Posudek oponenta k bakalářské práci

Normově-euklidovská kvadratická rozšíření tělesa racionálních čísel

Kristýny Zemkové

Hlavním cílem předložené práce je popis všech normově-euklidovských kvadratických těles. Tedy najít ta bezčtvercová $D \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, pro která norma rozšíření $\mathbb{Q} \subseteq K := \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ indukuje v absolutní hodnotě euklidovskou normu v okruhu algebraických celých čísel tělesa K. Takových D je pouze 21 (5 záporných a 16 kladných). Ačkoliv je tento výsledek v rámci teorie čísel velmi dobře známý, jeho důkaz podle všeho nelze v literatuře najít v ucelené formě. Na druhou stranu, problematika je myslím stále předmětem aktivního výzkumu v teorii čísel. Například teprve v roce 2004 Harper ukázal, že $\mathbb{Z}[\sqrt{14}]$ je euklidovský (ale ne normově-euklidovský) bez předpokladu platnosti zobecněné Riemannovy hypotézy.

Práce je rozdělena do 5 kapitol, první z nich zavádí základní pojmy algebraické teorie čísel. Druhá kapitola pak dává kompletní řešení problému pro imaginární kvadratická tělesa. Pomocí geometrické interpretace normy kvadratického tělesa jsou pak nalezena normově-euklidovská kvadratická tělesa v kapitole 3. Zbytek práce je pak věnován důkazu, že žádná další už nalézt nelze. Konkrétně v kapitole 4 se ukáže, že reálné kvadratické těleso $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ není normově euklidovské pro $D > 128^2$ a zbylé případy jsou řešeny rozborem případů v kapitole 5. Případ $D \equiv 1 \bmod 4$ již není rozebrán podrobně, což je vzhledem k již tak velkému rozsahu práce pochopitelné.

Práci považuji za mimořádně kvalitní, z hlediska jazykového i formálního je vpodstatě perfektní. Výborná je i srozumitelnost textu a práce s literaturou.

Z věcného hlediska mám pár konkrétních připomínek:

- Polynom $\det(b_{i,j} - x\delta^i_j)$ na straně 8 nebude vždy monický.
- Důkaz Lemmatu 12 je proveden pouze pro kvadratická tělesa.
- Na straně 36 dole má být nerovnost (4.15) dává vztah $\beta_n \beta'_n \leq \frac{\theta_n - \theta'_n}{128}$, podobný problém je i na straně 37.
- Na straně 39 v hrůzostrašném zlomku 4 řádky před koncem důkazu by asi měl být jmenovatel $1 - (-1)^N \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_N$
- V důkazu Tvrzení 33 je třeba vzít $\mathbf{I} \neq 0$ a $q \in \mathbf{R}$.
- Trochu se mi nelíbí argumentace $3D > 2D \geq (2k-1)^2 = 9^2$ na straně 42 dole, lepší mi přijde $k \leq 4$ takže $3D \leq (2k+1)^2 \leq 81$, a tedy pokud neexistuje t požadovaných vlastností, bude $D \leq 27$ (podobně pak na straně 43).

Dále mi není zcela jasné následující

- Důkaz Věty 25 začíná tvrzením, že větu stačí dokázat pro redukovanou kvadratickou formu. Nebylo by třeba promyslet, zda transformace souřadnic realizující ekvivalenci forem (matice s koeficienty p, q, r, s v Definici 12) bude zachovávat množinu $\mathbb{Z}^2$ (tj body s celočíselnými souřadnicemi se budou transformovat na body s celočíselnými souřadnicemi)?

Vzhledem k rozsahu textu jsou výše uvedené připomínky zanedbatelné. Předloženou práci proto doporučuji uznat jako bakalářskou s hodnocením

V Praze, 12. 6. 2015

Pavel Příhoda