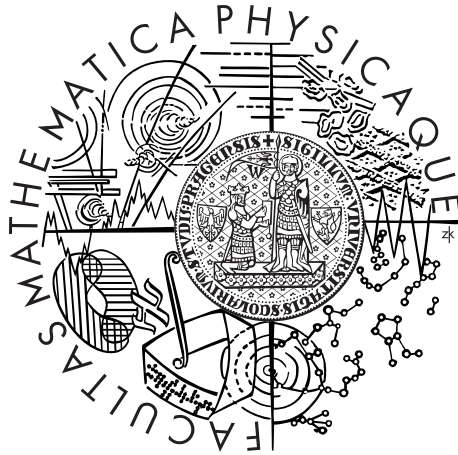


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



David Šerý

## Stacionární stavy dynamických systémů

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Rád bych poděkoval Pánu Bohu, panu prof. Vladimíru Janovskému za trpělivost, rady a věnovaný čas a mé rodině a snoubence za psychickou podporu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

David Šerý

Název práce: Stacionární stavy dynamických systémů

Autor: David Šerý

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Katedra numerické matematiky

Abstrakt: V práci se zabýváme kvalitativními vlastnostmi řešení diferenciálních rovnic v okolí stacionárních stavů. Stěžejní kapitola se týká planárních rovnic. Klíčovým pojmem je stabilita stacionárního bodu. Analýza stability úzce souvisí s linearizací, která ale v mnohých případech nestačí. Tehdy může pomoci např. Ljapunovova funkce. Zavedeme pojmy stabilní a nestabilní varieta, báze atrakce a topologická ekvivalence rovnic a nastíníme jejich důležitost v kvalitativní analýze. Teorii ilustrujeme na mnoha příkladech. V třetí kapitole se krátce zmíníme o numerické kontinuaci aplikované na hledání stacionárních stavů rovnice závislé na parametru  $\lambda$ .

Klíčová slova: soustava obyčejných diferenciálních rovnic, dynamický systém, stacionární stav, stabilita

Title: Steady states of dynamical systems

Author: David Šerý

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Vladimír Janovský, DrSc., Department of Numerical Mathematics

Abstract: In the thesis we analyse qualitative properties of dynamical systems near equilibria. We mainly deal with planar equations. The key notion is the stability of steady state. The stability analysis is closely connected to linearisation, which in many cases doesn't suffice. In that case Lyapunov function may help. We define stable and unstable manifold, basin of attraction, topological equivalence of equations and demonstrate their significance in qualitative analysis. The theory will be illustrated on examples. In the third chapter we briefly mention numerical continuation of steady states with respect to a parameter.

Keywords: systems of ordinary differential equations, dynamical systems, steady states, stability

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Stacionární stavy planárních dynamických systémů</b>	<b>7</b>
2.1	Asymptotická stabilita . . . . .	8
2.2	Nestabilita stacionárního stavu . . . . .	10
2.3	Ljapunovova funkce . . . . .	12
2.4	Princip invariance . . . . .	14
2.5	Zachování sedla . . . . .	17
2.6	Ekvivalence řešících funkcí blízko hyperbolických stacionárních bodů	20
<b>3</b>	<b>Parametricky závislé stacionární stavy</b>	<b>24</b>
3.1	Numerická kontinuace . . . . .	24
3.2	Bifurkační body . . . . .	25
3.3	Příklad . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Závěr</b>	<b>30</b>
	<b>Literatura</b>	<b>31</b>
	<b>Seznam obrázků</b>	<b>32</b>

# Kapitola 1

## Úvod

V této kapitole zdefinujeme několik základních pojmů a ilustrujeme je na příkladech. Zabýváme se v ní výhradně *autonomní skalární diferenciální rovnicí*, tedy rovnicí ve tvaru

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

doplňenou počáteční podmínkou

$$x(t_0) = x_0$$

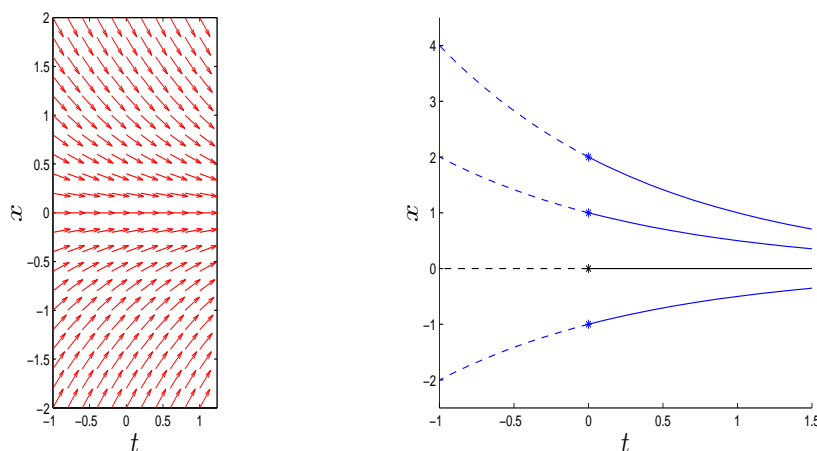
pro  $t \in I_{t_0, x_0}$ , kde  $I_{t_0, x_0} = (\alpha_{t_0, x_0}, \beta_{t_0, x_0})$  značí *maximální interval existence* řešení rovnice s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ ,  $x : I_{t_0, x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**1.1. Definice.** Nechť  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  je autonomní diferenciální rovnice. Bod  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  nazveme *stacionární*, pokud  $f(\bar{x}) = 0$ .

**1.2. Pozorování.** Stacionárním bodem  $\bar{x}$  vždy prochází konstantní řešení  $x(t) = \bar{x}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

**1.3. Poznámka.** Pravá strana rovnice  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  představuje směrnici přímky procházející bodem  $x(t)$ . *Směrovým polem* rovnice  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  nazveme graf zobrazení přiřazující vektoru  $(t, x)$  vektor  $(1/k, f(x(t))/k)$ , kde  $k$  je vhodná škálovací konstanta.

**1.4. Příklad.** Podívejme se na průběh funkce  $\dot{x} = \lambda x$  exponenciálního růstu s parametrem  $\lambda = \log(0.5)$ .



Obrázek 1.1: Vlevo: Směrové pole; Vpravo: Řešení rovnice s počátečními podmínkami  $x(0) = -1$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(0) = 1$  a  $x(0) = 2$

Z grafu i směrového pole nahlédneme jediný stacionární bod, jímž je bod 0.

**1.5. Poznámka.** Pokud  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $C^1$  na  $\mathbb{R}$ , existuje pro každou počáteční podmínku právě jedno maximální řešení. Stejná situace platí i ve více dimenzích. Tento fakt nám umožňuje definovat tzv. *řešící funkci*.

**1.6. Definice.** Nechť  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  je autonomní diferenciální rovnice. Funkci  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme *řešící funkce*, pokud  $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$ , kde  $x(t)$  je maximální řešení  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$  a množina  $M$  je definovaná  $M := \{(t, t_0, x_0), t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}, t \in I_{t_0, x_0}\}$ .

**1.7. Značení.** V dalším textu budeme používat následující značení:

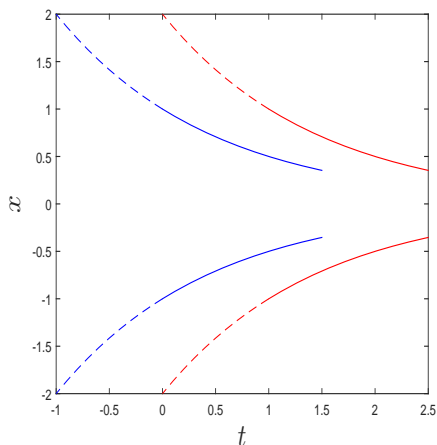
$$\varphi(t, x_0) := \varphi(t, 0, x_0)$$

$$I_{x_0} := I_{0, x_0}$$

$$(\alpha_{x_0}, \beta_{x_0}) := (\alpha_{0, x_0}, \beta_{0, x_0}).$$

**1.8. Poznámka.** Nechť  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  je autonomní diferenciální rovnice s počáteční podmínkou  $x(t_0) = x_0$ ,  $x$  definované na  $I_{t_0, x_0}$  je maximální řešení rovnice a  $\tau \in \mathbb{R}$ . Potom  $y(t) = x(t - \tau)$  pro  $t \in \{\eta \in \mathbb{R}; \eta - \tau \in I_{t_0, x_0}\}$  je maximální řešení rovnice s počáteční podmínkou  $y(t_0 + \tau) = x_0$ . Při zadání stejné hodnoty počáteční podmínky v jiném časovém okamžiku tedy dojde jen k posunutí řešení.

V dalším textu tedy budeme bez újmy na obecnosti místo  $\varphi(t, t_0, x_0)$  používat pouze  $\varphi(t, x_0)$ , tedy budeme uvažovat počáteční podmínku v čase 0.



Obrázek 1.2: Modře: Řešení příkladu 1.4 vykreslené na intervalu  $[-1, 1.5]$ ; Červeně: Řešení stejného příkladu s počáteční podmínkou danou stejnou hodnotou posunutou do bodu  $x = 1$  vykreslené na intervalu  $[0, 2.5]$

**1.9. Definice.** Stacionární bod  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  nazveme *stabilní*, platí-li:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_0, |x_0 - \bar{x}| < \delta : \varphi(t, x_0) < \varepsilon \forall t \geq 0.$$

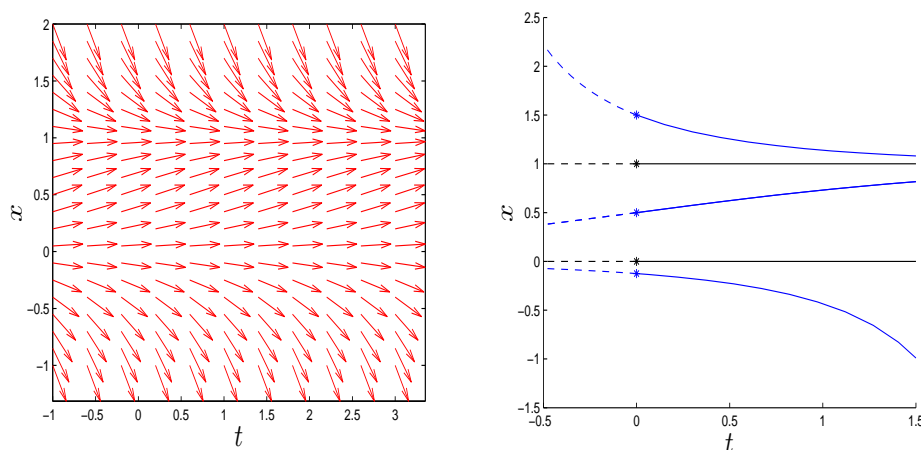
Pokud navíc

$$\exists r > 0 \forall x_0, |x_0 - \bar{x}| < r : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \bar{x},$$

nazveme  $\bar{x}$  *asymptoticky stabilní*.

Pokud stacionární bod  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  není stabilní, nazveme jej *nestabilní*.

**1.10. Příklad.** Určeme asymptotickou stabilitu stacionárních bodů logistické funkce  $\dot{x} = (1 - x)x$ .

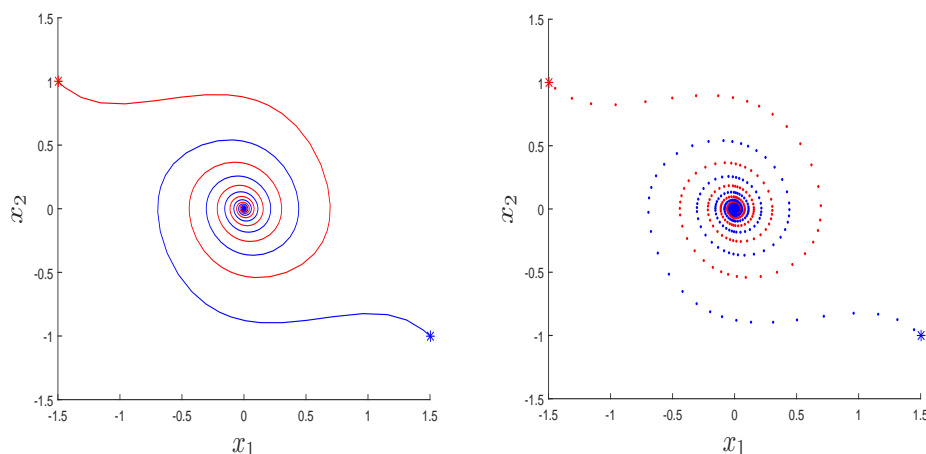


Obrázek 1.3: Vlevo: Směrové pole; Vpravo: Řešení rovnice s počátečními podmínkami  $x(0) = -\frac{1}{8}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $x(0) = 1$  a  $x(0) = \frac{3}{2}$

Ze směrového pole nahlédneme, že stacionární bod 1 je stabilní a dokonce asymptoticky stabilní, stacionární bod 0 je nestabilní.

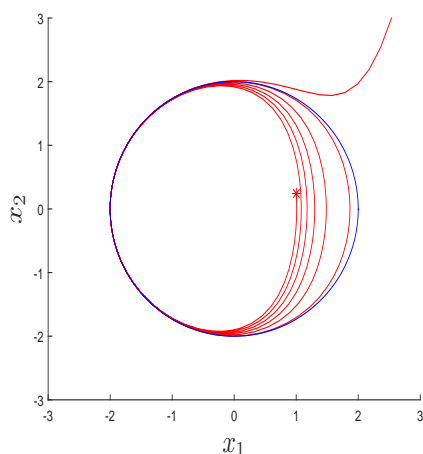


**1.11. Poznámka.** Veškeré grafy v této práci jsou tvořené softwarem MATLAB R2014b. Řešení rovnic je pouze přibližné, založené na numerických metodách implementovaných v Matlabu. Převážně se jedná o metodu ODE23s nebo ODE23. Tyto metody získávají diskrétní posloupnosti bodů, které následně lineárně interpolují.



Obrázek 1.4: Vlevo: Graf dvou řešení diferenciální rovnice generovaný softwarem Matlab; Vpravo: Posloupnost bodů generovaná softwarem Matlab použitá k aproximaci řešení

Ne vždy je software MATLAB schopen konvergovat k přesnému řešení. Problém nastává obvykle v okrajových případech, jako např. při ilustraci definice 2.18. V druhém uvažovaném případě oné ilustrace nebyla schopna dokončovat ke správnému řešení metoda ODE23, ODE23s ani ODE15s. Konkrétně v určitém čase řešení opustilo kružnici a norma řešení v limitě divergovala.

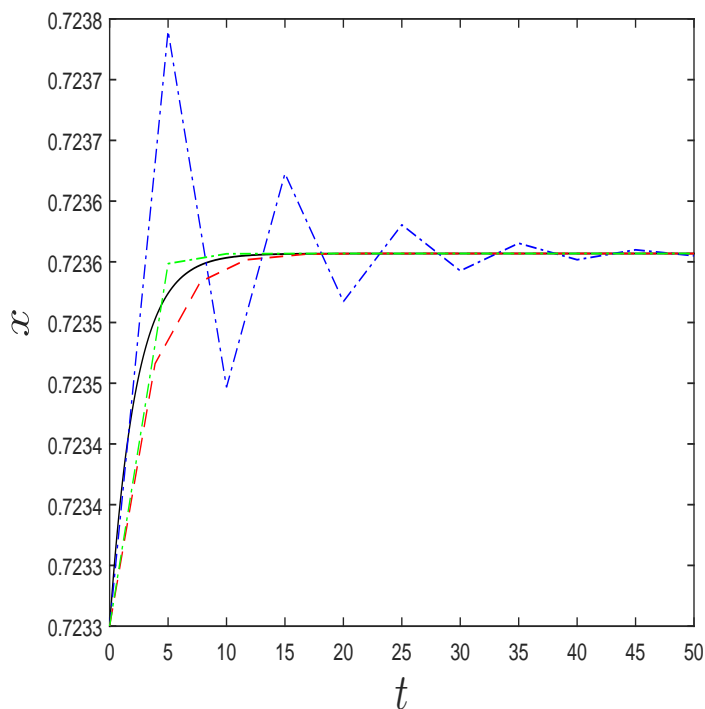


Obrázek 1.5: Selhání numerických metod v příkladu k definici 2.18 při řešení numerickou metodou ODE23s

Řešení diferenciálních rovnic probíhá obvykle v časovém intervalu  $t \in [0,100]$ . Protože nás ale zajímají kvalitativní vlastnosti grafu, nebude řešení na jiném časovém intervalu vždy komentováno. Dále jsou grafy občas přiblíženy pouze na

určitou jejich část, která dobře reprezentuje daný problém. Ve většině ilustrací bude užít symbol \* pro bod počáteční podmínky úlohy.

Někdy nejsou všechny zmíněné řešiče softwaru MATLAB vhodné k řešení daného problému. Tím se ale dále v textu nebudeme zabývat.



Obrázek 1.6: Černě přesné řešení rovnice exponenciálního růstu, zeleně aproximace řešení metodou ODE23s, modře aproximace řešení metodou ODE23, červeně aproximace řešení metodou ODE15s

Poslední obrázek ilustruje numerické chyby při řešení rovnice

$$\dot{x} = (1 - x)x - \frac{1}{5}; \quad x(0) = 0.7233.$$

Počáteční podmínka je dost blízko stacionárnímu stavu, což způsobilo jisté problémy při snaze nalézt přibližné řešení.

# Kapitola 2

## Stacionární stavy planárních dynamických systémů

Ve druhé kapitole budeme pracovat s rovinnými autonomními diferenciálními rovnicemi, tedy rovnicemi tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

s počáteční podmínkou

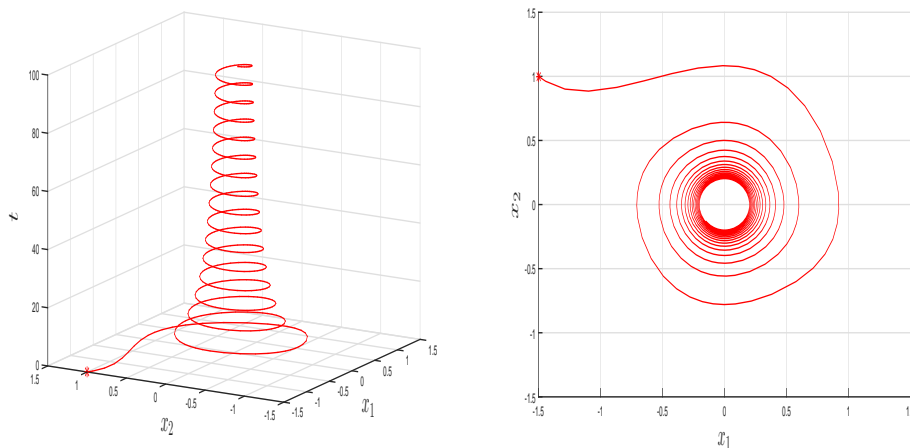
$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

pro  $t \in I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ ,  $\mathbf{x} : I_{t_0, \mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Zjistíme, že mnohdy pro určení stability stačí zkoumat linearizaci dané diferenciální rovnice, musí být ale splněny určité předpoklady. Pro situace, kdy nebude linearizace stačit, zavedeme *Ljapunovovu funkci* a ukážeme, kdy nám může pomoci.

**2.1. Poznámka.** Všechny definice a značení z první kapitoly přirozeně rozšíříme do dvou dimenzí.

**2.2. Definice.** Necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  je diferenciální rovnice. Necht'  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  a  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  je řešením této rovnice. *Trajektorii* jdoucí bodem  $\mathbf{x}_0$  nazveme graf tohoto řešení, *fázovou křivkou* jdoucí bodem  $\mathbf{x}_0$  nazveme průmět tohoto grafu do roviny  $t = 0$  a *fázovým portrétem* nazveme graf několika fázových křivek.



Obrázek 2.1: Vlevo: Trajektorie Van der Polova oscilátoru s  $\lambda = 0$  a počáteční podmínkou  $[-1.5, 1]$  pro  $t = 0$ ; Vpravo: Fázový portrét příslušný této trajektorii

## 2.1 Asymptotická stabilita

**2.3. Definice.** Necht'  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , je funkce a  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ . *Jakobiho maticí* funkce  $\mathbf{f}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  nazveme matici  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  definovanou jako

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

**2.4. Definice.** Necht'  $\bar{\mathbf{x}}$  je stacionární bod rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Lineární diferenciální rovnici

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}(t)$$

nazveme *linearizací* původní diferenciální rovnice v bodě  $\bar{\mathbf{x}}$ .

**2.5. Poznámka.** Pro dost hladkou  $\mathbf{f}$  můžeme aproximovat diferenciální rovnici  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  na okolí bodu  $\bar{\mathbf{x}}$  pomocí Taylorova rozvoje

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}),$$

kde funkce  $\mathbf{g}$  představuje zbytek Taylorova polynomu druhého řádu.

**2.6. Věta** (Asymptotická stabilita z linearizace). Necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  je planární diferenciální rovnice se stacionárním bodem  $\bar{\mathbf{x}}$  a necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}(t)$  je její linearizací v bodě  $\bar{\mathbf{x}}$ . Pokud mají všechna vlastní čísla matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  zápornou reálnou část, je bod  $\bar{\mathbf{x}}$  asymptoticky stabilní.

*Důkaz.* Viz Hale a Koçak (1991, str.268). □

**2.7. Příklad.** Vyšetříme chování tlumeného kyvadla, tedy rovnice ve tvaru

$$\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0,$$

kde  $a > 0$  představuje tření a  $\omega^2 = g/l$  pro  $g$  gravitační konstantu a  $l$  délku vlákna kyvadla.

Označme  $x_1 := \theta$  a  $x_2 := \dot{\theta}$ . Po přeznačení můžeme původní rovnici druhého řádu přepsat na soustavu dvou rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\omega^2 \sin x_1 - 2ax_2. \end{aligned}$$

Stacionární řešení je zřejmě libovolné řešení tvaru  $(x_1, x_2) = (n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Linearizace rovnice v tomto bodě má tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(n\pi) & -2a \end{pmatrix}.$$

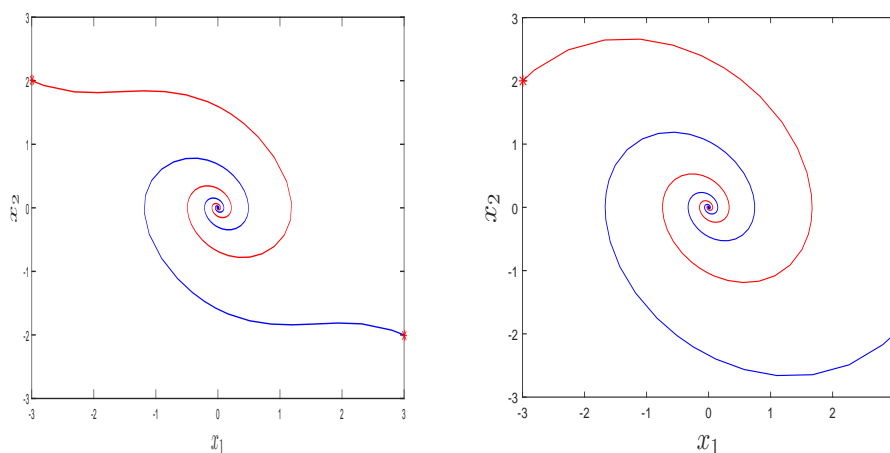
Situace se tedy přirozeně rozpadá na dva případy podle parity čísla  $n$ . Příklad, kdy je  $n$  liché, budeme řešit v dalším oddílu. Necht' je tedy  $n$  sudé. Potom má linearizace tvar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2a \end{pmatrix}$$

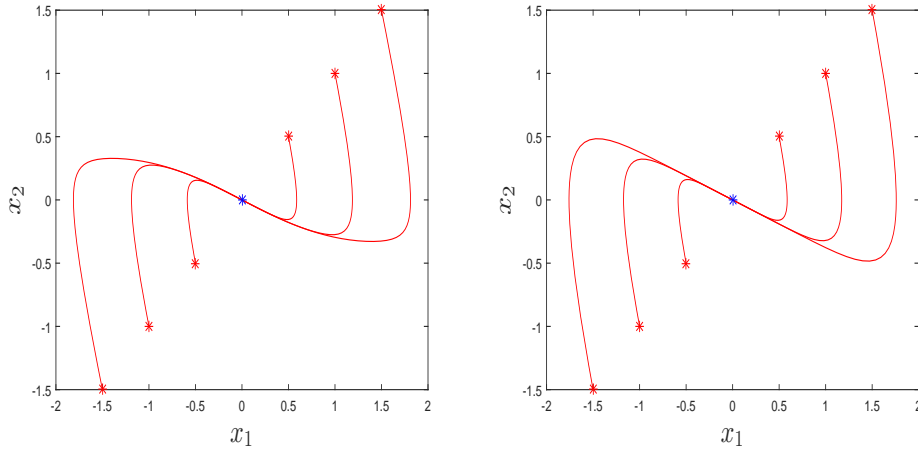
a pro  $\lambda$  příslušného determinantu dostáváme

$$\begin{aligned} -\lambda(-2a - \lambda) + \omega^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2a\lambda + \omega^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -a \pm \sqrt{a^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Protože  $|\sqrt{a^2 - \omega^2}| \leq |a|$  pro libovolné  $\omega \in \mathbb{R}$  a  $a < 0$ , mají obě vlastní čísla zápornou reálnou část. Tedy dle věty 2.6 je bod  $(x_1, x_2) = (2k\pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  asymptoticky stabilní.



Obrázek 2.2: Vlevo: Fázový portrét rovnice s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 0.25$ ; Vpravo: Fázový portrét linearizace rovnice s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 0.25$



Obrázek 2.3: Vlevo: Fázový portrét rovnice s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 1.5$ ; Vpravo: Fázový portrét linearizace rovnice s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 1.5$

## 2.2 Nestabilita stacionárního stavu

**2.8. Věta** (Nestabilita z linearizace). Nechť  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  je planární diferenciální rovnice se stacionárním bodem  $\bar{\mathbf{x}}$  a necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}(t)$  je její linearizací v bodě  $\bar{\mathbf{x}}$ . Pokud existuje vlastní číslo matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  s kladnou reálnou částí, je bod  $\bar{\mathbf{x}}$  nestabilní.

*Důkaz.* Viz Hale a Koçak (1991, str.272). □

**2.9. Poznámka.** Pokud pro každé  $\lambda$  vlastní číslo matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  platí  $Re(\lambda) \leq 0$  a existuje  $\lambda_0$ , že  $Re(\lambda_0) = 0$ , nelze bez dalšího zkoumání o stabilitě řešení nic tvrdit.

**2.10. Příklad.** Vraťme se k rovnici

$$\ddot{\theta} + 2a\dot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0.$$

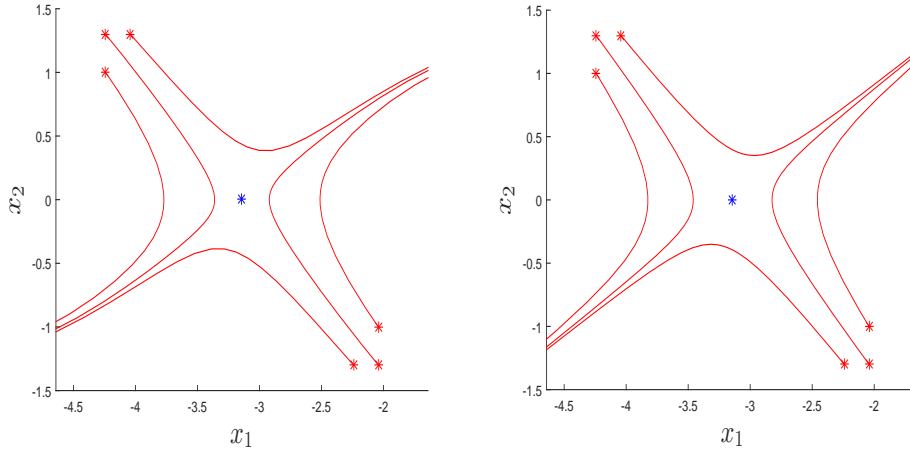
Vyšetřili jsme její chování v okolí stacionárních bodů  $(x_1, x_2) = (2k\pi, 0), k \in \mathbb{N}$ . Podívejme se tedy na body  $(x_1, x_2) = ((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{N}$ . Linearizace rovnice v těchto bodech je tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2a \end{pmatrix}$$

a pro  $\lambda$  musí obdobně jako v minulém příkladu platit

$$\begin{aligned} -\lambda(-2a - \lambda) - \omega^2 &= 0 \\ \lambda^2 + 2a\lambda - \omega^2 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= -a \pm \sqrt{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

V tomto případě je pro libovolné  $\omega \in \mathbb{R}$  a  $a < 0$  vlastní číslo  $\lambda_1 > 0$  a  $\lambda_2 < 0$ . Tedy dle věty 2.8 je bod  $(x_1, x_2) = ((2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{N}$  nestabilní.



Obrázek 2.4: Vlevo: Fázový portrét řešení s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 1.5$  s počátečními podmínkami v okolí bodu  $(-\pi, 0)$ ; Vpravo: Fázový portrét řešení linearizace rovnice s  $\omega^2 = 1$  a  $a = 0.25$  s počátečními podmínkami v okolí bodu  $(-\pi, 0)$

**2.11. Příklad.** Vyšetříme chování *Van der Polova* oscilátoru v závislosti na parametru  $\lambda$ . Uvažujme tedy rovnici

$$\ddot{y} - (2\lambda - y^2)\dot{y} + y = 0.$$

Tato rovnice je ekvivalentní soustavě rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2\lambda x_2 - x_1^2 x_2. \end{aligned}$$

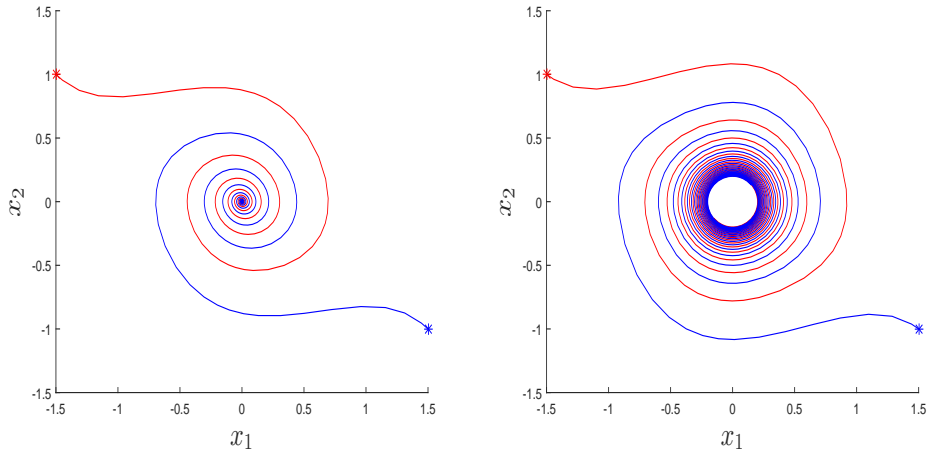
Soustava má zřejmě jediný stacionární bod  $(0, 0)$ . Linearizace v tomto bodě má tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

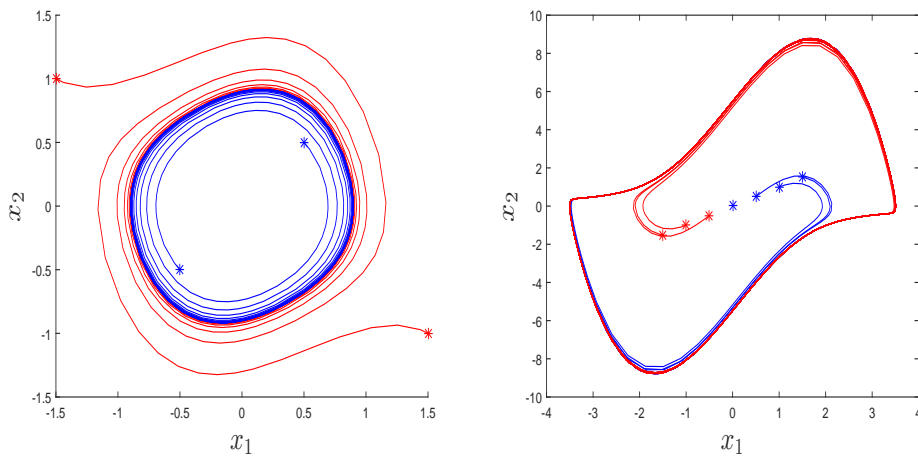
Pro vlastní čísla  $\mu$  matice  $A - \mu I$  dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} -\mu(2\lambda - \mu) + 1 &= 0 \\ \mu^2 - 2\lambda\mu + 1 &= 0 \\ \mu_{1,2} &= \frac{2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4}}{2} = \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}. \end{aligned}$$

Tedy pro  $\lambda > 0$  je bod  $(0, 0)$  nestabilní podle věty 2.8 a pro  $\lambda < 0$  je bod  $(0, 0)$  asymptoticky stabilní podle věty 2.6. Pokud ale  $\lambda = 0$ , nemůžeme o stabilitě tohoto bodu z uvedených vět vyvodit žádný závěr. Použijeme tedy tzv. *Ljapunovovu funkci*.



Obrázek 2.5: Vlevo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = -0.1$  s počátečními podmínkami  $(-1.5,1)$  a  $(1.5,-1)$ ; Vpravo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = 0$  s počátečními podmínkami  $(-1.5,1)$  a  $(1.5,-1)$



Obrázek 2.6: Vlevo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = 0.1$  s počátečními podmínkami  $(-1.5,1), (1.5,-1)$  (červeně) a  $(0.5,0.5), (-0.5,-0.5)$  (modře); Vpravo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = 1.5$  s počátečními podmínkami  $(-1.5,-1.5), (-1,-1)$  a  $(-0.5,-0.5)$  (červeně) a  $(0.5,0.5), (1,1)$  a  $(1.5,1.5)$  (modře)

## 2.3 Ljapunovova funkce

**2.12. Definice.** Nechť  $\Omega$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^2$  obsahující počátek a  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Řekneme, že  $V$  je *pozitivně definitní*, pokud

1.  $V(\mathbf{0}) = 0$
2.  $V(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ .



**2.13. Značení.** Nechť  $\mathbf{x}(t)$  je řešení  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  a nechť  $\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce. Potom pro časovou derivaci  $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t))$  dle řetízkového pravidla platí:

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_1(t) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_2(t).$$

V dalším textu budeme tuto derivaci značit zkráceně  $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x} := \mathbf{x}(t)$ .

**2.14. Věta (Ljapunovova).** Nechť  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  je stacionárním bodem rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ ,  $\mathbf{V}$  je pozitivně definitní funkce na  $U$  okolí  $\mathbf{0}$  a  $\mathbf{V} \in C^1(U)$ . Pokud:

- $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0, \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ , je  $\bar{\mathbf{x}}$  asymptoticky stabilní.
- $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ , je  $\bar{\mathbf{x}}$  stabilní.
- $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\mathbf{0}\}$ , je  $\bar{\mathbf{x}}$  nestabilní.

*Důkaz.* Viz Hale a Koçak (1991, str.280). □

**2.15. Definice.** Nechť  $\Omega$  je otevřené okolí  $\mathbf{0}$  v  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je pozitivně definitní a  $\mathbf{V} \in C^1(\Omega)$ . Pokud  $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ , nazveme funkci  $\mathbf{V}$  *Ljapunovovou funkcí* rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Pokud dokonce  $\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$ , nazveme funkci  $\mathbf{V}$  *striktní Ljapunovovou funkcí* rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ .

**2.16. Příklad.** Pokračujme v příkladu z minulé sekce s volbou parametru  $\lambda = 0$ . Řešme tedy následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_1^2 x_2. \end{aligned}$$

Zavedme pozitivně definitní funkci

$$\mathbf{V}(x_1, x_2) := ax_1^2 + bx_2^2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, a, b > 0,$$

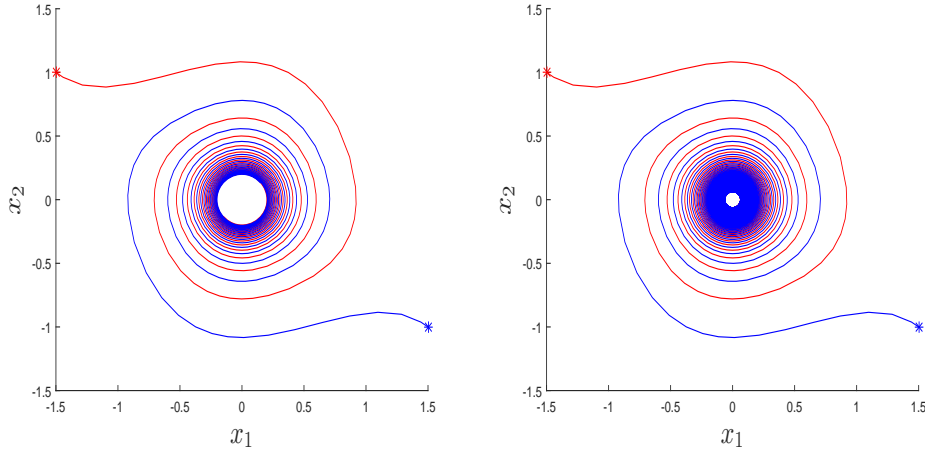
kde konstanty  $a$  a  $b$  vhodně zvolíme později. Protože jsou  $x_1, x_2$  funkce závislé na čase, časovou derivaci funkce  $\mathbf{V}$  získáme pomocí řetízkového pravidla a dosazení z původní soustavy rovnic. Tedy:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}(x_1, x_2) &= 2ax_1\dot{x}_1 + 2bx_2\dot{x}_2 \\ &= 2ax_1x_2 + 2bx_2(-x_1 - x_1^2x_2) \\ &= 2(a - b)x_1x_2 - 2bx_1^2x_2^2. \end{aligned}$$

Vidíme, že při volbě  $a = b = 1$  dostáváme

$$\dot{\mathbf{V}}(x_1, x_2) = -2x_1^2x_2^2 < 0, \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tedy dle věty 2.14 je bod 0 asymptoticky stabilní.



Obrázek 2.7: Vlevo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = 0$  s počátečními podmínkami  $(-1.5, 1)$  a  $(1.5, -1)$  pro čas  $t \in [0, 100]$ ; Vpravo: Fázový portrét rovnice s  $\lambda = 0$  s počátečními podmínkami  $(-1.5, 1)$  a  $(1.5, -1)$  pro čas  $t \in [0, 1000]$

## 2.4 Princip invariance

**2.17. Definice.** Necht'  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  je řešící funkcí  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . *Pozitivní orbit*  $\gamma^+(\mathbf{x}_0)$ , *negativní orbit*  $\gamma^-(\mathbf{x}_0)$  a *orbit*  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  definujeme následovně:

$$\gamma^+(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{\mathbf{x}_0})} \varphi(t, \mathbf{x}_0),$$

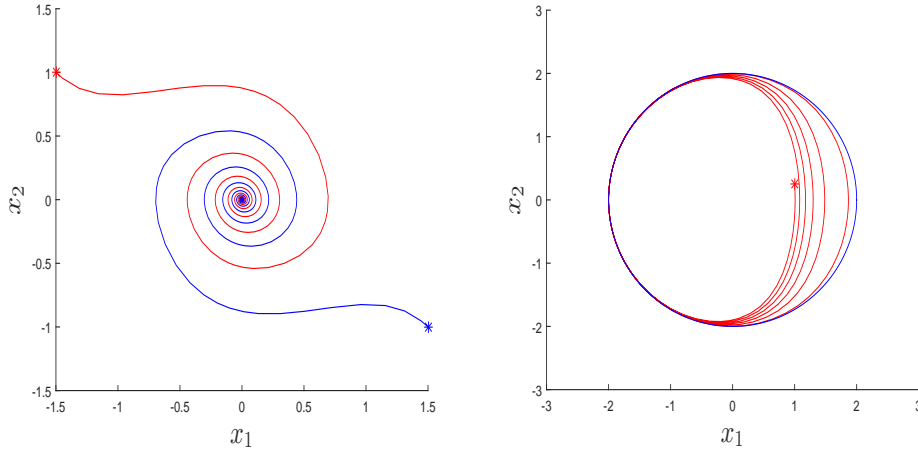
$$\gamma^-(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, 0]} \varphi(t, \mathbf{x}_0),$$

$$\gamma(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, \beta_{\mathbf{x}_0})} \varphi(t, \mathbf{x}_0).$$

**2.18. Definice.** Bod  $\mathbf{y}$  nazveme *omega limitní bod* orbitu  $\gamma(\mathbf{x}_0)$ , pokud existuje posloupnost  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  taková, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \beta_{\mathbf{x}_0}$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$ . Množinu všech omega limitních bodů orbitu  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  nazýváme *omega limitní množina* orbitu  $\gamma(\mathbf{x}_0)$  a značíme ji  $\omega(\mathbf{x}_0)$ .

Ekvivalentně můžeme definovat  $\omega(\mathbf{x}_0)$  následovně:

$$\omega(\mathbf{x}_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\gamma^+(\varphi(\tau, \mathbf{x}_0))}.$$



Obrázek 2.8: Vlevo: Fázový portrét orbitů s  $\omega$ -limitní množinou rovnou bodu  $(0,0)$ ; Vpravo: Modře Kružnice o poloměru 2 a středu  $(0,0)$ , červeně fázový portrét orbitu s  $\omega$ -limitní množinou rovnou této kružnici

**2.19. Definice.** Množinu  $U \subset \mathbb{R}^2$  nazveme:

*pozitivně invariantní* vůči řešící funkci  $\varphi$ , pokud

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U : \gamma^+(\mathbf{x}_0) \subset U,$$

*pozitivně invariantní*, pokud

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U : \gamma^-(\mathbf{x}_0) \subset U,$$

*invariantní*, pokud

$$\forall \mathbf{x}_0 \in U : \gamma(\mathbf{x}_0) \subset U.$$

**2.20. Poznámka.** Množina  $W$  všech stacionárních bodů rovnice je invariantní.

**2.21. Věta** (Princip invariance). Nechť  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce,  $k \in \mathbb{R}$  a

$$U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; V(\mathbf{x}) < k\}.$$

Nechť  $V \in C^1(U) \cap C(\bar{U})$  a  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in U$ . Nechť dále  $S \subset U$  je definována jako

$$S := \{\mathbf{x} \in \bar{U}; \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$$

a  $M$  je maximální invariantní podmnožina  $S$ . Potom každý pozitivní orbit, který začíná v  $U$  a je omezený, má svou  $\omega$ -limitní množinu v  $M$ .

*Důkaz.* Viz Hale a Koçak (1991, str.288). □

**2.22. Věta.** Necht'  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$  je funkce taková, že

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$$

a  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Necht'  $M$  je maximální invariantní podmnožina množiny  $S$  definované jako

$$S := \{\mathbf{x} \in \bar{U}; \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Potom je každý pozitivní orbit omezený a má svou  $\omega$ -limitní množinu v  $M$ .  $\square$

**2.23. Definice.** Necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  je planární diferenciální rovnice a necht'  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ . *Bazénem atrakce* bodu  $\bar{\mathbf{x}}$  nazveme množinu  $M$  definovanou

$$M = \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2; \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}}\}.$$

**2.24. Příklad.** Uvažujme diferenciální rovnici druhého řádu tvaru

$$\ddot{z} + 2a\dot{z} + z + z^3 = 0,$$

kde parametr  $a \in (0,1)$ . Tento systém je ekvivalentní planárnímu systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2ax_2 - x_1 - x_1^3. \end{aligned}$$

Soustava má jediný stacionární bod a tím je  $\bar{\mathbf{x}} = (0,0)$ . Vlastní čísla linearizace v tomto bodě jsou  $\lambda_1 = -a + i\sqrt{1-a^2}$  a  $\lambda_2 = -a - i\sqrt{1-a^2}$ . Tedy dle věty 2.6 je bod  $\bar{\mathbf{x}}$  asymptoticky stabilní. Tato informace nám ale nepomůže ve zkoumání přesného tvaru bazénu atrakce bodu  $\bar{\mathbf{x}}$ . K tomu využijeme větu 2.33. Zavedme Ljapunovovu funkci  $V$  ve tvaru

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4}x_1^4.$$

Pro časovou derivaci  $V$  tedy platí

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= (x_1 + x_1^3)x_1 + x_2x_2 \\ &= -2ax_2^2. \end{aligned}$$

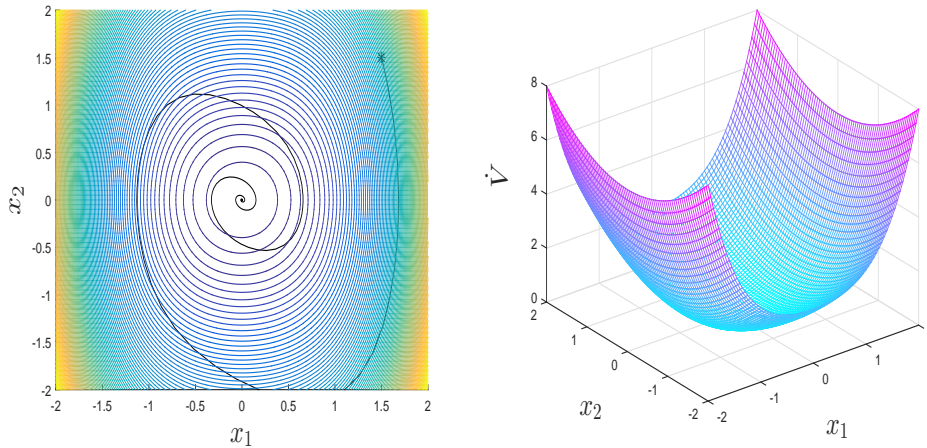
Ověřme předpoklady věty 2.33.  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ , dále  $\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$  a  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ . Bod  $(x_1, x_2)$  patří do množiny  $S$  právě tehdy, když  $x_2 = 0$ . Potřebujeme tedy najít maximální invariantní podmnožinu přímky  $x_2 = 0$ . To znamená, že  $x_2$  a  $\dot{x}_2$  jsou identicky nulové. Z první rovnice dostáváme

$$\dot{x}_1(t) = 0 \implies x_1(t) = konst,$$

z druhé potom

$$x_1(t) = 0 \forall t > 0.$$

Takže  $M = \{(0,0)\}$ . Použitím věty 2.33 tedy dostáváme, že bazén atrakce bodu  $\bar{\mathbf{x}}$  je celé  $\mathbb{R}^2$ .

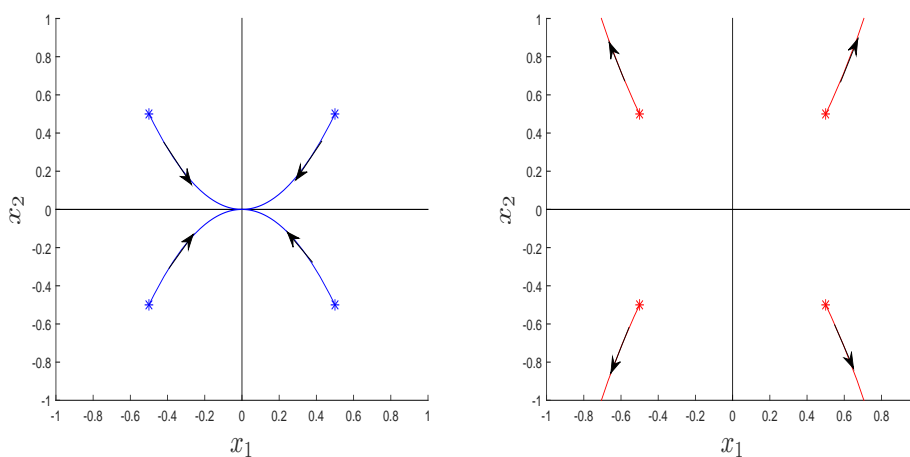


Obrázek 2.9: Vlevo: Barevně vrstevnice Ljapunovovy funkce  $V$ , černě fázový portrét rovnice s počáteční podmínkou  $(1.5, 1.5)$ ; Vpravo: 3D graf funkce  $V$

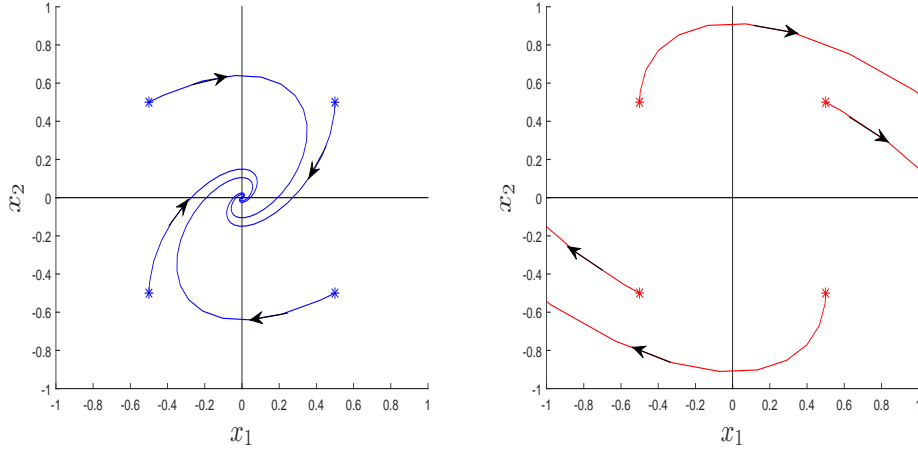
## 2.5 Zachování sedla

**2.25. Definice.** Nechť  $\bar{x}$  je stacionárním bodem rovnice  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ . Označme  $J := Df(\bar{x})$ . Bod  $\bar{x}$  nazveme:

- *Uzlem*, pokud jsou obě vlastní čísla matice  $J$  reálná a mají stejné znaménko.
- *Sedlem*, pokud jsou vlastní čísla matice  $J$  reálná a mají navzájem opačná znaménka.
- *Fokusem (spirálním bodem, ohniskem)*, pokud jsou vlastní čísla komplexně sdružená.



Obrázek 2.10: Vlevo: Fázový portrét příslušející stabilnímu uzlu; Vpravo: Fázový portrét příslušející nestabilnímu uzlu



Obrázek 2.11: Vlevo: Fázový portrét příslušející stabilnímu fokusu; Vpravo: Fázový portrét příslušející nestabilnímu fokusu

**2.26. Definice.** Necht'  $U$  je okolí stacionárního bodu  $\bar{\mathbf{x}}$  rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Lokální stabilní varietu  $W^s(\bar{\mathbf{x}}, U)$  a lokální nestabilní varietu  $W^u(\bar{\mathbf{x}}, U)$  definujeme následovně:

$$W^s(\bar{\mathbf{x}}, U) = \{ \mathbf{x}_0 \in U; \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in U \forall t \geq 0 \wedge \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}} \}$$

$$W^u(\bar{\mathbf{x}}, U) = \{ \mathbf{x}_0 \in U; \varphi(t, \mathbf{x}_0) \in U \forall t \leq 0 \wedge \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, \mathbf{x}_0) = \bar{\mathbf{x}} \}.$$

**2.27. Příklad.** Uvažujme planární systém ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^2. \end{aligned}$$

Tento systém má jediný stacionární bod a tím je  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$ . Linearizace v tomto bodě je ve tvaru

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bod  $\bar{\mathbf{x}}$  je tedy sedlo. Dosazením počáteční podmínky  $\mathbf{x}_0 = (a, 0)$ , popřípadě  $\mathbf{x}_0 = (0, a), a \in \mathbb{R}$  do linearizované rovnice rychle zjistíme, že  $W_1$  je lokální stabilní varietou a  $W_2$  je lokální nestabilní varietou linearizace v počátku, kde

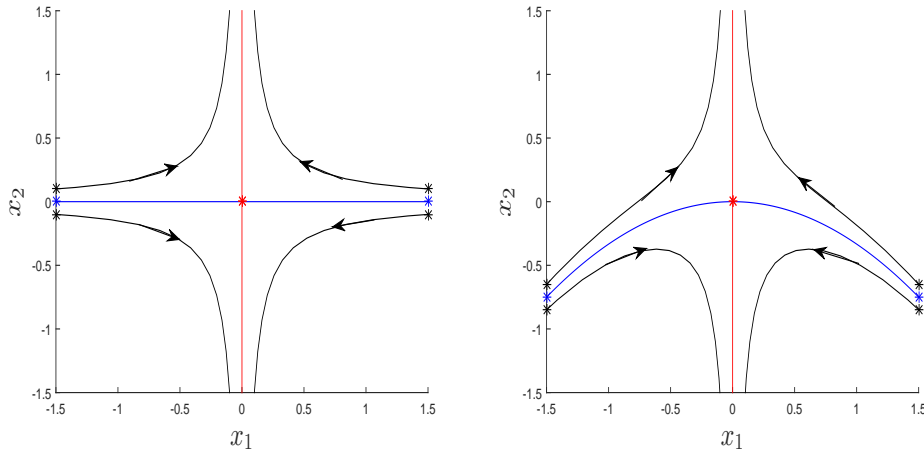
$$W_1 = \{(a, 0), \|a\| < k\}, \quad W_2 = \{(0, a), \|a\| < k\}.$$

K určení příslušných variet původní soustavy použijeme explicitní řešení soustavy. To nalezneme pomocí metody *variace konstant*. Dostáváme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t} x_1^0 \\ x_2(t) &= e^t \left[ x_2^0 + \frac{1}{3} (x_1^0)^2 \right] - \frac{1}{3} e^{-2t} (x_1^0)^2, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{x}(0) = (x_1^0, x_2^0)$  je počáteční podmínka. Přímočarou úvahou dostáváme pro  $U$  okolí počátku lokální stabilní a nestabilní variety ve tvaru

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{0}, U) &= \{(x_1, x_2) : x_2 = -\frac{1}{3} x_1^2\} \\ W^u(\mathbf{0}, U) &= \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}. \end{aligned}$$



Obrázek 2.12: Vlevo: Modře stabilní varieta linearizované rovnice, červeně nestabilní varieta linearizované rovnice, černě chování řešení v blízkosti variet; Vpravo: Modře stabilní varieta původní rovnice, červeně nestabilní varieta původní rovnice, černě chování řešení v blízkosti variet

Ne vždy budeme schopni určit explicitní tvar řešení diferenciální rovnice. I bez této znalosti bychom ale rádi znali stabilní a nestabilní variety. Podívejme se tedy, jak se k nim můžeme dostatečně přiblížit.

**2.28. Věta.** Necht'  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  je diferenciální rovnice, jejíž linearizace v počátku je sedlem. Rovnice potom vždy jde lineární transformací převést do *normálního tvaru*, tedy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2), \end{aligned}$$

kde  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  a funkce  $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$  splňuje  $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  a  $D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .  $\square$

Dále budeme tedy BÚNO předpokládat, že je linearizace soustavy v normálním tvaru.

**2.29. Věta.** Pro linearizaci v normálním tvaru existuje  $\delta$  a funkce  $h_s$  a  $h_u$  stejně hladké jako  $\mathbf{g}$  takové, že v okolí  $U$  počátku definovaném jako

$$U = \{(x_1, x_2); |x_1| < \delta, |x_2| < \delta\},$$

je lokální stabilní a nestabilní varieta ve tvaru

$$\begin{aligned} W^s(\mathbf{0}, U) &= \{(x_1, x_2) : x_2 = h_s(x_1), |x_1| < \delta\} \\ W^u(\mathbf{0}, U) &= \{(x_1, x_2) : x_1 = h_u(x_2), |x_2| < \delta\}. \end{aligned}$$

Navíc  $h_s$  a  $h_u$  splňují

$$h_s(0) = h_u(0) = 0, \quad \frac{dh_s}{dx_1}(0) = \frac{dh_u}{dx_2}(0) = 0. \quad \square$$

**2.30. Příklad.** Ukažme nyní jiný možný způsob spočtení příkladu 2.27, který bude obecnější v tom smyslu, že nemusíme znát explicitní řešení diferenciální rovnice.

Časovou derivací závislosti pro stabilní varietu ve větě 2.33 dostáváme

$$\dot{x}_2 = \frac{dh_s}{dx_1} \dot{x}_1$$

a po dosazení z původní rovnice a věty tak, abychom eliminovali  $x_2$

$$\begin{aligned} -\frac{dh_s}{dx_1} x_1 &= x_2 + x_1^2 \\ &= h_s + x_1^2. \end{aligned}$$

Obdobně z rovnice pro nestabilní varietu získáváme

$$\frac{dh_u}{dx_2}(x_2 + h_u^2) = -h_u.$$

Dle věty 2.33 jsou  $h_s$  a  $h_u$  z  $C^\infty(\mathbb{R})$ , můžeme je tedy rozvést do Taylorových řad

$$\begin{aligned} h_s(x_1) &= \frac{1}{2}a_2x_1^2 + \frac{1}{6}a_3x_1^3 + \dots \\ h_u(x_2) &= \frac{1}{2}b_2x_2^2 + \frac{1}{6}b_3x_2^3 + \dots \end{aligned}$$

Dosazením a následným porovnáním koeficientů příslušných mocnin dostáváme přesný tvar funkcí (formálně bychom mohli tento fakt dokázat indukcí).

$$\begin{aligned} -a_2x_1^2 - \frac{1}{2}a_3x_1^3 + \dots &= x_1^2 + \frac{1}{2}a_2x_1^2 + \frac{1}{6}a_3x_1^3 + \dots \\ \frac{1}{2}a_2 + 1 &= -a_2 \\ \frac{1}{6}a_3 &= -\frac{1}{2}a_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

tedy  $a_2 = -\frac{2}{3}$  a  $a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$ . Stejným postupem pro  $h_u$  získáváme výsledek

$$h_s(x_1) = -\frac{1}{3}x_1^2 \quad h_u(x_2) = 0.$$

## 2.6 Ekvivalence řešících funkcí blízko hyperbolických stacionárních bodů

**2.31. Definice.** Řekneme, že planární diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  a  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$  definované na otevřených množinách  $U, V \in \mathbb{R}^2$  jsou *topologicky ekvivalentní*, pokud existuje *homeomorfismus* (spojitá bijekce se spojitou inverzí)  $\mathbf{h} : U \rightarrow V$  takový, že zobrazuje orbity  $\mathbf{f}$  na orbity  $\mathbf{g}$  a zachovává přitom směr času, formálně

$$\mathbf{h}(\varphi(t, \mathbf{x}_0)) = \psi(t, \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)) \quad \forall t \in (\alpha_{\mathbf{x}_0}, \beta_{\mathbf{x}_0}),$$

kde  $\psi$  je řešící funkce  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ .



**2.32. Definice.** Stacionární bod  $\bar{\mathbf{x}}$  planární diferenciální rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  nazveme *hyperbolický*, pokud obě vlastní čísla Jacobiho matice  $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$  mají nenulovou reálnou část.

**2.33. Věta** (Hartman-Grobman). Nechť  $\bar{\mathbf{x}}$  je hyperbolický stacionární bod rovnice  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ . Potom existuje okolí  $\bar{\mathbf{x}}$ , v němž je  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  topologicky ekvivalentní své linearizaci v  $\bar{\mathbf{x}}$ , tedy  $\dot{\mathbf{x}}(t) = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}(t)$ .  $\square$

**2.34. Příklad.** Uvažujme dva planární lineární diferenciální systémy tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_1 - y_2\end{aligned}$$

se stejnou počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{y}(0)$ . Převodem do polárních souřadnic  $r$  a  $\theta$  dostáváme

$$\begin{aligned}\dot{r}_1 &= -r_1 \\ \dot{\theta}_1 &= 0\end{aligned}$$

a

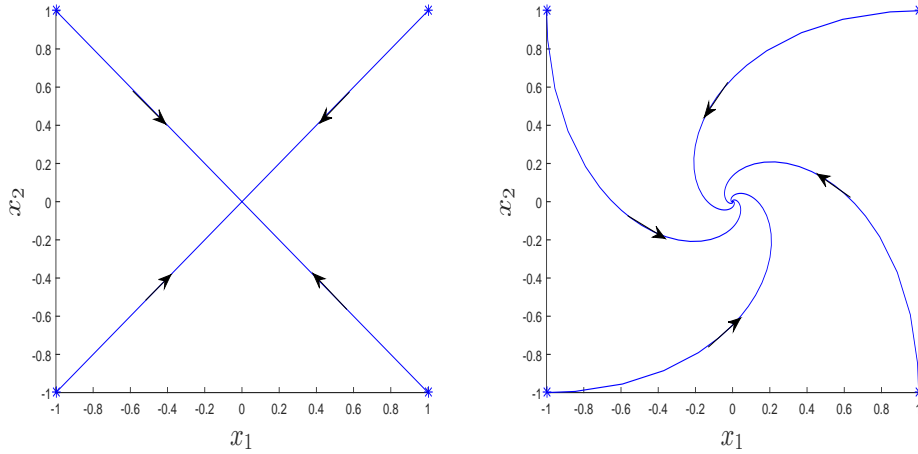
$$\begin{aligned}\dot{r}_2 &= -r_2 \\ \dot{\theta}_2 &= 1\end{aligned}$$

s počáteční podmínkou  $r_1(0) = r_2(0) = r_0$  a  $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$  zvolenými tak, aby  $\mathbf{x}_0 = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ . Hned tedy dostáváme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned}r_1(t) &= r_0 e^{-t} \\ \theta_1(t) &= \theta_0,\end{aligned}$$

pro první rovnici, respektive

$$\begin{aligned}r_2(t) &= r_0 e^{-t} \\ \theta_2(t) &= \theta_0 + t.\end{aligned}$$



Obrázek 2.13: Vlevo: Fázový portrét příslušející prvnímu systému; Vpravo: Fázový portrét příslušející druhému systému

Zřejmě je v obou případech počátek asymptoticky stabilním stacionárním bodem. V prvním případě se jedná o uzel, v druhém pak o fokus. Ukážeme, že jsou systémy topologicky ekvivalentní na množině  $M$  definované

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2; \|\mathbf{x}\| \leq 1\} = \{(r, \theta); r \leq 1\}$$

tak, že explicitně zkonstruujeme vhodný homeomorfismus. Nechť tedy  $(r_1, \theta_1) \in M$  dán. Tento bod patří na orbit příslušný první rovnici a počáteční podmínce  $(1, \theta_1)$  a pro čas  $t_1$  potřebný k dosažení tohoto bodu přímým výpočtem dostáváme

$$t_1 = -\ln r_1.$$

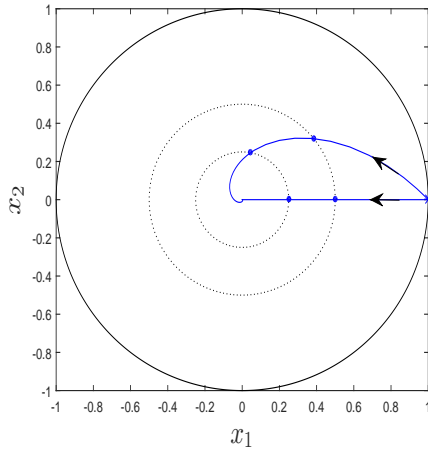
Ve stejném čase dostáváme pro orbit příslušný druhé rovnici a stejné počáteční podmínce

$$(r_2, \theta_2)(t_1) = (r_1, \theta_1 - \ln r_1).$$

Definujme tedy zobrazení  $\mathbf{h} : M \rightarrow M$  jako

$$\mathbf{h}(r, \theta) := (r, \theta - \ln r), r \neq 0; \quad \mathbf{h}(0, \phi) := 0.$$

Geometricky tedy  $\mathbf{h}$  otáčí kružnice se středem v počátku a poloměrem  $r$  o úhel  $\ln r$  po směru hodinových ručiček.  $\mathbf{h}$  je tedy bijekce a lze celkem snadno nahlédnout, že je spojitě se spojitou inverzí.



Obrázek 2.14: Geometrický náhled zobrazení  $\mathbf{h}$

Pro ověření požadavku na  $\mathbf{h}$  necht' je zadán  $(\mathbf{x}_0) = (r_0, \phi_0) \in M$ . Potom

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}(\varphi(t, \mathbf{x}_0)) &= \mathbf{h}(r_0 e^{-t}, \theta_0) \\
 &= (r_0 e^{-t}, \theta_0 - \ln(r_0 e^{-t})) \\
 &= (r_0 e^{-t}, \theta_0 - \ln r_0 + t)
 \end{aligned}$$

a pro druhou stranu rovnosti

$$\begin{aligned}
 \psi(t, \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)) &= \psi(t, (r_0, \theta_0 - \ln r_0)) \\
 &= (r_0 e^{-t}, \theta_0 - \ln r_0 + t).
 \end{aligned}$$

Tyto výrazy se rovnají a ověřili jsme tedy i poslední předpoklad topologické ekvivalence.

# Kapitola 3

## Parametricky závislé stacionární stavy

Ve třetí kapitole se budeme zabývat rovnicí tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \lambda)$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,$$

pro  $t \in I_{t_0, \mathbf{x}_0}$ ,  $\mathbf{x} : I_{t_0, \mathbf{x}_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ .

Konkrétně budeme zkoumat, jak se mění stacionární bod  $\bar{\mathbf{x}}$  při změně parametru  $\lambda$ . Z věty o implicitních funkcích lze následně odvodit předpoklady pro to, kdy je množina stacionárních řešení na okolí  $U$  parametru  $\lambda$  křivka. Účelem *numerické kontinuity* aplikované na diferenciální rovnice je popsat tuto křivku.

**3.1. Definice.** Necht'  $I \in \mathbb{R}$  je otevřený interval. *Křivkou* v  $\mathbb{R}^n$  nazveme libovolné zobrazení  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  třídy  $C^1$  na  $I$ . *Obrazem křivky* nazveme množinu  $\varphi(I)$ .

**3.2. Definice.** Necht'  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  je  $C^1$  zobrazení a pro bod  $\mathbf{0}$  platí, že  $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$  má Jakobiho matice  $D\mathbf{F}(\mathbf{x})$  plnou hodnotu (tedy je *regulární*). Množinu  $M \in \mathbb{R}^n$  nazveme *implicitně zadanou křivkou*, pokud

$$\forall \mathbf{x} \in M \quad \exists U \text{ okolí } \mathbf{x} : M \cap U = \{\mathbf{y} \in U; \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}\}.$$

**3.3. Poznámka.** V textu budeme křivku a implicitně zadanou křivku ztotožňovat.

### 3.1 Numerická kontinuity

Necht'  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  charakterizuje soustavu rovnic, kde  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pro zdůraznění závislosti soustavy na parametru  $\lambda$  píšme

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \lambda).$$

Necht'  $\mathbf{x}_0$  je kořenem soustavy. Zkoumejme, jak se mění množina  $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0})$  při změně parametru  $\lambda$ .

Budeme uvažovat metody typu *prediktor-korektor*. Jsou založeny na následujícím principu:

Nechť  $\mathbf{x}_0$  je regulární bod soustavy takový, že  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ . Konstruujeme posloupnost  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$  bodů aproximující křivku  $\varphi$  podle následujícího algoritmu:

```

Data:  $\mathbf{x}_0, h > 0$  počáteční krok
Result:  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ 
for  $i=1, \dots$  do
    % krok prediktoru
    zvol  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_{i-1} + h\mathbf{t}_{i-1}$ , kde  $\mathbf{t}_{i-1}$  je kladně orientovaný tečný vektor v
    bodě  $\mathbf{x}_{i-1}$ .
    % krok korektorů
    zvol  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ , aby přibližně platilo
     $\mathbf{x}_i = \arg \min_{\omega} \{\|\mathbf{x}_i - \omega\| : \mathbf{f}(\omega) = \mathbf{0}\}$ 
    % volba délky kroku
    zvol nový krok  $h > 0$ 
end

```

Křivka je aproximována posloupností bodů  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=0}^N$ , jejichž "hustota" závisí na volbě kroku  $h$ . Tu lze adaptivně měnit v průběhu algoritmu. Podrobnosti lze najít v knize Allgower a Georg (1997), případně v práci Nádhera (2007), která ilustruje použití softwaru MATCONT na příkladech numerické kontinuační.

## 3.2 Bifurkační body

**3.4. Značení.** Nechť  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je  $C^1$  na  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \lambda)$ . Jakobiho maticí vzhledem k souřadnicím  $\mathbf{u}$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  budeme značit  $D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  a vektor derivací podle  $\lambda$  v bodě  $\mathbf{x}_0$  budeme značit  $D_{\lambda}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Formálně tedy

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(x_0) \end{pmatrix},$$

$$D_{\lambda}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \lambda}(x_0) \end{pmatrix}.$$

**3.5. Definice.** Bod  $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}_0, \lambda_0) \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{0})$  nazveme:

- *limitním bodem* (LP), pokud  $\text{rank}(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) = n$  a  $\text{rank}(D_{\mathbf{u}}\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) < n$
- *bodem bifurkace* (BP), pokud  $\text{rank}(D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) < n$
- *Hopfovým bifurkačním bodem* (H), pokud existuje množina řešení *bifurkující* ze stacionárního řešení v bodě  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ .

**3.6. Věta** (Hopfova bifurkační věta). Necht'  $(\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda))$  jsou vlastní čísla příslušná stacionárnímu řešení  $\mathbf{u}$  daného parametrem  $\lambda$  a necht' tato vlastní čísla mají imaginární osu v bodě  $\lambda$  takto:

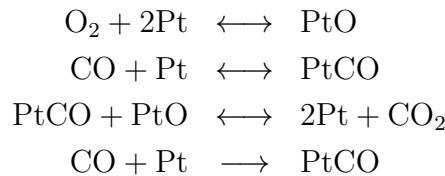
$$\alpha(\lambda_0) = 0, \quad \beta(\lambda_0) \neq 0, \quad \frac{d\alpha(\lambda_0)}{d\lambda} \neq 0.$$

Necht' dále neleží žádná další vlastní čísla na imaginární ose. Potom je bod  $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$  Hopfův bifurkační.

*Důkaz.* Věta je převzatá z knihy Kuznetsov (2004), kde důkaz není uveden.  $\square$

### 3.3 Příklad

**3.7. Příklad.** Katalytická CO-oxidace na platině Pt



Hledaná funkce  $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$  představuje koncentraci PtO, PtCo a Pt v čase  $t$ . Tyto koncentrace se řídí soustavou diferenciálních rovnic ve tvaru

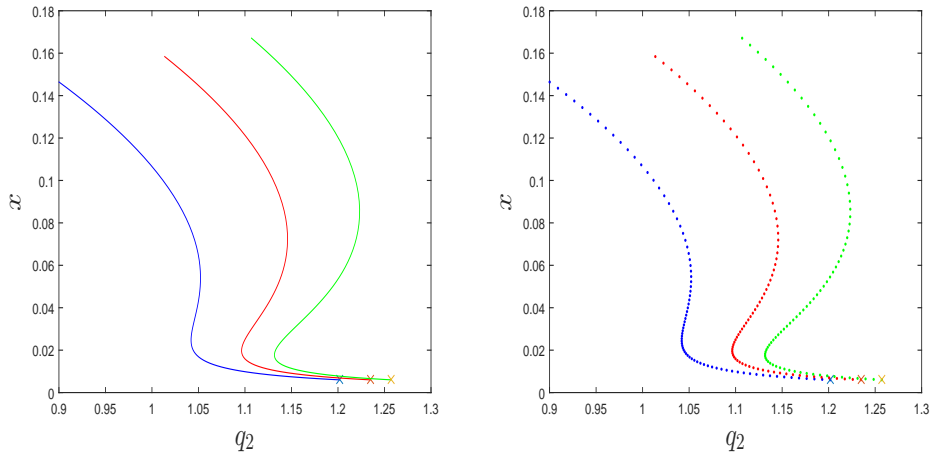
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2q_1z^2 - 2q_5x^2 - q_3xy \\ \dot{y} &= q_2z - q_6y - q_3xy \\ \dot{z} &= -q_4z - kq_4(1 - x - y - z), \end{aligned}$$

kde  $q_1, \dots, q_6$  a  $k$  jsou reakční poměry,  $q_1 = 2.5$ ,  $q_3 = 10$ ,  $q_4 = 0.0675$ ,  $q_5 = 1$  a  $q_6 = 0.1$  jsou fixované,  $q_2$  a  $k$  volné.

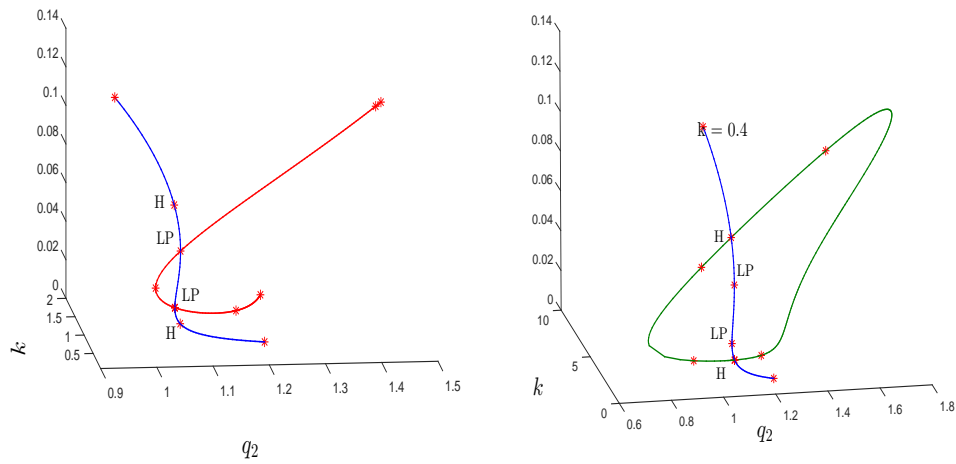
Hledáme stacionární stav v závislosti na parametrech  $q_2$  a  $k$ . Necht'  $k$  je za-fixován. Označme  $F: \mathbb{R}^{3+1} \rightarrow \mathbb{R}^3$  implicitně definovanou křivku danou vztahem  $F(\mathbf{u}, q_2) = 0$ , kde  $F(\mathbf{u}, q_2) = 0$  je dáno soustavou

$$\begin{aligned} 2q_1z^2 - 2q_5x^2 - q_3xy &= 0 \\ q_2z - q_6y - q_3xy &= 0 \\ -q_4z - kq_4(1 - x - y - z) &= 0. \end{aligned}$$

Numerickou kontinuací dostáváme následující výsledky:

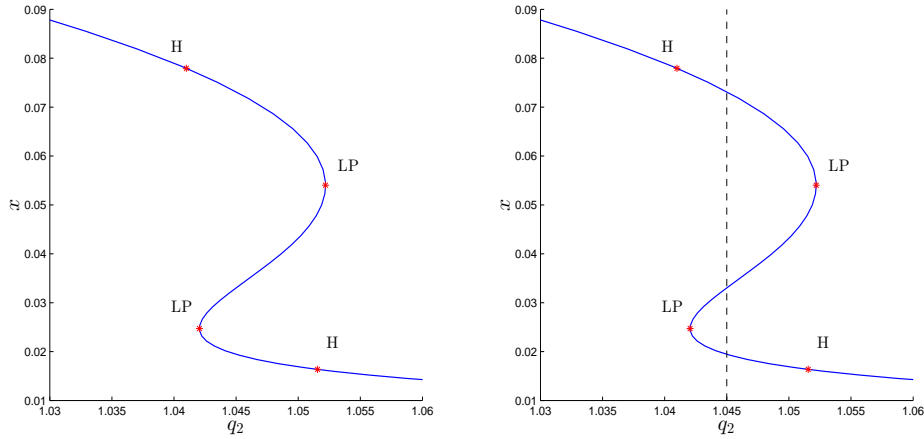


Obrázek 3.1: Vlevo: Modře křivka stacionárních stavů pro  $k = 0.4$ , červeně křivka stacionárních stavů pro  $k = 0.5$ , zeleně křivka stacionárních stavů pro  $k = 0.6$ ; Vpravo: Posloupnosti bodů získané numerickou kontinuací použité k aproximaci křivky



Obrázek 3.2: Vlevo: Modře křivka stacionárních stavů pro  $k = 0.4$ , červeně křivka limitních bodů závislých na  $k$  a  $q_2$ ; Vpravo: Modře křivka stacionárních stavů pro  $k = 0.4$ , zeleně křivka Hopfových bifurkačních bodů závislých na  $k$  a  $q_2$

Podívejme se na stacionární stavy pro  $k = 0.4$  a  $q_2 = 1.045$ .



Obrázek 3.3: Vlevo: Křivka stacionárních stavů se zvýrazněnými limitními body a Hopfovy bifurkačními body; Vpravo: Zvýrazněny tři stacionární body  $EP_1$ ,  $EP_2$  a  $EP_3$

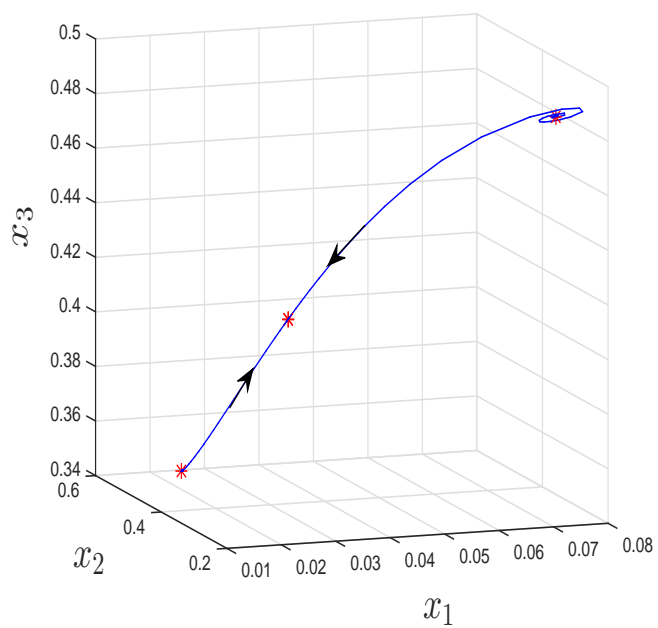
Souřadnice bodů  $EP_1$ ,  $EP_2$  a  $EP_3$  dostaneme *Newtonovou metodou* jako kořeny funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, 1045) = \mathbf{0}$ , tedy

$$EP_1 = \begin{pmatrix} 0.0194 \\ 0.4937 \\ 0.3477 \end{pmatrix}, EP_2 = \begin{pmatrix} 0.0330 \\ 0.3961 \\ 0.4078 \end{pmatrix}, EP_3 = \begin{pmatrix} 0.0731 \\ 0.2449 \\ 0.4871 \end{pmatrix}.$$

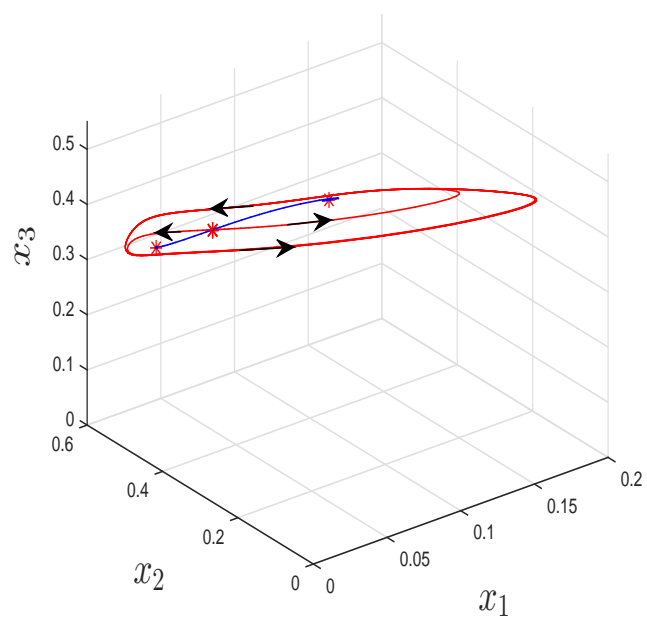
Dále najdeme vlastní čísla linearizace diferenciální rovnice v těchto bodech a vlastní vektory jim příslušející. S těmito informacemi již můžeme aproximovat stabilní a nestabilní orbity příslušné stacionárním bodům.

Jako aproximaci nestabilních orbitů příslušných bodu  $EP_2$  použijeme sjednocení trajektorie řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou rovnou bodu  $EP_2 + \varepsilon \mathbf{v}_2$  a trajektorie řešení s počáteční podmínkou  $EP_2 - \varepsilon \mathbf{v}_2$ , kde  $\varepsilon$  je zvolená malá konstanta a  $\mathbf{v}_2$  je vlastní vektor příslušný kladnému vlastnímu číslu linearizace v bodě  $EP_2$ . Aproximaci stabilních orbitů dostaneme obdobnou metodou s tím rozdílem, že obrátíme tok času. Tak převedeme problém hledání stabilního orbitu na problém hledání nestabilního orbitu a můžeme tedy použít stejný postup.





Obrázek 3.4: Stabilní orbity příslušné stacionárnímu bodu  $EP_2$  a vlastnímu číslu  $-0,007042$



Obrázek 3.5: Červeně nestabilní orbity příslušné stacionárnímu bodu  $EP_2$  a vlastnímu číslu  $0,1248$ , modře stabilní orbity příslušné stacionárnímu bodu  $EP_2$  a vlastnímu číslu  $-0,007042$

# Kapitola 4

## Závěr

Cílem práce bylo seznámit čtenáře s teorií kvalitativní analýzy stacionárních stavů dynamických systémů a ilustrovat tuto teorii na příkladech. Záměrně jsem se tedy nezabýval důkazy tvrzení a uvolnil jsem tím více prostoru pro další teorii a příklady.

Práce zřejmě nemohla pokrýt veškerou související látku, například třetí kapitola je jen hrubým nástinem numerické kontinuace. Věřím ale, že uvedená látka je dostatečně srozumitelná a může čtenáři pomoci zlepšit si představu o jinak celkem známých výsledcích z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

# Literatura

Matcont. URL <http://www.matcont.ugent.be/>.

ALLGOWER, E. L. a GEORG, K. (1997). Numerical path following. *Handbook of Numerical Analysis*, 5.

GOVAERTS, J. F. W. (2000). *Numerical Methods for Bifurcations of Dynamical Equilibria*. Neuvedeno. SIAM, Philadelphia. ISBN 0-89871-442-7.

HALE, J. a KOÇAK, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Neuvedeno. Springer, New York. ISBN 0-387-97141-6.

KUZNETSOV, Y. A. (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Third edition. Springer, New York.

NÁDHERA, D. (2007). Kontinuace implicitně zadané křivky. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze.

# Seznam obrázků

1.1	Stacionární bod . . . . .	3
1.2	Posunutí času počáteční podmínky . . . . .	4
1.3	Stabilita stacionárního bodu . . . . .	4
1.4	Aproximace řešení diferenciální rovnice posloupností bodů . . . . .	5
1.5	Selhání řešičů softwaru MATLAB . . . . .	5
1.6	Porovnání řešičů softwaru MATLAB . . . . .	6
2.1	Trajektorie a fázový portrét . . . . .	8
2.2	Tlumené kyvadlo s $\omega^2 = 1$ a $a = 0.25$ na okolí stabilního stacionárního stavu . . . . .	9
2.3	Tlumené kyvadlo s $\omega^2 = 1$ a $a = 1.5$ na okolí stabilního stacionárního stavu . . . . .	10
2.4	Tlumené kyvadlo s $\omega^2 = 1$ a $a = 1.5$ na okolí nestabilního stacionárního stavu . . . . .	11
2.5	Van der Polův oscilátor s $\lambda=-0.1$ a s $\lambda=0$ . . . . .	12
2.6	Van der Polův oscilátor s $\lambda=0.1$ a s $\lambda=1.5$ . . . . .	12
2.7	Van der Polův oscilátor s $\lambda=0$ . . . . .	14
2.8	$\omega$ -limitní množiny . . . . .	15
2.9	Ljapunovova funkce . . . . .	17
2.10	Stabilní a nestabilní uzel . . . . .	17
2.11	Stabilní a nestabilní fokus . . . . .	18
2.12	Linearizace rovnice v sedle . . . . .	19
2.13	Fázové portréty topologicky ekvivalentních systémů . . . . .	22
2.14	Zobrazení topologické ekvivalence dvou systémů . . . . .	23
3.1	Numerická kontinuace stacionárních stavů . . . . .	27
3.2	Limitní body a Hopfovy bifurkační body . . . . .	27
3.3	Stacionární stavy numerické kontinuace pro fixní $q_2$ . . . . .	28
3.4	Stabilní orbity numerické kontinuace . . . . .	29
3.5	Stabilní a nestabilní orbity numerické kontinuace . . . . .	29