Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jaroslav Šedina

Problém prodavače novin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Děkuji vedoucí své bakalářské práce, profesorce RNDr. Jitce Dupačové, DrSc., za všechny cenné rady, připomínky, pomoc při pochopení zpracovávané problematiky a především za čas věnovaný konzultacím.

Název práce: Problém prodavače novin

Autor: Jaroslav Šedina

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá problémem prodavače novin a jeho různými obměnami. V první kapitole je zaveden aparát, který je třeba k vyšetřování optimálního řešení úlohy. Druhá kapitola obsahuje různé formulace problému prodavače novin a jejich řešení, například metodou SAA. V závěru jsou výsledky aplikovány na výpočet podmíněné míry rizika CVaR a v programu R je uvedena numerická studie, která porovnává parametrický a neparametrický přístup k úloze. Text je průběžně doplňován grafy.

Klíčová slova: varianty modelu, odhady rozdělení pravděpodobnosti, empirické odhady, CVaR

Title: Newsboy problem

Author: Jaroslav Šedina

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the newsboy problem and its various modifications. The first part of the thesis mentions definitions and theorems that are essential for investigation of the optimal solution of the problem. In the second part, various formulations of newsboy problem are discussed and their solutions are presented. For instance, we use Sample Average Approximation method. In the final part, the results are applied to calculate Conditional Value-at-Risk (CVaR) and the thesis concludes with a numerical study programmed in R which compares parametric and nonparametric approach to the problem. The text is consecutively supplemented with graphs.

Keywords: variants of the model, estimation of probability distribution, empirical estimates, CVaR

Obsah

Úvod

V této práci se budeme zabývat úlohou prodavače novin a hledáním jejího optimálního řešení při různých zadání. Problém prodavače novin je jednoduchá úloha stochastického programování, kde figuruje náhodná poptávka. Podle toho, v jaké situaci se prodavač novin nachází, se liší formulace problému a optimalizační úlohy. Naším úkolem bude najít optimální řešení zadané úlohy maximalizující prodavačův zisk.

V první kapitole si zavedeme pojmy jako konvexita, empirická distribuční funkce, kvantil a výběrový kvantil, které budeme potřebovat v dalších kapitolách. Také si dokážeme Weierstrassovu větu a předvedeme větu o spojitosti konvexních funkcí, které budeme využívat při hledání optimálního řešení optimalizační úlohy.

V druhé kapitole si již ukážeme dvě podobné formulace problému prodavače novin se známým rozdělením náhodné poptávky. Poté si předvedeme, jak vypadá a jak se řeší úloha prodavače novin s reálnými daty, např. minulá pozorování; tedy v případě, kdy rozdělení pravděpodobnosti náhodné poptávky není známo. Zde použijeme k aproximaci účelové funkce metodu Sample Average Approximation (SAA). Jako poslední si představíme tzv. problém prodavače párků, kde prodavač dokáže díky zkušenosti z minulého dne lépe odhadnout poptávku následující den.

Na závěr si ukážeme, že jednou z variant aplikace problému prodavače novin je výpočet podmíněné míry rizika CVaR (Conditional Value-at-Risk) a předvedeme si numerickou studii v programu R (R Core Team (2014, verze 3.1.1)), která porovná parametrický a neparametrický přístup k úloze.

Kapitola 1

Pojmy, definice, věty

1.1 Konvexita

Nejdříve si zavedeme pár pojmů ze skript od Dupačová a Lachout (2011). Poté si dokážeme Weierstrassovu větu a předvedeme větu o spojitosti konvexních funkcí, které budou stěžejní při hledání optimálního řešení optimalizační úlohy.

Definice 1 (konvexní množina)**.** *Množina $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ se nazýva* konvexní*, jestliže s každými dvěma body obsahuje také všechny jejich konvexní lineární kombinace, tj. pro každé $x,y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0,1)$ je $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{X}$.*

Poznamenejme, že prázdná množina je také z definice konvexní. Konvexními množinami v $\mathbb{R}$ jsou například přímka či polopřímka. Dále také omezený interval nebo bod, což je degenerovaný interval. Nekonvexní množinou v $\mathbb{R}$ je třeba doplněk přímky.

Definice 2 (konvexní funkce)**.** *Nechť je $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ konvexní množina. Řekneme, že je funkce jedné proměnné $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$* konvexní*, jestliže pro každé $x,y \in \mathcal{X}$ a $\lambda \in (0,1)$ platí $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Řekneme, že funkce $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ je* konkávní*, jestliže $-f$ je konvexní funkce.*

Z grafu funkce $f(x) = x^2$ je zřejmá konvexita $f(x)$, neboť podle definice každá spojnice dvou bodů funkce leží nad grafem samotné funkce. Kdybychom uvažovali lineární funkci, tak ta je zároveň konvexní i konkávní funkcí.

Definice 3. *Pro množinu $S \subset \mathbb{R}$ definujeme:*

- uzávěr*, označení $\overline{S}$, jako nejmenší uzavřenou mnoužinu, která obsahuje S;*
- vnitřek*, označení $\operatorname{int}(S)$, jako největší otevřenou mnoužinu, která je obsažena v S;*
- hranice*, označení $\partial(S)$, jako rozdíl uzávěru a vnitřku S, tj. $\partial(S) = \overline{S} \setminus \operatorname{int}(S)$;*

Mějme interval $M = (a,b]$, kde $a,b \in \mathbb{R}$. Potom zřejmě uzávěr $\overline{M} = [a,b]$, vnitřek $\operatorname{int}(M) = (a,b)$ a nakonec hranice $\partial(M) = \{a,b\}$.

Věta 1. *Nechť $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subset \mathbb{R}$. Jestliže v bodě $x \in \operatorname{int}(D)$ existuje derivace $f'(x)$ a je různá od nuly, pak funkce f nemá v bodě x ani lokální maximum ani lokální minimum.*

Jinými slovy, pro funkci, která má všude derivaci, je podmínka $f'(x) = 0$ nutná pro to, aby mohla mít v bodě $x \in \mathrm{int}(D)$ lokální extrém.

Věta 2 (Weierstrassova věta)**.** *Spojitá funkce jedné proměnné $f(x)$ má na kompaktním (tj. omezeném a uzavřeném) intervalu $[a,b]$, kde $a,b \in \mathbb{R}$, globální maximum i globální minimum.*

Důkaz. Podle důkazu z Jarník (1984, Věta 128) poznamenejme: je-li $f(x)$ spojitá funkce na $[a,b]$ a je-li $f(x) \neq 0$ pro všechna x z intervalu $[a,b]$, je též $\frac{1}{f(x)}$ spojitá na intervalu $[a,b]$, neboť je podílem spojitých funkcí se jmenovatelem různým od nuly.

(i) Položme $G = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Pro všechna $x \in [a,b]$ je tedy $f(x) \leq G$. Máme dokázat, že na intervalu $[a,b]$ existuje číslo x pro něž je $f(x) = G$. Pro spor předpokládejme, že pro všechna $x \in [a,b]$ je $f(x) < G$, tj. $G - f(x) > 0$. Protože $G - f(x)$ je na $[a,b]$ spojitá a podle předpokladu stále kladná, je funkce $\frac{1}{G-f(x)}$ na intervalu $[a,b]$ spojitá, tedy shora omezená a stále kladná. Existuje tedy kladné číslo K tak, že pro všechna $x \in [a,b]$ je $\frac{1}{G-f(x)} < K$, tj. $G - f(x) > \frac{1}{K}$, tj.

$$f(x) < G - \frac{1}{K} \quad \text{pro všechna}\, x \in [a,b]. \tag{1.1}$$

Ale číslo $G - \frac{1}{K}$ je menší než číslo $G = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$; tedy na intervalu $[a,b]$ existuje číslo x_0 tak, že $f(x_0) > G - \frac{1}{K}$, což je spor s (1.1).

(ii) Funkce $-f(x)$ je spojitá na $[a,b]$ a zřejmě platí

$$\sup_{x\in[a,b]} -f(x) = -\inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Podle bodu (i) existuje číslo $c \in [a,b]$ tak, že $-f(c) = \sup_{x\in[a,b]} -f(x)$. Tedy $f(c) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.

❑

Věta 3 (spojitost konvexní funkce)**.** *Nechť $\mathcal{X}$ je neprázdná konvexní množina v $\mathbb{R}^n$ a nechť $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Potom je f spojitá na* $\mathrm{int}(\mathbb{R})$*.*

Důkaz. Podrobný důkaz je proveden v práci Bazaraa a kol. (1990, str. 81). ❑

Vnitřkem $\mathbb{R}$ je ovšem opět samotné $\mathbb{R}$. Tedy tato věta nám říká, že jakákoliv konvexní funkce na $\mathbb{R}$ je také na $\mathbb{R}$ spojitá.

1.2 Rozdělení pravděpodobnosti, hustota, (empirická) distribuční funkce, konvergence skoro jistě

Mějme pevně dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega,\mathcal{A},P)$, kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin Ω a P je pravděpodobnostní míra. Označme $\mathcal{B}^n$ borelovský systém podmnožin $\mathbb{R}^n$.

Definice 4 (náhodný vektor)**.** *Měřitelné zobrazení* $X : (\Omega,\mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n,\mathcal{B}^n)$ *se nazývá* (n-rozměrný) náhodný vektor.

Poznámka. Pokud $n = 1$, říkáme, že X je *náhodná veličina.*

Definice 5 (distribuční funkce)**.** *Nechť* X *je náhodná veličina; její* distribuční funkce F_X *je definována vztahem*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Základní vlastnosti distribuční funkce jsou formulovány v následující větě.

Věta 4. *Distribuční funkce* F_X *náhodné veličiny* X *má tyto vlastnosti:*
(i) F_X *je neklesající;*
(ii) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0;$
(iii) F_X *je zprava spojitá.*

Důkaz. Jednotlivé kroky důkazu jsou podrobně popsány v práci Dupač a Hušková (2013, str. 19).

❑

V této práci se budeme zabývat dvěma nejdůležitějšími třídami distribučních funkcí – diskrétní distribuční funkce a absolutně spojité distribuční funkce.

Definice 6 (diskrétní distribuční funkce)**.** *Distribuční funkce* F *se nazývá* diskrétní*, existuje-li konečná nebo spočetná posloupnost vesměs různých reálných čísel* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*, kde* $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}$*,* $\mathbb{N}$ *je množina přirozených čísel, a odpovídající posloupnost kladných čísel* $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *tak, že* $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_n = 1$ *a*

$$F(x) = \sum_{\{n\in\mathbb{N}_0; x_n \leq x\}} p_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jinými slovy, diskrétní distribuční funkce je schodovitá, se skoky o velikostech p_n v bodech x_n a je jednoznačně určena hodnotami $\{x_n,p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Má-li náhodná veličina X tuto distribuční funkci, znamená to, že náhodná veličina X nabývá jen hodnot x_n a to s pravděpodobnostmi p_n (nebo se od takové liší jen na množině P-míry 0).

Definice 7 (absolutně spojitá distribuční funkce)**.** *Distribuční funkce* F *se nazývá* absolutně spojitá*, existuje-li nezáporná borelovsky měřitelná funkce* θ *taková, že*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(t)\, \mathrm{d}\, t, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkce θ *se nazývá* hustota*. Je určena jednoznačně až na ekvivalenci; platí* $\theta = F'$ *skoro všude.*

Poznámka. Má-li náhodná veličina X diskrétní distribuční funkci, říkáme, že má *diskrétní rozdělení* nebo že X je *diskrétní náhodná veličina.*
Podobně má-li náhodná veličina X absolutně spojitou distribuční funkci, říkáme, že má *absolutně spojité rozdělení* nebo že X je *absolutně spojitá náhodná veličina* a odpovídající hustotu θ nazýváme *hustotou náhodné veličiny* X.

Posloupnost $\{x_n,p_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ popř. hustota θ jednoznačně určují příslušnou distribuční funkci a tedy i rozdělení příšlušné náhodné veličiny.

Definice 8 (empirická distribuční funkce, Langová (2009))**.** *Nechť* $X_1,\ldots,X_n$ *je náhodný výběr z rozdělení, které má distribuční funkci* F*. Buď* x *dané reálné číslo. Nechť*

$$\mathbb{1}_{[X\leq x]} = \begin{cases} 1, & \textit{je-li } X \leq x, \\ 0, & \textit{je-li } X > x, \end{cases} \tag{1.2}$$

je tzv. indikátorová funkce. Položme

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[X_i\leq x]}.$$

Funkce $\hat{F}_n(x)$ *se nazývá* empirická distribuční funkce.

Z definice je zřejmé, že funkce $\hat{F}_n(x)$ je schodovitá zprava spojitá funkce se skoky v pozorovaných hodnotách X_i. Pokud uspořádáme hodnoty náhodných veličin $X_1,\ldots,X_n$ podle velikosti do posloupnosti $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$, potom můžeme položit

$$\hat{F}_n(x) = \frac{k}{n} \quad \text{pro } x \in (x_{(k)},x_{(k+1)}),\ k = 0,1,\ldots,n$$

a $x_{(0)} = -\infty$, $x_{(n+1)} = \infty$, přičemž $x_1,\ldots,x_n$ je realizace náhodného výběru $X_1,\ldots,X_n$. Hodnota $n\hat{F}_n(x)$ je počet elementů výběru $X_1,\ldots,X_n$, které jsou menší než x.

Nakonec si zadefinujeme konvergenci skoro jistě.

Definice 9 (konvergence skoro jistě)**.** *Mějme náhodné veličiny* $X_1,X_2,\ldots$ *a* X *na* $(\Omega,\mathcal{A},P)$*. Řekneme, že* X_n konverguje skoro jistě *k* X*, jestliže*

$$\mathsf{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1.$$

Píšeme, že $X_n \xrightarrow{s.j.} X$.

1.3 Kvantil a výběrový kvantil

Nyní se omezíme na rozdělení se spojitou a ryze monotónní distribuční funkcí.

Definice 10 (kvantil)**.** *Nechť distribuční funkce* F *je spojitá a ryze monotónní, nechť* $0 < \alpha < 1$*. Potom číslo* x_α *takové, že* $F(x_\alpha) = \alpha$ *(tj. číslo* $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$*) se nazývá* α-kvantil *příslušného rozdělení.*

Ryzí monotónii stačí zřejmě požadovat jen v intervalu, v němž $0 \neq F(x) \neq 1$; i pak je α-kvantil jednoznačně určen pro všechna $0 < \alpha < 1$.

Definice 11 (výběrový kvantil, Likeš a Machek (1981))**.** *Zvolme* p*, pro které platí* $0 < p < 1$*. (Výběrovým)* p*–tým* kvantilem (percentilem) *náhodné veličiny* X *(nebo příslušného rozdělení) nazveme číslo* x_p*, pro které platí*

$$F(x_p) \geq p, \quad F(x_p + 0) \leq p. \tag{1.3}$$

Těmito podmínkami není obecně výběrový kvantil jednoznačně určen, neboť může existovat omezený interval hodnot x_p splňujících podmínky (1.3). Má-li veličina X spojité rozdělení, platí pro x_p vztah

$$F(x_p) = p.$$

Pro distribuční funkce spojité a rostoucí ve všech $x \in \mathbb{R}$ jsou všechny kvantily jednoznačně určeny. Výběrový p–tý kvantil je hodnota x_p pro kterou platí, že právě $100p$ % prvků je nanejvýš rovných x_p, tj. $\mathsf{P}(X \leq x_p) = p$, kde X je náhodná veličina.

Kapitola 2

Úloha prodavače novin

Úloha prodavače novin je jedna z nejznámějších úloh oblasti stochastického programování nazývané modely s penalizací ztrát. Základní formulace problému prodavače novin je podrobně popsána a rozebrána v práci Dupačová (1986, Kapitola 5).

2.1 Úloha s vracením novin

Prodavač novin si může objednat pevný počet x výtisků novin za nákupní cenu a Kč za kus na každý den uvažovaného období. Prodejní cena jednoho výtisku je $p > a$ Kč, neprodané noviny lze se ztrátou vrátit za cenu $c \in (0,a)$ (např. odnese noviny do sběru). Počet výtisků, které prodavač může v jednotlivých dnech prodat, však není pevný; je dán náhodnou poptávkou ω, jejíž rozdělení pravděpodobnosti P je známo. Prodavač novin se proto rozhodne objednat počet výtisků, který maximalizuje jeho střední (očekávaný) zisk.

Označme $v(x;\omega)$ zisk prodavače v případě, že objednal x výtisků novin a skutečný požadavek v daném dnu byl ω výtisků. Ze zadání úlohy je

$$v(x;\omega) = \begin{cases} p\omega - ax + c(x-\omega) & \text{pro} \quad \omega \leq x, \\ px - ax & \text{pro} \quad \omega > x. \end{cases}$$

Tato účelová funkce je ze zadání spojitá. Podívejme se v rychlosti na příklad účelové funkce, která není spojitá (dle Artstein a Wets (1994)). Mějme opět náhodnou poptávku ω. Pokud je poptávka vyšší než počet nakoupených výtisků x, potom musí prodavač doobjednat chybějící výtisky. Tato práce navíc ho stojí přesně K Kč. Je to tedy výdaj, který nezávisí na počtu výtisků, které musí doobjednat. Takovým doobjednáním je například myšleno, že prodavač novin musí nasednout na motorku a dojet pro další výtisky.
Tedy pro danou poptávku ω a počet výtisků x dostáváme zisk prodavače

$$v(x;\omega) = \begin{cases} p\omega - ax & \text{pro} \quad \omega \leq x, \\ px - ax - K & \text{pro} \quad \omega > x, \end{cases}$$

který není spojitý.

Nyní se vraťme k původní úloze s vracením novin. Označme střední zisk

$$f(x) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[v(x;\omega)].$$

Potom v případě, že P má absolutně spojité rozdělení, dostáváme

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x;\omega)\ \mathrm{d}\,F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x;\omega)\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega, \tag{2.1}$$

kde θ je hustota rozdělení P. Předpokládejme, že ω má střední hodnotu $\mathsf{E}\,\omega$. Potom podle (2.1) platí

$$\begin{aligned}
f(x) = &\int\limits_{-\infty}^{x} \big[p\,\omega - ax + c(x-\omega)\big]\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + \int\limits_{x}^{\infty} \big[px - ax\big]\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega = \\
=&(c-a)x\int\limits_{-\infty}^{x} \theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-c)\int\limits_{-\infty}^{x} \omega\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-a)x\int\limits_{x}^{\infty} \theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega = \\
=&(c-a)x\int\limits_{-\infty}^{x} \theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-c)\int\limits_{-\infty}^{x} \omega\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-a)x\left(1-\int\limits_{-\infty}^{x} \theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega\right) = \\
=&(p-a)x + (-p+a+c-a)x\int\limits_{-\infty}^{x} \theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-c)\int\limits_{-\infty}^{x} \omega\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega = \\
=&(p-a)x - (p-c)\int\limits_{\omega\le x} (x-\omega)\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega.
\end{aligned}$$

Výsledná účelová funkce se skládá ze členu odpovídajícího celkovému zisku z prodeje všech objednaných výtisků sníženého o střední ztrátu na zisku v případě, že je poptávka nižší než nabídka. Tato střední ztráta se skládá ze členu odpovídajíc celkové ztrátě z neprodaných výtisků sníženého o vrácené neprodané noviny. Z hlediska našeho označení jde o úlohu na maximalizaci s původní účelovou funkcí $c(x) = (p-a)x$ a ztrátovou funkcí $\varphi(x;\omega) = (p-c)(x-\omega)^+$, kde $y^+ = \max\{0{,}y\}$ se nazývá kladná část čísla y. Výsledný tvar odpovídající optimalizační úlohy pro kritérium maximální střední hodnoty výnosu je

$$\begin{aligned}
&\text{maximalizovat} \quad f(x) = (p-a)x - (p-c)\int\limits_{\omega\le x} (x-\omega)\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega \\
&\text{pro} \quad x \ge 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Jde o snadno řešitelnou optimalizační úlohu. Všimneme si tvaru funkce $f(x)$ za předpokladu, že náhodná poptávka ω je omezena na konečný interval $[\,\underline{b},\overline{b}\,]$:

$$f(x) = \begin{cases} (p-a)x & \text{pro} \quad x < \underline{b}, \\ (p-a)x - (p-c)\int_{\underline{b}}^{x}(x-\omega)\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega & \text{pro} \quad \underline{b} \le x \le \overline{b}, \\ -(a-c)x + (p-c)\,\mathsf{E}\,\omega & \text{pro} \quad x > \overline{b}. \end{cases}$$

Pokud má ω střední hodnotu, lze podobně odvodit tvar $f(x)$ i pro případ $\underline{b} = -\infty$ nebo $\overline{b} = \infty$. Ze zadání úlohy je zřejmá podmínka $0 < c < a < p$.

Za této podmínky je

$$f(x) = (p-a)x - (p-c)\,\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(x-\omega)^+ \tag{2.3}$$

zřejmě konkávní funkce, neboť má tvar rozdílu lineární funkce a střední hodnoty funkce $\varphi(x;\omega) = (p-c)(x-\omega)^+$, která je konvexní funkcí x pro každé pevné ω (viz obr. 2.1).

Obrázek 2.1: Graf funkce $\varphi(x;\omega)$ pro pevné ω.

Pro $x < \underline{b}$ je $f(x)$ lineární a $f'(x) = p - a > 0$. Obdobně pro $x > \overline{b}$ je $f'(x) = -a+c < 0$. Dále na intervalu $(\,\underline{b},\overline{b}\,)$ existuje derivace $df(x)$ a je vypočtena v následujícím odstavci.

Funkce $f(x)$ je podle (2.3) konkávní na $\mathbb{R}$, tedy spojitá na $\mathbb{R}$ podle Věty 3. Potom z Weierstrassovy věty (Věta 2) plyne, že $f(x)$ nabývá maxima na kompaktu $[\,\underline{b},\overline{b}\,]$, a to v bodech $x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,)$, která splňují podmínku

$$0 = \frac{df(x)}{dx},$$

nebo v krajních bodech $\underline{b}$ a $\overline{b}$. Derivováním (2.2) dostáváme

$$\frac{df(x)}{dx} = (p-a) - (p-c)F(x) \quad \text{pro } x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,),$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce absolutně spojitého rozdělení P. Při derivování jsme využili záměnu derivace a integrálu, kde integrovatelnou majorantou byla sama hustota θ.

Optimální rozhodnutí x^0 je potom určeno podmínkou

$$F(x^0) = \frac{p-a}{p-c}.$$

Tedy pro úlohu bez omezení dostáváme optimální řešení

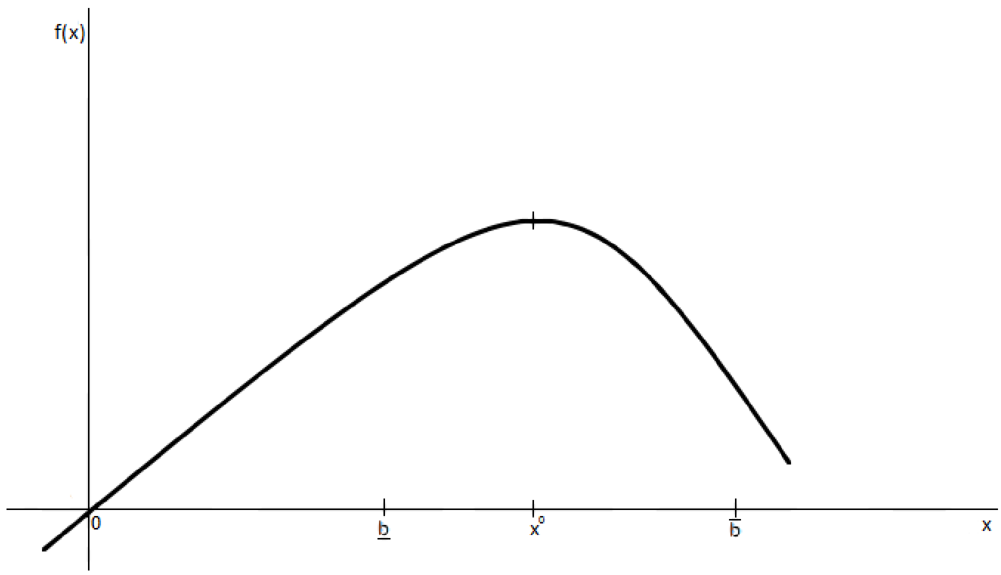
$$x^0 = F^{-1}\left(\frac{p-a}{p-c}\right),$$

pokud $x^0 \in [\underline{b},\overline{b}]$.

Je-li např. P rovnoměrné rozdělení na intervalu $[\underline{b},\overline{b}]$, kde $\underline{b} \geq 0$, pak pro $\underline{b} \leq x \leq \overline{b}$ je

$$f(x) = (p-a)x - \frac{p-c}{\overline{b}-\underline{b}} \int_{\underline{b}}^{x} (x-\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$$

a přímým výpočtem zjistíme, že pro $\underline{b} \leq x \leq \overline{b}$ je $f(x)$ kvadratická funkce (viz obr. 2.2).



Obrázek 2.2: Graf funkce $f(x)$ pro rovnoměrné rozdělení a její optimální řešení x_0.

Tedy střední zisk (2.1) bude mít tvar

$$\begin{aligned} f(x) =& (p-a)x - \frac{p-c}{\overline{b}-\underline{b}} \int_{\underline{b}}^{x} (x-\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = \\ =& (p-a)x - \frac{(p-c)(x-\underline{b})^2}{2(\overline{b}-\underline{b})}. \end{aligned}$$

Ten nabývá svého maxima v bodě

$$x^0 = \underline{b} + \frac{(\overline{b}-\underline{b})(p-a)}{p-c},$$

který náleží do intervalu $[\underline{b},\overline{b}]$.

Kdyby P bylo <u>normální rozdělení</u> $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ s danými parametry μ a σ^2, potom

$$\begin{aligned} f(x) &= (p-a)x - \frac{p-c}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} (x-\omega) \exp\left\{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}\,\omega = \\ &= (p-a)x - (p-c)(x-\mu)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \\ &\quad + \frac{p-c}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{\omega-\mu}{\sigma} \exp\left\{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \mathrm{d}\,\omega = \\ &= (p-a)x - (p-c)(x-\mu)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{(p-c)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} y e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}\,y = \\ &= (p-a)x - (p-c)(x-\mu)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \frac{(p-c)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_{y=-\infty}^{y=\frac{x-\mu}{\sigma}} = \\ &= \left[p-a-(p-c)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] x + (p-c)\mu\,\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \\ &\quad - \frac{(p-c)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} f'(x) &= p-a-(p-c)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \frac{(p-c)x}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} + \\ &\quad + \frac{(p-c)\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} + \frac{(p-c)\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{x-\mu}{\sigma^2} = \\ &= p-a-(p-c)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Pokud neuvažujeme jakákoliv omezení, je potom optimální rozhodnutí x^0 určeno podmínkou

$$\Phi\left(\frac{x^0-\mu}{\sigma}\right) = \frac{p-a}{p-c},$$

respektive

$$x^0 = \mu + \sigma \mathrm{u}_{\frac{p-a}{p-c}},$$

kde Φ značí distribuční funkci a u_α α-kvantil normovaného normálního rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.

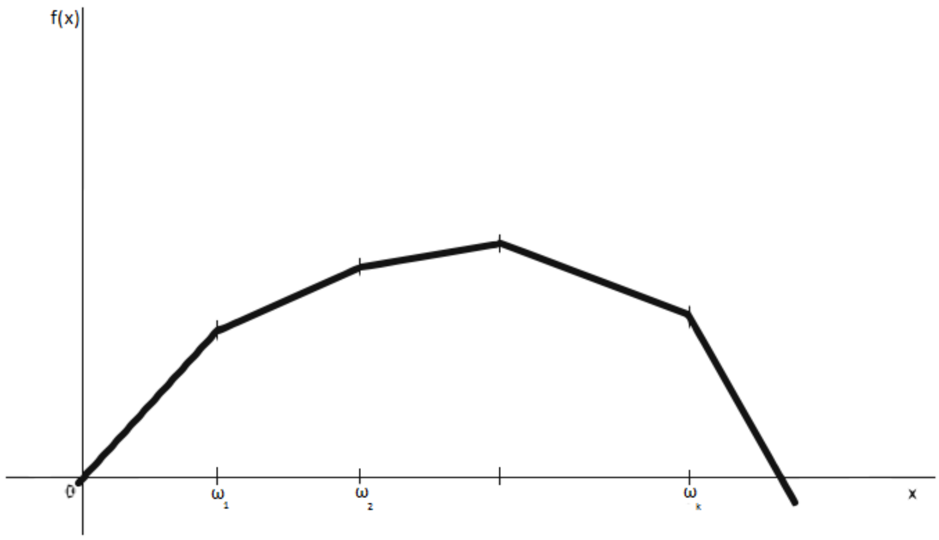
Nyní předpokládejme, že P má diskrétní rozdělení. Tedy ω je diskrétní náhodná veličina. Potom je střední (očekávaný) zisk

$$f(x) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[v(x;\omega)] = \sum_{i=1}^{k} v(x;\omega_i)q_i, \tag{2.4}$$

kde $\omega_1,\ldots,\omega_k$ jsou hodnoty, kterých nabývá náhodná veličina ω s pravděpodobnostmi $q_1,\ldots,q_k$ a kde $\forall i \in \{1,\ldots,k\} : q_i > 0$ a $q_1 + \ldots + q_k = 1$. Podle (2.4) pro střední zisk platí

$$f(x) = (p-a)x - (p-c) \sum_{\{k:\omega_k \le x\}} (x-\omega_k)q_k. \tag{2.5}$$

Víme, že $\sum_{\{k:\omega_k \leq x\}}(x-\omega_k)q_k$ je speciální případ $\mathsf{E_P}(x-\omega)^+$ ze vzorce (2.3); a tedy z již dokázaného plyne, že $f(x)$ je po částech lineární konkávní funkce (viz obr. 2.3).



Obrázek 2.3: Graf po částech lineární konkávní funkce $f(x)$.

Úloha najít maximum funkce $f(x)$ v diskrétním případě je trochu složitější a existuje více přístupů k této problematice. Zde uvedeme tři možné postupy.

Pokud nalezneme x taková, že $f'(x) = 0$, potom tato x patří do lineární části $f(x)$, která je rovnoběžná s osou x (viz obr. 2.4). Pro splnění maximality $f(x)$ tedy můžeme vzít jakékoliv x, které patří do této lineární části, kde $f'(x) = 0$. Pokud pro všechna x platí $f'(x) \neq 0$, potom podezřelými body na extrém jsou právě body $\omega_1,...,\omega_k$, které odpovídají zlomovým bodům po částech lineární konkávní funkce $f(x)$ (viz obr. 2.3). Potom tedy

$$f(x^0) = \max_{x=\omega_1,...,\omega_k} f(x),$$

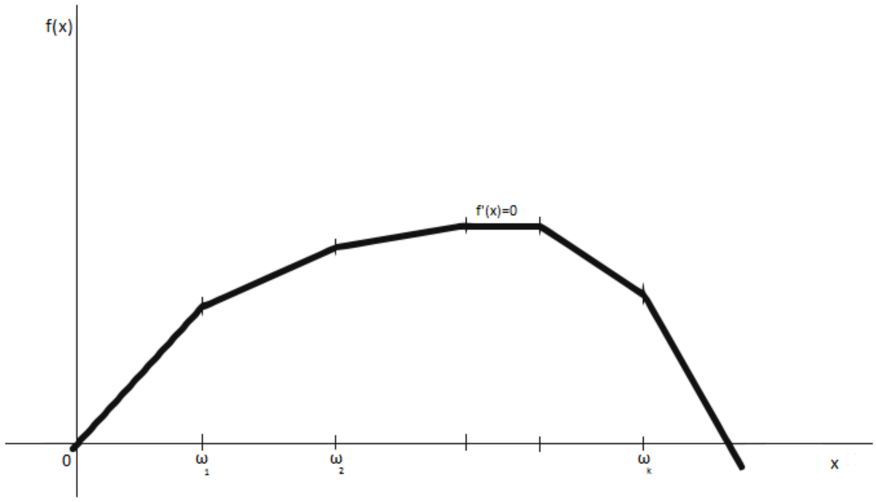
respektive

$$x^0 = \operatorname*{argmax}_{x=\omega_1,...,\omega_k} f(x),$$

kde *argmax* je množina takových x, pro které $f(x)$ nabývá maxima. Ta je však jednoprvková z konkávnosti $f(x)$ a z toho, že $f'(x) \neq 0$.

V případě, že se nám nechce hledat maximum přes všechny podezřelé body, je možné určit maximum přesně pomocí směrnice funkce $f(x)$. Postupně pro $x < \omega_1$, poté pro $x \in (\omega_1,\omega_2)$, $x \in (\omega_2,\omega_3)$, atd., budeme zjišťovat, zda-li $f'(x) > 0$. To je splněno alespoň pro $x < \omega_1$ z konkávnosti $f(x)$. Potom pro nějaké $x \in (\omega_j,\omega_{j+1})$, kde $j \in \{1,...,k-1\}$, (případně $x > \omega_k$) bude platit, že $f'(x) < 0$, což znamená, že $f(x)$ začala klesat. Tedy z konkávnosti $f(x)$ je maximem právě bod ω_j (případně ω_k), ve kterém se mění směrnice funkce.

Další možností, jak najít maximum $f(x)$, je hledat ho pomocí výběrového kvantilu. Již víme, že náhodná veličina ω nabývá hodnot $\omega_1,...,\omega_k$ s pravděpodobnostmi $q_1,...,q_k$. Navíc uvažujme, že $\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_k$. Z definice výběrového



Obrázek 2.4: Graf po částech lineární konkávní funkce $f(x)$ s částí, kde $f'(x) = 0$.

kvantilu aplikované na diskrétní náhodnou veličinu vyplývá, že potřebujeme nalézt index s^* takový, že

$$\sum_{s=1}^{s^*} q_s \geq p > \sum_{s=1}^{s^*-1} q_s. \tag{2.6}$$

Nechť pro $\omega^* = \omega_{k^*}$ je $f(\omega^*)$ maximem funkce (2.5). Potom

$$f(\omega^*) = (p-a)\omega^* - (p-c) \sum_{\{k:\omega_k \leq \omega^*\}} \omega^* q_k + (p-c) \sum_{\{k:\omega_k \leq \omega^*\}} \omega_k q_k$$

a

$$f(\omega_{k^*+1}) = (p-a)\omega_{k^*+1} - (p-c) \sum_{\left\{k:\omega_k \leq \omega_{k^*+1}\right\}} \omega_{k^*+1} q_k + (p-c) \sum_{\left\{k:\omega_k \leq \omega_{k^*+1}\right\}} \omega_k q_k.$$

Potom po odečtení

$$f(\omega^*) - f(\omega_{k^*+1}) = (p-a)(\omega^* - \omega_{k^*+1}) - (p-c)(\omega^* - \omega_{k^*+1}) \sum_{\{k:\omega_k \leq \omega^*\}} q_k.$$

Dále víme, že $f(\omega^*) - f(\omega_{k^*+1}) \geq 0$ a $\omega^* - \omega_{k^*+1} < 0$. Potom tedy musí platit, že $(p-a) - (p-c) \sum_{\{k:\omega_k \leq \omega^*\}} q_k \leq 0$. Tedy máme, že

$$\sum_{\{k:\omega_k \leq \omega^*\}} q_k \geq \frac{p-a}{p-c}. \tag{2.7}$$

Nyní obdobnou úvahou dostaneme, že

$$f(\omega^*) - f(\omega_{k^*-1}) = (p-a)(\omega^* - \omega_{k^*-1}) - (p-c)(\omega^* - \omega_{k^*-1}) \sum_{\left\{k:\omega_k \leq \omega_{k^*-1}\right\}} q_k.$$

Navíc $f(\omega^*) - f(\omega_{k^*-1}) > 0$ a $\omega^* - \omega_{k^*-1} > 0$. Dostáváme tedy, že

$$\frac{p-a}{p-c} > \sum_{\{k:\omega_k \le \omega_{k^*-1}\}} q_k. \tag{2.8}$$

Našli jsme index $s^* = \omega^* = \omega_{k^*}$ splňující (2.6). Tedy z nerovností (2.7) a (2.8) a definice výběrového kvantilu vyplývá, že jsme našli $\frac{p-a}{p-c}$-kvantil náhodné veličiny ω, který je optimálním řešením úlohy prodavače novin v diskrétním případě.

2.2 Úloha se ztrátou zákazníka

Mějme stejnou úlohu jako minule (tzn. s vracením novin) a přidejme k ní předpoklad, že ztráta vzniká i v případě, kdy prodavač není schopen uspokojit poptávku. To znamená, že prodavač může ztratit svého stálého zákazníka, pokud má ten den málo výtisků. Uvažme parametr $r > 0$ jako postih za ztrátu zákazníka.

Označme $v(x;\omega)$ zisk prodavače v případě, že objednal x výtisků novin a skutečný požadavek v daném dnu byl ω výtisků. Ze zadání úlohy je

$$\begin{aligned} v(x;\omega) &= p\omega - ax + c(x-\omega) && \text{pro} \quad \omega \le x,\\ v(x;\omega) &= px - ax - r(\omega - x) && \text{pro} \quad \omega > x. \end{aligned}$$

Opět máme střední zisk

$$f(x) = \mathsf{E}_{\mathsf{P}}[v(x;\omega)].$$

Mějme rozdělení P, které je absolutně spojité. Nechť θ je hustota rozdělení P a předpokládejme, že náhodná veličina ω má střední hodnotu $\mathsf{E}\,\omega$. Potom

$$\begin{aligned} f(x) = &\int_{-\infty}^{x} \big[p\,\omega - ax + c(x-\omega)\big]\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega + \int_{x}^{\infty} \big[px - ax - r(\omega - x)\big]\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega =\\ =&(p-a)x - (p-c)\int_{-\infty}^{x} (x-\omega)\,\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega - r\int_{x}^{\infty} (\omega - x)\,\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega =\\ =&(p-a)x - \left[(p-c)\int_{\omega\le x} (x-\omega)\,\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega - r\int_{\omega > x} (x-\omega)\,\theta(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right]. \end{aligned}$$

Výsledná účelová funkce se skládá ze členu odpovídajícího celkovému zisku z prodeje všech objednaných výtisků sníženého o součet středních ztrát na zisku v případě, že je poptávka nižší nebo vyšší než nabídka. Máme účelovou funkci $c(x) = (p-a)x$ a ztrátovou funkci $\varphi(x;\omega) = (p-c)(x-\omega)^+ + r(x-\omega)^-$, kde $y^- = -\min\{y,0\}$ se nazývá záporná část čísla y. Nyní využijeme faktu, že každé číslo jde rozdělit na kladnou a zápornou část. Tedy pro $(x-\omega)$ platí

$$(x-\omega) = (x-\omega)^+ - (x-\omega)^-.$$

Potom i

$$\mathsf{E}(x-\omega) = \mathsf{E}(x-\omega)^+ - \mathsf{E}(x-\omega)^-$$

a pro naší potřebu si vyjádříme

$$\mathsf{E}(x-\omega)^- = \mathsf{E}(x-\omega)^+ - (x - \mathsf{E}\,\omega).$$

Potom pro střední zisk platí

$$\begin{aligned} f(x) =&(p-a)x - \left[(p-c)\,\mathsf{E}_\mathsf{P}(x-\omega)^+ + r\,\mathsf{E}_\mathsf{P}(x-\omega)^-\right] = \\ =&(p-a)x - \left\{(p-c)\,\mathsf{E}_\mathsf{P}(x-\omega)^+ + r\left[(\mathsf{E}_\mathsf{P}(x-\omega)^+ - (x - \mathsf{E}_\mathsf{P}\,\omega)\right]\right\} = \\ =&(p-a+r)x - \left[r\,\mathsf{E}_\mathsf{P}\,\omega + (p-c+r)\,\mathsf{E}_\mathsf{P}(x-\omega)^+\right]. \end{aligned}$$

Tedy výsledný tvar optimalizační úlohy pro kritérium maximální střední hodnoty výnosu je

maximalizovat

$$f(x) = (p-a+r)x - \left[r\int\limits_{\omega\in\mathbb{R}} \omega\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega + (p-c+r)\int\limits_{\omega\leq x}(x-\omega)\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega\right]$$

pro $\quad x \geq 0.$

Je-li náhodná poptávka ω omezena na konečný interval $[\,\underline{b},\overline{b}\,]$, potom

$$f(x) = \begin{cases} (p-a+r)x - r\,\mathsf{E}\,\omega & x < \underline{b}, \\ (p-a+r)x - r\int_{\underline{b}}^{\overline{b}} \omega\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega - (p-c+r)\int_{\underline{b}}^{x}(x-\omega)\,\theta(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega & x \in [\,\underline{b},\overline{b}\,], \\ (c-a)x + (p-c)\,\mathsf{E}\,\omega & x > \overline{b}. \end{cases}$$

Pokud má ω střední hodnotu, lze odvodit tvar $f(x)$ i pro případ $\underline{b} = -\infty$ a $\overline{b} = \infty$. Za podmínek $p > a > c > 0$ a $r > 0$ je

$$f(x) = c(x) - \mathsf{E}_\mathsf{P}[\varphi(x;\omega)]$$

konkávní funkcí, neboť má tvar rozdílu lineární funkce a střední hodnoty funkce $\varphi(x;\omega) = (p-c)(x-\omega)^+ + r(x-\omega)^- = (p-c)\max\{(x-\omega),0\} - r\min\{(x-\omega),0\}$, která je konvexní funkcí x pro každé pevné ω (viz obr. 2.5).

Funkce $f(x)$ nabývá maxima v bodech $x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,)$, která splňují podmínku

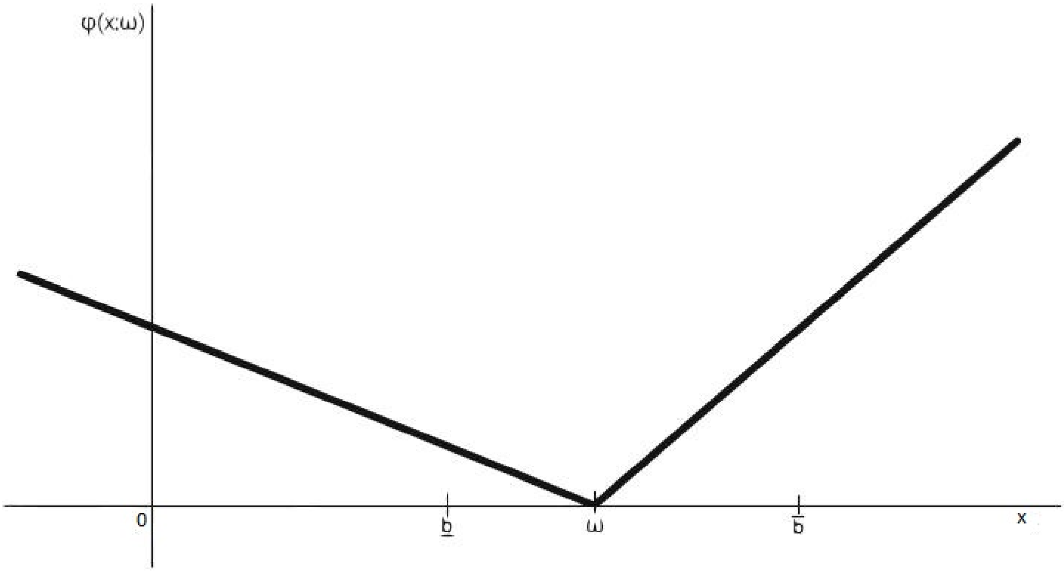
$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$

nebo v krajních bodech $\underline{b}$ a $\overline{b}$. Potom pro $x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,)$ platí

$$\frac{df(x)}{dx} = (p-a+r) - (p-c+r)F(x)$$

a optimální rozhodnutí x^0 je tedy určeno podmínkou

$$F(x^0) = \frac{p-a+r}{p-c+r} = 1 - \frac{a-c}{p-c+r}.$$



Obrázek 2.5: Graf funkce $\varphi(x;\omega)$ pro pevné ω, kde $p-c>r$.

Tedy pro úlohu bez omezení dostáváme optimální řešení

$$x^0 = F^{-1}\left(1 - \frac{a-c}{p-a+r}\right),$$

pokud $x^0 \in [\underline{b},\overline{b}]$.

Je-li např. P <u>rovnoměrné rozdělení</u> na intervalu $[\underline{b},\overline{b}]$, kde $\underline{b} \geq 0$, pak pro $\underline{b} \leq x \leq \overline{b}$ je

$$f(x) = (p-a)x - \frac{p-c}{\overline{b}-\underline{b}} \int_{\underline{b}}^{x} (x-\omega)\,\mathrm{d}\,\omega + \frac{r}{\overline{b}-\underline{b}} \int_{x}^{\overline{b}} (x-\omega)\,\mathrm{d}\,\omega$$

a přímým výpočtem zjistíme, že pro $\underline{b} \leq x \leq \overline{b}$ je $f(x)$ kvadratická funkce (viz obr. 2.2). Tedy střední zisk bude mít tvar

$$f(x) = (p-a)x - \frac{(p-c)(x-\underline{b})^2 + r(\overline{b}-x)^2}{2(\overline{b}-\underline{b})}$$

a nabývá svého maxima v bodě

$$x^0 = \underline{b} + \frac{(\overline{b}-\underline{b})(p-a+r)}{p-c+r},$$

který náleží do intervalu $[\underline{b},\overline{b}]$.

Je-li P normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ s danými parametry μ a σ^2, pak

$$f(x) = (p-a)x - \frac{p-c}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x}(x-\omega)\exp\left\{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}\,\omega +$$

$$+\frac{r}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{x}^{\infty}(x-\omega)\exp\left\{-\frac{(\omega-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}\,\omega =$$

$$= \left[p-a+r-(p-c+r)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]x + (p-c+r)\mu\,\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) -$$

$$- r\mu - \frac{(p-c+r)\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

a dále

$$f'(x) = p-a+r-(p-c+r)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Pokud neuvažujeme omezení, je optimální rozhodnutí x^0 určeno podmínkou

$$\Phi\left(\frac{x^0-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \frac{a-c}{p-c+r},$$

respektive

$$x^0 = \mu + \sigma \mathrm{u}_{1-\frac{a-c}{p-c+r}},$$

kde Φ značí distribuční funkci a u_α α-kvantil normovaného normálního rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.

Nyní opět předpokládejme, že P má diskrétní rozdělení. Potom ω je diskrétní náhodná veličina a platí vzorec (2.4). Tedy ω nabývá hodnot $\omega_1,\dots,\omega_k$ s pravděpodobnostmi $q_1,\dots,q_k$, kde $\forall i \in \{1,\dots,k\} : q_i > 0$ a $q_1 + \dots + q_k = 1$. Potom pro střední zisk platí

$$f(x) = (p-a)x - (p-c)\sum_{\{k:\omega_k\le x\}}(x-\omega_k)q_k + r\sum_{\{k:\omega_k > x\}}(x-\omega_k)q_k.$$

Víme, že $(p-c)\sum_{\{k:\omega_k\le x\}}(x-\omega_k)q_k - r\sum_{\{k:\omega_k>x\}}(x-\omega_k)q_k$ je speciální případ střední hodnoty funkce $\varphi(x;\omega)$. A tedy z již dokázaného plyne, že funkce $f(x)$ je po částech lineární a konkávní jako v obrázku (2.3).

Úloha najít maximum $f(x)$ v diskrétním případě se ztrátou zákazníka je podobná úloze najít maximum $f(x)$ bez ztráty zákazníka (viz předchozí úloha).

2.3 Úloha s reálnými daty

Tato část práce je převzata ze článku Levi a kol. (2010) a upravena pro naší předchozí úlohu – úlohu prodavače novin se ztrátou zákazníka a vracením novin. Budeme tedy schopni porovnat, zda v úloze s reálnými daty bude vycházet stejné optimální řešení jako v předchozí úloze.

Mějme opět náhodnou poptávku ω, kterou chce prodavač novin uspokojit. Přesněji ω vyjadřuje poptávku po jediném produktu během jednoho prodejního období. Takovým produktem může být například i týdeník. Potom bude zřejmě prodejním obdobím právě jeden týden. My jsme v minulé úloze uvažovali klasické noviny. Tedy prodejním obdobím bude jeden den. Prodavač novin objedná x výtisků tak, aby přednostně pokryl poptávku. Pouze v tomto případě je poptávka uspokojena v maximální možné míře. Obdobně jako v předchozí úloze máme parametry $p > 0$ (prodejní cena), a ($a < p$, nákupní cena) a výdaj $r > 0$ pro každý výtisk, který chyběl do naplnění poptávky. Novým parametrem je výdaj $h > 0$ pro každý výtisk, který se neprodal. Parametr r můžeme vnímat jako penalizaci (ztrátu zákazníka) při nenaplnění poptávky a parametr h se v kontextu předchozích úloh dá vyjádřit jako $h = -c$, tj. pro nadbytečné výtisky je to opačná hodnota ceny při vrácení. Dostáváme tedy účelovou funkci pro zisk

$$v(x;\omega) = \begin{cases} p\omega - ax - h(x-\omega) & \text{pro} \quad \omega \le x, \\ px - ax - r(\omega - x) & \text{pro} \quad \omega > x. \end{cases}$$

Cílem prodavače je maximalizovat zisk. Tedy

$$\max_{x\geq 0} f(x) = \mathsf{E}\,[v(x;\omega)].$$

A po úpravě dostáváme

$$\max_{x\geq 0} f(x) = \mathsf{E}\left[(p-a)x - (p+h)(x-\omega)^{+} - r(\omega - x)^{-}\right].$$

Výsledek opět závisí na rozdělení náhodné veličiny ω. Budeme předpokládat, že poptávka ω je spojitá náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$ a hustotou.

Podobně jako v předchozích úlohách dostáváme, že $f(x)$ je konkávní funkcí, neboť je rozdílem lineární funkce a střední hodnoty konvexní funkce. Předpokládejme, že náhodná poptávka ω je omezena na konečný interval $[\,\underline{b},\overline{b}\,]$. Dále víme, že na intervalu $(\,\underline{b},\overline{b}\,)$ existuje derivace $df(x)$, která je vypočtena v následujícím odstavci.

Funkce $f(x)$ je konkávní na $\mathbb{R}$ a tedy spojitá na kompaktu. Potom z Weierstrassovy věty plyne, že $f(x)$ nabývá maxima na kompaktu $[\,\underline{b},\overline{b}\,]$, a to v bodech $x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,)$, které splňují podmínku

$$0 = \frac{df(x)}{dx},$$

nebo v krajních bodech $\underline{b}$ a $\overline{b}$. Tedy

$$\frac{df(x)}{dx} = p - a + r - (p+r+h)F(x) \quad \text{pro } x \in (\,\underline{b},\overline{b}\,).$$

Potom optimální rozhodnutí x^0 je určeno podmínkou

$$F(x^0) = \frac{p+r-a}{p+r+h}.$$

Tedy, pokud je $x^0 \in [\,\underline{b},\overline{b}\,]$, dostáváme optimální řešení

$$x^0 = F^{-1}\left(\frac{p+r-a}{p+r+h}\right),$$

což je $\frac{p+r-a}{p+r+h}$-kvantil rozdělení náhodné veličiny ω.

Pokud je F známá, dá se optimální řešení x^0 dopočítat. Avšak v mnoha praktických užitích rozdělení poptávky není známo. Stejně tak v úloze prodavače novin založené na reálných datech. Máme k dispozici pouze náhodný výběr $\{d^1, \ldots ,d^N\}$, kde $d^1, \ldots ,d^N$ jsou nezávisle vybírány z rozdělení ω. Za takovýchto podmínek bývá často užita metoda Sample Average Approximation (SAA), neboli aproximace výběrovým průměrem. Stěžejní myšlenkou metody SAA je aproximovat reálné rozdělení pomocí empirické distribuční funkce, kterou máme zadefinovanou v Kapitole 1. Ta pokládá váhu $\frac{1}{N}$ na každý prvek náhodného výběru. Označme si zisk $\hat{f}_N$, který je očekávaným (středním) ziskem vyjádřeným pomocí empirické distribuční funkce. Výsledná aproximovaná účelová funkce je poté maximalizována.

Mějme N nezávislých realizací náhodného výběru z reálného rozdělení pravděpodobnosti, které si označíme $\{d^1, \ldots ,d^N\}$. Potom po aplikaci metody SAA dostaneme

$$\max_{x \geq 0} \hat{f}_N(x) \doteq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left[(p-a)x - (p+h)(x-d^k)^+ - r(d^k - x)^- \right].$$

Optimálním řešením metody SAA aplikované na problém prodavače novin je opět $\frac{p+r-a}{p+r+h}$-kvantil. A proto je metoda SAA výhodná pro model prodavače novin, neboť její řešení lze účinně najít uspořádáním náhodného výběru.

V současné chvíli by nás mohlo zajímat, jak dobře se kvantil založený na metodě SAA blíží k reálnému kvantilu. Máme zde k tomu větu.

Věta 5. *Mějme p, pro které $0 < p < 1$, a nechť x_{pn} je výběrový kvantil náhodného výběru $X_1, \ldots ,X_n$. Pokud výběrový kvantil x_p je jediným řešením x v nerovnosti $F(x+0) \leq p \leq F(x)$, potom $x_{pn} \xrightarrow{s.j.} x_p$.*

Důkaz. Jednotlivé kroky důkazu jsou uvedeny v práci Serfling (2002, str. 75). ❑

Mějme tedy distribuční funkci $\hat{F}_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{[d^k \leq x]}$, kde $\mathbb{1}_{[.]}$ odpovídá indikátorové funkci (1.2) z Definice 8. Nechť $\hat{X}_N$ je optimálním řešením metody SAA s výběrem rozsahu N. Všimněme si, že $\hat{X}_N$ je náhodná veličina, která závisí na specifickém výběru. Řešením metody SAA pro náš náhodný výběr $\{d^1, \ldots ,d^N\}$ je $\frac{p+r-a}{p+r+h}$-kvantil:

$$x_N^0 = \max \left\{ x : \hat{F}_N(x) \leq \frac{p+r-a}{p+r+h} \right\}. \tag{2.9}$$

Optimální řešení x_N^0 je tedy určitou realizací náhodné veličiny $\hat{X}_N$.

2.4 Problém prodavače párků

Problém prodavače párků je další variantou úpravy původního problému prodavače novin, kde si ovšem prodavač pamatuje, jaká byla poptávka předchozí den, ale nemůže si dělat zásoby do dalšího dne. Tato část práce je převzata z článku Artstein (1999).

Představme si dvoudenní festival. Předpokládejme, že máme zákazníky, kteří přijdou první den a zůstanou tu do druhého dne. Někteří z nich, řekněme ω lidí, mají v plánu koupit si k obědu párek. Druhý den festivalu bude chtít k obědu párek stejných ω zákazníků.

Prodavač párků ale neví, jak vypadá náhodná poptávka ω. Má ovšem díky předchozí zkušenosti s prodejem dobrou představu o rozdělení pravděpodobnosti P, které určuje náhodnou veličinu ω. Nechť P je definována na intervalu $[0,\mathrm{M}]$, kde $\mathrm{M} > 0$. Předpokládejme, že ω je spojitá náhodná veličina; to je lepší kvůli velkému počtu lidí na festivalu. Potom, na základě rozdělení P (a na základě zbytku dat), se prodavač párků musí rozhodnout, kolik má připravit párků na první den festivalu. Uvařený párek, který se neprodá, se musí vyhodit.

Párek stojí prodavače a korun a je prodáván za p korun za kus. Pokud prodavač připraví x_1 párků na první den a poptávka po párcích je ω, zisk za první den je

$$p \cdot \min\{\omega,x_1\} - ax_1.$$

Druhý den má prodavač lepší představu, jak vypadá náhodná poptávka ω. Skutečně, pokud $\omega < x_1$, potom je poptávka po párcích první den festivalu plně uspokojena a tato poptávka je identická s poptávkou druhý den. Pokud ovšem $\omega \geq x_1$, potom informace, kterou prodavač dostane, je, že poptávka se nachází v intervalu $[x_1,\mathrm{M}]$. Prodavač párků tedy může zlepšit svůj odhad o rozdělení pravděpodobnosti a vyvodit, že náhodná veličina ω má podmíněné rozdělení pravděpodobnosti P za podmínky, že nabývá hodnot v intervalu $[x_1,\mathrm{M}]$. (Zde předpokládáme, že jakmile prodavač prodá svůj poslední párek, tak zavře svůj stánek; konkrétně tedy prodavač nemůže rozlišit, zda $\omega = x_1$ nebo $\omega > x_1$.) Na základě pozorování z prvního dne se prodavač rozhodne další den uvařit x_2 párků. Druhý den je tedy zisk

$$p \cdot \min\{\omega,x_2\} - ax_2.$$

V obou dnech musí být rozhodnutí o tom, kolik má uvařit párků, provedeno na základě informací, které jsou v té době dostupné. Pokud je ovšem náhodná poptávka ω neznámá, prodavač se rozhodne podle očekávaného (středního) zisku. Optimalizačním problémem je tedy

$$\text{maximalizovat} \quad \left[\mathsf{E}_{\mathsf{P}}(p \cdot \min\{\omega,x_1\} - ax_1) + \mathsf{E}_{\mathsf{P}_1}(p \cdot \min\{\omega,x_2\} - ax_2)\right],$$

kde maximalizace probíhá přes proměnné x_1 a x_2, a P_1 je rozdělení pravděpodobnosti podmíněné informací navíc zjištěnou první den festivalu. (Konkrétně, P_1 je atom, jehož prvek je $\{\omega\}$, pokud $\omega < x_1$, a P_1 je podmíněná pravděpodobnost P za podmínky $\omega \in [x_1,\mathrm{M}]$.)

Maximalizace středního zisku první den festivalu je standartním problémem prodavače novin, který je zde v obtížnějších úpravách několikrát uveden a vyřešen. Je očividné, že prodavač párků může první den festivalu úmyslně snížit svůj zisk, aby získal lepší informaci o hodnotě ω pro přípravu párků na druhý den. Toto je přesně druh informace, který doufáme, že budeme schopni získat.

Kapitola 3

Aplikace a testy

3.1 Míra rizika CVaR

Nyní se podíváme jak se dá účelová funkce prodavače novin využít k výpočtu míry rizika CVaR (Conditional Value-at-Risk). Jedná se o úlohu typu prodavače novin. Ale na rozdíl od zbytku práce, zde budeme namísto maximalizování zisků minimalizovat náklady. Tato část práce je převzata z článku Rockafellar a Uryasev (2002).

Nejdříve si zadefinujme míru rizika VaR (Value-at-Risk) a poté budeme moci zavézt míru rizika CVaR. Míru rizika VaR na hladině α definujeme jako hodnotu ztráty, která bude překročena s (malou) pravděpodobností nejvýše $1-\alpha$, tzn. ztráta bude s (velkou) pravděpodobností nižší než VaR. Nechť $\alpha \in (0,1)$ a ζ je náhodná ztráta s rozdělením P.

Definice 12 (VaR)**.** Míra rizika α-VaR *celkové ztráty je definována předpisem*

$$VaR_\alpha(\mathsf{P}) = \min\left\{x|F(x) \geq \alpha\right\},$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny ζ.

$\mathrm{VaR}_\alpha(\mathsf{P})$ je tedy α-kvantil rozdělení ztráty ζ.

Definice 13 (CVaR)**.** Míra rizika α-CVaR *celkové ztráty je hodnota*

$$CVaR_\alpha(\mathsf{P}) = \text{střední hodnota } \alpha\text{-chvostu rozdělení náhodné veličiny } \zeta,$$

kde α-chvost má distribuční funkci

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & pro\, x < VaR_\alpha(\mathsf{P}), \\ \frac{F(x)-\alpha}{1-\alpha} & pro\, x \geq VaR_\alpha(\mathsf{P}), \end{cases}$$

kde $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny ζ.

Nyní chceme ukázat, že je možné spočítat α-VaR a α-CVaR náhodné ztráty ζ vyřešením elementární optimalizační úlohy konvexního typu v jedné dimenzi. Pro tento účel si zaveďme speciální funkci

$$\Psi_\alpha(\mathsf{P},x) = x + \frac{1}{1-\alpha}\,\mathsf{E}_\mathsf{P}(\zeta - x)^+.$$

Ta je ovšem podobná účelové funkci ze základního modelu uvedeného v práci Dupačová (1986, Kapitola 5). Liší se jen tím, že v základním modelu jsou sčítance násobené jinými parametry.

Za předpokladu, že existuje $\mathsf{E}_{\mathsf{P}}\,\zeta$, platí následující věta.

Věta 6 (Základní minimalizační formule)**.** *Jako funkce parametru $x \in \mathbb{R}$, $\Psi_\alpha(\mathsf{P},x)$ je konečná a konvexní (tedy spojitá), a platí*

$$CVaR_\alpha(\mathsf{P}) = \min_x \Psi_\alpha(\mathsf{P},x)$$

Navíc je

$$VaR_\alpha(\mathsf{P}) = \textit{dolní koncový bod množiny } \mathrm{argmin}_x \Psi_\alpha(\mathsf{P},x),$$

kde argmin *je množina takových x, pro které $\Psi_\alpha(\mathsf{P},x)$ nabývá minima. V našem případě to musí být neprázdný, uzavřený a omezený interval (může být i degenerovaný). Zejména vždy platí*

$$VaR_\alpha(\mathsf{P}) \in \mathrm{argmin}_x \Psi_\alpha(\mathsf{P},x), \quad CVaR_\alpha(\mathsf{P}) = \Psi_\alpha(\mathsf{P}, VaR_\alpha(\mathsf{P})).$$

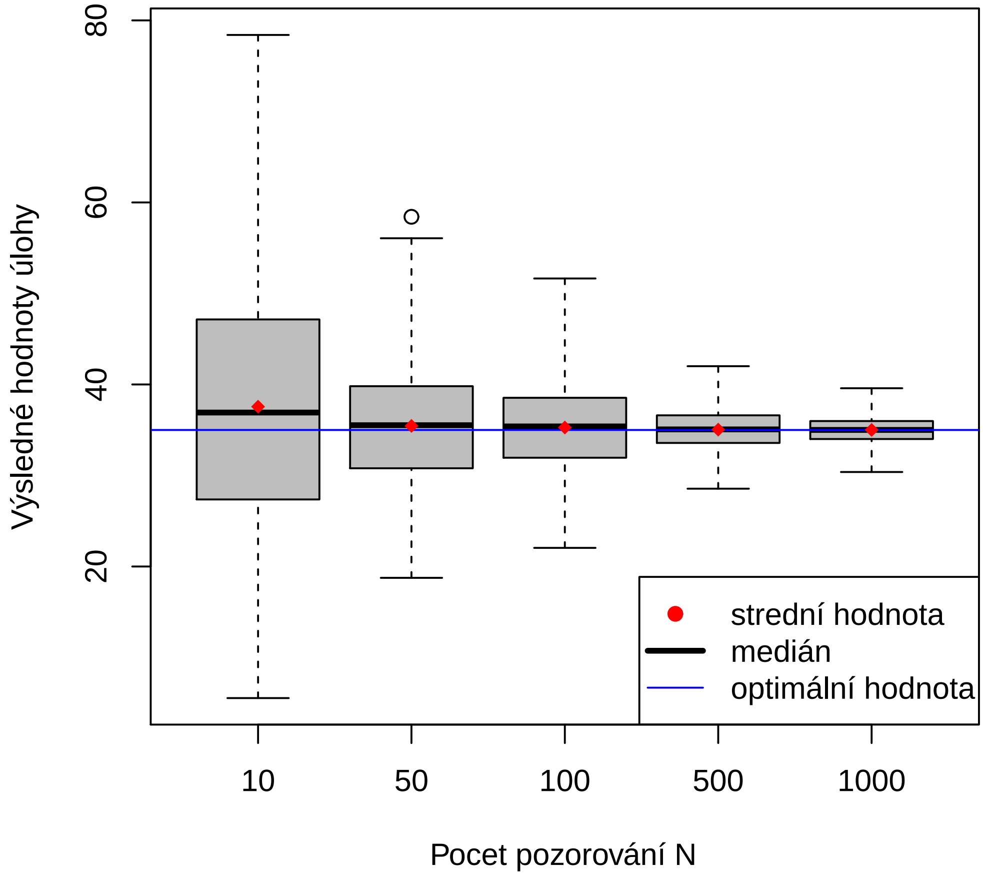
Důkaz. Podrobný důkaz proveden v práci Rockafellar a Uryasev (2002, Věta 10). ❑

Pokud máme spojité rozdělení náhodné ztráty, je α-kvantil určen jednoznačně.

3.2 Porovnání parametrického a neparametrického přístupu

Pro jednoduchost porovnání byl zvolen náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení R(0,100) na intervalu [0,100]. Vybrali jsme postupně $N = 10, 50, 100, 500$ a 1000; pro každé N jsme úlohu spočítali 1000-krát. Dále jsme uvažovali parametry $p = 15$, $a = 10$, $h = 3$ a $r = 2$. Pro každou úlohu jsme vygenerovali náhodný výběr z rovnoměrného rozdělení na intervalu [0,100], našli empirickou distribuční funkci a poté našli x^0, které splňovalo (2.9). Výsledek je vidět na obrázku 3.1.

V šedých grafech jsou vždy znázorněny 5% a 95% kvantil, 1. a 3. kvartil a medián. Dále červenými puntíky jsou znázorněny střední hodnoty optimálních hodnot. Z grafu je zřejmé, že střední hodnoty optimálních hodnot se pro rostoucí N blíží k hodnotě 35 kusů (modrá čára). To je ovšem taktéž optimální hodnota úlohy prodavače novin s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu [0,100] a se zadanými parametry.



Obrázek 3.1: Odhady optimálního řešení pomocí metody SAA.

Závěr

Tato práce se zabývala problém prodavače novin, tedy speciální optimalizační úlohou s náhodným parametrem. Během hledání optimálních řešení jsme zjistili, že pro uvažované formulace problému prodavače novin vycházejí analogická řešení. Navíc pokud máme nějaké speciální rozdělení, tak se optimální řešení může najít analyticky. Pro diskrétní náhodnou poptávku jsme si ukázali tři různé postupy pro nalezení hodnoty maximalizující zisk. Obecně lze říci, že optimální řešení získáme pomocí aproximace zadané účelové funkce.

Poté jsme zjistili, že k výpočtu míry rizika CVaR je použita podobná účelová funkce jako v základním modelu problému prodavače novin. Nakonec jsme si ukázali numerickou studii, která porovnávala parametrický a neparametrický přístup k úloze v případě, kdy jsme uvažovali rovnoměrné rozdělení. Neparametrický přístup zde byl vyjádřen metodou SAA. Ta se ukázala býti dobrým nástrojem pro aproximaci reálného rozdělení a pro rostoucí velikost náhodného výběru se optimální hodnota blížila k optimální hodnotě úlohy prodavače novin s rovnoměrným rozdělením.

Literatura

Artstein, Z. (1999). Gains and costs of information in stochastic programming. *Annals of Operations Research*, **85**, 129–152.

Artstein, Z. a Wets, R.-B. (1994). Stability Results for Stochastic Programs and Sensors, Allowing for Discontinous Objective Functions. *SIAM Journal on Optimization*, **3**.

Bazaraa, M., Sherali, H. a Shetty, C. (1990). *Nonlinear programming: theory and algorithms.* John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-59973-5.

Dupač, V. a Hušková, M. (2013). *Pravděpodobnost a matematická statistika.* Druhé upravené vydání. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-2208-8.

Dupačová, J. (1986). *Stochastické programování.* První vydání. Ministerstvo školství ČSR, Praha.

Dupačová, J. a Lachout, P. (2011). *Úvod do optimalizace.* Vydání první. MATFYZPRESS, Praha. ISBN 978-80-7378-176-7.

Jarník, V. (1984). *Diferenciální počet (I).* Vydání 7. nezměněné. Academia, Praha.

Langová, N. (2009). Empirická distribuční funkce. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze. Matematicko-fyzikální fakulta. Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Praha.

Levi, R., Perakis, G. a Uichanco, J. (2010). The Data-Driven Newsvendor Problem: New Bounds and Insights. *Operation Research*, pages 4–6.

Likeš, J. a Machek, J. (1981). *Počet pravděpodobnosti.* SNTL, Praha.

R Core Team (2014). *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL `http://www.R-project.org`.

Rockafellar, R. a Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distribution. *Journal of Banking & Finance*, **26**, 1443–1471.

Serfling, R. J. (2002). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* Wiley series in probability and statistics. John Wiley & Sons, New York. ISBN 0-471-21927-4.

Seznam obrázků