Posudek vedoucího bakalářské práce „Normově-euklidovská kvadratická rozšíření tělesa racionálních čísel“

Práce Kristýny Zemkové se zaobírá otázkou, kdy je obor celistvých prvků tělesa $\mathbb{Q}[\sqrt{s}]$, kde $s \in \mathbb{Z}$ je bezčtvercové číslo, normově-euklidovský. Je známo, že takovýchto kvadratických rozšíření tělesa $\mathbb{Q}$ je právě 21. Přesný popis těchto těles a důkaz, že jich není více, je cca 65 let starým výsledkem, který je ovšem roztříštěn do mnoha článků.

Přestože se jedná o výsledek klasický (zmiňuje se o něm prakticky každá učebnice teorie čísel), není mi známa monografie, kde by byl uveden jeho kompletní důkaz. Objektivní příčina tohoto faktu leží patrně v poněkud heterogenním charakteru užívaných metod, který zabraňuje smysluplnému začlenění výsledku do většího celku.

Začlenění do bakalářské práce ovšem nebrání nic, jak dokazuje velmi pěkně zpracovaný text Kristýny Zemkové. Po krátkém motivačním úvodu a části, kde autorka definuje základní pojmy a připomíná některá důležitá tvrzení o rozšířeních těles (včetně důkazů), následuje část výsledku pro případ záporných hodnot s. Tuto část lze nalézt v mnoha učebnicích teorie čísel. Dokazování nám v tomto případě usnadňuje fakt, že grupa jednotek inkriminovaného oboru celistvých prvků je známá a velmi malá.

V další kapitole se autorka věnuje pozitivní části výsledku pro kladné hodnoty s. Ukazuje se, že při správně zvoleném geometrickém náhledu se jedná o úlohu pokrývání jistého elementárního obdélníku v $\mathbb{R}^2$ pomocí symetrických oblastí vymezených dvěma plus dvěma větvemi hyperboly. Práce na tomto místě obsahuje několik ilustrativních obrázků. Na druhou stranu vzhledem k pracnosti a mechanickému charakteru zde autorka případně pomíjí některé zdlouhavé výpočty podrobně dokazující, že je při malém počtu vhodně zvolených oblastí již skutečně pokryt celý elementární obdélník.

Následuje rozsáhlá čtvrtá kapitola, jejímž cílem je dokázat horní odhad $s < 2^{14}$. Stěžejním bodem je na tomto místě jemná analýza tzv. redukovaných indefinitních kvadratických forem. V závěrečné kapitole se pak autorka vypořádává se zbývajícími „malými“ hodnotami s. Případ, kdy $s \not\equiv 1 \pmod 4$, je relativně snadný. Zbytek se řeší rozborem případů modulo 24, víceméně podobnými metodami. Z tohoto důvodu se zde autorka uchyluje pouze k obecnému komentáři a podrobnému výčtu pramenů, kde lze důkazy jednotlivých případů dohledat.

Coby vedoucí práce jsem byl velmi spokojen s tím, jak samostatně slečna Zemková pracovala. Sehnala si a prostudovala většinu článků (některé byly německy psané a i více než 80 let staré) a z nich poté vytvořila velmi dobře strukturovanou práci. Kde bylo záhodno, autorka kusý argument více rozvedla, na několika místech naopak nepatrně zkrátila (a tím zpřehlednila) důkaz.

Pokud jde o formální a obsahovou stránku práce, nemám prakticky žádných výhrad. Snad jedinou výtku bych směřoval k motivačnímu úvodu a v něm použitému příkladu $2 \cdot 11 = (1+\sqrt{23})(-1+\sqrt{23})$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{23}]$, který má samozřejmě jiný charakter než o pár řádek výše zmíněný příklad v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Obor $\mathbb{Z}[\sqrt{23}]$ je totiž oborem integrity hlavních ideálů a výše zmíněný, zdánlivě nejednoznačný rozklad není rozkladem na ireducibilní prvky.

Tato drobnost ale nic nemění na faktu, že **nároky na to, aby práce** Kristýny Zemkové „Normově-euklidovská kvadratická rozšíření tělesa racionálních čísel“ **byla uznána jako bakalářská, považuji za splněné**, a to bez výhrad.