

Oponentní posudek bakalářské práce: Pattern-avoiding permutation classes

autor práce: Michal Opler

Práce pana Oplera je v anglickém jazyce a zabývá se chováním tzv. *maj-indexu* (součet pozic, kde dochází k poklesu) permutací neobsahujících žádnou ze zakázaných permutací Π , konkrétně zkoumá chování veličiny $M_n^m(\Pi)$, což je počet permutací π délky n , které mají $\text{maj}(\pi) = m$ a neobsahují žádnou z permutací $\sigma \in \Pi$ jako podpermutaci. Motivací byl otevřený problém, zda se příbuzná statistika počtu inverzí $\text{inv}(\pi)$ ($\text{maj}(\pi)$ a $\text{inv}(\pi)$ mají na permutacích π délky n totéž rozdělení) chová monotónně pro permutace neobsahující 1324.

Pan Opler dokazuje (Thm. 2.4), že když $\Pi = \{\sigma\}$ a σ má alespoň jeden pokles, pak nastává monotonie $M_n^m(\sigma) \leq M_{n+1}^m(\sigma)$ (tedy řešení analogie zmíněného otevřeného problému). Ukazuje (Cor. 3.5), že pro každé Π a pevné m je pro velké n hodnota $M_n^m(\Pi)$ dána polynomem v n . Určuje podrobněji stupeň tohoto polynomu: (Prop. 3.8) když každá $\sigma \in \Pi$ má alespoň dva poklesy, pak $M_n^m(\Pi) = n^m/m! + O(n^{m-1})$, (Prop. 3.10) charakterizace Π se stupněm $\deg M_n^m(\Pi)$ omezeným nezávisle na m a konečně hlavní věta (Thm. 3.12), že když $m \geq 1$ a každá $\sigma \in \Pi$ má právě jeden pokles a minimum míst poklesů je $k \geq 3$, pak se stupeň $\deg M_n^m(\Pi)$ explicitně rovná $\lfloor (d-1)(k-1)/2 + m/d \rfloor$, $d = \lceil (\sqrt{1 + 8m/(k-1)} - 1)/2 \rceil$. Důsledkem je (Thm. 3.15) 0-1 dichotomie pro limitní pravděpodobnost ($n \rightarrow \infty$), že náhodná permutace π délky n s $\text{maj}(\pi) = m$ neobsahuje permutace Π .

Práce pana Oplera je na dobré jazykové úrovni a na vynikající odborné úrovni — dosáhl výsledků, které si zaslouží publikaci v hodnotném časopise. Neobjevil jsem v ní žádné závažnější nedostatky. Jen poznámka: na str. 10 v příkladu nemonotónního sloupce by bylo možné podrobněji zmínit jak byly tyto a další numerické výsledky získány.

Doporučuji práci uznat jako bakalářskou a hodnotit ji známkou **výborně**.

V Praze dne 7. 6. 2015

Doc. RNDr. Martin Klazar, Dr.