s pravou stranou

$$\begin{aligned} y_p &= -\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{e}^{\sin x} \\ y_p &= -1\,, \end{aligned}$$

a za pomoci y_p ze vztahu $y = y_p + y_h$ konečně i hledané obecné řešení nehomogenní rovnice

$$y = -1 + C\mathrm{e}^{\sin x}\,.$$

Zadání následujícího příkladu je volně převzato z [11].

Příklad 9
Určete funkci $m(t)$ popisující hmotnost nečistot v jezeře o objemu V v čase t, je-li hladina vody v jezeře neměnná, tj. přítok, respektive odtok vody je konstantní. Pro jednoduchost dále předpokládejte, že rozložení znečišťujících částic v jezeře je rovnoměrné a rychlost v, kterou přitékají, je konstantní.

Protože je odtok rovnoměrný, můžeme předpokládat, že za den odteče V_0 vody. To ale znamená, že poměr $\frac{V_0}{V}$ udává, jak velká část vody se v jezeře vymění za jednotku času, v tomto případě den. Změnu hmotnosti nečistot v jezeře tak zachycuje lineární diferenciální rovnice

$$\dot{m}(t) = -\frac{V_0}{V}m(t) + v\,.$$

Zaměřme se nejprve na řešení příslušné homogenní rovnice

$$\dot{m} + \frac{V_0}{V}m = 0\,.$$

V souladu s (2.6) jde o rovnici se separovanými proměnnými

$$\dot{m} = -\frac{V_0}{V}m\,,$$

kterou pro $m \neq 0$ upravíme jako

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{V_0}{V}$$

a integrujeme

$$\begin{aligned} \int \frac{dm}{m} &= -\frac{V_0}{V}\int 1\mathrm{d}t \\ \ln(Km) &= -\frac{V_0}{V}t;\ Km > 0\,. \end{aligned}$$

Po následném odlogaritmování pak získáme obecné řešení homogenní rovnice

$$m_h = C\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t};\ K = \frac{1}{C}\,.$$

Dále svou pozornost obrátíme k rovnici s pravou stranou

$$\dot{m} + \frac{V_0}{V}m = v\,,$$

kdy využijeme získané řešení m_h a variaci konstant. Partikulární řešení rovnice s pravou stranou tak hledáme dle (2.2) ve tvaru

$$m_p = C(t)\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t}\,.$$

Nejprve vyjádříme derivaci

$$\dot{m}_p = \dot{C}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} - C\frac{V_0}{V}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t}$$

a následně jak m_p tak $\dot{m}_p$ dosadíme do řešené nehomogenní rovnice

$$\dot{C}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} - C\frac{V_0}{V}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} + \frac{V_0}{V}C\mathrm{e}^{-\frac{}{V}{}_0 Vt} = v\,.$$

Členy s $C(x)$ se odečtou

$$\dot{C}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} = v \Rightarrow \dot{C} = v\mathrm{e}^{\frac{V_0}{V}t}$$

a my tak získáme diferenciální rovnici řešitelnou přímou integrací

$$C = v\int \mathrm{e}^{\frac{V_0}{V}t}\mathrm{d}t\,.$$

Pro řešení integrálu zavedeme substituci $w = \frac{V_0}{V}t$, kde $\mathrm{d}w = \frac{V_0}{V}\mathrm{d}t$. Získáme tak

$$C = \frac{V}{V_0}v\int \mathrm{e}^{w}\mathrm{d}w$$

$$C = \frac{V}{V_0}v\mathrm{e}^{w} + L\,.$$

Protože hledáme jedno konkrétní řešení rovnice s pravou stranou, konstantu L položíme rovnu nule

$$C = \frac{V}{V_0}v\mathrm{e}^{\frac{V_0}{V}t}\,.$$

S využitím vztahu pro $C(t)$ dále vyjádříme

$$m_p = \frac{V}{V_0}v\mathrm{e}^{\frac{V_0}{V}t}\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} \Rightarrow m_p = \frac{V}{V_0}v$$

a skrze $m = m_h + m_p$ pak konečně i obecné řešení

$$m(t) = C\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} + \frac{V}{V_0}v\,.$$

Předpokládáme-li dále, že v čase $t = 0$ nebylo jezero znečištěno, tedy $m(0) = 0$, můžeme určit konstantu C jako

$$0 = C\mathrm{e}^0 + \frac{V}{V_0}v \Rightarrow C = -\frac{V}{V_0}v\,.$$

Pro hledanou funkci $m(t)$ pak celkově získáváme

$$m(t) = -\frac{V}{V_0}v\mathrm{e}^{-\frac{V_0}{V}t} + \frac{V}{V_0}v\,.$$

2.5 Rovnice typu $y' + a(x)y = b(x)y^n$, Bernoulliho rovnice

Při řešení rovnic tohoto typu obvykle uvažujeme $n > 1$, neboť pro $n = 0$ získáme nehomogenní lineární rovnici, pro $n = 1$ pak homogenní lineární rovnici.
Pro $n > 1$ a $y \neq 0$ nejprve celou rovnici vydělíme výrazem y^n ($y = 0$ je opět triviálním řešením) a získáme

$$\frac{y'}{y^n} + a(x)y^{1-n} = b(x)\,.$$

Následným zavedením substituce

$$u(x) = y(x)^{1-n} \Rightarrow u'(x) = (1-n)y(x)^{-n}y'$$

tak obdržíme nehomogenní lineární rovnici

$$\frac{u'}{1-n} + a(x)u = b(x)\,,$$

jejímž řešením získáme funkci $u(x)$ a od ní pak přejdeme zpět k hledané funkci $y(x)$ pomocí užitého substitučního vztahu

$$y = \sqrt[(1-n)]{u}\,.$$

Jinými slovy, řešení Bernoulliho rovnice převádíme v řešení lineární rovnice. [12]

Příklad 10
Převeďte řešení Bernoulliho rovnice $y' - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}xy^5$ na řešení příslušné lineární rovnice.

V souladu s osvojeným postupem rovnici nejprve dělíme y^5, získáme tak

$$\frac{y'}{y^5} - \frac{1}{4}\frac{1}{y^4} = \frac{1}{4}x\,.$$

Následně zavedeme substituci $u(x) = \frac{1}{y^4}$.

Pro derivaci $u'(x)$ tak bude platit

$$u' = -4\frac{y'}{y^5}\,.$$

Po zavedení substituce tak řešená rovnice přejde v rovnici

$$-\frac{1}{4}u' - \frac{1}{4}u = \frac{1}{4}x$$

a po vynásobení obou stran minus čtyřkou pak

$$u' + u = -x\,,$$

což je skutečně jednoduchá lineární rovnice. Pro zájemce ještě uveďme ve stručnosti její řešení. Mimořádně přitom využijeme dříve odvozeného vzorce

$$u(x) = C\mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + \int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{e}^{-\int a(x)\mathrm{d}x}\,.$$

Pro $a(x) = 1$, $b(x) = -x$ tak pro dílčí integrály bude platit

$$\int a(x)\mathrm{d}x = \int 1\mathrm{d}x = x$$

a

$$\int b(x)\mathrm{e}^{\int a(x)}\mathrm{d}x = \int -x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -x\mathrm{e}^x + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^x(x-1)\,,$$

přičemž jednotlivé integrační konstanty jsou již zahrnuty ve výše uvedeném obecném vzorci.

Po dosazení tedy pro $u(x)$ celkově získáváme vztah

$$u(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x(x-1)\mathrm{e}^{-x} = C\mathrm{e}^{-x} - x + 1\,.$$

Zpět k hledané funkci $y(x)$ konečně přejdeme pomocí užitého substitučního vztahu

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{u(x)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{C\mathrm{e}^{-x} - x + 1}}\,.$$

3. Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu

Stejně jako v případě rovnic prvního řádu, i v této kapitole jsou typové rovnice uváděny v upravených tvarech, na něž je řešené rovnice nejprve nutno převést. Ve všech případech dále předpokládáme spojitost uvažovaných funkcí, respektive derivací.

3.1 Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$, n-násobná integrace

Rovnice typu $y^{(n)} = f(x)$ řešíme n-násobnou integrací. Pro hledanou funkci $y(x)$ tak platí

$$y = \underbrace{\int \left(\int \left(\cdots \left(\int \right.\right.\right.}_{n\text{-krát}} f(x) \underbrace{\left.\left.\left. \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x \right) \cdots \right) \mathrm{d}x}_{n\text{-krát}} \, .$$

[9]

S rovnicí tohoto typu jsme se již setkali v příkladu 2 v podkapitole (2.1). Naším úkolem tehdy bylo od rovnice popisující zrychlení hmotného bodu při volném pádu dojít k funkcím popisujícím jeho rychlost a polohu. Úlohu jsme vyřešili dvojím nasazením přímé integrace. V případě funkce popisující polohu hmotného bodu jsme tak nevědomky využili právě dvojnásobnou integraci.

Příklad 11
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y''' = \cos x$. Dále určete partikulární řešení vyhovující počátečním podmínkám $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

Nejprve se zaměřme na obecné řešení. Na pravé straně řešené rovnice se nachází spojitá funkce. Užitím trojnásobné integrace tak postupně získáváme

$$\begin{aligned}
y'' &= \int \cos x \mathrm{d}x \\
y'' &= \sin x + C_1 \\
y' &= \int (\sin x + C_1) \mathrm{d}x \\
y' &= -\cos x + C_1 x + C_2 \\
y &= \int (-\cos x + C_1 x + C_2) \mathrm{d}x \\
y &= -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 \, .
\end{aligned}$$

Z počáteční podmínky $y''(0) = 0$ nejprve určíme konstantu C_1

$$0 = \sin 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \, .$$

Dále z podmínky $y'(0) = 0$ určíme konstantu C_2

$$0 = -\cos 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1\,.$$

Konečně z podmínky $y(0) = 0$ určíme konstantu C_3

$$y(0) = 0 = -\sin 0 + 1 \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = 0\,.$$

Pro hledané partikulární řešení tak celkově obdržíme vztah

$$y = -\sin x + x\,.$$

Povšimněme si, že stupeň volitelnosti rovnice odpovídá jejímu řádu n.

3.2 Rovnice typu $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$

Rovnice typu $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$ v sobě skrývají návrat k rovnicím prvního řádu (2.6). Po zavedením substituce

$$z(x) = y^{(n-1)}(x)\,,$$

kde příslušná derivace má podobu

$$z' = y^{(n)}\,,$$

řešená rovnice přechází na rovnici

$$z' = \tilde{f}(x, z)\,,$$

tedy skutečně na diferenciální rovnici prvního řádu. Řešením této rovnice dle (2.6) získáme funkci $z(x)$, s jejíž pomocí pak skrze $(n-1)$ násobnou integraci vyjádříme i hledanou funkci

$$y = \underbrace{\int\left(\int\left(\cdots\left(\int\right.\right.\right.}_{(n-1)\text{-krát}} z(x)\,\underbrace{\left.\left.\left.\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)\cdots\right)\mathrm{d}x}_{(n-1)\text{-krát}}\,.$$

[9]

Příklad 12
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $x^2y'' = (y')^2$.

Pro $x \neq 0$ nejprve rovnici dělíme x^2, získáme tak

$$y'' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2\,.$$

Následně zavedeme substituci

$$z(x) = y'(x)\,,$$

poté

$$z' = y'' .$$

Řešená rovnice tak přechází na rovnici

$$z' = \left(\frac{z}{x}\right)^2 ,$$

tedy rovnici prvního řádu vedoucí na separaci proměnných, kdy pro $z \neq 0$ obdržíme

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2} .$$

Na obou stranách rovnice se nacházejí spojité funkce, rovnici proto lze integrovat

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$
$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} + C;\ C \in \mathbb{R} .$$

Pro pomocnou funkci $z(x)$ tak po úpravách získáme předpis

$$z = \frac{x}{1 - Cx} .$$

K hledané funkci $y(x)$ konečně přejdeme skrze užitý substituční vztah jednonásobnou integrací

$$y = \int \frac{x}{1 - Cx} \mathrm{d}x .$$

Integrovanou racionální funkci nejprve upravíme pomocí dělení polynomů na

$$y = -\frac{1}{C} \int \left(1 - \frac{1}{1 - Cx}\right) \mathrm{d}x$$
$$y = -\frac{1}{C} \int 1 \mathrm{d}x + \frac{1}{C} \int \frac{1}{1 - Cx} \mathrm{d}x .$$

Následně druhý z integrálů na pravé straně převedeme zavedením substituce $w = 1 - Cx$, kde $\mathrm{d}w = -Cdx$, na tabulkový integrál $\frac{1}{C^2} \int \frac{1}{w} \mathrm{d}w$. Po vyřešení obou integrálů a následné zpětné substituci pak konečně pro hledanou funkci získáme vztah

$$y = -\frac{1}{C} x - \frac{1}{C^2} \ln|1 - Cx| + K .$$

3.3 Lineární rovnice n-tého řádu

Lineární diferenciální rovnicí řádu n rozumíme rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x) y = b(x);\ a_n \neq 0 .$$

V případě, že $b(x) \neq 0$ hovoříme o *rovnici nehomogenní*, respektive o *rovnici s pravou stranou*, v opačném případě, kdy $b(x) \equiv 0$ pak o *rovnici homogenní.*

Zaměřme se nejprve na homogenní rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x) y = 0 .$$

Stejně jako v případě lineárních rovnic prvního řádu, $y = 0$ je vždy triviálním řešením této rovnice.

Jsou-li dále y_1, y_2 řešeními homogenní rovnice, pak i jim příslušná lineární kombinace $y = c_1y_1 + c_2y_2$ řeší též homogenní rovnici. Což snadno dokážeme přímým dosazením

$$a_n\big(c_1y_1 + c_2y_2\big)^{(n)} + a_{n-1}(x)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big)^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) = 0\,.$$

Za pomoci věty o derivaci součtu tak získáme

$$a_nc_1y_1^{(n)} + a_nc_2y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)c_1y_1^{(n-1)} + a_{n-1}(x)c_2y_2^{(n-1)} +$$

$$+ \cdots + a_0(x)c_1y_1 + a_0(x)c_2y_2 = 0$$

a po následném přeuspořádání a přeuzávorkování pak

$$c_1\Big(a_ny_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y_1\Big) +$$

$$+ c_2\Big(a_ny_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y_2\Big) = 0\,.$$

Konečně využijeme předpokladu, že jak y_1, tak y_2 řeší původní homogenní rovnici, výrazy v závorkách jsou proto rovny nule

$$c_1 \cdot (0) + c_2 \cdot (0) = 0\,.$$

V řeči lineární algebry námi učiněné poznatky poukazují na skutečnost, že množina všech řešení homogenní soustavy tvoří vektorový prostor. Dimenze tohoto prostoru odpovídá řádu rovnice n a přísluší mu báze $\{y_1, \cdots, y_n\}$, jíž v terminologii diferenciálních rovnic zveme *fundamentální systém* (více informací o této problematice je k nalezení například v [7] na straně 33 - 35). Každé řešení homogenní rovnice tak lze vyjádřit jako lineární kombinaci

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n\,.$$

V případě lineárních rovnic prvního řádu (2.6) jsme ukázali, že obecné řešení nehomogenní rovnice y lze vyjádřit jako součet

$$y = y_h + y_p\,,$$

kde y_h značilo obecné řešení příslušné homogenní rovnice, y_p pak jedno konkrétní partikulární řešení rovnice s pravou stranou. V případě lineárních rovnic řádu n bychom při témže značení stejným postupem dospěli k témuž závěru.

Dalším významným pojmem na poli lineárních diferenciálních rovnic je *Wronského determinant* nebo též *wronskián*. Jak napovídá název, jedná se o determinant

$$W = w\big(f_1, f_2, \cdots, f_n\big)(x_0) = \begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & f_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}\,,$$

kde $f_1, f_2, \cdots, f_n$ jsou funkce, jež mají v bodě x_0 derivaci do řádu $n-1$ včetně.

Poznamenejme, že tvoří-li funkce $y_1, y_2, \cdots, y_n$ fundamentální systém dané lineární rovnice, je nutně $W = w\big(y_1, y_2, \cdots, y_n\big)(x) \neq 0$ v každém bodě x uvažovaného intervalu, na němž rovnici řešíme. Tyto funkce totiž musejí být lineárně nezávislé (více o determinantech regulárních matic k nalezení na straně 168 v [1]).

Další aplikaci wronskiánu při řešení lineárních rovnic si ukážeme v (3.3.3). [9][12][7]

3.3.1 Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Homogenní rovnicí s konstantními koeficienty rozumíme rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_0 y = 0;\; a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\,.$$

Uvažme y ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x};\; \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Dosazením navrhované funkce y do řešené rovnice tak získáme

$$\begin{aligned} a_n \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n)} + a_{n-1} \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n-1)} + a_{n-2} \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right)^{(n-2)} + \cdots + a_0 \left(\mathrm{e}^{\lambda x}\right) &= 0 \\ a_n \lambda^n \mathrm{e}^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} \mathrm{e}^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + a_0 \mathrm{e}^{\lambda x} &= 0 \\ \mathrm{e}^{\lambda x}\big(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0\big) &= 0\,. \end{aligned}$$

Uvědomíme si, že výraz $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je vždy větší než nula. Aby rovnost platila, nutně tedy musí být

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0\,.$$

O získané rovnici $\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$ hovoříme jako o *charakteristické rovnici* příslušné dané diferenciální rovnice a o polynomu $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ pak jako o *charakteristickém polynomu* této rovnice.

Jinými slovy, je-li λ kořenem charakteristické rovnice, je navrhovaná funkce $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ řešením příslušné homogenní rovnice. [7]

Řešení homogenní rovnice s konstantními koeficienty tak přechází v hledání řešení algebraické rovnice. O této problematice algebra říká, že algebraické rovnici stupně n přísluší n kořenů v oboru komplexních čísel. Přičemž některé z těchto kořenů se mohou opakovat, jinými slovy, být několikanásobné. Pro komplexní kořeny navíc platí, že se nutně vyskytují v komplexně sdružených dvojicích. [1]

Poznamenejme, že zkušenější počtáři během výpočtu v řešené rovnici automaticky nahrazují příslušné derivace patřičnými mocninami λ, přičemž mají na paměti, kde tkví podstata tohoto kroku.

Uvažme nejprve případ, kdy jsou kořeny charakteristické rovnice $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ navzájem různá reálná čísla. Lineárně nezávislé funkce $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \mathrm{e}^{\lambda_2 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ pak tvoří příslušný fundamentální systém. Obecné řešení tak lze vyjádřit jako

$$y_h = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}\,.$$

V případě, že je například $\lambda_i = \alpha + \beta i$, $\lambda_j = \alpha - \beta i$ dvojicí komplexně sdružených kořenů, vyjdeme z komplexního formalismu, kdy $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ a $e^{\alpha-\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$. Po vyjádření potřebných derivací obou funkcí a následném dosazení do příslušné homogenní rovnice zjišťujeme, že jak jejich reálná, tak jejich imaginární část řeší tuto rovnici (více na straně 45 - 46 v [7]). Jinými slovy, dvojici komplexně sdružených kořenů charakteristické rovnice $\lambda_i = \alpha + \beta i$, $\lambda_j = \alpha - \beta i$ odpovídá dvojice řešení $e^{\alpha}\cos\beta$, $e^{\alpha}\sin\beta$.

Dále v případě, kdy mají některé z kořenů charakteristické rovnice násobnost $k > 1$, je třeba tuto skutečnost zohlednit. Pro k násobné kořeny tak platí následující dvě tvrzení.

Je-li λ reálným kořenem charakteristické rovnice s násobností $k \geq 1$, pak funkce

$$e^{\lambda x}, x^1 e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

jsou nezávislými řešeními příslušné homogenní rovnice.

Je-li $\lambda = \alpha \pm \beta i$ dvojice komplexně sdružených komplexních kořenů charakteristické rovnice s násobností $k \geq 1$ (myšleno, že se tato dvojice opakuje k-krát), pak funkce

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x, x^1 e^{\alpha x}\cos\beta x, x^1 e^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{k-1} e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$$

řeší příslušnou homogenní rovnici.

Obě tvrzení o vícenásobných reálných, respektive komplexních kořenech jsou ve své obdobě dokázána například v [7] na stranách 43 - 46. Pro naše účely však postačí vycházet z jejich platnosti. [9][7]

Příklad 13
Nalezněte obecné řešení homogenní lineární rovnice $y^{(7)} - y^{(5)} - 2y''' = 0$.

Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o lineární homogenní rovnici s konstantními koeficienty, budeme její řešení hledat ve tvaru

$$y = e^{\lambda x}\,.$$

Po dosazení navrhovaného řešení do řešené rovnice obdržíme charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \lambda^7 - \lambda^5 - 2\lambda^3 &= 0 \\ \lambda^3(\lambda^4 - \lambda^2 - 2) &= 0 \\ \lambda^3(\lambda^2 - 2)(\lambda^2 + 1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že $\lambda = 0$ je trojnásobným kořenem charakteristické rovnice, čemuž odpovídají řešení $y_1 = e^{0x}, y_2 = x^1 e^{0x}, y_3 = x^2 e^{0x}$, nebo-li $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$. Dalšími kořeny jsou $\lambda = \pm\sqrt{2}$, jimž odpovídají řešení $y_4 = e^{-\sqrt{2}x}$, $y_5 = e^{\sqrt{2}x}$ a dvojice komplexně sdružených kořenů $\lambda = 0 \pm 1i$ s násobností jedna, jíž přísluší řešení $y_6 = e^0 \cos 1x$, $y_7 = e^0 \sin 1x$, nebo-li $y_6 = \cos x, y_7 = \sin x$. Těchto sedm funkcí tvoří fundamentální systém řešené homogenní rovnice.

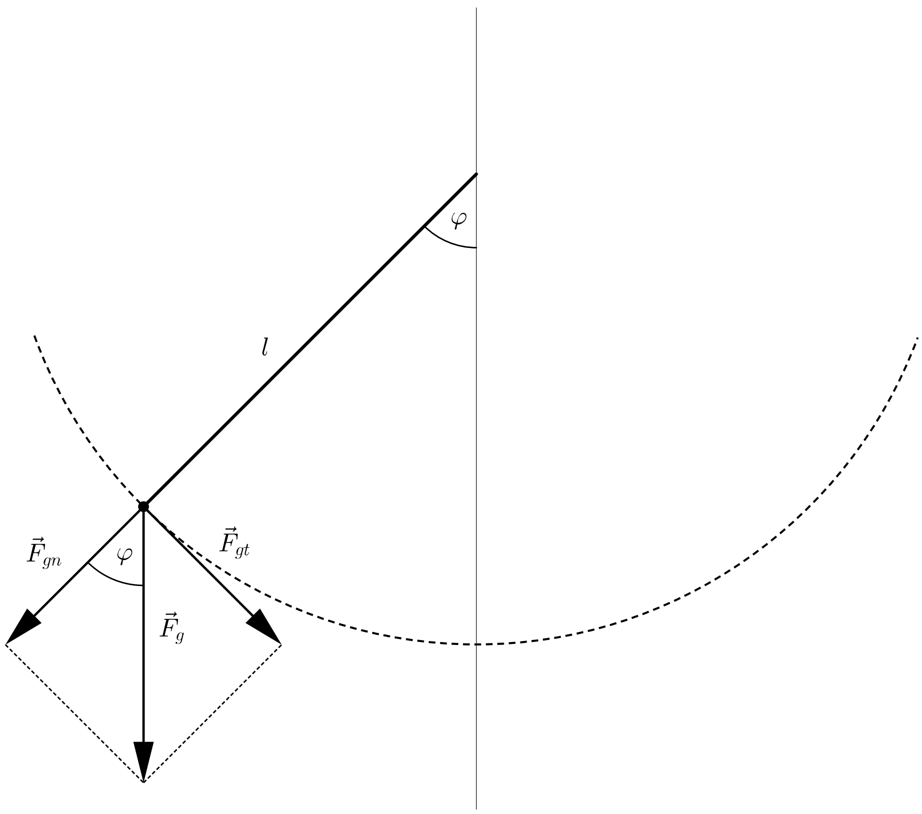
Pro hledané obecné řešení tak bude platit

$$y_h = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} + c_5 \mathrm{e}^{\sqrt{2}x} + c_6 \cos x + c_7 \sin x\,.$$

Zadání následujícího příkladu je volně převzato z [9].

Příklad 14
Uvažte matematické kyvadlo, kuličku o hmotnosti $m > 0$ zavěšenou na vlákně délky $l > 0$. Po vychýlení z rovnovážné polohy začne kulička kmitat. Určete funkci $\varphi(t)$ popisující úhlovou odchylku od rovnovážné polohy v čase t. Pro zjednodušení předpokládejte pouze malé odchylky, tj. odchylky do 5 stupňů. Odpor prostředí zanedbejte.

Uvědomíme si, že směrem kolmo k zemi na kuličku působí gravitační síla $F_g = mg$, kde g je gravitační konstanta. Její složku příslušející směru tečny ke kuličkou opisované kružnici tak můžeme vyjádřit jako $F_{gt} = -mg \sin\varphi$, viz obrázek 3.1. Pro délku oblouku kružnice s odpovídající úhlu φ dále platí $s = l\varphi$ a pro s tím spojenou časovou derivaci pak $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$.



Obrázek 3.1: Matematické kyvadlo

Po následném využití druhého Newtonova zákona $F = ma$ tak v rámci tečné složky získáme diferenciální rovnici

$$m\ddot{s} = -mg\sin\varphi\,.$$

S přihlédnutím k dříve uvedenému vztahu pro druhou derivaci $\ddot{s}$ a skutečnosti, že pro malé úhly je $\sin\varphi \cong \varphi$ tato rovnice nabude tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0\,.$$

Získanou homogenní rovnici s konstantními koeficienty dále řešíme v souladu s (3.3.1). Nejprve proto určíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \frac{g}{l} &= 0 \\ \lambda^2 &= -\frac{g}{l} \\ \lambda &= \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}\,. \end{aligned}$$

Protože jsme obdrželi jednonásobnou dvojici komplexně sdružených kořenů, vyjádříme příslušná řešení jako $\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$, $\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$ a hledané obecné řešení pak ve tvaru

$$\varphi_h(t) = c_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t + c_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t\,.$$

3.3.2 Rovnice se speciální pravou stranou

Lineární rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou nebo stručněji rovnicí se speciální pravou stranou, rozumíme rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_0 y = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_p(x)\cos\beta x + Q_q(x)\sin\beta x\big);$$

$$a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\,,$$

kde $P_p(x)$, $Q_q(x)$ jsou obecné polynomy stupně p, q, přičemž připouštíme i možnost $P_p(x) \equiv 0$ nebo $Q_q(x) \equiv 0$

Vzpomeneme si, že obecné řešení nehomogenní lineární rovnice lze vyjádřit jako

$$y = y_p + y_h\,,$$

kde y_h je obecné řešení homogenní rovnice a y_p jedno konkrétní řešení rovnice s pravou stranou.

Jak se dobrat obecného řešení y_h homogenní rovnice s konstantními koeficienty jsme si ukázali v (3.3.1). Zbývá ukázat, jak získat partikulární řešení rovnice nehomogenní.

Pro jednoduchost nejprve uvažme případ, kdy konstanty $\alpha, \beta = 0$, zjevně pak řešíme rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_0 y = P_p(x)\,.$$

Na pravé straně rovnice tedy máme polynom $P_p(x)$, na straně levé pak lineární kombinaci derivací funkce y řádu $k = m, m+1, \cdots, n$; $m \geq 0$. Uvědomíme si, že derivací polynomu je opět polynom stupně o jedna nižšího. To ale znamená, že polynom na pravé straně můžeme chápat jako polynom vzniklý lineární kombinací derivací jiného polynomu. Partikulární řešení tak hledáme jako polynom stupně $p + m$. V jednodušším případě, kdy $m = 0$, půjde o polynom $S_p(x) = s_p x^p + s_{p-1} x^{p-1} + \cdots + s_1 x + s_0$ stupně p, a tedy

$$y_p = S_p(x)\,.$$

V případě, kdy $m > 0$, tedy v případě, kdy 0 je m-násobným kořenem charakteristické rovnice, všechny členy navrhovaného polynomu stupně menšího než m budou po následném dosazení do rovnice derivováním vynulovány, a budou tedy řešením homogenní rovnice. Jinými slovy, konstanty u těchto členů lze položit rovny nule. Jako partikulární řešení proto volíme

$$y_p = x^m S_p(x)\,.$$

Konkrétní podobu koeficientů $s_p, s_{p-1}, \cdots, s_1, s_0$ následně určíme z rovnosti polynomů po dosazení námi navrhovaného partikulárního řešení do řešené rovnice. [9]

Příklad 15
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y' = x$

Nejprve se zaměřme na obecné řešení příslušné homogenní rovnice $y'' - y' = 0$. V souladu s (3.3.1) hledáme jednotlivá řešení ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Pro tyto účely určujeme příslušnou charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \lambda &= 0 \\ \lambda(\lambda - 1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Vidíme, že charakteristická rovnice má dva kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Těmto kořenům přísluší funkce $y_1 = 1$ a $y_2 = \mathrm{e}^x$. Hledané obecné řešení má tak tvar

$$y_h = c_1 + c_2 \mathrm{e}^x\,.$$

Zbývá určit partikulární řešení rovnice s pravou stranou y_p. Povšimneme si, že na pravé straně rovnice je polynom stupně $p = 1$. Zohledníme dále skutečnost, že je nula jednonásobným kořenem charakteristické rovnice a hledané partikulární řešení navrhujeme ve tvaru

$$y_p = x^1 S_1(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx\,.$$

Pro derivace y_p', y_p'' bude platit

$$\begin{aligned} y_p' &= 2ax + b \\ y_p'' &= 2a\,. \end{aligned}$$

Následným dosazením y_p', y_p'' do řešené rovnice pak získáme

$$
\begin{aligned}
2a - 2ax - b &= x \\
(-2a)x + (2a - b) &= 1x + 0\,.
\end{aligned}
$$

Aby se polynom na straně pravé rovnal polynomu na straně levé, musejí se rovnat i koeficienty u odpovídajících si mocnin. Porovnáváním dílčích koeficientů tak dojdeme k soustavě rovnic

$$
\begin{aligned}
-2a &= 1 \\
2a - b &= 0\,,
\end{aligned}
$$

jíž přísluší řešení $a = -\frac{1}{2}, b = -1$. Pro y_p tak celkově získáváme tvar

$$y_p = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

a pro hledané obecné řešení pak

$$y = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + -\frac{1}{2}x^2 - x\,.$$

Již víme, jak postupovat v jednodušším případě, kdy $\alpha, \beta = 0$. Uvažme dále možnost, že jsou tyto konstanty libovolná reálná čísla, řešíme pak rovnici

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \cdots + a_0 y = \mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_p(x)\cos\beta x + Q_q(x)\sin\beta x\big)\,.$$

Vystačíme si s tvrzením([7] strana 46 - 48), že je-li $\lambda = \alpha + \beta i$ k-násobným kořenem charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = x^k\mathrm{e}^{\alpha x}\big(S_s(x)\cos\beta x + T_s(x)\sin\beta x\big)\,,$$

kde s odpovídá většímu z čísel p, q a S_s, T_s jsou obecné polynomy stupně s.

Stejně jako v předchozím zjednodušeném přiblížení i nyní navrhované řešení y_p dosadíme do řešené rovnice a z následné rovnosti odpovídajících si koeficientů získáme soustavu rovnic, a jejím řešením pak i konkrétní podobu jednotlivých koeficientů. [7]

Příklad 16
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y' = x^2\mathrm{e}^x$.

Opět vyjdeme ze skutečnosti, že obecné řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako $y = y_h + y_p$. Homogenní rovnici $y'' - y' = 0$ jsme již řešili v příkladu 15. Využijme proto dříve získaný výsledek

$$y_h = c_1 + c_2\mathrm{e}^x\,.$$

Zbývá určit partikulární řešení nehomogenní rovnice y_p. Uvědomíme si, že jde o rovnice se speciální pravou stranou ve tvaru $P_p(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $P_2(x) = x^2$, $\beta = 0$, $\alpha = 1$ a $s = 2$. Dále vzhledem ke skutečnosti, že je $\lambda = 1 + 0i = 1$ jednonásobným kořenem této rovnice, pokládáme $k = 1$. Hledané partikulární řešení tak celkově navrhujeme ve tvaru

$$y_p = x^1 \mathrm{e}^{1x}\big(S_2(x)\cos 0x + T_2(x)\sin 0x\big) = x\mathrm{e}^x(ax^2 + bx + c) = \mathrm{e}^x(ax^3 + bx^2 + cx)\,.$$

Pro derivace y_p', y_p'' tak platí

$$\begin{aligned} y_p' &= \mathrm{e}^x(ax^3 + bx^2 + cx) + \mathrm{e}^x(3ax^2 + 2bx + c) \\ &= \mathrm{e}^x\big(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c\big) \\ y_p'' &= \mathrm{e}^x\big(ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + c\big) + \mathrm{e}^x\big(3ax^2 + 2(3a+b)x + (2b+c)\big) \\ &= \mathrm{e}^x\big(ax^3 + (6a+b)x^2 + (6a+4b+c)x\big) + (2b+2c)\,. \end{aligned}$$

Následným dosazením y_p', y_p'' do řešené rovnice obdržíme

$$\mathrm{e}^x\big(ax^3+(6a+b)x^2+(6a+4b+c)x\big)+(2b+2c)-\mathrm{e}^x\big(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+c\big) = \\ = x^2\mathrm{e}^x$$

Po krácení výrazem e^x a dalších úpravách získáme

$$\begin{aligned} 3ax^2 + (6a+2b)x + (2b+c) &= x^2 \\ 3ax^2 + (6a+2b)x + (2b+c) &= x^2 + 0x + 0\,. \end{aligned}$$

Porovnáváním koeficientů u příslušných mocnin dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} 3a &= 1 \\ 6a + 2b &= 0 \\ 2b + c &= 0\,, \end{aligned}$$

jíž přísluší řešení $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$ a $c = 2$. Pro partikulární řešení tak celkově získáváme

$$y_p = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)$$

a pro hledané obecné řešení nehomogenní rovnice pak

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right)\,.$$

Příklad 17

Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $y'' - y' = \mathrm{e}^x \cos x$.

Stejně jako v příkladu 16 i nyní vyjdeme ze skutečnosti, že obecné řešení nehomogenní rovnice lze vyjádřit jako $y = y_h + y_p$. Homogenní rovnici $y'' - y' = 0$ jsme již řešili v příkladu 15. Využijeme proto opět dříve získaný výsledek

$$y_h = c_1 + c_2\mathrm{e}^x\,.$$

Zbývá určit partikulární řešení nehomogenní rovnice y_p. Uvědomíme si, že jde o rovnici se speciální pravou stranou ve tvaru $\mathrm{e}^{\alpha x}\big(P_p(x)\cos\beta x + Q_q(x)\sin\beta x\big)$, kde $P_0(x) = 1$, $Q_0(x) \equiv 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 1$ a nejvyšší v ní obsažený polynom má stupeň $s = 0$. Dále vzhledem ke skutečnosti, že $\lambda = 1 + 1i$ není kořenem charakteristické rovnice, pokládáme $k = 0$. Hledané partikulární řešení tak celkově navrhujeme ve tvaru

$$y_p = x^0 \mathrm{e}^{1x}\big(S_0(x)\cos(1x) + T_0(x)\sin(1x)\big) = \mathrm{e}^x\big(a\cos + b\sin x\big)\,.$$

Pro derivace y_p', y_p'' bude platit

$$\begin{aligned}
y_p' &= \mathrm{e}^x(a\cos x + b\sin x) + \mathrm{e}^x(-a\sin x + b\cos x)\\
&= \mathrm{e}^x\big((a+b)\cos x + (b-a)\sin x\big)\\
y_p'' &= \mathrm{e}^x\big((a+b)\cos x + (b-a)\sin x\big) + \mathrm{e}^x\big(-(a+b)\sin x + (b-a)\cos x\big)\\
&= \mathrm{e}^x(2b\cos x + -2a\sin x)\,.
\end{aligned}$$

Následným dosazením y_p', y_p'' do řešené rovnice tak obdržíme

$$\mathrm{e}^x(2b\cos x + -2a\sin x) +$$

$$-\mathrm{e}^x\big((a+b)\cos x + (b-a)\sin x\big) = \cos x \mathrm{e}^x\,.$$

Po krácení výrazem e^x a dalších úpravách pak

$$\begin{aligned}
(b-a)\cos x + (-b-a)\sin x &= \cos x\\
(b-a)\cos x + (-b-a)\sin x &= 1\cos x + 0\sin x\,.
\end{aligned}$$

Porovnáváním koeficientů u příslušných goniometrických funkcí dojdeme k soustavě rovnic

$$\begin{aligned}
b - a &= 1\\
-a - b &= 0\,.
\end{aligned}$$

jíž přísluší řešení $a = -\frac{1}{2}$ a $b = \frac{1}{2}$. Pro hledané partikulární řešení tak celkově získáváme

$$y_p = \mathrm{e}^x\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)$$

a pro obecné řešení nehomogenní rovnice pak

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right)\,.$$

Zadání následujícího příkladu je volně převzato z [2].

Příklad 18
Cena zboží $C(t)$ v čase t se upravuje na základě převisu mezi nabídkou a poptávkou. Označíme-li $N(t)$ počet nabízených kusů a $P(t)$ počet kusů poptávaných, bude změna ceny zboží zachycena rovnicí

$$\dot{C} = \alpha(P - N);\ \alpha > 0\,.$$

Bude-li nabídka N vyšší než poptávka P, reakcí bude tlak na snížení ceny. Bude-li naopak poptávka P vyšší než nabídka N, reakcí bude navýšení ceny. Konstanta α přitom udává míru závislosti změny ceny na rozdílu mezi P a N.

Určete funkci $C(t)$, předpokládáte-li nejen tlak na snížení ceny v důsledku převisu nabídky nad poptávkou, ale i v důsledku nahromadění zásoby neprodaného zboží. Pro jednoduchost dále předpokládejte, že funkce $P(t)$, $N(t)$ jsou spojitě diferencovatelné, že v případě převisu poptávky nad nabídkou bude poptávka vždy uspokojena zbožím z rezerv, a že zásoby neprodaného zboží jsou nezáporné, tj. budou souviset pouze s tlakem na snížení ceny zboží.

Zásobu neprodaného zboží nahromaděnou za čas t můžeme zachytit integrálem

$$Z(t) = \int\limits_0^t \big(N(s) - P(s)\big) ds\,.$$

Původní rovnici tak rozšíříme na

$$\dot{C} = \alpha(P - N) - \beta \int\limits_0^t \big(N(s) - P(s)\big) ds;\ \beta > 0\,.$$

Nově přidaný člen přitom určuje úpravu ceny v důsledku nahromadění zásoby neprodaného zboží v předchozím období. Konstanta β pak obdobně jako α udává míru této závislosti.

Abychom se zbavili integrálu, rovnici derivujeme dle t. Obdržíme

$$\ddot{C} = \alpha(\dot{P} - \dot{N}) - \beta(N - P)\,.$$

Předpokládáme-li dále lineární závislosti mezi $P(t)$, $C(t)$ a $N(t)$, $C(t)$, získáme

$$P(t) = a + bC(t) \Rightarrow \dot{P} = b\dot{C}$$
$$N(t) = c + dC(t) \Rightarrow \dot{N} = d\dot{C}\,.$$

S využitím těchto poznatků tak řešenou rovnici převedeme na

$$\ddot{C} = \alpha(b\dot{C} - d\dot{C}) - \beta(c + dC - a - bC)\,,$$

po dalších úpravách pak na

$$\ddot{C} + \alpha(d - b)\dot{C} + \beta(d - b)C = \beta(a - c)\,.$$

Tímto způsobem jsme dospěli k lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. V souladu s (3.3.2) se nejprve zaměříme na obecné řešení homogenní rovnice

$$\ddot{C} + \alpha(d-b)\dot{C} + \beta(d-b)C = 0 \,.$$

Charakteristickou rovnici tedy určujeme jako

$$\lambda^2 + \alpha(d-b)\lambda + \beta(d-b)C = 0$$

a jí příslušné kořeny, jež uvažujeme reálné a navzájem různé, pak jako

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha(d-b) \pm \sqrt{\alpha^2(d-b)^2 - 4\beta(d-b)}}{2} \,.$$

Omezíme-li se dále na značení λ_1, λ_2, pro obecné řešení homogenní rovnice získáme vztah

$$C_h = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \,.$$

Svou pozornost následně obraťme na partikulární řešení rovnice s pravou stranou

$$\ddot{C} + \alpha(d-b)\dot{C} + \beta(d-b)C = \beta(a-c) \,.$$

Jelikož je pravá strana tvořena polynomem stupně nula a 0 není kořenem charakteristické rovnice, navrhujeme partikulární řešení ve tvaru

$$C_p = K;\ K \in \mathbb{R} \,.$$

Vyjádříme potřebné derivace

$$\dot{C}_p = 0 \Rightarrow \ddot{C}_p = 0$$

a po dosazení C_p, $\dot{C}_p$ a $\ddot{C}_p$ do řešené rovnice získáme

$$\beta(d-b)K = \beta(a-c) \Rightarrow K = \frac{a-c}{d-b} \,.$$

Pro hledané obecné řešení nehomogenní rovnice tak celkově platí

$$C(t) = C_h + C_p = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \frac{a-c}{d-b} \,.$$

3.3.3 Variace konstant a aplikace wronskiánu

Stejně jako v případě lineárních rovnic prvního řádu (2.6) i nyní máme možnost pomocí variace konstant ze znalosti obecného řešení y_h homogenní rovnice

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)y = 0;\ a_n \neq 0$$

určit jedno konkrétní řešení y_p příslušné rovnice s pravou stranou

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)y = b(x)\,.$$

Konkrétně, je-li

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n = \sum_{k=1}^{n} c_ky_k;\ c_1, c_2, \cdots, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

pak y_p hledáme nahrazením konstant $c_1, c_2, \cdots, c_n$ funkcemi $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$, nebo-li

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k\,.$$

Celý problém tak přechází v hledání vhodných funkcí $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$.

Vzhledem ke skutečnosti, že hledáme libovolné jedno řešení y_p rovnice s pravou stranou, můžeme na funkce $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ klást podmínky tak, aby cesta k nim byla co nejsnazší.

Uvědomíme si, že při užití hrubé síly bychom do řešené rovnice dosazovali y_p v příslušných derivacích. Podmínky proto budeme volit tak, aby vztahy pro derivace byly co nejjednodušší. Pro první derivaci y_p' tak dle věty o derivaci součtu platí

$$y_p' = \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k + \sum_{k=0}^{n} c_k(x)y_k'\,.$$

Požadujeme-li však, aby $\sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k = 0$, předchozí výraz se zjednoduší na

$$y_p' = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k'\,.$$

Pro druhou derivaci y_p'' bude dále platit

$$y_p'' = \sum_{k=1}^{n} c_k'(x)y_k' + \sum_{k=0}^{n} c_k(x)y_k''\,.$$

Požadujeme-li však aby $\sum_{k=0}^{n} c_k'(x)y_k' = 0$, předchozí výraz se zjednoduší na

$$y_p'' = +\sum_{k=1}^{n} c_k(x)y_k''\,.$$

Zobecníme-li náš požadavek na $\sum_{k=0}^{n} c_k'(x) y_k^{(j)} = 0$; $j = 0, 1, \cdots, n-2$, získáme obdobně

$$y_p^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(j)};\ j = 0, 1, \cdots, n-1\,.$$

Konečně pak pro $y^{(n)}$ obdržíme vztah

$$y_p^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{n} c_k(x) y_k^{(n)}\,.$$

Tímto způsobem jsme pro funkce $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ určili $n-1$ podmínek. Poslední n-tá podmínka vyplývá ze skutečnosti, že navrhované y_p je řešením rovnice s pravou stranou, a tedy

$$\begin{aligned}
a_n y_p^{(n)} + a_{n-1}(x) y_p^{(n-1)} + a_{n-2}(x) y_p^{(n-2)} + \cdots + a_0(x) y_p &= b(x)\\
a_n(x) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{(n)} \right) + &\\
+ \cdots + a_1(x) \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k' + a_0(x) \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k &= b(x)\\
a_n(x) \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(x) a_n(x) y_k^{(n)} + \right. &\\
\left. + \cdots + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) a_1(x) y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) a_0(x) y_k \right) &= b(x)\\
a_n(x) \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y_k^{(j)} &= b(x)\,.
\end{aligned}$$

Povšimneme si, že pro každé $k = 1, 2, \cdots, n$ má příslušný sčítanec vnější sumy tvar $c_k(x) \sum_{j=0}^{n} a_j(x) y_k^{(j)}$. Nebo-li $c_k(x)$ krát homogenní rovnice po dosazení y_k. Využijeme-li následně, že y_k řeší homogenní rovnici, získáme

$$\begin{aligned}
a_n(x) \sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} &= b(x)\\
\sum_{k=1}^{n} c_k'(x) y_k^{(n-1)} &= \frac{b(x)}{a_n(x)}\,.
\end{aligned}$$

Našich n podmínek na funkce $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ v podstatě představuje soustavu n lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + \cdots + c_n'(x) y_n &= 0\\
c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + \cdots + c_n'(x) y_n' &= 0\\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots\\
c_1'(x) y_1^{(n-1)} + c_2'(x) y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x) y_n^{(n-1)} &= \frac{b(x)}{a_n(x)}\,.
\end{aligned}$$

Determinantem matice této soustavy je wronskián $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)(x)$, který je dle předpokladu, že $y_1, y_2, \cdots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice, nenulový (3.3). V řeči lineární algebry tato skutečnost ovšem znamená, že funkce $c_1'(x), c_2'(x), \cdots, c_n'(x)$ jsou z rovnic daných námi zvolenými podmínkami určeny jednoznačně.

Funkce $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ konečně získáme jako příslušné primitivní funkce funkcí $c_1'(x), c_2'(x), \cdots, c_n'(x)$.

Pro určení $c_1'(x), c_2'(x), \cdots, c_n'(x)$ můžeme využít také Cramerovo pravidlo([1] strana 181 - 182), kdy

$$c_i' = w^{-1}\big(y_1, y_2, \cdots, y_n\big)(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & 0 & y_i+1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & 0 & y_i'+1 & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & \frac{b(x)}{a_n(x)} & y_i^{(n-1)}+1 & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

[7]

Příklad 19
Určete obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$.

Nejprve určíme v souladu s (3.3.1) charakteristickou rovnici příslušné homogenní rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$$
$$(\lambda - 1)^2 = 0\,.$$

Vidíme, že charakteristické rovnici přísluší dvojnásobný kořen $\lambda = 1$. Její obecné řešení proto vyjádříme ve tvaru

$$y_h = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x\,.$$

Abychom určili jedno konkrétní řešení rovnice s pravou stranou y_p, použijeme variaci konstant

$$y_p = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\,.$$

Následně vyjádříme y_p' jako

$$y_p' = c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)x\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x$$

a stanovíme první podmínku pro hledané funkce

$$c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)x\mathrm{e}^x = 0\,.$$

S ohledem na naši podmínku pak vztah pro y_p' upravíme na

$$y_p' = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\,.$$

Dále vyjádříme y_p'' jako

$$y_p'' = c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)x\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\,,$$

s přihlédnutím k naší podmínce pak

$$y_p'' = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x \,.$$

Stanovíme druhou podmínku, že y_p je řešením rovnice s pravou stranou a získané y_p, y_p' a y_p'' dosadíme do řešené nehomogenní rovnice, obdržíme tak

$$\big(c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\big) - 2\big(c_1(x)\mathrm{e}^x +$$

$$+ c_2(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\big) + \big(c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)x\mathrm{e}^x\big) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,,$$

po úpravách pak

$$c_2'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Což je diferenciální rovnice vedoucí na přímou integraci

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ c_2(x) &= \ln|x| + K_1\,. \end{aligned}$$

Konstantu K_1 položíme rovnu nule, neboť hledáme jedno konkrétní řešení rovnice s pravou stranou. Můžeme si navíc povšimnout, že konstanta K_1 bude zastoupena v obecném řešení.

Do podmínky $c_1'(x)\mathrm{e}^x + c_2'(x)x\mathrm{e}^x = 0$ dosadíme $c_2'(x) = \frac{1}{x}$ a získáme tak diferenciální rovnici vedoucí opět na přímou integraci

$$\begin{aligned} c_1'(x)\mathrm{e}^x + \frac{1}{x}x\mathrm{e}^x &= 0 \\ c_1'(x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x &= 0 \\ c_1'(x) &= -1 \\ c_1(x) &= -\int 1\mathrm{d}x \\ c_1(x) &= -x + K_2\,. \end{aligned}$$

Konstantu K_2 ze stejného důvodu jako konstantu K_1 pokládáme rovnu nule, rovněž ta bude zastoupena v obecném řešení.

S přihlédnutí k podobě funkcí $c_1(x)$, $c_2(x)$ konečně určíme partikulární řešení

$$y_p = -x\mathrm{e}^x + \ln|x|x\mathrm{e}^x\,.$$

Pro hledané obecné řešení tak celkově bude platit

$$y = y_h + y_p = c_1\mathrm{e}^x + c_2x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \ln|x|x\mathrm{e}^x\,.$$

Procvičme ještě pro úplnost využití wronskiánu. V tomto případě konkrétně

$$w\big(y_1, y_2\big)(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x x \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2x} \Rightarrow w^{-1}\big(y_1, y_2\big)(x) = \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Pro $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ pak platí

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= w^{-1}\big(y_1, y_2\big)(x) \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^x x \\ \frac{1}{x}\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x x \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-2x}\left(-\frac{1}{x}\mathrm{e}^x \mathrm{e}^x x\right) = -1 \\ c_2'(x) &= w^{-1}\big(y_1, y_2\big)(x) \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & \frac{1}{x}\mathrm{e}^x \end{vmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-2x}\left(\frac{1}{x}\mathrm{e}^x \mathrm{e}^x\right) = \frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Touto cestou jsme dospěli ke stejným výsledkům pro $c_1'(x)$, $c_2'(x)$ jako v předchozím případě, další postup by již byl shodný s dřívějším. Vedl by k témuž obecnému řešení

$$y = y_h + y_p = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x + \ln|x| x\mathrm{e}^x\,.$$

3.3.4 Eulerovy rovnice

Takzvané Eulerovy rovnice, nebo-li rovnice typu

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 y' + a_0 y = f(x)$$

umíme pro $x > 0$ převést substitucí

$$x = \mathrm{e}^t$$

na lineární rovnice s konstantními koeficienty (3.3.1).
Užijeme-li totiž výše uvedenou substituci, lze y považovat za funkci e^t, nebo-li

$$y = y(\mathrm{e}^t)\,.$$

Dále zavedeme pomocnou funkci

$$y(\mathrm{e}^t) = z(t) \Rightarrow y(x) = z(\ln x)\,.$$

Pro derivace y', y'' a y''' tak bude platit

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x}z' \Rightarrow xy' = z' \\ y'' &= -\frac{1}{x^2}z' + \frac{1}{x^2}z'' \Rightarrow x^2 y'' = -z' + z'' \\ y''' &= 2\frac{1}{x^3}z' - \frac{1}{x^3}z' - 2\frac{1}{x^3}z'' + \frac{1}{x^3}z''' \Rightarrow x^3 y''' = z' - 2z'' + z'''\,. \end{aligned}$$

Pro k-tou derivaci bychom stejným způsobem došli obecně ke vztahu

$$y^{(k)} = \frac{1}{x^k}\left(z^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_i z^{(i)}\right) \Rightarrow x^k y^{(k)} = z^{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1}\epsilon_i z^{(i)}\,,$$

kde ϵ_i značí příslušné reálné konstanty.

Po nasazení výše vydobytých vztahů tak řešená rovnice přechází v lineární rovnici s konstantními koeficienty

$$a_n\left(z^{(n)}+\sum_{i=1}^{n-1}\epsilon_i z^{(i)}\right)+a_{n-1}\left(z^{(n-1)}+\sum_{i=1}^{n-2}\epsilon_i z^{(i)}\right)+\cdots+a_1x^1\frac{1}{x}z'+a_0z=f(\mathrm{e}^t)\,,$$

nebo-li po přeznačení

$$b_nz^{(n)}+b_{n-1}z^{(n-1)}+\cdots+b_1z'+b_0=f(\mathrm{e}^t)\,.$$

Nalezneme-li nyní řešení upravené rovnice $z(t)$, pak $y(x)=z(\ln x)$ bude řešením rovnice původní.

V případě, kdy $x<0$ užíváme substituci

$$x=-\mathrm{e}^t$$

a postupujeme totožně. [9][7]

Příklad 20
Nalezněte obecné řešení diferenciální rovnice $x^2y''-xy'+y=x\ln^3 x$.

Jedná se o Eulerovu rovnici druhého řádu. Naším cílem tak bude převést řešení zadané rovnice v řešení lineární rovnice s konstantními koeficienty pomocí vhodné substituce. Kvůli obsaženému logaritmu má smysl uvažovat jen $x>0$, užijeme proto

$$x=\mathrm{e}^t\Rightarrow y=y(\mathrm{e}^t)\,.$$

Dále zavedeme pomocnou funkci

$$z(t)=y\Rightarrow y=z(\ln t)$$

a vyjádříme první i druhou derivaci

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{x}z'\Rightarrow xy'=z'\\ y''&=-\frac{1}{x^2}z'+\frac{1}{x^2}z''\Rightarrow x^2y''=-z'+z''\,.\end{aligned}$$

Řešená rovnice tak celkově přejde v rovnici s konstantními koeficienty

$$\begin{aligned}(-z'+z'')-z'+z&=\mathrm{e}^tt^3\\ z''-2z'+z&=\mathrm{e}^tt^3\,,\end{aligned}$$

kde jsme pravou stranu získali po dosazení $\mathrm{e}^t=x$ do výrazu $x\ln^3 x$.
Dále již postupujeme jako v případě rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou (3.3.2). Nejprve určíme v souladu s (3.3.1) charakteristickou rovnici

$$\begin{aligned}\lambda^2-2\lambda+\lambda&=0\\ (\lambda-1)^2&=0\,.\end{aligned}$$

Vidíme, že charakteristické rovnici přísluší dvojnásobný kořen $\lambda = 1$, a tedy obecné řešení ve tvaru

$$z_h = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t \mathrm{e}^t \,.$$

Přikročme nyní k rovnici s pravou stranou. Vidíme, že $s = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, a tedy $\lambda = 1 + 0i$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice. Pokládáme proto $k = 2$ a navrhujeme partikulární řešení

$$z_p = t^2 \mathrm{e}^{1t}\big(S_3(t)\big) = t^2 \mathrm{e}^t (at^3 + bt^2 + ct + d) = \mathrm{e}^t (at^5 + bt^4 + ct^3 + \mathrm{d}t^2)\,.$$

Pro derivace z_p' a z_p'' pak bude platit

$$\begin{aligned} z_p' &= \mathrm{e}^t(5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt) + \mathrm{e}^t(at^5 + bt^4 + ct^3 + \mathrm{d}t^2) \\ z_p'' &= 2\mathrm{e}^t(5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2dt) + \mathrm{e}^t(at^5 + bt^4 + ct^3 + \mathrm{d}t^2) + \\ &\quad + \mathrm{e}^t(20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d)\,. \end{aligned}$$

Po dosazení tak celkově získáme

$$2\mathrm{e}^t(5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt)+\mathrm{e}^t(at^5+bt^4+ct^3+\mathrm{d}t^2)+\mathrm{e}^t(20at^3+12bt^2+6ct+2d)+$$

$$-2\mathrm{e}^t(5at^4+4bt^3+3ct^2+2dt)-2\mathrm{e}^t(at^5+bt^4+ct^3+\mathrm{d}t^2)+\mathrm{e}^t(at^5+bt^4+ct^3+\mathrm{d}t^2) = \mathrm{e}^t t^3\,.$$

Po krácení e^t a dalších úpravách pak

$$20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d = t^3 \Rightarrow a = \frac{1}{20};\; b = c = d = 0\,.$$

Pro z_p tak bude platit

$$z_p = \mathrm{e}^t \frac{1}{20} t^5\,,$$

dále pro z

$$z = z_h + z_p = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 t \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \frac{1}{20} t^5\,.$$

Po přechodu zpět k z pak konečně získáme

$$y = c_1 x + c_2 x \ln x + x \frac{1}{20} \ln^5 x\,.$$

3.4 Metody snižování řádu

Jak napovídá název podkapitoly, nyní si ukážeme, jak převést rovnici řádu n na rovnice řádu nižšího, které je obecně snazší řešit. Pokud to lze, můžeme řád rovnic snižovat i několikrát za sebou. Tento způsob někdy vede až k rovnici prvního řádu. Což je výhodné, neboť pro rovnice prvního řádu máme pestrou paletu dříve prezentovaných metod.

3.4.1 Rovnice typu $y^{(n)} = f\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \cdots, y^{(n-1)}\right)$

Nejsnáze lze snížit řád rovnici typu

$$y^{(n)} = f\left(x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \cdots, y^{(n-1)}\right) .$$

Vystačíme si totiž se substitucí

$$z(x) = y^m(x) ,$$

po jejímž zavedení přechází řešená rovnice v rovnici

$$z^{(n-m)} = f\left(x, z, z', \cdots, z^{(n-m-1)}\right) ,$$

a tedy rovnici řádu $n-m$. Následným řešením substitucí získané rovnice dojdeme k funkci $z(x)$ a od ní pak zpět k hledané funkci $y(x)$ pomocí užitého substitučního vztahu a m-násobné integrace (3.1). [12]

Příklad 21
Převeďte rovnici $y'' = -\frac{x}{y'}$ na rovnici prvního řádu.

Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o rovnici typu $y'' = f(x, y')$, lze její řád snížit zavedením substituce

$$z(x) = y'(x) \Rightarrow y'' = z' .$$

Řešená rovnice tak přejde v diferenciální rovnici prvního řádu

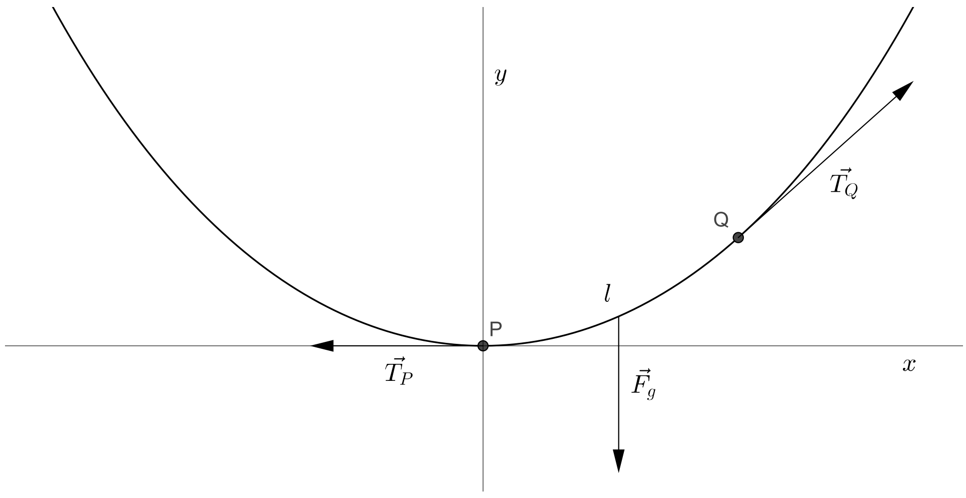
$$z' = -\frac{x}{z} .$$

[7]

Následující příklad je volně převzat z přednášky RNDr. Antonína Slavíka, Ph.D., Diferenciální geometrie I.

Příklad 22
Určete parametrizaci řetězovky, tj. křivky, jež má tvar řetězu (homogenního ohebného vlákna) zavěšeného ve dvou různých stejně vysokých bodech.

Naším úkolem je, jinými slovy, nalézt funkci, jejímž grafem je řetězovka. Pro zjednodušení položíme soustavu souřadnou tak, aby minimum této funkce (vrchol řetězovky), leželo na ose y, tj $y'(0) = 0$. Ze symetrie zavěšení je dále patrné, že hledáme sudou funkci.



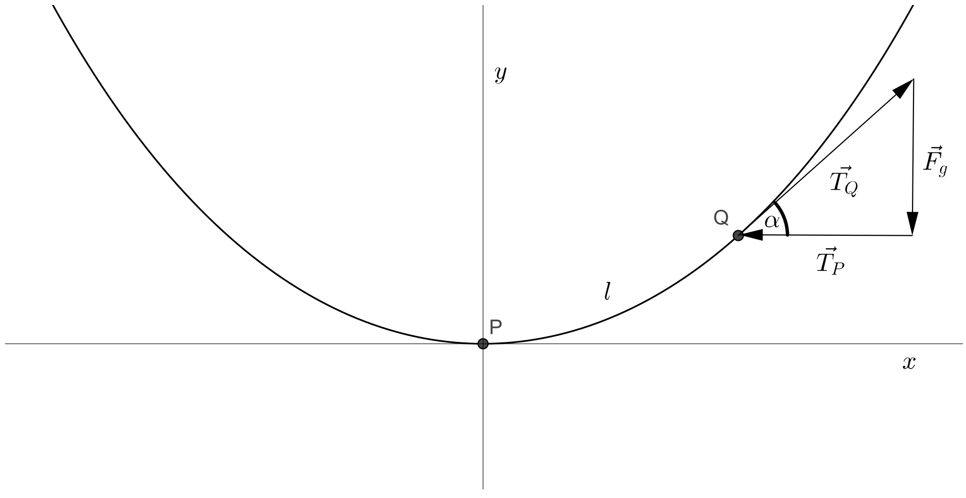
Obrázek 3.2: Řetězovka

Na řetězovce zvolíme bod $Q = \big[x, y(x)\big]$ a uvědomíme si, že velikost tíhové síly působící na část řetězu mezi počátkem P a bodem Q je přímo úměrná hmotnosti této části, a ta zase přímo úměrná její délce. Nebo-li

$$F_g \sim m \sim l\,,$$

kdy délku l můžeme vyjádřit pomocí známého vztahu

$$l = \int\limits_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t\,.$$



Obrázek 3.3: Řetězovka

Provedeme-li dále rozbor sil působících na pozorovaný segment řetězu mezi body P, Q, vypozorujeme, že v bodě Q působí síla pnutí T_Q ve směru tečny směrem od bodu P, v bodě P pak na opačnou stranu taktéž ve směru tečny síla pnutí T_P a v těžišti segmentu, tj. uprostřed, konečně ve směru osy y směrem k zemi tíhová síla F_g, viz obrázek 3.2. Protože je řetěz ve statické poloze, tj. v rovnováze, účinky těchto sil se musejí nutně vzájemně rušit. Nebo-li

$$\vec{F_g} + \vec{T_P} + \vec{T_Q} = 0\,.$$

Přesuneme-li všechny síly do bodu Q, viz obrázek 3.3, vidíme, že pro tangens úhlu α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_g}{T_P}\,.$$

Vzpomeneme si dále, že derivace y' v bodě x odpovídá směrnici tečny v tomto bodě a dojdeme ke vztahu

$$y'(x) = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow y'(x) = \frac{F_g}{T_P}\,.$$

Protože je ale F_g působící na segment přímo úměrná jeho délce, je této délce díky předchozímu závěru přímo úměrná i derivace $y'(x)$. Jinými slovy

$$y'(x) = \frac{1}{c}\int\limits_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2}\mathrm{d}t\,.$$

Derivujeme-li následně získanou rovnici dle proměnné x, obdržíme diferenciální rovnici druhého řádu

$$y'' = \frac{1}{c}\sqrt{1 + y'(x)^2}\,.$$

Než začneme tuto rovnici řešit, nejprve snížíme její řád zavedením substituce $w(x) = y'(x)$. Přejdeme tak k rovnici se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} w' &= \frac{1}{c}\sqrt{1 + w^2} \\ \frac{w'}{\sqrt{1 + w^2}} &= \frac{1}{c}\,. \end{aligned}$$

Tuto rovnici dále integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{1 + w^2}} = \frac{1}{c}\int 1\mathrm{d}x\,.$$

Integrál na levé straně řešíme zavedením hyperbolické substituce $w = \sinh v$, kde $\mathrm{d}w = \cosh v\mathrm{d}v$, získáme tak

$$\int \frac{\cosh v\mathrm{d}v}{\sqrt{1 + \sinh v^2}} = \frac{1}{c}\int 1\mathrm{d}x\,.$$

S využitím vztahu $1 + \sinh v^2 = \cosh v^2$ pak

$$\int 1\mathrm{d}v = \frac{1}{c}\int 1\mathrm{d}x\,.$$

Po nalezení příslušných primitivních funkcí následně

$$v = \frac{1}{c}x + k\,,$$

a po zpětné substituci konečně

$$\operatorname{arcsinh} w = \frac{1}{c}x + k \Rightarrow w = \sinh\left(\frac{1}{c}x + k\right)\,.$$

Vzpomeneme si na námi zavedenou počáteční podmínku $y'(0) = 0$, tedy $w(0) = 0$ a určíme konstantu k jako

$$0 = \sinh(0 + k) \Rightarrow k = 0\,.$$

K hledané funkci $y(x)$ nakonec přejdeme pomocí prvního užitého substitučního vztahu $y'(x) = w(x)$, nebo-li

$$\begin{aligned} y' &= \int \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \mathrm{d}x \\ y(x) &= c\cosh\left(\frac{x}{c}\right) + L\,, \end{aligned}$$

kde konstanta L určuje posunutí. Celkově tak můžeme říci, že řetězovka je grafem funkce $\cosh(x)$.

3.4.2 Rovnice typu $y^{(n)} = f\big(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\big)$

Dalšími rovnicemi, jejichž řád lze snižovat, jsou rovnice typu $y^{(n)} = f\big(y, y', \cdots \cdots, y^{(n-1)}\big)$. Uvážíme-li případ, kdy je řešením této rovnice monotónní funkce $y = \varphi(x)$, tedy $\varphi' \neq 0$, lze uvažovat i k ní příslušnou inverzní funkci $x = \psi(y)$. To ale znamená, že derivace $y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x))$ lze považovat za funkce proměnné y. [7]

V takovém případě má smysl uvažovat substituci

$$p(y(x)) = y'(x)\,.$$

Pro y'' tak za využití věty o derivaci součinu bude platit

$$y'' = (y')' = \big(p(y)\big)' = p'(y)y' = p'(y)p(y)\,.$$

Pro y''' pak dále stejným způsobem

$$y''' = (y'')' = \big(p'(y)p(y)\big)' = p''(y)y' + p'(y)p'(y) = p''(y)y' + p'(y)^2\,.$$

Povšimněme si trendu nižšího řádu derivací y vzhledem k příslušným derivacím p. Budeme-li analogicky pokračovat až k $y^{(n)}$, původní rovnici řádu n zjevně převedeme na rovnici řádu $n - 1$. Použitím substituce získáme rovnici, jejímž řešením dojdeme k funkci $p(y)$. Od té pak nakonec skrze užitý substituční vztah přejdeme zpět k hledané funkci $y(x)$. Nebo-li

$$y = \int p(y)\mathrm{d}y\,.$$

Příklad 23
Snižte řád rovnice $y'' = \frac{y'}{y^2}$.

Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o rovnici typu $y'' = f(y, y')$, snížíme její řád zavedením substituce
$$p = y' \,.$$
Pro y'' pak bude platit
$$y'' = p'p \,.$$
Řešená rovnice tak celkově přejde v rovnici prvního řádu
$$p'p = \frac{p}{y^2} \Rightarrow p' = \frac{1}{y^2} \,.$$

3.4.3 Homogenní lineární rovnice

O homogenních lineárních rovnicích
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$
jsme si již povídali v podkapitole (3.3). Nyní si ukážeme, jak snižovat jejich řád.

Známe-li libovolné netriviální partikulární řešení homogenní lineární rovnice $y_0(x)$, lze její řád snížit zavedením substituce
$$y(x) = y_0(x)z(x) \,.$$
Po dosazení do řešené rovnice získáme
$$(y_0z)^{(n)} + a_{n-1}(x)(y_0z)^{(n-1)} + a_{n-2}(x)(y_0z)^{(n-2)} + \cdots + a_0(x)y_0z = 0 \,.$$
Jednotlivé derivace y_0z vyjádříme pomocí Leibnizova vzorce[9]. Obdržíme tak rovnici
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y_0^{(n-j)} z^{(j)} + a_{n-1}(x) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} y_0^{(n-1-j)} z^{(j)} + \\ + \cdots + a_1(x)y_0'z + a_1(x)y_0z' + a_0(x)y_0z = 0 \,.$$
$$y_0^{(n)}z + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y_0^{(n-j)} z^{(j)} + a_{n-1}(x)y_0^{(n-1)}z + a_{n-1}(x) \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} y_0^{(n-1-j)} z^{(j)} + \\ + \cdots + a_1(x)y_0'z + a_1(x)y_0z' + a_0(x)y_0z = 0 \,.$$
$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} y_0^{(n-j)} z^{(j)} + a_{n-1}(x) \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} y_0^{(n-1-j)} z^{(j)} + \\ + \cdots + z\big(y_0^{(n)} + a_{n-1}(x)y_0^{(n-1)} + a_1(x)y_0' + a_0(x)y_0\big) = 0 \,.$$

[9]
$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)} \,.$$

Konečně využijeme předpokladu, že y_0 řeší původní homogenní rovnici. Výraz v závorce je proto roven nule. Nebo-li

$$\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}y_0^{(n-j)}z^{(j)}+a_{n-1}(x)\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}y_0^{(n-1-j)}z^{(j)}+\cdots+a_1(x)y_0z'=0\,.$$

Uvědomíme si, že po rozepsání obsažených sum na jednotlivé sčítance, žádný z nich nebude obsahovat nederivované z. Po jejich vhodném přeuspořádání a následném vytknutí příslušných derivací z řešená rovnice nabude tvaru

$$y_0z^{(n)}+b_{n-1}(x)z^{(n-1)}+b_{n-2}(x)z^{(n-2)}+\cdots+b_1(x)z'=0\,,$$

kde funkce $b_1(x),\cdots,b_{n-1}(x)$ v podstatě zastupují výrazy v příslušných závorkách tvořené funkcemi $a_0(x),\cdots,a_{n-1}(x),y_0(x),\cdots,y_0^{(n-1)}(x)$. Jinými slovy, substitucí jsme získali typ rovnice, jejíž řád jsme již snižovali v (3.4.1).[9][7]

Příklad 24
Snižte řád rovnice $y'''+x^2y''-2y=0$.

Máme před sebou homogenní lineární rovnici. Pro snížení jejího řádu potřebujeme znát jedno její netriviální partikulární řešení.

Pozorováním zjišťujeme, že hledané partikulárních řešení je například

$$y_0=x^2\,,$$

neboť platí

$$\begin{aligned}(x^2)'''+x^2(x^2)''-2(x^2)&=0\\0+2x^2-2x^2&=0\,.\end{aligned}$$

Námi zvolená substituce proto bude mít podobu

$$y(x)=z(x)y_0(x)=z(x)x^2\,.$$

Vyjádřeme dále příslušné derivace

$$\begin{aligned}y'&=z'x^2+2xz\\y''&=z''x^2+2xz'+2xz'+2z=z''x^2+4xz'+2z\\y'''&=z'''x^2+2z''x+4xz''+4z'+2z'=z'''x^2+6xz''+6z'\,.\end{aligned}$$

Po zavedení substituce tak celkově získáme

$$\begin{aligned}z'''x^2+6xz''+6z'+x^2(z''x^2+4xz'+2z)-2zx^2&=0\\z'''x^2+(6x+x^4)z''+(6+4x^3)z'+(2x^2-2x^2)z&=0\\z'''x^2+(6x+x^4)z''+(6+4x^3)z'&=0\,,\end{aligned}$$

nebo-li rovnici typu

$$z'''=f(z'',z')\,.$$

V souladu s (3.4.1) snižujeme řád vzniklé rovnice substitucí

$$w(x)=z'(x)\,.$$

Touto cestou konečně získáváme homogenní lineární rovnici druhého řádu

$$w''x^2+(6x+x^4)w'+(6+4x^3)w=0\,.$$

Závěr

Výsledkem této bakalářské práce je ucelený přehled elementárních metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Text je koncipován tak, aby si na své přišli nejen zájemci o osvojení početních metod, ale i ti, kterým se jedná o pochopení podstaty těchto metod. Předkládané metody jsou proto vždy vysvětleny po teoretické stránce a následně názorně demonstrovány na ilustračních příkladech.

Práce obsahuje celkově dvacet čtyři řešených příkladů s kompletním komentovaným postupem výpočtu. Z toho je osm příkladů praktického charakteru. Příklady jedna, tři, šest a čtrnáct, ukazují aplikaci diferenciálních rovnic ve fyzice. Příklady pět, devět a osmnáct pak po řadě jejich nasazení v chemii, biologii a ekonomii. Konečně příklad dvacet dva se svou podstatou pohybuje na pomezí fyziky a diferenciální geometrie.

Rovnice typu $y' = f(ax+by+c)$ a $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ byly i s příslušnými ilustračními příklady, pro svou neobvyklost na školské úrovni, z práce vyňaty a zařazeny do příloh (příloha 1, příloha 2). Systematicky by se však řadily mezi (2.3) a (2.4).

Obrázky obsažené v práci byly vytvořeny v programu Geogebra.

Seznam použité literatury

[1] Bečvář J.: *Lineární algebra*, 2. vydání, vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, 2002, ISBN 80-85863-92-8.

[2] Dvořáková J.: *Diferenciální rovnice v ekonomii*, Brno, 2013, Dostupné z: `http://is.muni.cz/th/324449/prif_m/diplomova_prace.pdf`, Diplomová práce, Masarykova Univerzita, Vedoucí práce Petr Zemánek.

[3] Filipčuková A.: *Aplikace diferenciálních rovnic - sbírka úloh*, Brno, 2011, Dostupné z: `http://is.muni.cz/th/323668/prif_b/Bc.pdf`, Bakalářská práce, Masarykova Univerzita, Vedoucí práce Lenka Přibylová.

[4] Janda M.: *Kdo první objevil derivaci?*, 21. století, 2007, č. 3, s. 34-36, ISSN 1214-1097.

[5] Jarník V.: *Diferenciální rovnice v reálném oboru*, Státní pedagogické nakladatelství, n.p., Praha, 1963.

[6] Jarník V.: *Integrální počet I*, Academia, Praha, 1984.

[7] Kopacek J.: *Matematická analýza nejen pro fyziky II.*, 2. vydání, vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, 2007, ISBN 80-86732-10-X, str. 1 - 48.

[8] Kopacek J.: *Příklady z matematické analýzy nejen pro fyziky II.*, 2. vydání, vydavatelství MATFYZPRESS, Praha, 2006, ISBN 80-85863-13-4, str. 65-69.

[9] Kuben J.: *Obyčejné diferenciální rovnice*, Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 1995.

[10] Kvasnica J.: *Mechanika*, ACADEMIA, Praha, 2004, ISBN 80-200-1268-0.

[11] Mařík R.: *Diferenciální rovnice – aplikace*, In: [online], 16-10-2009 [cit. 2015-04-07], Dostupné z: `http://user.mendelu.cz/marik/wiki/aplikace/`

[12] Rektorys K. a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky II.*, 6. vydání, Nakladatelství Prometheus, Praha, 1995, ISBN 80-85849-62-3, str. 17 - 201.

[13] Vybíral B., Jarešová M.: *DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE: Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*, In: [online], [cit. 2015-04-07], Dostupné z: `http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/difro.pdf`

Přílohy

Příloha 1

Rovnice typu $y' = f(ax + by + c)$

Uvažme nyní pouze případ, kdy koeficienty $a, b \neq 0$. V opačném případě, kdy $a = 0$ nebo $b = 0$, jde zjevně o jednu z již dříve řešených rovnic typu $y' = f(y)$ nebo $y' = f(x)$.

V okamžiku, kdy je výše uvedená podmínka splněna, užíváme pro řešení substituce
$$u(x) = ax + by + c\,.$$
Funkci $y(x)$ tak lze vyjádřit jako
$$y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b}$$
a s tím spojenou derivaci $y'(x)$ pak
$$y'(x) = \frac{u'(x) - a}{b}\,.$$
Řešená rovnice $y' = f(ax + by + c)$ tak nabude tvaru
$$\frac{u'(x) - a}{b} = f(u)\,,$$
kdy $f(u)$ reprezentuje pravou stranu původní rovnice po zavedení substituce.

Celkově tedy získáme rovnici se separovanými proměnnými
$$\frac{u'}{bf(u) + a} = 1\,.$$
Stejně jako v případě homogenní rovnice (2.3) i nyní můžeme výsledný vztah pro $u'(x)$ chápat jako obecný vzorec.

K hledané funkci $y(x)$ konečně přejdeme pomocí užitého substitučního vztahu, nebo-li
$$y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b}\,.$$
[9]

Příklad
Nalezněte nad $\mathbb{R}$ obecné řešení rovnice $y' = (x+y)^2$.

Na první pohled vidíme, že se jedná o rovnici $y' = f(x+y)$. V souladu s osvojeným postupem nejprve zaveďme substituci

$$u(x) = x + y\,.$$

Pro derivaci $y'(x)$ pak v řeči u bude platit

$$y'(x) = u' - 1\,.$$

Řešenou rovnici $y' = (x+y)^2$ tak celkově převádíme na

$$u' - 1 = (u)^2\,,$$

což je diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

$$\frac{u'}{1+u^2} = 1\,,$$

na jejíž levé i pravé straně se nacházejí spojité funkce.

Po následné integraci

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int 1\mathrm{d}x$$

a nalezení příslušných primitivních funkcí

$$\mathrm{arctg}(u) = x + C;\ C \in \mathbb{R}\,,$$

tak pro funkci $u(x)$ získáváme vztah

$$u(x) = \mathrm{tg}(x + C)\,.$$

K hledané funkci $y(x)$ konečně přejdeme pomocí užitého substitučního vztahu

$$y(x) = \mathrm{tg}(x + C) - x\,.$$

Příloha 2

Rovnice typu $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Při řešení rovnic tohoto typu uvažujeme dva případy

1. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

2. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

V prvním případě se jedná o skrytou rovnici typu $y' = f(ax + by + c)$, kterou již umíme řešit, neboť v řeči lineární algebry platí[1]0

$$a_2x + b_2y = k(a_1x + b_1y);\; k \neq 0\,.$$

Řešená rovnici tak nabývá tvaru

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) \Rightarrow y' = \tilde{f}(a_1x + b_1y)\,.$$

Ve druhém případě si uvědomíme, že kdyby konstanty c_1, $c_2 = 0$, řešili bychom homogenní rovnici

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right)\,.$$

Naším úkolem je tak nalézt substituci vedoucí k vynulování konstant c_1, c_2. Pro tento účel nejprve nalezneme uspořádanou dvojici $[A, B]$ jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Zavedeme-li následně substituci

$$\begin{aligned} x = v + A &\Rightarrow v = x - A \\ y = u + B &\Rightarrow u = y - B\,, \end{aligned}$$

kde

$$y' = u'\,.$$

Řešená rovnice přejde v rovnici

$$u' = f\left(\frac{a_1(A + v) + b_1(B + u) + c_1}{a_2(A + v) + b_2(B + u) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1v + b_1u + (a_1A + b_1B + c_1)}{a_2v + b_2u + (a_2A + b_2B + c_2)}\right)\,.$$

[10] Čtvercová matice je singulární právě tehdy, má-li nulový determinant. To ale znamená, že řádky takovéto matice jsou lineárně závislé. Pro konkrétní případ čtvercové matice řádu dva je tedy jeden řádek k-násobkem řádku druhého. Více na straně 178 v [1].

Výrazy v závorkách jsou rovny nule, neboť $[A, B]$ jsme volili jako řešení příslušné soustavy. Celkově tak získáváme homogenní diferenciální rovnici

$$u' = f\left(\frac{a_1 v + b_1 u}{a_2 v + b_2 u}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{u}{v}}{a_2 + b_2 \frac{u}{v}}\right).$$

Postupem osvojeným ve (2.3) dále skrze substituci $z(v) = \frac{u(v)}{v}$ dojdeme k funkci $z(v)$. Od $z(v)$ následně přejdeme k $u(v) = z(v)v$ a od $u(v)$ pak konečně skrze substituční vztahy $u = y - B$ a $v = x - A$ zpět k hledané funkci $y(x)$.
Poznamenejme na závěr, že v případě rovnic typu $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ mnohdy řešení uvádíme v implicitní podobě[10]. [12]

Zadání následujícího příkladu je převzato z [9].

Příklad
Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

Vzhledem ke skutečnosti, že se jedná o rovnici typu $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, nejprve určíme determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 1(-1) = -4 + 1 = -3\,.$$

Determinant vyšel různý od nuly. V souladu s výše uvedeným postupem nejprve určíme uspořádanou dvojici $[A, B]$ jako řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2x - y + 1 &= 0 \\ x - 2y + 1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Zjišťujeme, že soustavu řeší dvojice $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$. Z čehož vyplývá substituce

$$\begin{aligned} x &= v - \frac{1}{3} \\ y &= u + \frac{1}{3} \Rightarrow y' = u'\,. \end{aligned}$$

Řešená rovnice $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$ tak celkově přechází v homogenní rovnici

$$u' = \frac{2(v - \frac{1}{3}) - (u + \frac{1}{3}) + 1}{(v - \frac{1}{3}) - 2(u + \frac{1}{3}) + 1} = \frac{2v - u}{v - 2u} = \frac{2 - \frac{u}{v}}{1 - 2\frac{u}{v}}\,,$$

pro jejíž řešení v souladu s (2.3) zavedeme substituci

$$z(v) = \frac{u(v)}{v} \Rightarrow u' = z'v + z\,.$$

Celkově tak získáme rovnici se separovanými proměnnými

$$\begin{aligned} z'v + z &= \frac{2 - z}{1 - 2z} \\ z'v &= \frac{2 - z - z(1 - 2z)}{1 - 2z} \\ \frac{1 - 2z}{1 - z + z^2} z' &= \frac{2}{v}\,. \end{aligned}$$

[11] Implicitní řešení je takové, které vyplývá z daných podmínek, například rovnice. Jeho přesný předpis však neznáme.

Na obou stranách rovnice jsou spojité funkce, rovnici proto můžeme integrovat

$$\int \frac{1-2z}{1-z+z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{2}{v}\mathrm{d}v\,.$$

Na straně levé zavedeme substituci $w = 1-z+z^2$, kde $\mathrm{d}w = (-1+2z)\mathrm{d}z$, získáme tak

$$\int \frac{\mathrm{d}w}{w} = -\int \frac{2}{v}\mathrm{d}v$$

$$\ln(Kw) = -2\ln v;\; Kw > 0\,.$$

Po následném odlogaritmování pak

$$w = C\frac{1}{v^2};\; K = \frac{1}{C}\,,$$

nebo-li

$$1-z+z^2 = C\frac{1}{v^2}\,.$$

Pomocí zpětné substituce $z = \frac{u}{v}$, čili $z = \frac{y-\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{3}}$, nebo po úpravě $z = \frac{3y-1}{3x+1}$ obdržíme rovnici

$$1 - \frac{3y-1}{3x+1} + \left(\frac{3y-1}{3x+1}\right)^2 = C\frac{1}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = C - \frac{1}{3}\,,$$

což je hledané obecné řešení v implicitní podobě.