

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Metody řešení slovních úloh pomocí logiky

Autor: Helena Bartlová

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Praha 2014

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc. za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato bakalářská práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 11. dubna 2014

Helena Bartlová

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za cenné rady a připomínky, její velmi vstřícný a laskavý přístup a v neposlední řadě za čas, který věnovala mé práci.

Abstrakt

Název práce: Metody řešení slovních úloh pomocí logiky

Autor: Helena Bartlová

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Práce se zabývá metodami řešení slovních úloh z výrokové logiky. V první části práce jsou popsány slovní úlohy obecně, jsou zde uvedeny stručně dějiny logiky a základy výrokové logiky, které jsou dále používány při popisu metod a řešení úloh.

V druhé části práce jsou popsány různé metody, pomocí kterých lze slovní úlohy z logiky řešit. Použití těchto metod je ukázáno na řešených slovních úlohách.

Klíčová slova: slovní úloha, logika, výroková logika

Abstract

Title: Methods of solving word problems using logic

Author: Helena Bartlová

Department: Department of Mathematics and Mathematical Education

Supervisor: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

The work deals with methods of solving word problems of propositional logic. The first part describes word problems in general, there are given history of logic and base of propositional logic, which is farther used to describe methods and to solve problems.

The second part describes the various methods that can be used to solve word problems of logic. The application of these methods is shown in the solved word problems.

Keywords: word problem, logic, propositional logic

Obsah

Úvod	7
1 Slovní úlohy	8
1.1 Pojem slovní úloha	8
1.2 Řešení slovních úloh	9
2 Dějiny logiky	10
3 Základy výrokové logiky	13
3.1 Výrok, výroková formule, základní logické spojky	13
3.2 Výroková forma, kvantifikovaný výrok	17
3.3 Negace výroků	18
4 Metody řešení slovních úloh z výrokové logiky	22
4.1 Slovní úlohy řešené tabulkou pravdivostních hodnot	22
4.2 Slovní úlohy řešené Quineovým algoritmem	29
4.3 Slovní úlohy řešené s využitím Booleovy algebry	34
4.4 Slovní úlohy řešené šipkovým diagramem	37
4.5 Slovní úlohy řešené pomocí Vennových diagramů	45
4.6 Slovní úlohy řešené úvahou	51
Závěr	59

Úvod

Tématem mé bakalářské práce jsou metody řešení slovních úloh pomocí logiky. K výběru tématu mne inspirovala vedoucí práce prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc., svým vypsáním námětem pro bakalářské práce: „Strategie řešení slovní úloh“. Toto téma jsem pak zúžila dle oblasti svého zájmu na slovní úlohy řešitelné logikou. Konkrétně je práce zaměřena na logiku výrokovou.

Tato práce by měla být přehledem vybraných metod, pomocí nichž lze slovní úlohy z výrokové logiky řešit. Tyto metody jsem se snažila popsat a jejich použití ukázat na řešených příkladech tak, aby byly srozumitelné pro žáky středních škol, studenty vysokých škol a další, kteří se o danou tematiku zajímají. Vzhledem k velkému množství metod, pomocí nichž lze slovní úlohy řešit, je mimo rozsah práce všechny tyto metody popsat. Pokusila jsem se však vybrat ty, které jsou snadno srozumitelné a přehledné.

Kromě těchto metod se v úvodní části práce zabývám i slovními úlohami a jejich řešením obecně. Dále uvádím stručné dějiny logiky a také základy výrokové logiky, z kterých pak vycházím při řešení slovních úloh.

Kapitola 1

Slovní úlohy

1.1 Pojem slovní úloha

V literatuře se můžeme setkat s různým vymezením pojmu slovní úloha.

Podle Kuřiny [4, str. 61] slovní úloha popisuje určité reálné situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.

Vyšín [16, str. 107] chápe pojem slovní úloha následovně:

„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.“

Odvárko vymezuje slovní úlohu takto (1995 v [5, str. 10]):

„Slovními úlohami rozumíme ve školské matematice takové úlohy, v jejichž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace (se svými rozmanitými vlastnostmi a vztahy) z nejrůznějších mimomatematických oblastí.“

Shrneme-li informace z definic těchto autorů, můžeme slovní úlohu chápat jako úlohu, která popisuje jev z mimomatematických oblastí, je řešitelná matematickým aparátem a formulována především slovy.

1.2 Řešení slovních úloh

Samotné řešení slovních úloh vyžaduje pochopení textu, zvolení správné strategie řešení, převod úlohy do matematických symbolů, nalezení řešení a nakonec formulování řešení slovně v návaznosti na text úlohy. Jednotlivé etapy přehledně rozděluje a popisuje Novotná [5, str. 21]:

1. „*Etapa uchopování*, která obsahuje
 - uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“,
 - hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,
 - hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,
 - získání celkového vhledu do sktruktury problému.
2. *Etapa transformace* odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému.
3. *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy.*“

Pro řešení slovní úloh z logiky bude významná zejména etapa transformace, při které probíhá tzv. kódování - převedení slovně zadaného problému do vhodného znakového systému (referenčního jazyka), který přehledněji a úsporněji zaznamená data, podmínky a neznámé řešeného problému [5, str. 23]. V případě slovních úloh z logiky se bude jednat o nalezení atomárních výroků a přepsání výroků složených pomocí logických spojek (viz kapitola 3.1 na str. 13).

Kapitola 2

Dějiny logiky [2]

Člověk se ve svém vývoji prostřednictvím praktické činnosti stále zdokonaloval logické myšlení. Zdokonalováním abstraktního myšlení se postupně vyčlenilo usuzování, zjišťování důsledkových vztahů mezi formulovanými myšlenkami, to vedlo až ke studiu zákonitostí logického myšlení a vzniku formální logiky jako logické disciplíny.

Formální logika se začala konstituovat v antickém Řecku převážně v 5. století, kdy působili sofisté. Hledání vhodného postupu, který by zaručoval správné usuzování, má počátky u Sokrata (469-399 př. n. l.) a na něj navazujícího Platóna (427-347 př. n. l.). Za zakladatele logiky jako disciplíny je považován až Aristoteles ze Stageiry (384-322 př. n. l.), který sepsal rozsáhlý soubor šesti logických spisů nazvaný „Organon“, v němž jsou zpracovány všechny dosud známe poznatky z logiky v ucelený systém.

Nezávisle na Aristotelovi vypracovali stoičtí myslitelé, především Chrysippos ze Soloi (282-206 př. n. l.), antickou formu výrokové logiky. Součástí stoické logiky byla nauka o složených výrocích zahrnující implikaci, ostrou disjunkci, konjunkci a negaci (viz str. 15). O další výroková spojení doplnil stoickou logiku později Galénos (120-200 n.l.).

Logika ve středověku byla dlouho dobu závislá pouze na dědictví antiky. Pro další vývoj formální logiky je mezníkem 17. století, kdy začíná vznikat tzv. tradiční logika (již značně odlišná od aristotelovské) a nacházíme

zde i počátky moderní formální logiky (matematické logiky). V témže století vzniká také reformní program G. W. Leibnize (1646-1716) vycházející z ideálu matematizace vědy, který klade na logiku nové požadavky. Měla by poskytovat řešení všech sporných problémů, formulovat systém definičních pravidel, logický kalkul a rozhodovací procedury.

V 18. století se zabývá problematikou logiky B. Bolzano (1781-1848), analyzuje pojmy odvoditelnost, vyplývání, splňování a analytičnost. Jeho přínos je ovšem oceněn až mnohem později.

Pro vznik moderní formální logiky je rozhodující vývoj matematiky v průběhu 19. století. K němu přispěl např. G. Bool (1815-1864) svými pracemi „Matematická analýza logiky“ a „Zkoumáním zákonů myšlení, o něž se opírají matematické teorie logiky a pravděpodobnosti.“ Bool staví nový systém logiky na algebraickém podkladě.

Zatímco v předešlém období se aplikují v logice matematické metody, v následujícím období je cílem matematické logiky zdůvodňování matematiky samé. Konstituuje se tzv. klasická logika založená na dvou principech: dvouhodnotovosti (výrok může nabývat pouze dvou pravdivostních hodnot: pravdivý, nepravdivý) a extenzionality (pravdivostní hodnota složených výroků je pravdivostní funkcí výroků jednoduchých).

V dalším vývoji moderní formální logiky vznikají i tzv. neklasické logiky, které od jednoho s předchozích principů upouštějí. Nepřipouštíme-li princip dvouhodnotovosti, vznikají tzv. vícehodnotové logiky. Upustíme-li naopak od principu extenzionality, dospíváme k systémům tzv. logiky modální. Mezi neklasické logiky řadíme i logiku intuicionistickou, jejímž tvůrcem je A. Heyting (1898-1980).

Na přelomu 19. a 20. století je významná práce D. Hilberta (1862-1943), který podal ve své práci „Základy geometrie“ důkaz bezespornosti euklidovské geometrie. Snažil se i podat důkaz bezespornosti celé matematiky, prostředek k vyřešení tohoto problému viděl ve formalizaci celé matematiky. Realizace zpočátku probíhala dobře, podařilo se dokázat bezespornost predikátové logiky, úplnost výrokového kalkulu. Obecně se však nepodařilo

prokázat rozhodnutelnost celého kalkulu, systém logiky není tedy ani úplný, ani rozhodnutelný.

V 1. polovině 20. století byla velkým přínosem práce K. Gödela (1906-1978), který dokázal dvě důležité věty. V první dokázal, že každý formalizovaný systém, v němž lze vyjádřit aritmetiku přirozených čísel, je neúplný. V takovýchto systémech bude vždy existovat formule, u které nedokážeme rozhodnout, zda je v nich odvoditelná. Podle druhé věty není možné dokázat bezspornost těchto systémů pomocí jejich vlastních prostředků.

Od 2. poloviny 20. století se v souvislosti s vědeckotechnickou revolucí silně rozšiřuje možnost aplikace logiky. Ta je uplatňována v kybernetice, automatizační technice, v teorii a praxi programování, elektrotechnice a v mnoha dalších oborech.

Kapitola 3

Základy výrokové logiky

V této kapitole jsou shrnuty základy výrokové logiky, které budeme později používat při řešení slovních úloh z tohoto oboru.

3.1 Výrok, výroková formule, základní logické spojky

Základním pojmem výrokové logiky je výroková formule, neboli výrok. Je obtížné ho přesně definovat. Proto budeme chápat význam tohoto pojmu spíše na intuitivní úrovni.

Výrokem rozumíme tvrzení, o kterém lze jednoznačně rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé. Pro zjednodušení budeme používat tzv. výrokové proměnné, které zastupují výroky. V této práci je budeme označovat malými písmeny, např. p , q .

Výroky jsou například následující tvrzení:

„Jan Amos Komenský se narodil roku 1592.“

„Praha není hlavním městem České republiky.“

„ $5 > 3$.“

Naopak výroky nejsou tato tvrzení:

„ $x > 3$.“

„Euklidova věta o odvěsně.“

Výrokům přiřazujeme **pravdivostní hodnotu**. Je-li výrok pravdivý, pravdivostní hodnota je 1, je-li nepravdivý, pravdivostní hodnota je 0.

Výrok „*Jan Amos Komenský se narodil roku 1592.*“ má tedy pravdivostní hodnotu 1, zatímco výroku „*Praha není hlavním městem České republiky.*“ přiřazujeme pravdivostní hodnotu 0.

Výroky rozlišujeme na atomární a složené.

Atomárním výrokiem nazýváme takový výrok, jehož žádná část není výrokiem, nemůžeme jej tedy rozdělit na několik výroků a pracujeme s ním jako s celkem.

Následující výroky jsou atomárními výroky:

„*Rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé.*“

„*Číslo 4 je sudé.*“

Složeným výrokiem nazýváme výrok, který je složen z více atomárních či složených výroků.

Následující výroky tedy jsou složené:

„*Rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé a všechny úhly ostré.*“

„*Číslo 4 je sudé nebo liché.*“

Způsob, jakým vznikají tyto složené výroky z výroků atomárních, přesněji popisuje Štěpánek v definici výrokové formule [13, str. 22]:

„Nechť P je neprázdná množina, jejíž prvky nazveme **prvotní formule**¹. Mohou to být věty přirozeného jazyka, slova nějakého formálního jazyka nebo jen písmena p, q, r, p_1, p_2, \dots “

Jazyk L_P výrokové logiky nad množinou P obsahuje kromě prvků množiny P **symboly pro logické spojky**: \neg (negace), $\&$ (konjunkce), \vee (disjunkce), \Leftrightarrow (ekvivalence), \Rightarrow (implikace) a pomocné symboly (závorky). Říkáme, že P je **množina prvotních formulí** jazyka L_P .

Výrokové formule jazyka L_P definujeme pomocí následujících syntaktických pravidel:

¹atomární výroky

1. Každá prvotní formule $p \in P$ je výroková formule.
2. Jsou-li výrazy A, B formule, potom výrazy $\neg A$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$ ², $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$ jsou výrokové formule.
3. Každá výroková formule vznikne konečným počtem užití pravidel 1 a 2.“

Jak je uvedeno v předešlé definici, složené výroky můžeme vytvářet pomocí logických spojek z atomárních výroků (prvotních formulí) aplikací pravidla 2, případně 3. Tyto logické spojky uvádím pro přehlednost v tabulce 3.1 [9].

Tabulka 3.1: Základní logické spojky

Název	Symbol	Zápis	Čtení
negace	\neg	$\neg p$	Není pravda, že...
konjunkce	\wedge	$p \wedge q$... a zároveň...
disjunkce	\vee	$p \vee q$... nebo... (v poměru slučovacím)
implikace	\Rightarrow	$p \Rightarrow q$	Jestliže..., pak...
ekvivalence	\Leftrightarrow	$p \Leftrightarrow q$	Právě když...

Složeným výroky vzniklým pomocí těchto logických spojek přiřazujeme pravdivostní hodnotu takto. Negace výroku je pravdivá právě tehdy, když původní výrok je nepravdivý. Konjunkce výroků je pravdivá právě tehdy, když jsou oba výroky pravdivé. Disjunkce výroků je pravdivá, jestliže alespoň jeden z výroků je pravdivý. Je pravdivá tedy i v případě, že jsou pravdivé oba výroky. Z gramatického pohledu by disjunkce odpovídala slovu „nebo“ v poměru slučovacím, nikoliv vylučovacím. Implikace výroků je pravdivá, pokud oba výroky jsou pravdivé nebo pokud předpoklad (1. výrok) je nepravdivý. Ekvivalence je pravdivá, když oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.

²Konjunkci budeme v této práci označovat \wedge shodně s většinou středoškolských publikací (např. [12], [14]), nikoliv $\&$, jak uvádí Štěpánek.

Pravdivost implikace v případě, že předpoklad je nepravdivý, nemusí být na první pohled zřejmá, proto uvádím bližší vysvětlení dle Sochora [12, str. 31]:

„Řeknu-li „Jestliže bude zítra pršet, pak budu celý den doma.“ a druhý den venku lije a já jsem z domova pryč, pak jsem lhal; jestliže lije a jsem doma, pak jsem mluvil pravdu; jestliže svítí sluníčko, pak mohu dělat cokoli a vždy jsem mluvil pravdu, protože o tom, co budu dělat, když bude hezky, jsem nic netvrdil.“

Pravdivostní hodnoty základních složených výroků jsou uvedeny v tabulce 3.2:

Tabulka 3.2: **Pravdivostní hodnoty základních složených výroků**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Užití logických spojek a určení pravdivostní hodnoty složeného výroku ukážeme na příkladu (pravdivostní hodnoty výroků jsou uvedeny v závorce). Jsou dány výroky p, q . Výrok p : „Číslo 10 je dělitelné 5.“ (1) a q : „Číslo 10 je dělitelné 2.“ (1).

Negací výroku p je tedy výrok: „Není pravda, že číslo 10 je dělitelné 5.“ (0)

Konjunkcí výroků p a q je výrok: „Číslo 10 je dělitelné 5 a zároveň 2.“ (1)

Disjunkcí výroků p a q je výrok: „Číslo 10 je dělitelné 5 nebo 2.“ (1)

Implikací výroků p a q je výrok: „Jestliže je číslo 10 dělitelné 5, pak je dělitelné 2.“ (1)

Ekvivalencí výroků p a q je výrok: „Právě když je číslo 10 dělitelné 5, je dělitelné 2.“ (1)

Pokud je složený výrok vždy pravdivý (nezávisle na pravdivostních hodnotách atomárních výroků, ze kterých je složen), nazýváme ho **tautologií**. Je-li vždy nepravdivý, jedná se o **kontradikci**.

3.2 Výroková forma, kvantifikovaný výrok [9]

Kromě výroků v logice používáme tzv. **výrokové formy**. Jedná se o tvrzení, které obsahuje jednu nebo více proměnných. Po dosazení přípustných hodnot proměnných se výroková forma stává výrokem. Výrokovou formu p s proměnnou x budeme značit $p(x)$.

Za výrokovou formu považujeme tedy následující tvrzení:

„ $x \in \mathbb{R}: x > 0$.“

„ $x, y \in \mathbb{R}: x|y$.“

Z výrokové formy můžeme vytvořit výroky také kvantifikací všech proměnných pomocí **kvantifikátorů**. Základní kvantifikátory uvádím v tabulce 3.3³:

Tabulka 3.3: Základní kvantifikátory

Název	Symbol	Zápis	Čtení
Obecný kvantifikátor	\forall	$\forall x \in \mathbb{R}: p(x)$	Pro každé x náležící množině \mathbb{R} je $p(x)$ pravdivý výrok.
Existenční kvantifikátor	\exists	$\exists x \in \mathbb{R}: p(x)$	Existuje alespoň jedno x náležící množině \mathbb{R} , pro které je $p(x)$ pravdivý výrok.

Výroky vzniklé z výrokové formy kvantifikací všech proměnných nazýváme **kvantifikované výroky**.

Příklady kvantifikovaných výroků:

„Existuje alespoň jedno x náležící množině celých čísel, které je dělitelné

³Kromě uvedených kvantifikátorů se můžeme setkat i s tzv. kvantifikátorem jednoznačné existence. Značí se $\exists!$ a znamená: „Existuje právě jedno...“

třemi.“

„ $\forall x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 4$.“

„ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}: y \geq x$.“

3.3 Negace výroků

Negace výroku se provádí, jak bylo uvedeno v tabulce 3.1, pomocí „Není pravda, že...“, případně „Neplatí, že...“. Negaci můžeme vyjádřit i tak, jak jsme zvyklí v běžné mluvě, pomocí záměny „je“ za „není“, dále přidáním, nebo odebráním „předpony ne-“ před slovesem.

Negacemi výroku „Podzim začíná 23.9.“ jsou např. následující výroky:
„Není pravda, že podzim začíná 23.9.“
„Podzim nezačíná 23.9.“

Negace konjunkce

Jak slovní spojení „Není pravda, že...“ napovídá, negace činí z pravdivého tvrzení nepravdivé. Konjunkce dvou výroků je pravdivá, jsou-li pravdivé oba výroky zároveň. To nás svádí k tvrzení, že má-li být konjunkce nepravdivá, pak nesmí platit⁴ ani jeden výrok. To by ovšem byla chybná myšlenka, neboť je dostačující, aby jeden z výroků nebyl pravdivý a už konjunkce výroků není pravdivá. Ukažme tedy, že negace konjunkce by se dala zapsat tak, že neplatí jeden nebo druhý výrok, jak vyjadřuje následující ekvivalence:

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

Platnost ověříme v tabulce 3.4.

Z tabulky vidíme, že uvedené tvrzení je tautologií. Negací konjunkce dvou výroků je tedy disjunkce negací těchto výroků. Například negací výroku „Číslo 10 je dělitelné 5 a zároveň je dělitelné 2.“ je výrok „Číslo 10 není dělitelné 5 nebo není dělitelné 2.“

⁴nesmí být pravdivý

Tabulka 3.4:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

Negace disjunkce

Disjunkce dvou výroků je pravdivá, platí-li alespoň jeden z výroků. Chceme-li disjunkci znegovat, je nutné, aby neplatily oba výroky. Můžeme vyvodit následující ekvivalenci:

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$

Pomocí tabulky můžeme opět snadno ověřit, že uvedená ekvivalence je tautologií. Negací disjunkce dvou výroků je tedy konjunkce negací těchto výroků. Například negací výroku „Číslo 10 je dělitelné 5 nebo je dělitelné 2.“ je výrok „Číslo 10 není dělitelné 5 a zároveň není dělitelné 2.“

Negace implikace

Implikace dvou výroků značí, že platí-li předpoklad (1. výrok), platí závěr (2. výrok). Jediná situace, kdy je implikace nepravdivá, nastává, platí-li předpoklad a neplatí závěr. Z toho můžeme vyvodit, že pro negaci platí následující ekvivalence:

$$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$$

Platnost můžeme opět ověřit tabulkou. Negací implikace dvou výroků je tedy konjunkce předpokladu a negace závěru. Například negací výroku „Jestliže je číslo 10 dělitelné 5, pak je dělitelné 2.“ je výrok „Číslo 10 je dělitelné 5 a zároveň není dělitelné 2.“

Negace ekvivalence

Ekvivalence je oboustrannou implikací. Výrok $p \Leftrightarrow q$ lze tedy zapsat takto: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Chceme-li zjistit, kdy je pravdivá negace ekvivalence, tedy $\neg((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$, nejprve znegujeme konjunkci dle již uvedeného pravidla (viz str. 18). Vznikne tento výrok: $\neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$. Dále znegujeme obě implikace (viz str. 19). Dostáváme výrok $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$. Platí tedy následující ekvivalence:

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)).$$

Negace výroku s obecným kvantifikátorem

Máme výrok $\forall x \in \mathbb{R}: p(x)$, který říká, že daná výroková forma platí pro všechna x . Chceme-li ho znegovat, alespoň pro jedno x daná výroková forma nesmí platit. Negací výroku s obecným kvantifikátorem získáváme výrok s kvantifikátorem existenčním. Platí tedy:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R}: p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \neg p(x).$$

Například negací výroku „ $\forall x \in \mathbb{R}: x \geq 4$ “ je výrok „ $\exists x \in \mathbb{R}: x < 4$ “.

Negace výroku s existenčním kvantifikátorem

Negací výroku s kvantifikátorem existenčním získáváme výrok s kvantifikátorem obecným. Platí:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{R}: p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}: \neg p(x).$$

Negací výroku „ $\exists x \in \mathbb{R}: x \leq 4$ “ je tedy výrok „ $\forall x \in \mathbb{R}: x > 4$ “.

Negace výroků s více kvantifikátory

Výroky s více kvantifikátory negujeme obdobně. Existenční kvantifikátor tedy zaměníme za obecný, obecný kvantifikátor za existenční a znegujeme výrokovou formu.

Například negací výroku „ $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{N}: y \geq x$ “ je následující výrok: „ $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{N}: y < x$.“ Je-li dán tento výrok: „ $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: x + y = 4$,“ jeho negací je výrok „ $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x + y \neq 4$ “.

Pro přehlednost uvádím všechny uvedené negace výroků v tabulce 3.5:

Tabulka 3.5: **Přehled negací výroků**

Výrok	Negace výroku
$p \wedge q$	$\neg p \vee \neg q$
$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$
$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$
$\forall x \in \mathbb{R}: p(x)$	$\exists x \in \mathbb{R}: \neg p(x)$
$\exists x \in \mathbb{R}: p(x)$	$\forall x \in \mathbb{R}: \neg p(x)$

Kapitola 4

Metody řešení slovních úloh z výrokové logiky

Slovní úlohy z výrokové logiky lze řešit velkým množstvím různých metod. Je mimo rozsah této práce popsat všechny, proto si zde ukážeme alespoň ty, které jsou podle mne názorné a přehledné. Ne každá ze zmíněných metod je vhodná pro určitý typ úlohy, proto je vhodné znát jich více a použít tu, která odpovídá povaze úlohy.

V této práci uvádím řešení slovních úloh pomocí tabulky pravdivostních hodnot, Quineova algoritmu, Booleovy algebry, šipkovým diagramem, Vennovými diagramy a úvahou. Dalšími metodami, kterými se v této práci nebudu zabývat, jsou např. metoda analytických tabulek (viz [3]), Peircových diagramů (viz [3]) či metoda tablová (viz [8]).

4.1 Slovní úlohy řešené tabulkou pravdivostních hodnot

Jedním ze způsobů, jak slovní úlohy z logiky řešit, je pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Tento způsob je poměrně jednoduchý a přehledný, je vhodný ovšem pouze tehdy, nemáme-li příliš mnoho výroků, v opačném případě může být zdlouhavý.

Použití tabulky pravdivostních hodnot k řešení logických úloh nejprve ukážeme na příkladě.

Příklad 1. *Některý z žáků A , B , C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B . Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A . Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A . Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl právě jeden? [14, str. 30]*

Řešení. Nejprve si musíme uvědomit, z jakých nejjednodušších výroků se úloha skládá. Hledáme tedy atomární výroky. Výroky v úloze jsou poskládané z následujících atomárních výroků, které si pro zjednodušení označíme písmeny a , b , c .

Výrok a : Žák A byl u okna.

Výrok b : Žák B byl u okna.

Výrok c : Žák C byl u okna.

Nyní, když máme označené atomární výroky, můžeme v textu nalézt složené výroky a zapsat je pomocí logických spojek. Výrok „V té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B .“ obsahuje spojku nebo a jedná se zjevně o disjunkci negace výroku a a negace výroku b . Můžeme jej tedy zapsat takto: $\neg a \vee \neg b$. Výrok „Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A .“ je implikací negace výroku b a negace výroku a . Píšeme: $\neg b \Rightarrow \neg a$. Výrok „Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A .“ zapíšeme pomocí ekvivalence takto: $c \Leftrightarrow \neg a$. Všechny uvedené složené výroky mají platit zároveň, musí tedy platit jejich konjunkce: $(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a) \wedge (c \Leftrightarrow \neg a)$.

Všechny výroky máme symbolicky zapsány a můžeme tedy přejít k vytváření tabulky. Pravdivostní hodnoty složených výroků můžeme zjistit, známe-li pravdivostní hodnoty výroků atomárních, z nichž jsou složeny. Budeme tedy předpokládat všechny možné kombinace pravdivostních hodnot atomárních výroků, abychom ukázali, v jakých případech jsou uvedené složené výroky pravdivé.

V našem příkladě máme tři atomární výroky: a , b , c , každý z nich může nabývat pravdivostní hodnoty 0 nebo 1. Pro výrok a existují tedy dvě možnosti, ke každé z nich další dvě možnosti výroku b (tedy $2 \cdot 2$ možných kombinací)

a opět ke každé z nich dvě možnosti pro výrok c (tzn. $2 \cdot 2 \cdot 2$ možností), celkem tedy existuje 8 různých kombinací pravdivostních hodnot těchto výroků. Zobecníme-li tento postup, dostaneme, že pro n různých výroků existuje 2^n různých kombinací pravdivostních hodnot těchto výroků.

Všechny kombinace pravdivostních hodnot se musí v tabulce objevit, tabulka bude mít tedy 8 řádků a záhlaví. V první třech sloupcích budou pravdivostní hodnoty atomárních výroků. Abychom zajistili, že se objeví opravdu všechny kombinace, můžeme postupovat takto¹: střídáme pravdivostní hodnoty u výroku c po jednom (tzn. 1, 0, 1, ...), u výroků b po dvou a u výroku a po čtyřech. Kdybychom měli více atomárních výroků, další by se střídal po osmi, šestnácti atd. (jedná se vždy o mocniny čísla 2). V dalších sloupcích později doplníme pravdivostní hodnoty výroků složených. Aby byly tyto hodnoty snáze určitelné, přidáme ještě negace výroků a a b , jelikož jsou součástí výroků složených. Vznikne tabulka 4.1.

Tabulka 4.1:

a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$c \Leftrightarrow \neg a$	$(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a) \wedge (c \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0	1	1						
0	1	0						
0	0	1						
0	0	0						

Tabulku nyní vyplníme dle pravidel pro pravdivostní hodnoty složených výroků. Pravdivostní hodnota $\neg a$ bude 1, právě když pravdivostní hodnota a

¹Nejedná se o jediný možný postup, kombinace můžeme vypisovat i jiným způsobem, vždy se však musí v tabulce objevit všechny.

je 0, obdobně doplníme sloupec pro $\neg b$. Dále vyplníme sloupec pro $\neg a \vee \neg b$. Disjunkce je pravdivá, právě když alespoň jeden z výroků je pravdivý - v našem případě jde o výroky $\neg a$ a $\neg b$. Do sloupce tedy zapíšeme 1, pokud v předchozích dvou sloupcích jsou pravdivostní hodnoty 1, 1 ; 1, 0 nebo 0, 1. V opačném případě píšeme 0. Analogicky doplníme zbytek tabulky. Dostáváme tabulku 4.2.

Tabulka 4.2:

a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$c \Leftrightarrow \neg a$	$(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a) \wedge (c \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0

Pro splnění zadání úlohy je nutné, aby výroky $\neg a \vee \neg b$, $\neg b \Rightarrow \neg a$ a $c \Leftrightarrow \neg a$ platily zároveň, tzn. aby platila konjunkce těchto tří výroků (viz poslední sloupec). To nastává pouze na 5. a 7. řádku tabulky, tedy je-li a nepravdivé a zároveň b a c pravdivé (žák A nebyl u okna, žáci B a C byli u okna) nebo je-li a a b nepravdivé a c pravdivé (A a B nebyli u okna, C byl u okna). Ze zadání úlohy ale víme, že pachatel je právě jeden, tím vyřadíme první možnost. Pokud je pachatel právě jeden a platí uvedené výroky, pachatelem musí být žák C. Odpověď na úlohu zní: Ano, pachatele lze určit jednoznačně. \square

Z předchozího příkladu můžeme vyvodit obecný postup pro řešení slovních úloh tabulkou pravdivostních hodnot.

Postup řešení slovních úloh z logiky pomocí tabulky pravdivostních hodnot

1. Nalezneme atomární výroky a označíme je.
2. Symbolicky zapíšeme složené výroky pomocí označených výroků atomárních a logických spojek.
3. Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot, do záhlaví uvedeme atomární výroky, jejich negace (pokud jsou obsaženy ve složených výrocích), složené výroky. Počet řádků tabulky (bez záhlaví) je 2^n , je-li n počet atomárních výroků.
4. Vyplníme pravdivostní hodnoty atomárních výroků. Abychom nezapomněli žádnou kombinaci, můžeme použít například výše uvedený způsob (jeden sloupec 1, 0, 1, 0, ...; druhý sloupec 1, 1, 0, 0, ...; třetí sloupec 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, ...; atd.)
5. Doplníme zbylé pravdivostní hodnoty do tabulky.
6. Vyčteme řešení úlohy z tabulky.
7. Vrátime se ke kontextu úlohy, napíšeme dle něj a získaného řešení odpověď.

Užití tohoto postupu uvádím na dalších řešených příkladech.

Příklad 2. *V dílně jsou tři stroje, které pracují podle těchto podmínek: Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj. Pracuje druhý nebo třetí stroj. Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí stroj. Jaké jsou možnosti pro práci této trojice strojů? [14, str. 31]*

Řešení. Při řešení budeme postupovat dle předešlého návodu.

1. Atomární výroky označíme a, b, c :
 - a : Pracuje první stroj.
 - b : Pracuje druhý stroj.
 - c : Pracuje třetí stroj.

2. Zapišeme symbolicky složené výroky:

Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj: $a \Rightarrow b$

Pracuje druhý nebo třetí stroj: $b \vee c$

Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí stroj: $\neg a \Rightarrow \neg c$

Tyto výroky musí platit najednou, zapišeme tedy jejich konjunkci:

$(a \Rightarrow b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg a \Rightarrow \neg c)$

3. Záhlaví tabulky pravdivostních hodnot musí obsahovat výroky a, b, c , dále $\neg a, \neg c$ a všechny složené výroky, tedy $a \Rightarrow b, b \vee c, \neg a \Rightarrow \neg c$ a $(a \Rightarrow b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg a \Rightarrow \neg c)$. Máme tři atomární výroky, tabulka bude mít 2^3 , tedy 8 řádků.

4., 5. Viz tabulka 4.3.

Tabulka 4.3:

a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$a \Rightarrow b$	$b \vee c$	$\neg a \Rightarrow \neg c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \vee c) \wedge (\neg a \Rightarrow \neg c)$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

6. Potřebujeme, aby platily všechny složené výroky. To dle posledního sloupce nastává na 1., 2. a 6. řádku tabulky.

7. Existují tyto tři možné kombinace práce strojů, aby byly splněny uvedené podmínky:

- (a) Pracují všechny tři stroje zároveň (viz 1. řádek tabulky).
- (b) Pracuje první a druhý stroj, třetí stroj nepracuje (viz 2. řádek tabulky).
- (c) Pracuje pouze druhý stroj, první a třetí nepracují (viz 6. řádek tabulky).

□

Příklad 3. *Nacházíte se na ostrově padouchů a poctivců. Padouši vždy lžou, poctivci vždy mluví pravdu. Dva domorodci pronesou následující výroky:*

A: „Oba jsme poctivci.“

B: „A je padouch.“

Jakou povahu mají domorodci A a B?[3, str. 39]

Řešení. Tento příklad lze kromě tabulkové metody řešit velmi snadno úvahou (viz str. 52). Zde uvedeme řešení pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

1. Atomární výroky:

a : A je poctivec. ($\neg a$: A je padouch.) b : B je poctivec. ($\neg b$: B je padouch.)

2. Nalezneme složené výroky. Pokud A je poctivec, mluví vždy pravdu, pokud je padouch, vždy lže. Pravdivostní hodnota jím vyřčeného výroku a výroku a bude tedy stejná (mezi těmito dvěma výroky bude ekvivalence). Obdobně u domorodce B. Získáváme tedy tyto složené výroky:

$$a \Leftrightarrow (a \wedge b)$$

$$b \Leftrightarrow \neg a$$

Tyto výroky musí platit najednou, zapíšeme tedy konjunkci:

$$(a \Leftrightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Leftrightarrow \neg a).$$

3. Máme dva atomární výroky, tabulka bude mít tedy 4 řádky. Do záhlaví uvedeme $a, b, \neg a, a \wedge b, a \Leftrightarrow (a \wedge b), b \Leftrightarrow \neg a$ a $(a \Leftrightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Leftrightarrow \neg a)$.

4., 5. Viz tabulka 4.4.

Tabulka 4.4:

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \Leftrightarrow (a \wedge b)$	$b \Leftrightarrow \neg a$	$(a \Leftrightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

6. Uvedená konjunkce obou výroků je platná pouze na třetím řádku tabulky, tedy je-li a nepravdivý výrok a b pravdivý výrok.
7. Z předchozího vyplývá, že domorodec A je padouch a domorodec B je poctivec.

□

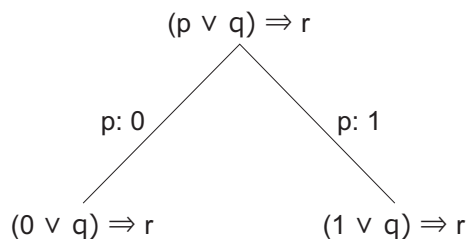
4.2 Slovní úlohy řešené Quineovým algoritmem

K rozhodnutí, za jakých pravdivostních ohodnocení atomárních výroků je složený výrok pravdivý, můžeme použít kromě tabulky pravdivostních hodnot a jiných metod také Quineův algoritmus, který využívá stromové reprezentace výroku. Algoritmus je založen na postupném ohodnocování atomárních výroků a vyhodnocování pravdivosti částí složeného výroku. [8]

Chceme-li například rozhodnout, za jakých okolností je pravdivý výrok $(p \vee q) \Rightarrow r$, budeme postupovat takto. Nejprve zapíšeme celý složený výrok. Začneme postupně ohodnocovat proměnné. První atomární výrok složeného výroku je p , ten může být pravdivý nebo nepravdivý - vzniknou tedy dvě nové větve stromu. Zapíšeme ke každé větvi složený výrok, pro lepší přehlednost nahradíme v zápise výrok p jeho pravdivostní hodnotou (viz obr. 4.1).

Podívejme se na levou větev stromu. Pravdivost disjunkce závisí na prav-

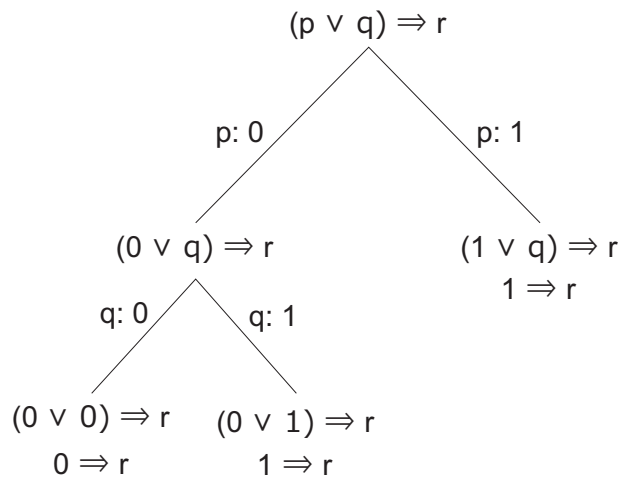
Obrázek 4.1:



divosti výroku q . Vzniknou tedy dvě další větve - pro q pravdivé a pro q nepravdivé. Známe-li pravdivostní hodnotu q , známe i pravdivostní hodnotu disjunkce, nahradíme ji tedy touto hodnotou (viz obr. 4.2).

Pravdivost disjunkce v pravé větvi stromu (pro p pravdivé) nezávisí na pravdivosti výroku q , neboť je dostačující, že výrok p je pravdivý. Disjunkci tedy nahradíme její pravdivostní hodnotou, což je 1 (viz obr. 4.2).

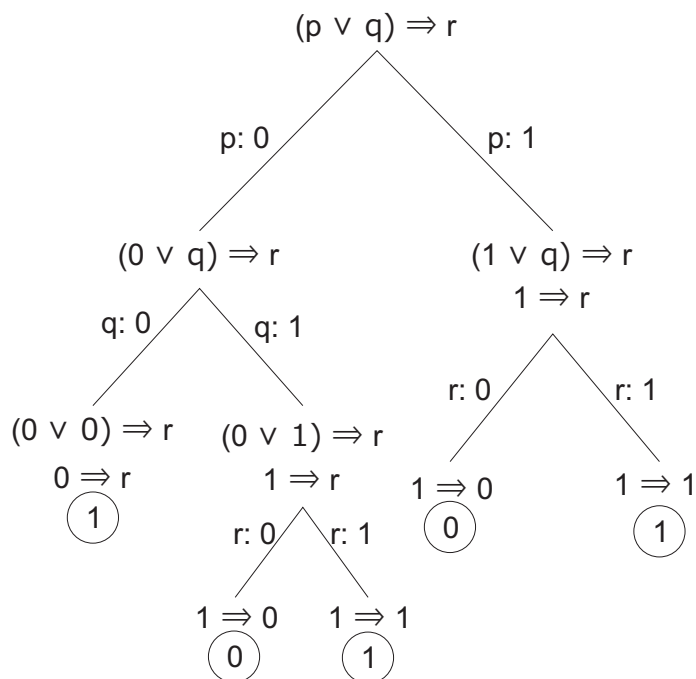
Obrázek 4.2:



Nyní zbývá rozhodnout pouze o pravdivostních hodnotách implikací. První zleva ($0 \Rightarrow r$) bude pravdivá vždy, nezávisle na hodnotě r . U zbylých dvou doplníme větve pro r pravdivé a nepravdivé. Pak již můžeme rozhodnout o pravdivostních hodnotách všech vzniklých implikací (viz obr. 4.3).

Z obr. 4.3 vidíme, že složený výrok $(p \vee q) \Rightarrow r$ je pravdivý v těchto pří-

Obrázek 4.3:



padech:

1. p a q jsou nepravdivé (na pravdivostní hodnotě výroku r nezáleží),
2. p je nepravdivé, q a r jsou pravdivé,
3. p a r jsou pravdivé (na pravdivostní hodnotě výroku q nezáleží).

Quineův algoritmus můžeme použít i při řešení některých slovních úloh z logiky. Počáteční postup je obdobný jako u řešení úloh pomocí tabulky pravdivostních hodnot. Pravdivost složeného výroku ovšem ověřujeme tímto algoritmem, nikoli tabulkou. Ukažme postup na příkladě.

Příklad 4. *Ve městě se rozhoduje o postavení těchto budov: divadla, školy a kina. Na poradě padly tyto názory:*

1. „Nesouhlasím s tím, aby se stavělo divadlo a kino zároveň.“
2. „Jestliže se postaví škola, mělo by se postavit divadlo.“

Co se má ve městě postavit, aby se vyhovělo těmto požadavkům, má-li se postavit alespoň jedna budova?

Řešení. Nejprve nalezneme a označíme atomární výroky:

d : Postaví se divadlo.

k : Postaví se kino.

s : Postaví se škola.

Názory, které se objevily na poradě, zapíšeme symbolicky pomocí atomárních výroků:

1. „Nesouhlasím s tím, aby se stavělo divadlo a kino zároveň.“ $\neg(d \wedge k)$
2. „Jestliže se postaví škola, mělo by se postavit divadlo.“ $s \Rightarrow d$

Chceme-li vyhovět těmto požadavkům, musí platit zároveň, má tedy platit: $\neg(d \wedge k) \wedge (s \Rightarrow d)$. Pro zjištění, pro které ohodnocení atomárních výroků tento výrok platí, využijme Quineova algoritmu.

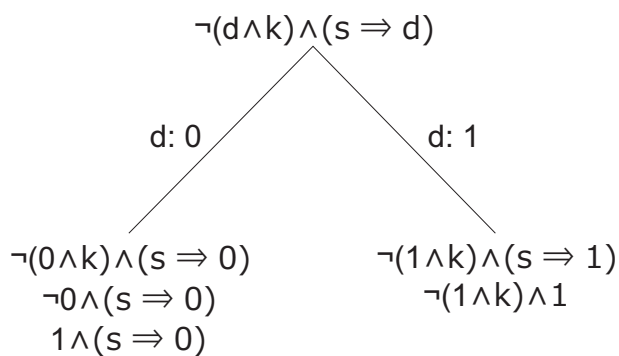
První rozvětvení provedeme pro výrok d . Zaměříme se nejprve na levou větev (pro d nepravdivé). První konjunkce je nepravdivá a její negace tedy pravdivá, můžeme ji proto nahradit pravdivostním ohodnocením 1. V pravé větvi o pravdivosti první konjunkce nemůžeme rozhodnout, neznáme-li pravdivostní hodnotu výroku k , můžeme ovšem rozhodnout o pravdivosti implikace - vzhledem k tomu, že je pravdivý závěr, bude pravdivá bez ohledu na pravdivostní hodnotu předpokladu. Implikaci tedy můžeme nahradit pravdivostní hodnotou 1. (viz obr. 4.4)

Pokračujme ve větvení stromu. U levé větve potřebujeme ohodnotit výrok s . Je-li pravdivý, uvedená implikace je nepravdivá, a tedy i celý výrok je nepravdivý. Pokud je ovšem výrok s nepravdivý, implikace je pravdivá a celý výrok též pravdivý. Obdobně postupujeme u pravé větvi, kde ohodnotíme výrok k . Tímto získáváme hotový strom (viz obr. 4.5).

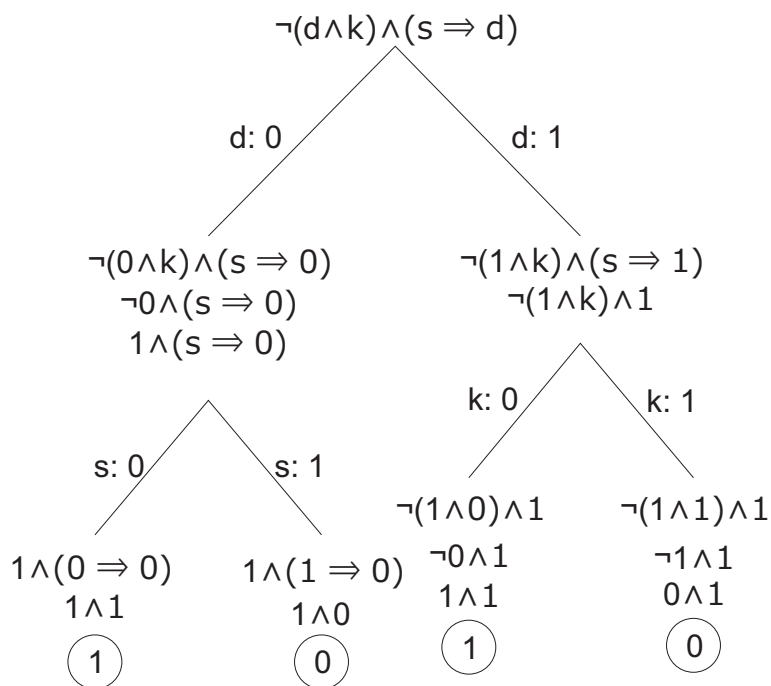
Dle obr. 4.5 víme, že mají-li platit požadavky 1. a 2., mohou nastat tyto možnosti:

1. Nepostaví se divadlo, nepostaví se škola. (Nezáleží na tom, zda se postaví kino.)

Obrázek 4.4:



Obrázek 4.5:



2. Postaví se divadlo, nepostaví se kino. (Nezáleží na tom, zda se postaví škola.)

Nyní ještě zvažme tu podmínku, že se má postavit alespoň jedna budova. To omezuje 1. možnost řešení - musí se postavit kino. 2. možnost zůstává nepozměněná. Město má tedy tři možnosti vyřešení situace:

1. Postaví se pouze kino.
2. Postaví se divadlo a škola, kino se nepostaví.
3. Postaví se pouze divadlo.

□

4.3 Slovní úlohy řešené s využitím Booleovy algebry [6]

Slovní úlohy z logiky můžeme řešit také pomocí dvouprvkové Booleovy algebry. Booleovu algebru definuje Odvárko a spol. takto: [6, str. 237]

„Budiž B množina², na které jsou zavedeny binární operace³ sčítání a násobení. Výrazem „ $x + y$ “ zapisujeme součet prvků x, y (čteme x plus y), výrazem „ $x \cdot y$ “ zapisujeme součin prvků x, y (čteme x krát y), užíváme však také jeho stručnější zápis „ xy “ jako v obvyklé číselné algebře.

Algebraickou strukturu⁴ $\mathcal{B} = (B, +, \cdot)$ nazveme Booleova algebra, právě když platí:

1. $\forall x, y \in B : x + y = y + x$
2. $\forall x, y \in B : x \cdot y = y \cdot x$
3. $\forall x, y, z \in B : (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\forall x, y, z \in B : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
5. $\forall x, y, z \in B : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$
6. $\forall x, y, z \in B : x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

²Množina je soubor libovolných navzájem různých objektů, jenž je chápán jako jeden celek. Množinu pokládáme za určenou, je-li možno o každém objektu rozhodnout, zda do ní patří, či nikoliv. [9, str. 28]

³Vymezení pojmu viz např. [1, str. 86-87]

⁴Vymezení pojmu viz např. [1, str. 91]

7. $\exists! a \in B \forall x \in B : x + a = x$
8. $\exists! b \in B \forall x \in B : x \cdot b = x$
9. $\forall x \in B \exists! y \in B : x + y = b \wedge x \cdot y = a$

Pro řešení slovních úloh z logiky využijeme Booleovu algebru, kde množina $B = \{0, 1\}$, odpovídá tak pravdivostním hodnotám. Operace sčítání a násobení zavedeme pomocí tabulky 4.5 a 4.6.

Tabulka 4.5:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Tabulka 4.6:

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Pro takto zavedenou Booleovu algebru je $a = 0$ a $b = 1$. Tedy:

$$\forall x \in B : x + 0 = x$$

$$\forall x \in B : x \cdot 1 = x.$$

Z tabulky 4.5 vidíme, že hodnota výrazu „ $x+y$ “, kde x, y jsou pravdivostní hodnoty výroků x, y , odpovídá pravdivostní hodnotě výrazu „ $x \vee y$ “. Obdobně výraz „ $x \cdot y$ “ má dle tabulky 4.6 stejnou hodnotu jako je pravdivostní hodnota „ $x \wedge y$ “. Z toho můžeme vyvodit tabulku pro převedení výrazů z výrokové logiky do Booleovy algebry, viz tabulka 4.7.

Chceme-li např. zjistit pravdivostní hodnotu výroku $(a \Rightarrow b) \vee c$, víme-li, že $a = 0$, přepíšeme nejprve výrok dle předchozí tabulky. Vznikne $\neg a + b + c$. Známe pravdivostní hodnotu výroku a , můžeme ji tedy dosadit. Dostáváme

Tabulka 4.7:

$x \wedge y$	xy
$x \vee y$	$x + y$
$x \Rightarrow y$	$\neg x + y$
$x \Leftrightarrow y$	$xy + \neg x \neg y$

výraz $1 + b + c$. Z tabulky 4.5 víme, že $1 + 0 = 1$ a $1 + 1 = 1$. Výraz $1 + b + c$ je tedy roven 1, nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků b, c . Je-li $a = 0$, výrok je vždy pravdivý.

Využití Booleovy algebry při řešení slovních úloh z logiky ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 5. *V podniku jsou tři pracoviště A, B, C, která učinila dohodu o schvalování nových pracovních postupů. Tato dohoda je vyslovena ve větách:*

1. *Neúčastní-li se svým dobrozdáním pracoviště B, neúčastní se ani A.*
2. *Účastní-li se svým dobrozdáním pracoviště B, pak se podílí svým dobrozdáním i pracoviště A a C.*

Ptáme se, zda za těchto podmínek dohody se musí účastnit dobrozdáním pracoviště C, když se účastní pracoviště A.

Řešení. Nejprve označme atomární výroky:

a: Pracoviště A se účastní svým dobrozdáním.

b: Pracoviště B se účastní svým dobrozdáním.

c: Pracoviště C se účastní svým dobrozdáním.

Pomocí nich zapišme složené výroky odpovídající větám 1 a 2:

1. Neúčastní-li se svým dobrozdáním pracoviště B, neúčastní se ani A:
 $\neg b \Rightarrow \neg a$.

2. Účastní-li se svým dobrozdáním pracoviště B, pak se podílí svým dobrozdáním i pracoviště A a C: $b \Rightarrow (a \wedge c)$

Víme, že výroky 1 a 2 musí platit, jejich pravdivostní hodnota je tedy 1. Přepíšeme-li je pomocí Booleovy algebry získáváme tyto rovnice:

$$b + \neg a = 1$$

$$\neg b + ac = 1$$

Ze zadání víme, že pracoviště A se účastní, tedy pravdivostní hodnota a je 1. Hodnotu dosadíme do první rovnice a upravíme:

$$b + \neg a = 1$$

$$b + 0 = 1^5$$

$$b = 1$$

Z rovnice jsme zjistili pravdivostní hodnotu výroku b . Pravdivostní hodnoty výroků a i b můžeme dosadit do druhé rovnice:

$$\neg b + ac = 1$$

$$0 + 1 \cdot c = 1$$

$$1 \cdot c = 1^6$$

$$c = 1$$

Z rovnic vyšlo, že je-li $a = 1$, je i $b = 1$ a $c = 1$. Účastní-li se tedy pracoviště A, musí se účastnit i pracoviště C.

□

4.4 Slovní úlohy řešené šipkovým diagramem

Další způsob, kterým lze slovní úlohy z logiky řešit, uvádí Robová [10]. Jedná se o názorný grafický způsob řešení pomocí šipkového diagramu. Metoda pochází od J. Šedivého a je vhodná zejména pro řešení úloh s implikacemi. Atomární výroky a jejich negace znázorňují uzly a jednotlivé implikace šipky

⁵Víme, že: $\forall x \in B : x + 0 = x$, tedy $b + 0 = b$.

⁶Víme, že: $\forall x \in B : 1 \cdot x = x$, tedy $1 \cdot c = c$.

mezi nimi. Uzly vybarvujeme podle jejich pravdivosti a postupně tak získáme hledané řešení. Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 6. *Jednou na pouti jsem navštívil stan s věštkyní. Věštkyně mi prozradila:*

1. *Jestliže mi nevěříš, pak jsi hloupý.*
2. *Jestliže jsi hloupý, nezaplatíš mi.*
3. *Když mi zaplatíš, dozvíš se pravdu.*

Zaplatil jsem. Co mi vlastně věštkyně prozradila?[10]

Řešení. Nejprve nalezneme atomární výroky a označíme je:

a : Věřím věštkyni.

b : Jsem hloupý.

c : Zaplatil jsem.

d : Dozvěděl jsem se pravdu.

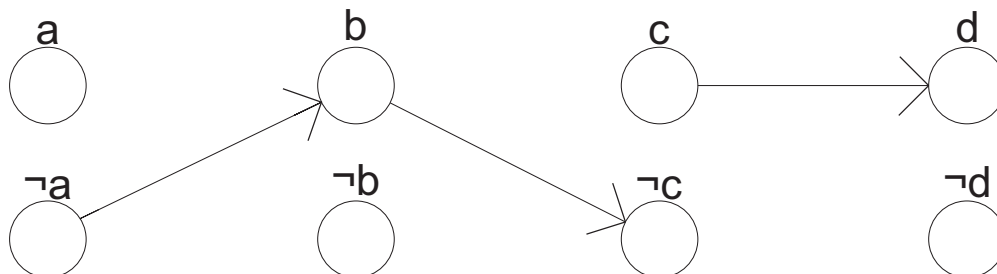
V diagramu se tedy objeví osm uzlů ($a, b, c, d, \neg a, \neg b, \neg c, \neg d$). Dále zapíšeme symbolicky složené výroky, podle nichž později doplníme šipky do diagramu. Výroky jsou očíslovány dle zadání.

1. $\neg a \Rightarrow b$
2. $b \Rightarrow \neg c$
3. $c \Rightarrow d$

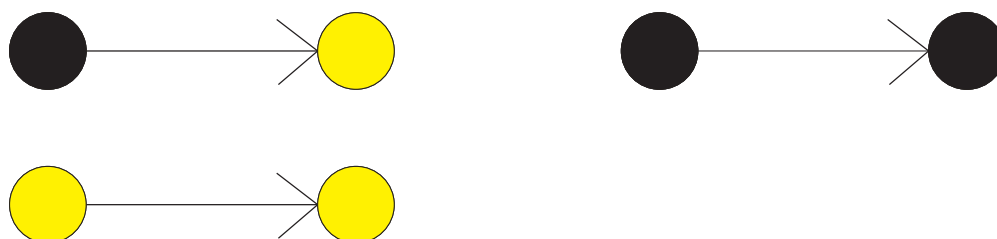
Nyní můžeme vytvořit diagram (viz obr. 4.6).

Diagram postupně vybarvíme podle pravdivosti výroků. Zde budeme používat žlutou barvu pro výrok pravdivý a černou pro výrok nepravdivý. První vybarvíme uzel c žlutě, protože víme, že zákazník zaplatil. Platí-li výrok a , jeho negace neplatí. Uzel $\neg a$ tedy vybarvíme černě. Další uzly vybarvíme tak, aby uvedené implikace byly pravdivé. To nastává v případě, že předpoklad je nepravdivý nebo jsou-li pravdivé oba výroky. V diagramu se mohou tedy objevit případy podle obr. 4.7.

Obrázek 4.6:



Obrázek 4.7:



Dle této předlohy vidíme, že uzel b musí být černý ($\neg b$ tedy žlutý), odtud plyne že i uzel $\neg a$ je černý (a žlutý). Dále uzel d je žlutý ($\neg d$ černý), neboť je závěrem implikace s pravdivým předpokladem. Doplňili jsme takto celý diagram (viz obr. 4.8), známe tedy pravdivostní hodnoty všech atomárních výroků.

Z diagramu můžeme vyvodit následující tvrzení:

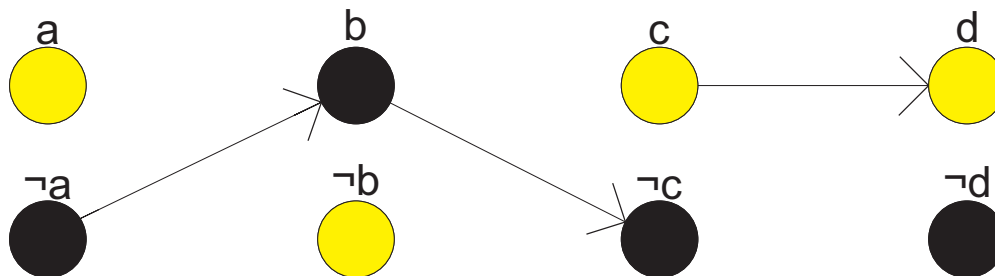
- „Věřím věstkyni.“ (a je pravdivé.)
- „Nejsem hloupý.“ (b je nepravdivé.)
- „Zaplatil jsem.“ (c je pravdivý.)
- „Dozvěděl jsem se pravdu.“ (d je pravdivý.) [10]

□

Tuto metodu můžeme použít i pro následující příklad.

Příklad 7. *Mám 3 vnoučata: Jakuba, Kačenuku a Terezku. S vnukem bych rád*

Obrázek 4.8:



mluvil, ale pojedu za ním jen tehdy, když si budu jist, že je doma. Dozvěděl jsem se: Je-li Jakub doma, není doma Tereška. Jestliže je Kačenka doma, je doma i Tereška. Není-li Kačenka doma, je doma Jakub. Mám za vnukem jet? Mám za ním jet, pokud jsem se místo první informace dozvěděl: Není-li Jakub doma, není doma ani Tereška.[12, str. 8]

Řešení. Při řešení se nejprve soustředíme na první případ. Nalezneme atomární výroky a označíme je:

j : Jakub je doma.

k : Kačenka je doma

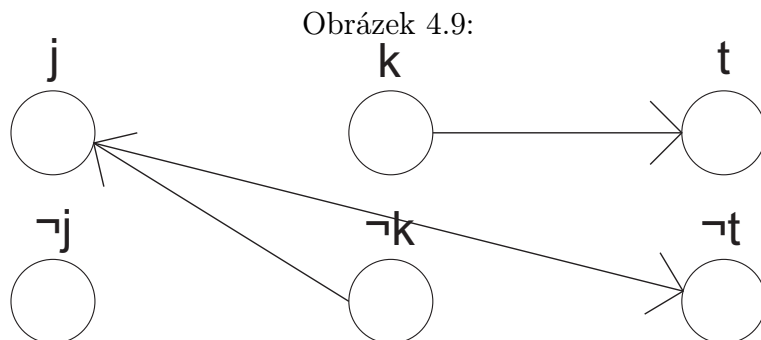
t : Tereška je doma. Pomocí těchto atomárních výroků symbolicky zapíšeme složené výroky:

Je-li Jakub doma, není doma Tereška: $j \Rightarrow \neg t$.

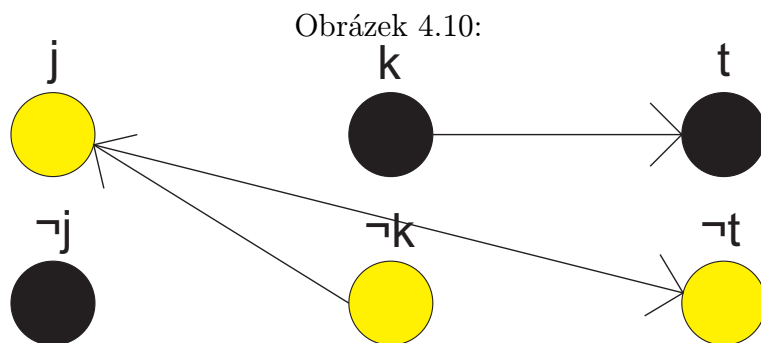
Jestliže je Kačenka doma, je doma i Tereška: $k \Rightarrow t$.

Není-li Kačenka doma, je doma Jakub: $\neg k \Rightarrow j$.

Máme zapsány složené výroky a můžeme tedy vytvořit diagram. Bude obsahovat šest uzlů (pro výroky j, k, t a jejich negace). Šipky doplníme podle implikací. Vznikne diagram (viz obr. 4.9). Nyní přejdeme k vyplňování diagramu. Na rozdíl od předešlého příkladu ovšem neznáme žádnou pravdivostní hodnotu atomárního výroku. U jednoho atomárního výroku tedy pravdivostní hodnotu určíme, musíme ovšem uvažovat oba případy (výrok je pravdivý a výrok je nepravdivý), vzniknou tedy dva diagramy. Začneme například tím, že předpokládáme pravdivost výroku j a vyplníme diagram pro tento



případ. Výrok j je tedy pravdivý (vybarvíme žlutě), $\neg j$ je proto nepravdivý (vybarvíme černě). Z implikace vyplývá pravdivost výroku $\neg t$, tedy nepravdivost t . Je-li t nepravdivý, je i k nepravdivý, a tedy $\neg k$ pravdivý. Tímto jsme vyplnili celý diagram pro j pravdivé (viz obr. 4.10).



Vytvořený diagram splňuje veškerá pravidla pro pravdivostní hodnoty implikací i negací, případ popsaný diagramem tedy může nastat. Situace dle diagramu by vypadala takto:

Jakub je doma.

Kačenka není doma.

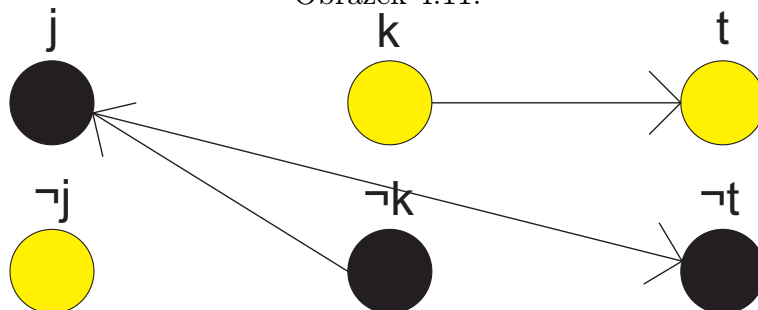
Terežka není doma.

Nyní zbývá ověřit druhý případ, předpokládáme tedy nepravdivost výroku j . Za tohoto předpokladu získáme diagram dle obr. 4.11.

I tento diagram splňuje všechna pravidla pro pravdivostní hodnoty implikací a negací, může tedy nastat tato situace:

Jakub není doma.

Obrázek 4.11:



Kačenka je doma.

Terezka je doma.

Z diagramů jsme tedy zjistili, že dle uvedených výroků mohou nastat oba případy, tzn. Jakub je doma a Jakub není doma. V zadání je řečeno: „S vnukem bych rád mluvil, ale pojedu za ním jen tehdy, když si budu jist, že je doma.“ Za vnukem tedy nepojedu, protože si jist nejsem.

Nyní zkusme vyřešit druhou otázku, tedy jak se situace změní, změníme-li první informaci. Složené výroky nyní vypadají takto:

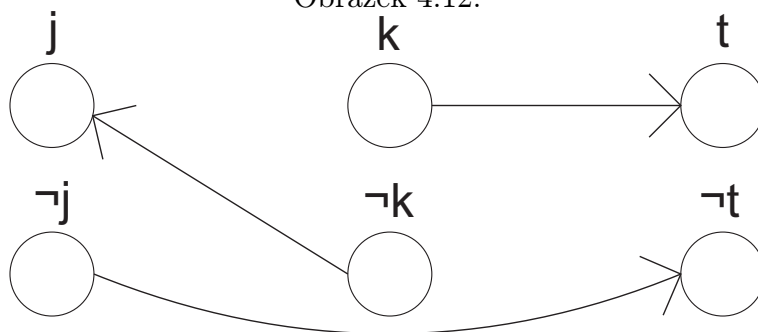
Není-li Jakub doma, není doma ani Terezka: $\neg j \Rightarrow \neg t$.

Jestliže je Kačenka doma, je doma i Terezka: $k \Rightarrow t$.

Není-li Kačenka doma, je doma Jakub: $\neg k \Rightarrow j$.

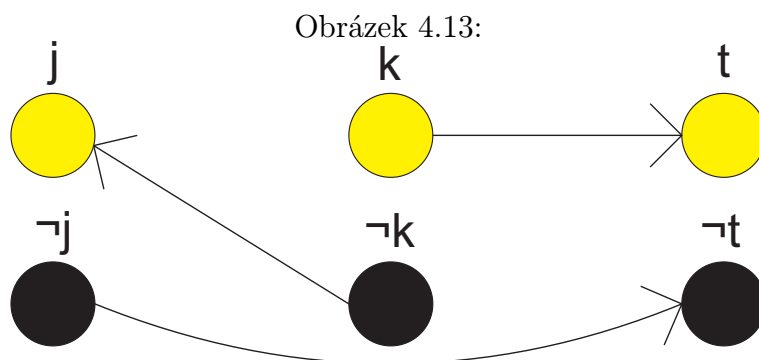
Dle těchto složených výroků vytvoříme nový šipkový diagram (viz obr. 4.12).

Obrázek 4.12:



Neznáme pravdivostní hodnotu žádného z atomárních výroků, opět tedy

zvolíme pravdivostní hodnotu jednoho z výroků a budeme uvažovat oba případy. U předchozí otázky jsme volili výrok j , čtenář snadno ověří, že pro pravdivé j bychom nedokázali vyplnit diagram bez nutnosti další volby. Zvolíme tedy pravdivostní hodnotu výroku k . Nejprve předpokládejme, že k je pravdivý výrok. Za tohoto předpokladu získáváme následující diagram:



Dle diagramu může nastat tato situace:

Jakub je doma.

Kačenka je doma.

Terežka je doma.

Zbývá vytvořit diagram pro k nepravdivé. Dle dostupných informací doplníme diagram pouze do této podoby:

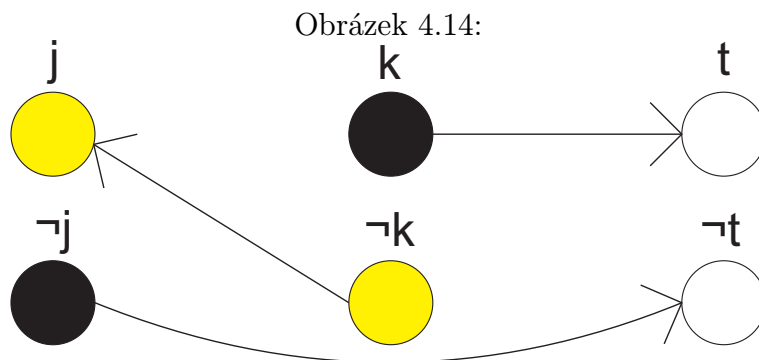


Diagram není vyplněn celý, ale pro naši potřebu plně dostačuje. Složené výroky budou pravdivé nezávisle na pravdivostní hodnotě výroku t . Z dia-

gramu vyčteme následující:

Jakub je doma.

Kačenka není doma.

Pro k pravdivé i nepravdivé je výrok j pravdivý, Jakub je tedy doma v každém případě a mohu za ním vyrazit. \square

Předchozí příklady obsahovaly pouze složené výroky s implikací a negací. Tuto metodu je možné ovšem použít i pro úlohy, které obsahují i jiné logické spojky. Ekvivalence je oboustrannou implikací, znázorníme ji tedy dvěma šipkami. Konjunkce dvou výroků je platná, právě když jsou pravdivé oba výroky, můžeme je tedy rovnou označit za pravdivé (vybarvit žlutě). Disjunkce dvou výroků ($p \vee q$) lze přepsat pomocí implikace takto: $\neg p \Rightarrow q$. Ekvivalenci výroků čtenář snadno ověří pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

Použití šipkového diagramu k řešení slovní úlohy s více logickým spojkami ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 8. *O účasti svých kamarádů na večírku vím toto: Jana přijde právě tehdy, když přijde Pavel. Dorazí Kateřina nebo Vladislav. Nepřijde-li Jana, přijde Kateřina. Jestliže přijde Lenka, nepřijde Vladislav. Kdo bude na večírku, víme-li, že Kateřina nedorazí?*

Řešení. Atomární výroky označíme takto:

j : Jana přijde.

p : Petr přijde.

k : Kateřina přijde.

v : Vladislav přijde.

l : Lenka přijde.

Pomocí nich zapíšeme symbolicky složené výroky:

Jana přijde právě tehdy, když přijde Pavel: $j \Leftrightarrow p$.

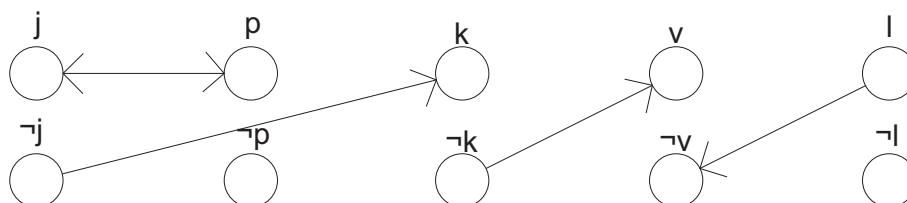
Dorazí Kateřina nebo Vladislav: $k \vee v$. Pro zanesení do diagramu prepíšeme takto: $\neg k \Rightarrow v$.

Nepřijde-li Jana, přijde Kateřina: $\neg j \Rightarrow k$.

Jestliže přijde Lenka, nepřijde Vladislav: $l \Rightarrow \neg v$.

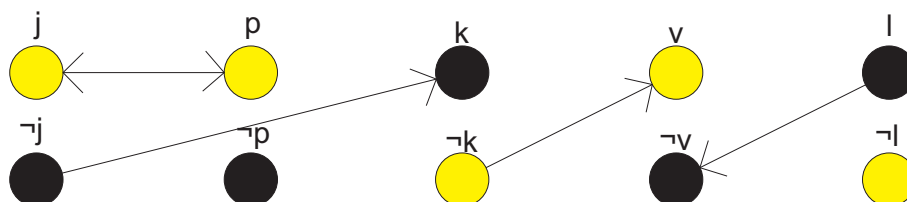
Na základě atomárních a složených výroků vytvoříme diagram (viz obr. 4.15).

Obrázek 4.15:



Ze zadání víme, že Kateřina nedorazí. $\neg k$ vybarvíme žlutě, k černě. Dále vybarvujeme dle šipek (možné kombinace viz obr. 4.7, str. 39). Po vyplnění získáme diagram dle obr. 4.16.

Obrázek 4.16:



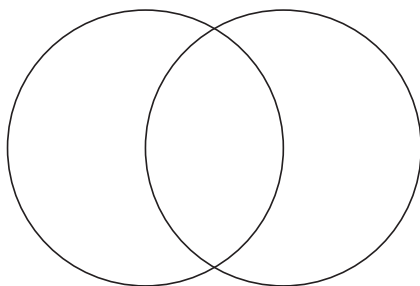
Z tohoto diagramu již můžeme vyčíst řešení úlohy: Na večírek přijde Jana, Pavel a Vladislav. Kateřina a Lenka nedorazí. \square

4.5 Slovní úlohy řešené pomocí Vennových diagramů

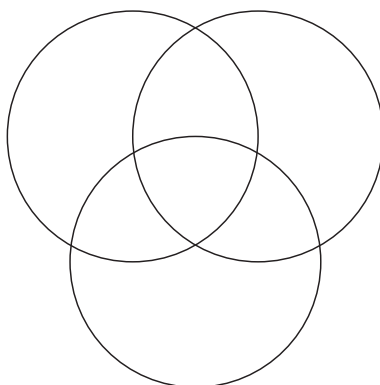
Pro řešení slovních úloh z logiky můžeme využít i Vennovy diagramy, které znázorňují vztahy mezi množinami. Toto vizuální znázornění množin vymyslel v roce 1880 John Venn. Vennův diagram obvykle sestává z kruhových

nebo eliptických ploch, které znázorňují množiny [7, str. 272]. Na obr. 4.17, 4.18 a 4.19 jsou Vennovy diagramy pro dvě, tři a čtyři množiny.

Obrázek 4.17: Vennův diagram pro dvě množiny



Obrázek 4.18: Vennův diagram pro tři množiny



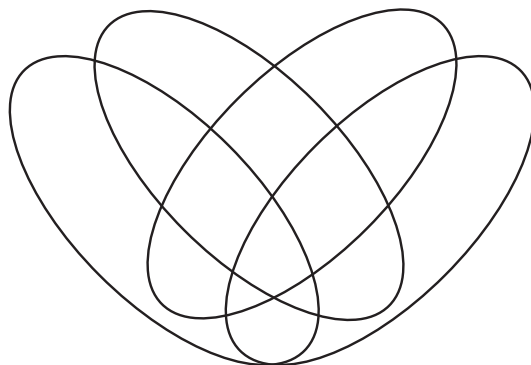
Využití těchto diagramů při řešení úloh ukažme na příkladě.

Příklad 9. *Všechny lichoběžníky jsou čtyřúhelníky. Všechny rovnoběžníky jsou čtyřúhelníky. Je za těchto dvou předpokladů správný úsudek: „Všechny rovnoběžníky jsou lichoběžníky.“? [10]*

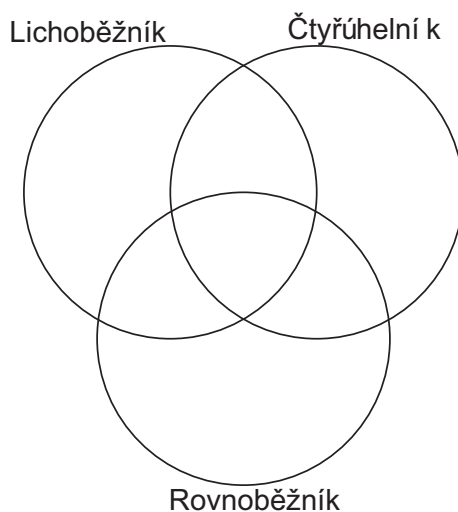
Řešení. V úloze se hovoří o třech útvarech - lichoběžnících, čtyřúhelnících a rovnoběžnících. Využijeme tedy Vennova diagramu pro tři množiny (viz obr. 4.20).

První předpoklad je, že všechny lichoběžníky jsou čtyřúhelníky. Do Vennova diagramu můžeme tedy vyznačit, že v místě, kde se kruh pro množinu

Obrázek 4.19: Vennův diagram pro čtyři množiny



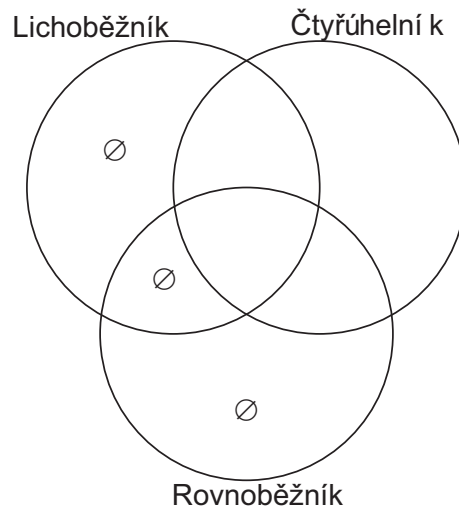
Obrázek 4.20:



lichoběžníků nepřekrývá s množinou rovnoběžníků, nesmí být žádné prvky, je tam tedy prázdná množina, kterou značíme \emptyset . Podobně vyznačíme i informaci, že všechny rovnoběžníky jsou čtyřúhelníky. Získáme diagram viz obr. 4.21.

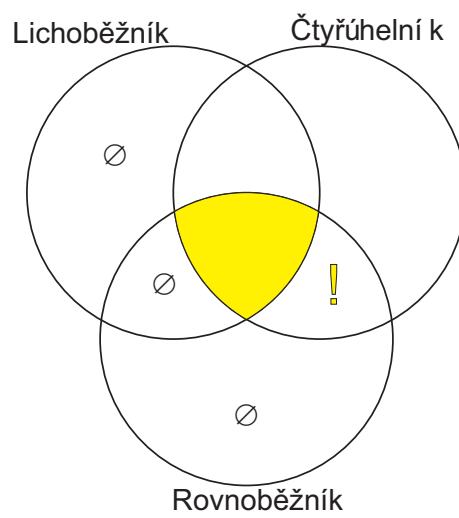
Zaměřme se nyní na správnost úsudku: „Všechny rovnoběžníky jsou lichoběžníky.“ Množina všech rovnoběžníků, které jsou i lichoběžníky, je na obr. 4.22 vyznačena žlutě. Na obrázku ale vidíme, že množina rovnoběžníků, které jsou sice čtyřúhelníky, ale nejsou lichoběžníky, nemusí být prázdná

Obrázek 4.21:



(v obrázku označeno vykřičníkem). Úsudek tedy není správný.

Obrázek 4.22:



□

Využití Vennova diagramu ukážeme ještě na další úloze.

Příklad 10. *Otec jde s malým Jirkou kupovat do hračkářství autíčko. Jirka vyslovuje přání:*

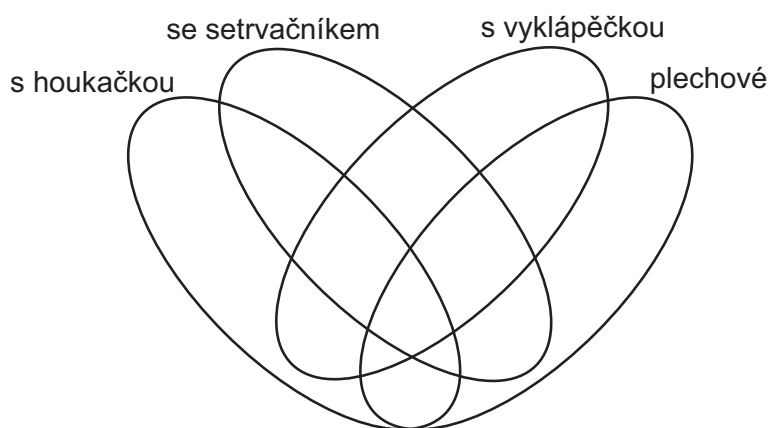
„Chci autíčko s houkačkou. Přitom ještě chci, aby mělo setrvačnick a vyklápěčku, nebo to musí být plechové autíčko s houkačkou. Nechci ale vůbec plechové autíčko bez vyklápěčky.“

Prodavačka: „Tak ty tedy chceš autíčko, které musí mít vyklápěčku, setrvačnick a houkačku. Takové nemáme.“

Otec nakonec koupil Jirkovi plechové autíčko bez setrvačnicku, s vyklápěčkou a houkačkou. Koupil otec takové auto, jaké si Jirka přál? Odhadla prodavačka správně Jirkovo přání? [14, str. 66]

Řešení. Jirka mluví o čtyřech vlastnostech autíčka, využijeme tedy Vennova diagramu pro čtyři množiny, viz obr. 4.23.

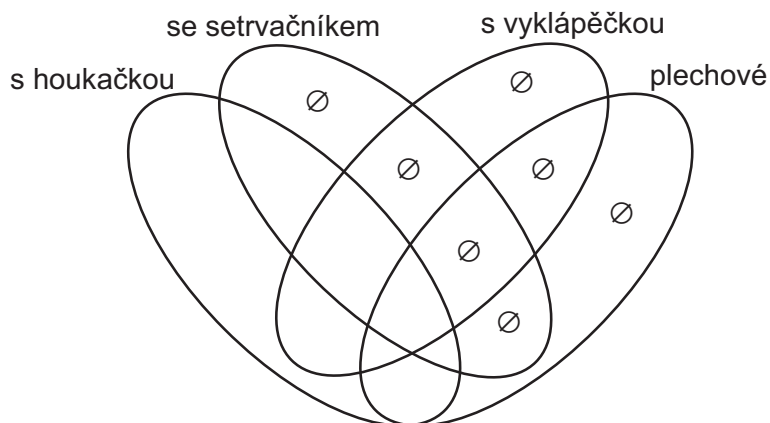
Obrázek 4.23:



Jirka žádá, aby autíčko mělo houkačku, všechny části diagramu, které se nekryjí s množinou označenou „s houkačkou“ můžeme tedy vyřadit, označíme je \emptyset jako prázdnou množinu (viz obr. 4.24).

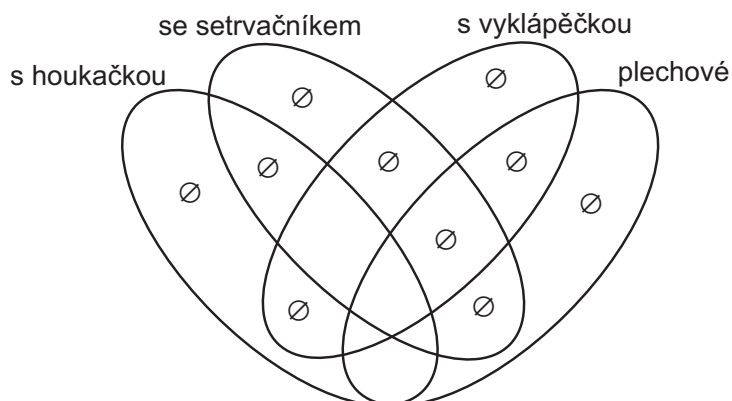
Dále známe tento chlapcův požadavek: *„Přitom ještě chci, aby mělo setrvačnick a vyklápěčku, nebo to musí být plechové autíčko s houkačkou“*. Chce

Obrázek 4.24:



tedy setrvačnik a vyklápěčku zároveň (v diagramu se jedná o části, kde se překrývá množina „se setrvačником“ a „s vyklápěčkou“) nebo autíčko které je plechové a zároveň má houkačku. Všechny ostatní možnosti můžeme vyřadit, tedy tyto: autíčko pouze s houkačkou (bez vyklápěčky, setrvačniku, neplechové); neplechové autíčko se setrvačником, bez vyklápěčky; neplechové autíčko s vyklápěčkou, bez setrvačniku (viz obr. 4.25).

Obrázek 4.25:

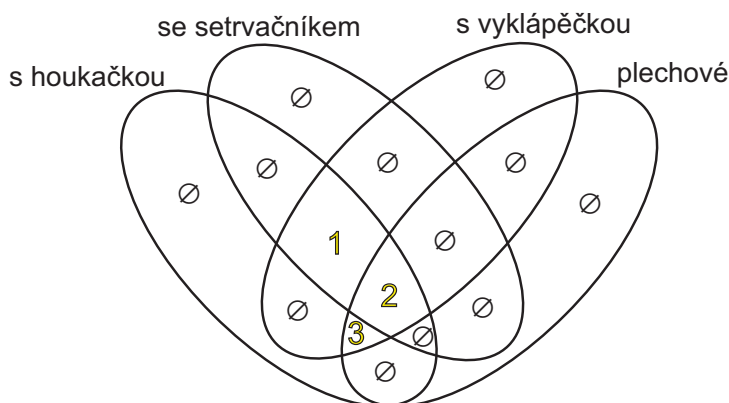


Do Vennova diagramu zbývá zanést poslední informaci, že se nesmí jednat o plechové autíčko bez vyklápěčky. V diagramu tedy ještě označíme symbolem \emptyset části značící tyto možnosti: plechové autíčko s houkačkou, bez setr-

vačnicku a vyklápěčky; plechové autíčkou s houkačkou, setrvačnickem a vyklápěčkou. Nyní již máme zaneseny všechny informace a můžeme z diagramu vyčíst, jaké autíčko by si Jirka přál. Jsou tři možnosti (viz obr. 4.26):

1. neplechové autíčko s houkačkou, setrvačnickem a vyklápěčkou
2. plechové autíčko s houkačkou, setrvačnickem a vyklápěčkou
3. plechové autíčko s houkačkou, vyklápěčkou, bez setrvačnicku.

Obrázek 4.26:



Dle zjištěných možností víme, že prodavačka Jirkovo přání neodhadla správně. Objevila pouze možnosti 1 a 2. Otec Jirkovi koupil plechové autíčko s houkačkou, vyklápěčkou, bez setrvačnicku, splnil tedy Jirkovo přání (možnost 3).

□

4.6 Slovní úlohy řešené úvahou

Často může být efektivnější vyřešit úlohu prostou úvahou než předešlými metodami. Velké množství takto řešených úloh najdeme například v knize Smullyana [11]. Tento způsob řešení nejprve ukážeme na úloze, kterou jsme řešili v kapitole 4.1.

Příklad 11. *Nacházíte se na ostrově padouchů a poctivců. Padouši vždy lžou, poctivci vždy mluví pravdu. Dva domorodci pronesou následující výroky:*

A: „Oba jsme poctivci.“

B: „A je padouch.“

Jakou povahu mají domorodci A a B? [3, str. 39]

Řešení. Chceme zjistit, jakou povahu mají domorodci. Uvažujme nejprve, že domorodec A je poctivec, tedy že mluví vždy pravdu. Pak výrok „Oba jsme poctivci“ je pravdivý, tedy i B je poctivec. Pokud by byl ale B poctivec, jeho výrok „A je padouch“ by byl pravdivý, což je ve sporu s naším předpokladem, že A je poctivec. A tedy poctivec být nemůže.

Nyní ověříme ještě druhý případ. Budeme tedy předpokládat, že A je padouch. Pak výrok „Oba jsme poctivci“ neplatí, což se shoduje s naším předpokladem. B tvrdí „A je padouch“, mluví tedy pravdu a je poctivec. Řešení této úlohy je dle úvahy následující: A je padouch, B je poctivec. □

Obdobný postup ukážeme na další úloze o padouších a poctivcích, ale tentokrát ještě přidáme normální domorodce - ti občas mluví pravdu a občas lžou.

Příklad 12. *Máme tři lidi A, B a C. Jeden z nich je poctivec, druhý padouch a třetí normální (ale ne nutně v tomhle pořadí). Prohlásí:*

A: „Já jsem normální.“

B: „To je pravda.“

C: „Já nejsem normální.“

Co jsou A, B a C? [11, str. 29]

Řešení. Pokud mluví domorodec A pravdu, je normální. Pak B mluví také pravdu a musí být poctivec nebo normální, normální už je ale domorodec A, tedy B je poctivec. Domorodec C by měl být padouch. Jeho tvrzení by pak ale bylo pravdivé, což je v rozporu s tím, že je padouch. Tato situace tedy nastat nemůže.

Ověříme ještě případ, kdy A lže. Pokud lže, je padouch (nemůže být normální, to by byl jeho výrok pravdivý). B také lže, z čehož vyvodíme, že je

normální. C může být už pouze poctivec a jeho tvrzení je tedy pravdivé, což souhlasí. Odpověď na úlohu je: A je padouch, B je normální a C poctivec. □

Úvahou lze snadno řešit i jiné typy úloh, například následující:

Příklad 13. *Je parta tří kamarádů. Jejich křestní jména jsou: Petr, Tomáš a Jan; příjmení: Červený, Modrý a Bílý. Na výlety každý z nich nosí jeden z těchto nástrojů: sekeru, kotlík, stan. Zjistili jsme následující informace:*

1. *Jan se jmenuje Bílý.*
2. *Petr nosí stan.*
3. *Modrý nosí kotlík.*

Umíme určit, jak se jmenuje celým jménem ten, kdo nosí sekeru? [12, str. 60-61]

Řešení. Ke každému jménu potřebujeme přiřadit příjmení a nástroj. Pro přehlednost si tedy připravíme tabulku 4.8.

Tabulka 4.8:

jméno	Petr	Tomáš	Jan
barva			
nástroj			

Do tabulky můžeme doplnit příjmení Bílý a nástroj stan dle informací 1 a 2. Pro Petra a Tomáše zbývají příjmení Modrý a Červený, Petr být ovšem Modrý nemůže, protože Modrý nosí kotlík (3). Petr je Červený, Tomáš Modrý a nosí kotlík. Jan tedy nosí sekeru. Po doplnění získáváme tabulku 4.9.

Odpovědí na úlohu je: Sekeru nosí Jan Bílý. □

Příklad 14. *Milovníci umění se jmenují Josef, Antonín, František a Pavel, hrají na různé nástroje (housle, violu, violoncello a basu), přou se o své oblíbené autory (Čapka, Haška, Kunderu a Seiferta) i oblíbené impresionistické malíře (Gogha, Gauguina, Moneta a Cézanna) a dokonce každý z nich*

Tabulka 4.9:

jméno	Petr	Tomáš	Jan
příjmení	Červený	Modrý	Bílý
nástroj	stan	kotlík	sekera

má i svůj oblíbený stavební sloh (gotický, románský, renesanční a barokní).

O milovnících umění víme:

1. *Houslista má rád Kunderu.*
2. *František nehraje na basu.*
3. *Milovník Gauguina miluje i románský sloh.*
4. *Haška a Moneta obdivuje tatáž osoba.*
5. *Milovník Cézanna nemá rád Kunderu.*
6. *Antonín má nejraději baroko.*
7. *Pavel miluje Seifertovy verše.*
8. *František obdivuje Cézannova zátiší.*
9. *Violista má rád Gogha.*
10. *Milovník gotiky není příznivcem Cézanna.*

Na který nástroj hraje Antonín a kterého spisovatele, impresionistu a sloh má nejraději? [12, str. 63]

Řešení. Tento příklad je rozsáhlejší než předešlý. Připravíme proto tabulku, kde u každého milovníka umění vypíšeme i všechny možnosti, které můžeme postupně vylučovat. Můžeme do ní rovnou zanést informace, které jsou jasně dány. Podle bodu 2 František nehraje na basu, basu tedy u Františka proškrtáme. Dále dle bodu 6 vyplníme u Antonína baroko, jakýkoliv jiný sloh

Tabulka 4.10:

	Josef	Antonín	František	Pavel
housle				
viola				
cello				
basa			X	
Čapek				X
Hašek				X
Kundera				X
Seifert	X	X	X	SEIFERT
Gogh			X	
Gauguin			X	
Monet			X	
Cézanne	X	X	CÉZANNE	X
gotický		X		
románský		X		
renesanční		X		
barokní	X	BAROKNÍ	X	X

u něj tedy můžeme proškrtnout, stejně tak vyloučíme baroko u ostatních osob. Obdobně zaneseme informaci dle bodu 8. Tímto vznikla tabulka 4.10.

Zkusme nyní pročíst dané informace a vyvodit z nich co nejvíce.

1. Houslista má rád Kunderu: Víme, že Pavel má rád Seiferta, tedy není houslista.
2. František nehraje na basu: Již máme zaneseno do tabulky.
3. Milovník Gauguina miluje i románský sloh: František má rád Cézanna, románský sloh u něj proškrtneme. Antonín má rád barokní sloh, můžeme u něj proškrtnout Gauguina.

4. Haška a Moneta obdivuje tatáž osoba: Pavel nemá rád Haška, ale Seiferta, nemá tedy rád ani Moneta. František má rád Cézanna, nemá tedy rád Haška.
5. Milovník Cézanna nemá rád Kunderu: Milovníkem Cézanna je František, proto nemá rád Kunderu. Musí mít rád Čapka, ostatní možnosti už jsou vyloučené.
6. Antonín má nejraději baroko: Již máme zaneseno.
7. Pavel miluje Seifertovy verše: Již máme zaneseno.
8. František obdivuje Cézannova zátiší: Již máme zaneseno.
9. Violista má rád Gogha: František není violista, neboť má rád Cézanna.
10. Milovník gotiky není příznivcem Cézanna. František tedy nemá rád gotiku. Musí mít rád renesanci, protože ostatní slohy jsme již vyloučili. U ostatních milovníků umění renesanci také vyloučíme.

Nyní jsme získali tabulku 4.11.

Dále dle bodu 1 víme, že houslista má rád Kunderu. František má rád Čapka, nehraje tedy na housle a musí hrát na violoncello. O houslistovi (Josef nebo Antonín) dále víme, že nemá rád Gogha (to by hrál na violu) a nemá rád Moneta (to by měl rád Čapka), má tedy rád Gauguina, a proto je houslistou Josef (u Antonína máme Gauguina proškrtnutého). Do tabulky zaneseme u Josefa housle, Kunderu, Gauguina a románský sloh (dle 3.). U Antonína zbývá jediný spisovatel (Hašek), u Pavla jediný sloh (gotika) a impresionista (Gogh). Má-li Pavel rád Gogha, je dle 9. violista. Nástroj basa a impresionista Monet zbývají na Antonína. Tímto jsem dokončili tabulku (viz tabulka 4.12) a můžeme z ní vyčíst následující odpověď: Antonín hraje na basu a nejraději má Haška, Moneta a baroko.

□

Tabulka 4.11:

	Josef	Antonín	František	Pavel
housle				X
viola			X	
cello				
basa			X	
Čapek	X	X	ČAPEK	X
Hašek			X	X
Kundera			X	X
Seifert	X	X	X	SEIFERT
Gogh			X	
Gauguin		X	X	
Monet			X	X
Cézanne	X	X	CÉZANNE	X
gotický		X	X	
románský		X	X	
renesanční	X	X	RENE- SANČNÍ	X
barokní	X	BAROKNÍ	X	X

V předchozích dvou příkladech se jednalo o úlohy, které nazýváme úlohy typu „ZEBRA“. Kromě uvedeného způsobu lze tyto úlohy též řešit soustavou tabulek, v nichž každá z tabulek popisuje vzájemný vztah dvou charakteristických množin objektů (například jména a nástroje). Další metodou řešení těchto úloh je pomocí uzlového grafu. V něm uzly znázorňují jednotlivé objekty a spojnice vztah mezi nimi. Tyto metody podrobněji uvádí Uhlířová v [15].

Tabulka 4.12:

	Josef	Antonín	František	Pavel
housle	HOUSLE	X	X	X
viola	X	X	X	VIOLA
cello	X	X	CELLO	X
basa	X	BASA	X	X
Čapek	X	X	ČAPEK	X
Hašek	X	HAŠEK	X	X
Kundera	KUNDERA	X	X	X
Seifert	X	X	X	SEIFERT
Gogh	X	X	X	GOGH
Gauguin	GAUGUIN	X	X	X
Monet	X	MONET	X	X
Cézanne	X	X	CÉZANNE	X
gotický	X	X	X	GOTICKÝ
románský	ROMÁN- SKÝ	X	X	X
renesanční	X	X	RENE- SANČNÍ	X
barokní	X	BAROKNÍ	X	X

Závěr

Cílem této práce bylo přehledně a srozumitelně popsat různé metody, pomocí kterých se dají řešit slovní úlohy z logiky. Vzhledem k velkému množství metod, typů úloh a rozsahu práce se mi nepodařilo podat vyčerpávající text k tomuto tématu. Vybrala jsem však ty metody, které jsou přehledné a snadno využitelné. Proto může práce být přínosná pro ty, kteří se o danou tematiku zajímají. Snažila jsem se, aby práce byla srozumitelná pro žáky středních škol, studenty vysokých škol i další čtenáře. S výjimkou části zabývající se Booleovou algebrou, která předpokládá předchozí znalosti z algebry, se, myslím, tento cíl naplnil.

Metodami, kterou jsou zde popsány, se zabývá různá literatura. Nenašla jsem však práci, která by souhrnně shrnovala všechny tyto metody. Přínos této práce vidím tedy i v tom, že nabízí čtenáři přehledně základní postupy pro řešení úloh z logiky.

Danou tematikou by bylo možné zabývat se i dále. Bylo by jistě zajímavé a přínosné podrobněji rozvést různá grafická řešení slovních úloh z logiky. Dále by bylo možné se touto tematikou zabývat i z hlediska didaktického - kterým metodám dávají řešitelé přednost a co může při řešení činit obtíže.

Literatura

- [1] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce*. Vyd. 4. Praha: Academia, 2006. ISBN 80-200-1448-9.
- [2] ČECHÁK, Vladimír, Karel BERKA a Jaroslav ŠEDIVÝ. *Co víte o moderní logice*. Vyd. 1. Praha: Horizont, 1981.
- [3] HROMEK, Petr. *Logika v příkladech*. Vyd. 1. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2002. ISBN 80-244-0578-4.
- [4] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-04-23753-3.
- [5] NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.
- [6] ODVÁRKO, Oldřich, Emil CALDA, Jaroslav ŠEDIVÝ a Stanislav ŽIDEK. *Metody řešení matematických úloh*. Vyd. 1. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1990. ISBN 80-04-20434-1.
- [7] PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky*. Vyd. 1. Praha: Argo, Dokořán, 2012. ISBN 978-80-257-0705-0.
- [8] PAVLISKOVÁ, Libuše. *Principy dedukce ve výrokové logice*. Ostrava: 2003. Diplomová práce. Ostravská univerzita v Ostravě. Dostupné z: <http://www1.osu.cz/home/habibal/dedukce/index.htm>.

- [9] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Vyd. 6. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 80-85849-78-X.
- [10] ROBOVÁ, Jarmila. Grafické řešení logických úloh. In: *Dva dny s didaktikou matematiky: Sborník příspěvků*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta a Matematická pedagogická sekce JČMF, 2005, s. 43-46. ISBN 80-7290-223-7.
- [11] SMULLYAN, Raymond M. *Jak se jmenuje tahle knížka?* Vyd. 1. Praha: Mladá fronta, 1986.
- [12] SOCHOR, Antonín. *Logika pro všechny ochotné myslet*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 2011. ISBN 978-802-4619-590.
- [13] ŠTĚPÁNEK, Petr. *Matematická logika*. Vyd. 1. Praha: Univerzita Karlova v Praze, 1982.
- [14] ŠEDIVÝ, Jaroslav, Júlia LUKÁTŠOVÁ, Oldřich ODVÁRKO a Michal ZÖLDY. *Úlohy o výrocích a množinách*. Vyd. 3. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1977.
- [15] UHLÍŘOVÁ, Martina. Logické úlohy známé - neznámé. In: *Matematika, fyzika, informatika*. 2004, r. 14, č. 2, s. 78-85.
- [16] VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. Vyd. 2. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1972.