Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

Diplomová práce

Petra Plichtová

Webová aplikace pro výuku osové afinity a středové kolineace

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Studijní program: Matematika, Učitelství matematiky – deskriptivní geometrie pro střední školy

2013

Ráda bych poděkovala všem, kteří mi zapůjčili potřebnou literaturu nebo mě jakkoli podpořili při psaní této diplomové práce. Zejména děkuji mé vedoucí RNDr. Janě Hromadové, Ph. D., která mi vybrala téma osové afinity a středové kolineace a s níž jsem měla možnost podrobně prokonzultovat náplň práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 8. dubna 2013 Petra Plichtová

Název práce: Webová aplikace pro výuku osové afinity a středové kolineace
Autor: Petra Plichtová
Katedra (ústav): Matematicko-fyzikální fakulta univerzity Karlovy
Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
e-mail vedoucího: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce je určena studentům středních a vysokých škol a jejich učitelům, kteří si chtějí osvojit či rozšířit znalosti osové afinity a středové kolineace. V práci čtenáře seznámíme s nevlastními prvky, dělicím poměrem a dvojpoměrem. Hlavní částí práce je středová kolineace a osová afinita, jejich definice, vlastnosti, určenost a hledání dalších prvků. Práce se také zabývá použitím osové afinity a středové kolineace v deskriptivní geometrii. Text je doplněn názornými obrázky, applety a krokovanými obrázky, které jsou vytvořeny v programu GeoGebra.
Klíčová slova: osová afinita, středová kolineace, nevlastní prvky, řezy těles, dělicí poměr, dvojpoměr

Title: Web application for teaching of axial affinity and perspective collineation
Author: Petra Plichtová
Department: Faculty of Mathematics and Physics, Charles University
Supervisor: RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.
Supervisor's e-mail address: Jana.Hromadova@mff.cuni.cz

Abstract: This work is intended for high school and university students and their teachers who want to learn or improve their knowledge about affine transformations and perspective collineation. In this work the reader acquainted with the ideal elements, dividing ratio and cross ratio. The main part of the work is perspective collineation and affine transformations, their definitions, properties, specificity and finding other elements. This work also deals with the use of affine transformations and perspective collineation in descriptive geometry. The text is supplemented with illustrative images, applets and step-by-step images that are created with GeoGebra software.
Keywords: affine transformations, perspective collineation, ideal elements, cuts of solids, dividing ratio, cross ratio

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tyto stránky vznikly jako diplomová práce na Katedře didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Hlavním cílem diplomové práce je seznámit čtenáře s osovou afinitou a středovou kolineací, jejich vlastnostmi a použitím v rovině i prostoru. Pro názornost a lepší pochopení vztahů jsou použity dynamické applety či krokované obrázky. Práce je určena studentům pro samostudium či jako podpůrný materiál pro prohloubení znalostí. Dále je práce určena i učitelům, kteří v práci naleznou sady úloh, které mohou využít při svých hodinách. Práce jako taková nepředpokládá znalosti z oblasti deskriptivní geometrie. Pouze v některých sadách úloh v různých promítacích metodách se předpokládá, že student tyto metody promítání zná.Práce je sestavena jako učební text o osové afinitě a středové kolineaci. Je rozdělena do šesti kapitol. První kapitola je věnována nevlastním prvkům - nevlastnímu bodu a nevlastní přímce. Kapitola je důležitá hlavně pro středovou kolineaci.

Druhá kapitola se zabývá osovou afinitou mezi dvěma rovinami i osovou afinitou v rovině. Jsou zde popsány různé typy osové afinity, její charakteristika a vlastnosti. V kapitole také najdeme různé způsoby zadání osové afinity. Speciálně je zdůrazněna kapitola o obrazu kružnice. Na konci kapitoly naleznete úlohy na procvičení, převážně na doplňování dalších útvarů, jako např. bod, přímka, mnohoúhelník, atd.

Třetí kapitola se zabývá středovou kolineací mezi dvěma rovinami i středovou kolineací v rovině. V kapitole jsou uvedeny invarianty středové kolineace i vlastnosti, které se nezachovávají. Jsou zde popsány úběžníky a úběžnice a návod k jejich nalezení ve středové kolineaci v rovině. V kapitole také najdeme různé typy zadání kolineace. Speciálně je zdůrazněna kapitola o obrazu kružnice. Na konci kapitoly naleznete úlohy na procvičení, převážně na doplňování dalších útvarů, jako např. bod, přímka, mnohoúhelník, atd.

V kapitole Klasifikace naleznete přehled, který dává do souvislosti osovou afinitu, středovou kolineaci a další typy zobrazení.

Pátá a šestá kapitola se zabývají užitím osové afinity a středové kolineace v deskriptivní geometrii.

Všechny kapitoly jsou doplněny řadou obrázků, krokovaných obrázků a pohyblivých appletů, které byly vytvořeny ve volně dostupném programu GeoGebra (viz http://www.geogebra.org/cms/) .

Přílohou diplomové práce je sbírka úloh na procvičení osové afinity a středové kolineace. K některým úlohám sbírka obsahuje i řešení.

1.1 Ovládání stránek

Navigace na stránkách je v dvojúrovňovém menu na levé straně.

Jak již bylo zmíněno, stránky obsahují také dynamické applety. Aby správně fungovaly, je nutné mít povolený JavaScript a Javu v prohlížeči. Applety jsou na rozdíl od obrázků v černém rámečku. Vždy je u nich napsáno, jaká je jejich funkce. Pokud se v appletu má pohybovat bodem, je tento bod většinou růžový. Pohyb bodu určujete pomocí myši. Stačí kurzorem najet na daný bod, podržet levé tlačítko myši a bod bude kopírovat Vámi zvolený pohyb.

Na stránkách také naleznete krokované obrázky, které většinou simulují postup řešení zadané úlohy. Na následující nebo předchozí obrázek se dostanete pomocí šipek pod obrázkem. Pod obrázkem se také zobrazuje text, který popisuje konstrukci.

Ve většině moderních prohlížečů by nemělo být problematické jejich zobrazení. Potíže ovšem mohou činit matematické symboly, pokud je daný prohlížeč nepodporuje.

Kapitola 2

Nevlastní prvky

2.1 Nevlastní prvky

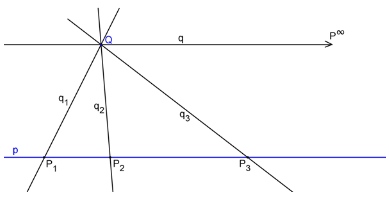
Pro snazší pochopení některých pojmů a k rozdělení afinity a kolineace se nejprve podíváme na nevlastní prvky, nevlastní bod a nevlastní přímku. Nevlastní prvky budeme potřebovat hlavně ve středové kolineaci, ale pomohou nám i v osové afinitě. Usnadní úvahy, protože každé dvě přímky pak mají společný průsečík a každé dvě roviny mají průsečnici. Hojně se využívají například v lineární perspektivě.

2.2 Nevlastní bod

Obraz nevlastního bodu známe z běžného života. Dívali jste se někdy na dlouhé rovné koleje a zdálo se Vám, že se sbíhají? Rozum nám říká, že koleje jsou rovnoběžné, takže se protnout nemohou, ale oko vidí něco jiného. Koleje se zdánlivě stále přibližují, takže oku se zdá, že by se někde protnout měly. Právě tento zdánlivý průsečík je obrazem nevlastního bodu.

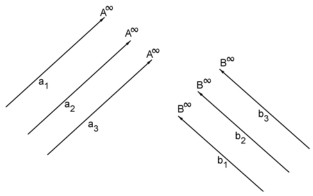
Obrázek 2.1: Sbíhající se koleje.

Pojďme se na stejný problém podívat více geometricky. Mějme v rovině dánu přímku p a bod Q, který na přímce p neleží. Bodem Q procházejí přímky q_1, q_2, . . . , které protínají přímku p v bodech P_1, P_2,... . Tyto body nazýváme *vlastními body*. Problém nastane, pokud bodem Q vedeme přímku q rovnoběžnou s přímkou p. V euklidovském prostoru rovnoběžné přímky nemají společný průsečík. Kvůli praktickým aplikacím si tento případ představíme tak, jakoby přímky byly téměř rovnoběžné a protínaly se hodně daleko. Rovnoběžné přímky se pak protínají nekonečně daleko. Tomuto průsečíku říkáme *nevlastní bod*. Na papíru nevlastní bod vyznačit nelze, protože na něm neleží. V obrázcích označíme šipkou v jakém směru nevlastní bod leží a tento směr označíme $P\infty$.



Obrázek 2.2: Nevlastní bod jako průsečík rovnoběžných přímek.

Zkusme se na nevlastní bod podívat ještě z jiného pohledu. Můžeme si představit, že přímka míří do nějakého nekonečně vzdáleného bodu – ukazuje směr, ve kterém bod leží. Rovnoběžné přímky pak ukazují na stejný bod. Tento bod pak můžeme označit průsečíkem přímek a nazveme ho nevlastním bodem. Z této úvahy také vyplývá, že všechny vzájemně rovnoběžné přímky mají stejný nevlastní bod.



Obrázek 2.3: Vzájemně rovnoběžné přímky mají stejný nevlatní bod.

Pro praktickou představu se můžeme podívat na čáry označující jízdní pruhy na rovné dálnici. Ty jsou vzájemně rovnoběžné, ale zdá se, že se všechny sbíhají v jednom bodě.

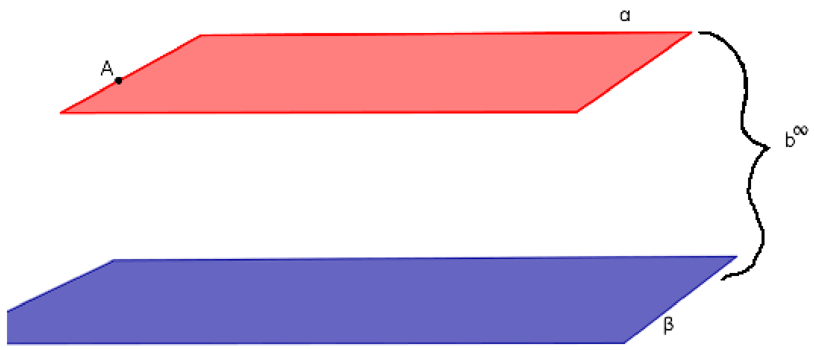
Obrázek 2.4: Sbíhající se pruhy na dálnici.

Poznámka 1 *Stejně jako víme, že dvě různoběžné přímky mají právě jeden společný bod, tak i dvě rovnoběžné přímky mají pouze jeden společný nevlastní bod, i když úvahy mohou vést k tomu, že jsou dva. („Míří přeci do nekonečna* *na obou stranách.") Dalším odůvodněním by bylo, že směr přímky je pouze jeden. (Podobně jako v analytické geometrii. K popsání přímky nám stačí jeden vektor, čili jeden směr.)*

2.3 Nevlastní přímka

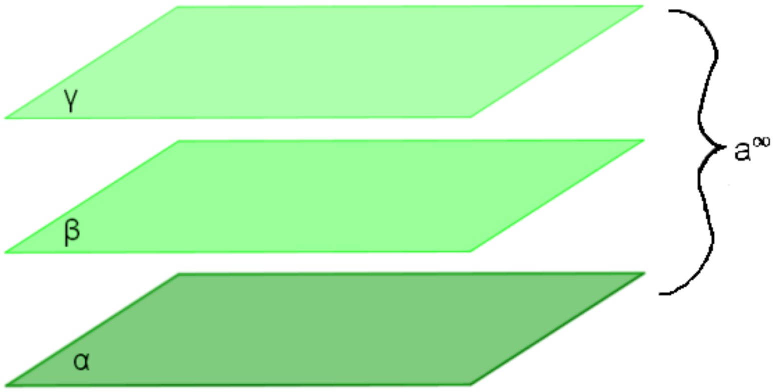
Nevlastní přímku můžeme definovat podobně jako nevlastní bod, jako průsečnici rovnoběžných rovin.

Mějme dánu rovinu β a bod A, který v rovině β neleží. Bodem A prochází roviny α_1, α_2,... , které protínají rovinu β v přímkách b_1, b_2,... . Bodem A můžeme vést rovinu α rovnoběžnou s rovinou β. Tyto roviny nemají v euklidovském prostoru společnou průsečnici. Euklidovský prostor proto rozšíříme o další nevlastní prvek, *nevlastní přímku*. Nevlastní přímkou nazveme průsečnici rovnoběžných rovin.



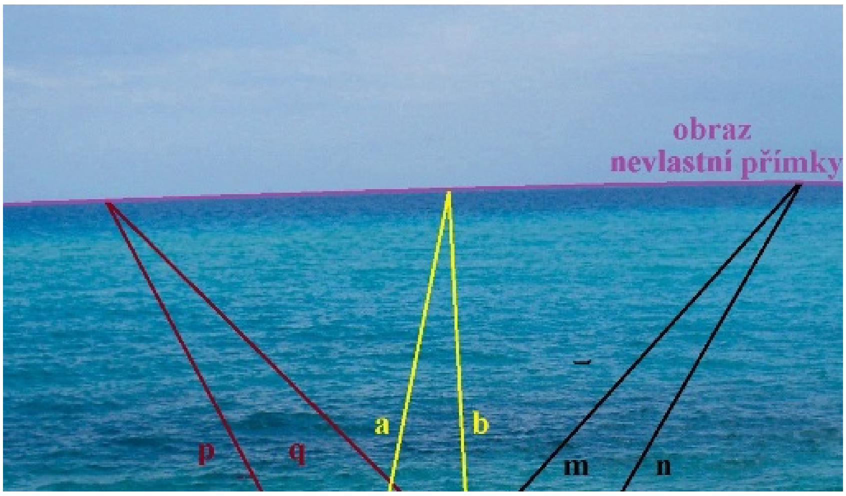
Obrázek 2.5: Rovnoběžné roviny mají společnou nevlastní přímku.

Sestrojme další rovinu, např. γ, která je opět rovnoběžná s rovinou β. Roviny γ, β mají stejnou nevlastní přímku b jako roviny α, β. Všechny rovnoběžné roviny mají společnou průsečnici - nevlastní přímku.



Obrázek 2.6: Tři rovnoběžné roviny mají společnou nevlastní přímku.

Nevlastní přímku lze také chápat jako množinu všech nevlastních bodů dané roviny. Z kapitoly o nevlastním bodu (2.2, str. 9) víme, že rovnoběžné přímky mají stejný nevlastní bod. Mějme v rovině dány přímky p, q, m, n, kde $p \parallel q$, $m \parallel n$ a přímky p, m jsou různoběžné. Přímky p, q určují jeden nevlastní bod, přímky m, n určují druhý nevlastní bod. Stejným způsobem můžeme těchto bodů vytvořit nekonečně mnoho. Všechny tyto nevlastní body tvoří *nevlastní přímku.* Můžeme si například představit pohled na otevřené moře. Rovnoběžné přímky se na horizontu zdánlivě protínají. Tento průsečík je obraz nevlastního bodu. O horizontu pak říkáme, že je to obraz nevlastní přímky. Obrazům nevlastních bodů říkáme úběžníky, obdobně obrazu nevlastní přímky říkáme úběžnice.



Obrázek 2.7: Nevlastní přímka jako množina nevlastních bodů.

2.4 Nevlastní rovina

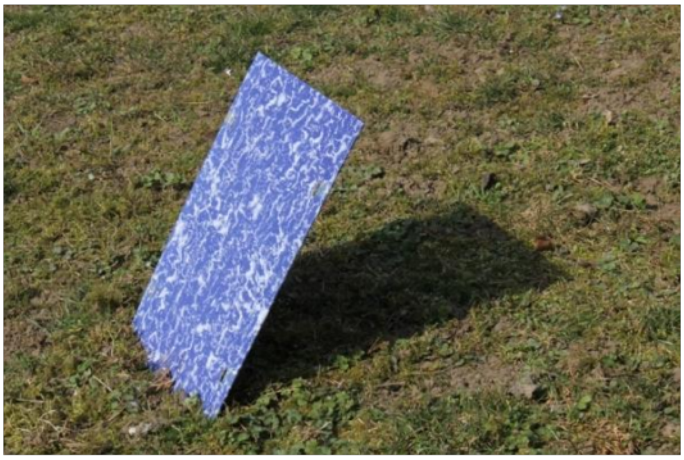
Stejně jako jsme vytvořili nevlastní přímku jako množinu všech nevlastních bodů v rovině můžeme vytvořit nevlastní rovinu jako množinu všech nevlastních přímek a nevlastních bodů v prostoru.

Kapitola 3

Osová afinita

3.1 Vztah mezi dvěma rovinami

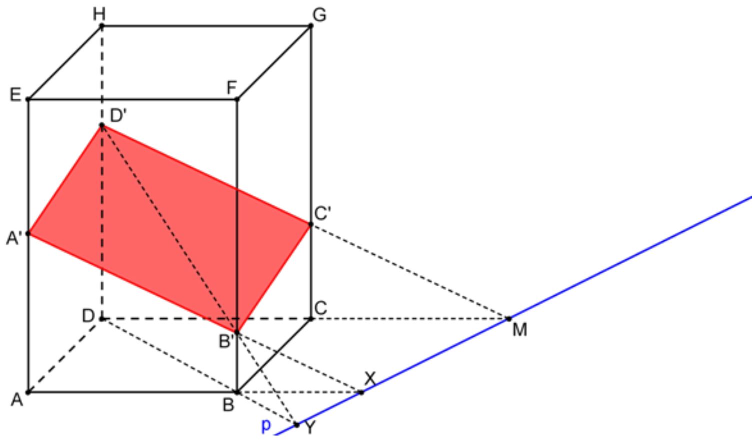
Zkusme si představit tenké desky, které jsou osvětleny sluncem, a jejich stín na podložce. Nemohl by být mezi deskami a jejich stínem nějaký vztah? Uvažujme, že slunce je tak daleko, že jeho paprsky jsou vzájemně rovnoběžné. Potom můžeme vztah mezi deskami a jejich stínem přirovnat ke vztahu osové afinity.



Obrázek 3.1: Slunce osvětlující desky.

Uveďme ještě jiný příklad, se kterým jsme se mohli setkat při hodinách stereometrie:

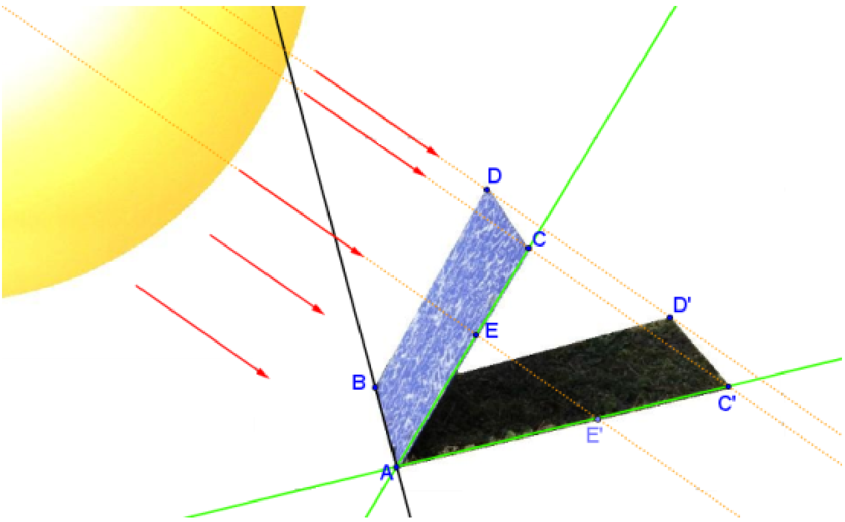
Příklad: Sestrojte řez řez pravidelného čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$ rovinou ϱ, která je určena body A', B', D'; A' je bodem hrany AE, B' je bodem hrany BF, D' je bodem hrany DH.



Obrázek 3.2: *Krokované řešení:* Zadání úlohy.

3.1.1 Definice

Mezi stínem desek, který vrhá slunce na podložku a řezem hranolu rovinou je jistá podoba. V obou případech se setkáváme s osovou afinitou. Představme si hranol a jeho řez tak, že rovina řezu je nyní rovina desek a rovina podstavy je podložka. Desky jsou jednou hranou opřeny o stůl a svítí na ně slunce. Povšimněme si nyní některých vlastností.



Obrázek 3.3: Slunce osvětlující desky.

1. Roh desek a jeho stín leží na přímce, která je rovnoběžná se slunečním paprskem. Můžeme si všimnout, že to platí nejen pro každý roh, ale i pro každý bod hrany (pro celý stín).

2. Hrana desek A, B, která leží na stole je totožná se svým stínem. Tato hrana je průsečnice roviny stolu a roviny, ve které desky leží. Hrana neležící na stole, např. A, C, a její stín se protínají na průsečnici roviny stolu a roviny, ve které desky leží.

3. Pokud bod leží na libovolné hraně desek, pak jeho stín náleží stínu příslušné hrany.

Příklad slunce a desek nám osovou afinitu názorně představil. Pojďme se nyní podívat, jak pozorování zobecnit:

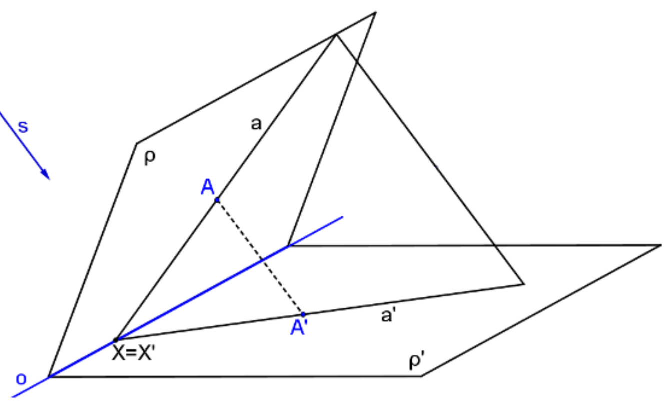
Definice 1 *„Uvažujme dvě různoběžné roviny ϱ, ϱ', jejich průsečnici označme o . Zvolme dále přímku s tak, že s není rovnoběžná s žádnou z rovin. Potom přiřadíme navzájem body a přímky roviny ϱ bodům a přímkám roviny ϱ' tak, že platí:*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů jsou rovnoběžné s přímkou s.*

2. *Průsečíky odpovídajících si přímek leží na přímce o.*

3. *Bod na přímce se zobrazí opět do bodu na přímce.*

Tuto příbuznost nazveme osovou afinitou mezi dvěma různoběžnými rovinami, přímku s směrem afinity, přímku o osou afinity.“ [5]

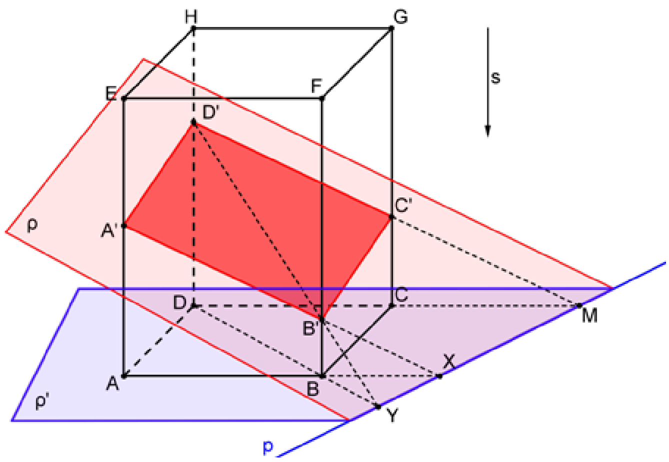


Obrázek 3.4: Osová afinita mezi dvěma rovinami.

Poznámka: Bodům A, A' říkáme odpovídající si body. V některých literaturách můžeme najít označení body afinně sdružené.

Porovnejme vlastnosti osové afinity s příkladem „řez hranolu“. Rovina ϱ odpovídá rovině řezu, rovina ϱ' odpovídá rovině dolní podstavy. Směr afinity

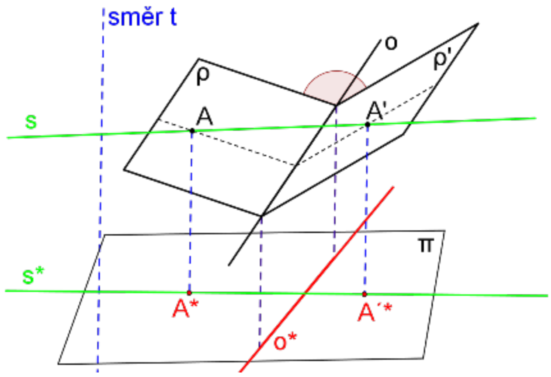
s odpovídá směru hran, například AE. Odpovídající si body jsou například body A, A'. Osa o je průsečnice rovin ϱ, ϱ' a odpovídá průsečnici roviny podstavy a roviny řezu.



Obrázek 3.5: Osová afinita a řez hranolu.

3.2 Osová afinita v rovině

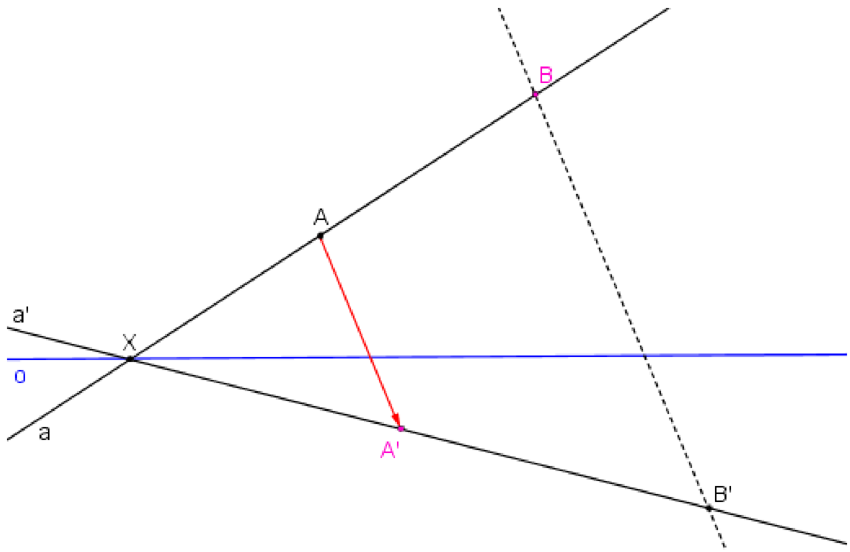
Osovou afinitu jsme definovali jako vztah v prostoru - vztah mezi dvěma rovinami. Častěji se setkáme s osovou afinitou v rovině, protože rýsujeme v rovině sešitu. Jak převedeme prostorový vztah do roviny? Tento problém vyřešíme stejně jako všechny prostorové vztahy. Zvolíme si směr promítání a všechny prvky rovnoběžně promítneme. Volíme rovnoběžné promítání, protože zachovává rovnoběžnost. Směr promítání volíme tak, aby nebyl rovnoběžný se směrem afinity, jinak by body A, A' splynuly. Dále nesmí být směr promítání rovnoběžný s žádnou z rovin ϱ, ϱ'. Zvolíme si rovinu π, do které budeme promítat a směr promítání t. Osu afinity o, odpovídající si body A, A' promítneme pomocí směru t do roviny π. Pro promítnuté body A, A' platí opět vztah osové afinity, kde osa afinity $o*$ je průmětem osy o a přímka $s*$, která určuje směr afinity, je průmětem přímky s, nebo je určen průměty bodů A, A' $(A*, A'*)$.



Obrázek 3.6: Průmět prostorového vztahu osové afinity do roviny.

Podobně jako v osové afinitě mezi dvěma rovinami se i v osové afinitě v rovině značí osa afinity o, směr afinity s. Vzory bodů se značí $A, B, C, ...$, obrazy bodů $A', B', C', ...$. Podobně jako body se označují vzory přímek $a, b, c, ...$ a obrazy přímek $a', b', c'....$

Takto vypadají již promítnuté prvky osové afinity. S růžovými body lze pohybovat.



Obrázek 3.7: Applet z programu Geogebra

Poznámka: V praxi volíme směr t tak, že body A a $A*$ splývají. Zjednodušeně řečeno: Můžeme si představit, že roviny $\varrho \varrho'$ zmizí a zůstanou nám pouze „stopy“ přímek a bodů, na které se díváme tak, jako by ležely v rovině papíru a ne jako na prostorové vztahy.

3.2.1 Vlastnosti osové afinity

Jako u všech zobrazení, která známe, je dobré vědět, jaké vlastnosti osová afinita zachovává. Jinak řečeno, co se při zobrazení nemění.

Dělicí poměr

První důležitou vlastností, kterou můžeme při konstrukcích využít je, že osová afinita zachovává *dělicí poměr*. Pojďme se podívat, co to dělicí poměr je:

Definice 2 *„ABC jsou tři libovolné vlastní body, ležící na jedné přímce, u nichž platí $A \neq B \neq C$. Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B v daném pořadí je reálné číslo λ, jehož absolutní hodnota je rovna podílu velikostí úseček $\frac{|AC|}{|BC|}$.*

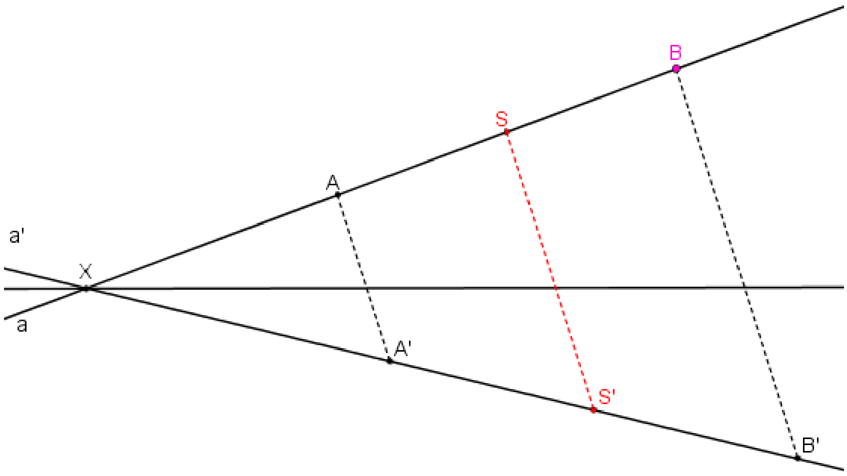
- *Leží-li bod C vně úsečky AB, pak je číslo λ kladné.*
- *Leží-li bod C mezi body A, B, pak je číslo λ záporné.“ [6]*

Dělicí poměr bodů A, B, C značíme $(ABC) = \lambda$. Bod A nazýváme prvním základním bodem, bod B druhým základním bodem. Pořadí bodů A, B není libovolné. Pokud mezi sebou vyměníme body A, B, dostaneme vztah: $(ABC) = \frac{1}{(BAC)}$.

Z definice vyplývá, že $A \neq B$ a $B \neq C$. Může však nastat případ, že $A = C$, potom je λ rovna nule. Známe dělicí poměr pro každý bod přímky až na bod B (druhý základní bod) a nevlastní bod. Dělicí poměr bodu B musíme v definici vynechat. Pokud by platilo $B = C$, dělili bychom nulou. Můžeme však speciálně pro něj doplnit: „Dělicí poměr bodu B vzhledem k bodům A, B je $\lambda = \infty$.“ Toto sdělení můžeme chápat tak, že bod B se nekonečně blíží k bodu C. Velikost úsečky BC je tedy téměř nula a díky tomu hodnota zlomku $\frac{|AC|}{|BC|}$ roste nade všechny meze, tedy do nekonečna. Podobným způsobem zavedeme i dělicí poměr pro nevlastní bod: „Dělicí poměr nevlastního bodu přímky vzhledem k libovolným dvěma základním bodům A, B této přímky je roven 1.“ Představa by byla taková, že bod C je tak daleko, že vzdálenosti $|AC|$ a $|BC|$ jsou stejné. Nyní máme ke každému bodu přímky přiřazen dělicí poměr - právě jedno číslo λ.

Vlastnost osové afinity, zachovávající dělicí poměr, využijeme hlavně v případě, když zobrazujeme střed úsečky. Díky zachovávání dělicího poměru platí, že $(ABS)=(A'B'S')$. Speciálně pro střed úsečky platí: $(ABS)=(A'B'S')=-1$ (Střed úsečky AB se zobrazí na střed úsečky $A'B'$).

V osové afinitě se střed úsečky AB zobrazí na střed úsečky $A'B'$. S růžovým bodem B mohu pohybovat.

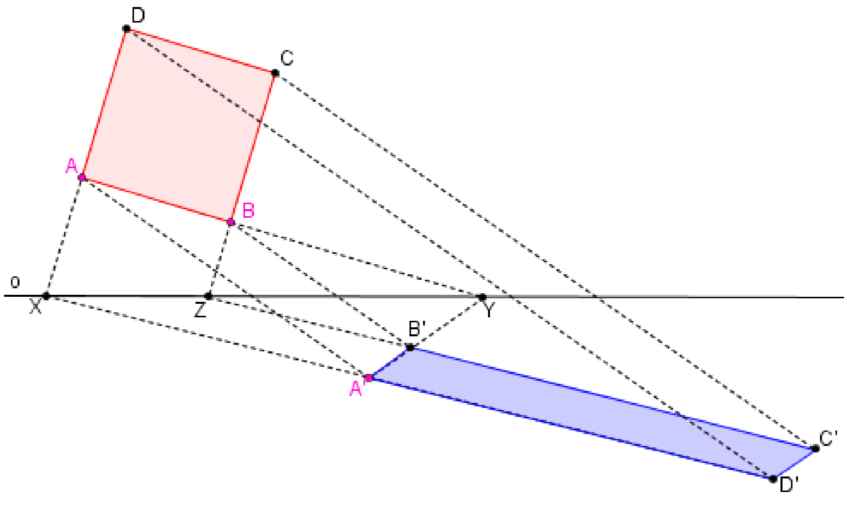


Obrázek 3.8: Applet z programu Geogebra

Rovnoběžnost

Další vlastností, kterou můžeme využít při konstrukci obrazu v osové afinitě je zachování rovnoběžnosti. Pokud jsou přímky p, q rovnoběžné, pak jsou jejich obrazy p', q' také rovnoběžné. Tato vlastnost se využívá, pokud chci najít obraz rovnoběžníku (například čtverce A, B, C, D). Stačí tak najít body A', B', C' a bod D' doplnit na rovnoběžník, protože víme, že strana $A'B' \parallel C'D'$ a $A'C' \parallel B'D'$.

V osové afinitě je obrazem čtverce rovnoběžník, protože rovnoběžné přímky se zobrazí opět na rovnoběžky. S růžovými body mohu pohybovat.



Obrázek 3.9: Applet z programu Geogebra

Incidence

Vlastnost zachovávání incidence mají všechna zobrazení. Platí, že pokud bod Q leží na přímce q, pak obraz bodu Q (Q') leží na obrazu přímky q (q'). Nikdy se nemůže stát, že bod, který leží na přímce, se zobrazí do bodu mimo obraz přímky.

3.2.2 Samodružné prvky

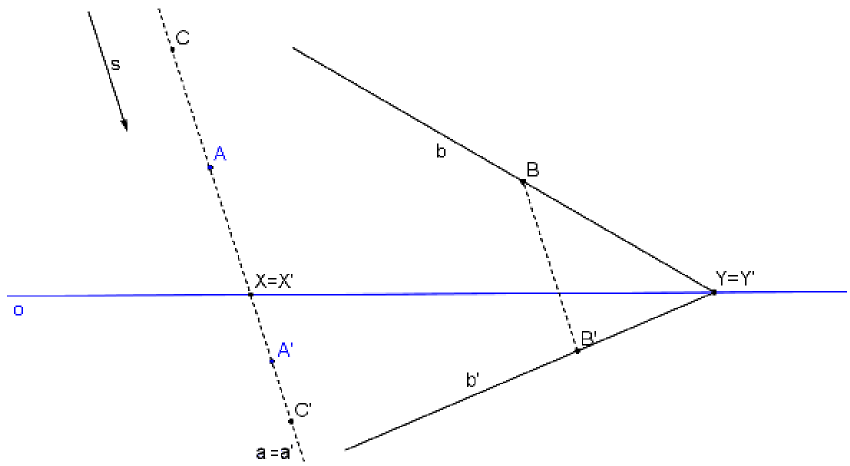
Nejprve si řekněme, co jsou samodružné prvky.

Samodružný bod je bod, který se při zobrazení zobrazí sám na sebe. Platí pro něj, že $X = X'$.

Samodružná přímka je přímka, která se při zobrazení zobrazí sama na sebe. Opět pro ní platí: $y = y'$. Bod Y, který leží na přímce y se ale zobrazí do jiného bodu (Y'), který opět leží na přímce y, $Y \neq Y'$.

Přímka samodružných bodů je přímka, kde každý její bod je samodružný. Pro každý bod na přímce platí $X = X'$.

V osové afinitě nalezneme samodružnou přímku i přímku samodružných bodů. Na ose afinity leží samodružný bod Y, který náleží přímce b i přímce b'. Toto ale platí pro jakýkoliv bod na ose afinity - osa afinity je přímkou samodružných bodů. Jinak řečeno: Všechny body, které leží na ose afinity jsou samodružné. Samodružné přímky jsou přímky rovnoběžné se směrem afinity. Přímka $a \parallel s$ se zobrazí na a' tak, že platí $a = a'$. Pro libovolný bod A, ležící na přímce a (kromě bodu ležího na ose afinity) platí: $A \neq A'$.



Obrázek 3.10: Samodružné prvky osové afinity.

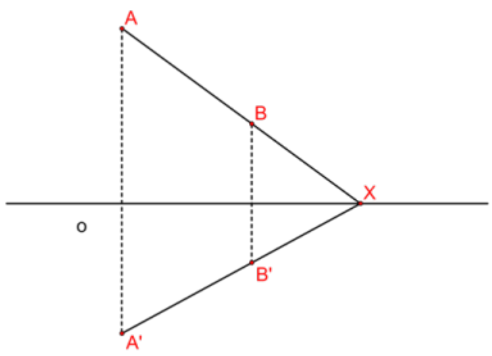
3.3 Typy a charakteristika osové afinity

3.3.1 Typy osové afinity

Rozlišujeme několik typů afinity podle vzájemné polohy osy afinity a směru afinity:

- *Pravoúhlá afinita :* směr afinity s je kolmý k ose afinity o

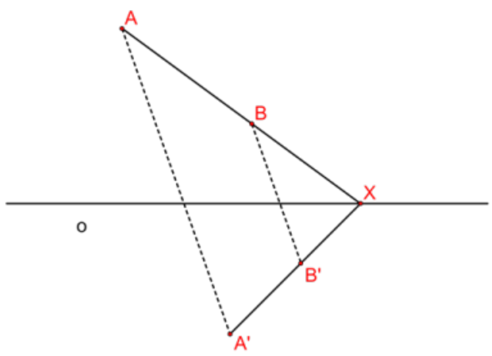
  Pravoúhlá (či kolmá) afinita se využívá při otáčení roviny (6.5, str. 95) do průmětny či řezu kolmého hranolu (6.1, str. 75).



Obrázek 3.11: Pravoúhlá afinita.

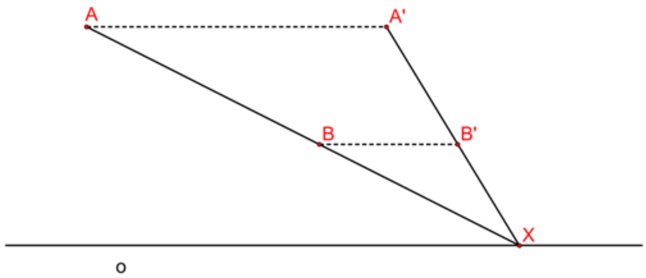
- *Šikmá afinita :* směr afinity s není kolmý k ose afinity o.

  Šikmá afinita se využívá například při řezu koseho hranolu (6.1, str. 75).



Obrázek 3.12: Šikmá afinita.

- *Elace:* Elaci můžeme chápat jako speciální případ šikmé afinity, kdy je směr afinity s rovnoběžný s osou afinity o.



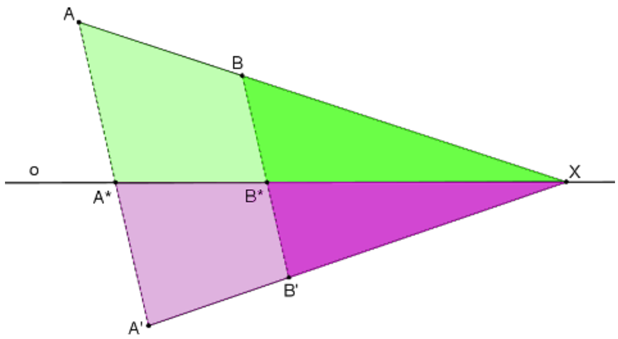
Obrázek 3.13: Elace.

3.3.2 Charakteristika

Věta 1 *Jsou-li $A \neq A'$ odpovídající si body v osové afinitě, která není elací, a $A*$ průsečík přímky AA' s osou afinity, pak dělicí poměr (3.2, str. 18) $(AA'A*)$ je konstantní a nezávisí na volbě odpovídajících si bodů. [10]*

Důkaz:

V dané afinitě je dán pár odpovídajích si bodů A, A'. Podle pravidel osové afinity doplníme odpovídající si body B, B'. Bod $A*$ je průsečíkem přímky AA' s osou afinity, bod $B*$ průsečíkem přímky BB' s osou afinity. Bod X je samodružným bodem přímky AB. Trojúhelníky $AA*X, BB*X$ a $A'A*X, B'B*X$ jsou podobné. Z podobnosti trojúhelníků vyplývají poměry: $\frac{|AA^*|}{|A^*X|} = \frac{|BB^*|}{|B^*X|}, \frac{|A'A^*|}{|A^*X|} = \frac{|B'B^*|}{|B^*X|}$. Dosazením do $\frac{|AA^*|}{|A'A^*|}$ dostáváme: $\frac{|AA^*|}{|A'A^*|} = \frac{|BB^*|}{|B'B^*|}$. Obdobně platí vztah pro libovolnou dvojici odpovídajících si bodů C, C'. Charakteristika osové afinity je tedy konstantní.

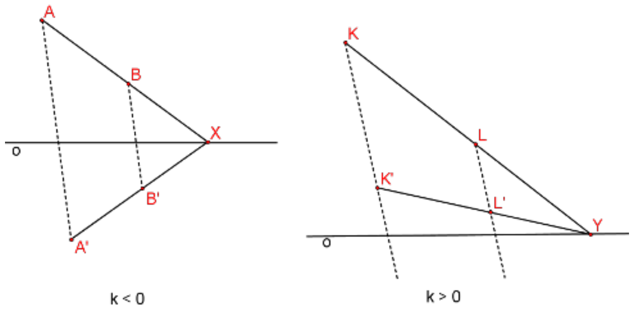


Obrázek 3.14: Důkaz, že charakteristika je konstantní.

Dělicí poměr $(AA'A*)$ se nazývá *charakteristika* a značí se k, $k = (AA'A^*) = \frac{|AA^*|}{|A'A^*|}$.

Charakteristika se nerovná nule, protože by platilo: $A = A*$. Potom by muselo platit i $A' = A*$. Zobrazovali by se tak pouze body ležící na ose afinity na sebe. Dále také vyloučíme případ, kdy se $k = 1$. Tímto dostáváme identitu a to není zajímavý případ.

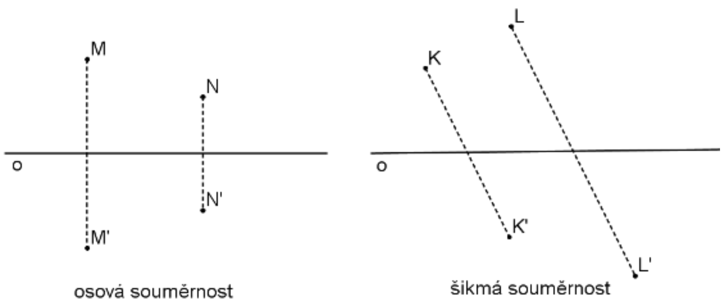
Pokud je charakteristika *kladná* ($k > 0$), pak vzory i obrazy přímek leží ve stejné polorovině od osy o. Pokud je charakteristika *záporná* ($k < 0$), pak vzory a obrazy přímek leží v různých polorovinách od osy o.



Obrázek 3.15: Kdy je charakteristika kladná a kdy záporná.

Speciální typ osové afinity známe již ze základní školy. Pokud se jedná o pravoúhlou afinitu s charakteristikou $k = -1$, pak mluvíme o *osové souměrnosti*.

Pokud osová afinita není pravoúhlá, ale šikmá s charakteristikou $k = -1$, pak se můžeme setkat s označením *šikmá souměrnost*.



Obrázek 3.16: Osová a šikmá souměrnost.

3.4 Určenost osové afinity

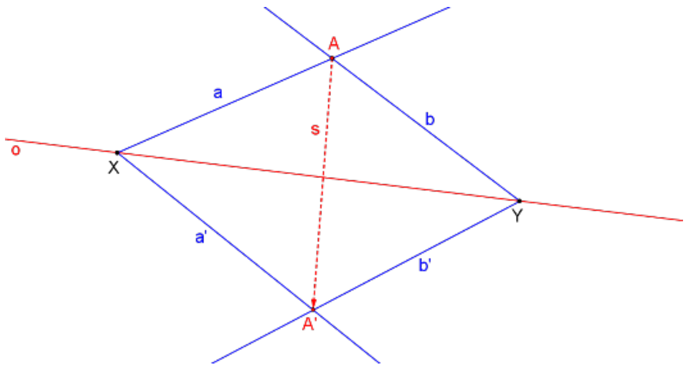
Osová afinita je určena osou afinity o a párem odpovídajících si bodů A, A'. Není třeba znát směr afinity, protože je určen body A, A'. Pokud je OA zadána takto, můžeme hned konstruovat obrazy prvků. Pokud je zadaná jinak, musíme nejprve určit o, A, A'. Osovou afinitu lze určit například těmito způsoby:

- Dvě různoběžné přímky a jejich obrazy
- Tři páry odpovídajících si bodů
- Přímka a bod ležící mimo ni a jejich obrazy
- Dvě rovnoběžné přímky a jejich obrazy a směr afinity
- Osa afinity, směr afinity a charakteristika
- Charakteristika a dva páry odpovídajících si bodů

Následují příklady o tom, jak může být osová afinita zadána a řešení, jak najít osu afinity a pár odpovídajích si bodů.

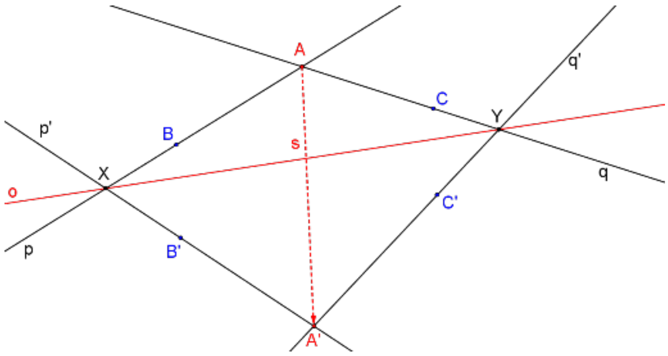
Úlohu si nejprve zkuste vyřešit sami: Zadání (viz příloha 1), Řešení (viz příloha 1). V obrázcích jsou použity jednotné barvy. Zadané prvky modrou barvou, výsledek (osa a pár odpovídajících si bodů) červenou barvou.

Dvě různoběžné přímky a jejich obrazy (a, a', b, b')



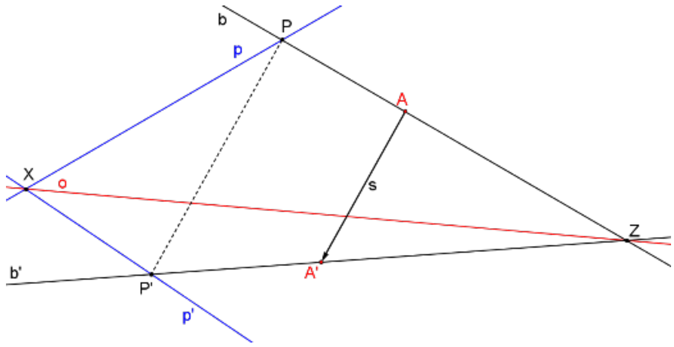
Obrázek 3.17: *Krokované řešení:* Jsou dány různoběžné přímky a, b a jejich obrazy a', b'.

Tři páry odpovídajících si bodů $(A, A'; B, B'; C, C')$



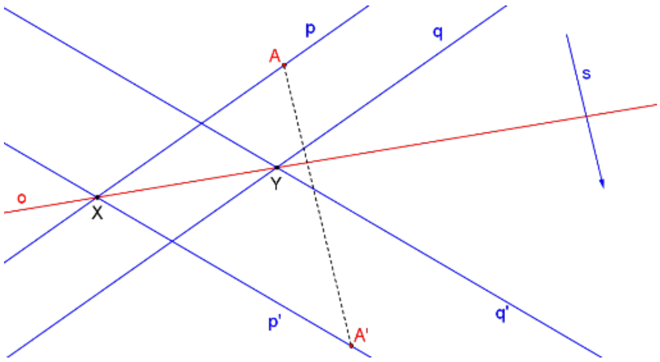
Obrázek 3.18: *Krokované řešení:* Jsou dány tři páry odpovídajících si bodů $A, A'; B, B'; C, C'$. Aby body $A, A'; B, B'; C, C'$ byly afinně sdružené, musí být přímky AA', BB', CC' rovnoběžné.

Přímka a bod ležící mimo přímku a jejich obrazy $(A, A'; p, p')$



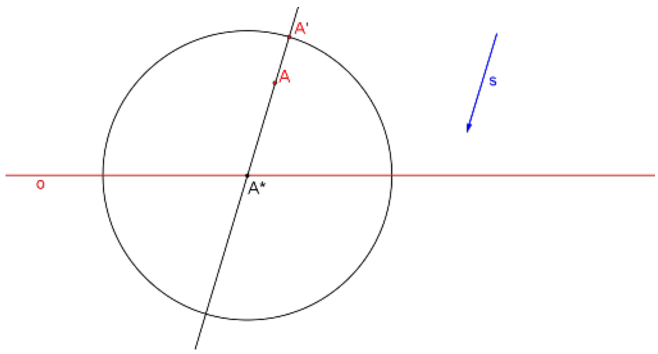
Obrázek 3.19: *Krokované řešení:* Je dána přímka p (p') a bod A (A'), který na přímce p (p') neleží.

Dvě rovnoběžné přímky a jejich obrazy $(p, p'; q, q')$ a směr afinity s



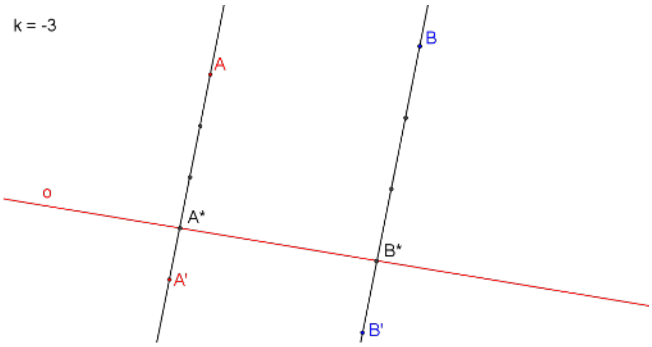
Obrázek 3.20: *Krokované řešení:* Jsou dány přímky p, q a jejich obrazy p', q' a směr afinity s, který je s přímkami p, q různoběžný.

Osa afinity o, směr afinity s a charakteristika $k = \frac{2}{3}$



Obrázek 3.21: *Krokované řešení:* Je dána osa afinity o, směr afinity s a charakteristika k.

Charakteristika afinity $k = -3$ a dva páry odpovídajících si bodů $A, A'; B, B'$



Obrázek 3.22: *Krokované řešení:* Jsou dány body $A, A'; B, B'$ a charakteristika $k = -3$

3.5 Obraz kružnice v osové afinitě

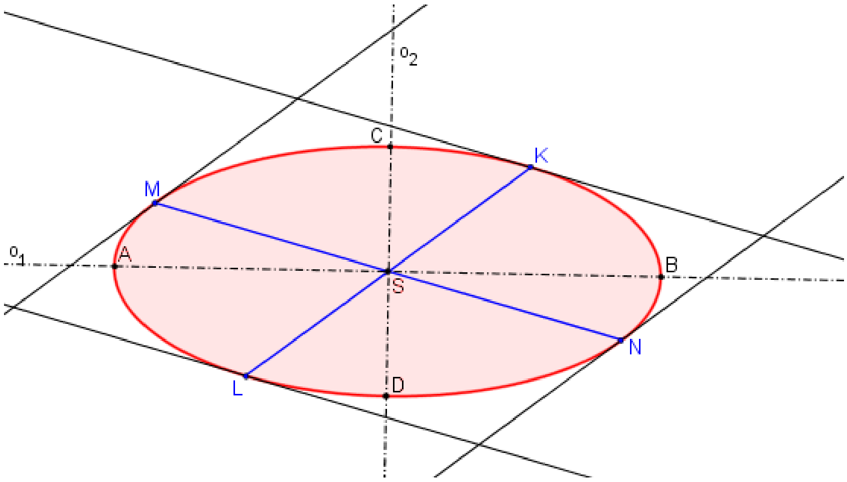
Osová afinita je dána osou o a párem odpovídajících si bodů S, S'. Úkolem je najít obraz kružnice se středem v bodě S a poloměrem r. Pomocí metod analytické geometrie lze snadno dokázat, že obrazem kružnice v osové afinitě je regulární kuželosečka. Regulární kuželosečky můžeme klasifikovat podle počtu nevlastních bodů. Elipsa má všechny body vlastní. Parabola má jeden nevlastní bod (má jednu větev). Hyperbola má dva nevlastní body (dvě větve), které leží ve směru asymptot. V osové afinitě se všechny vlastní body zobrazí opět na vlastní. Kružnice je tvořena pouze vlastními body a protože se žádný bod nezobrazí do nevlastního, obrazem kružnice je pouze elipsa. Existují dva způsoby jak tuto elipsu najít.

3.5.1 Sdružené průměry elipsy

Než se pustíme do obrazu kružnice, připomeňme si pojem *sdružené průměry elipsy:*

- Dva průměry elipsy se nazývají sdružené, jsou-li tečny v krajních bodech jednoho průměru rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

V kružnici bychom sdružené průměry mohli hledat stejně. Pro kružnici však můžeme jednodušeji říci, že sdružené průměry jsou takové průměry, které jsou vzájemně kolmé.



Obrázek 3.23: Sdružené průměry elipsy

3.5.2 Přímá konstrukce hlavní a vedlejší poloosy

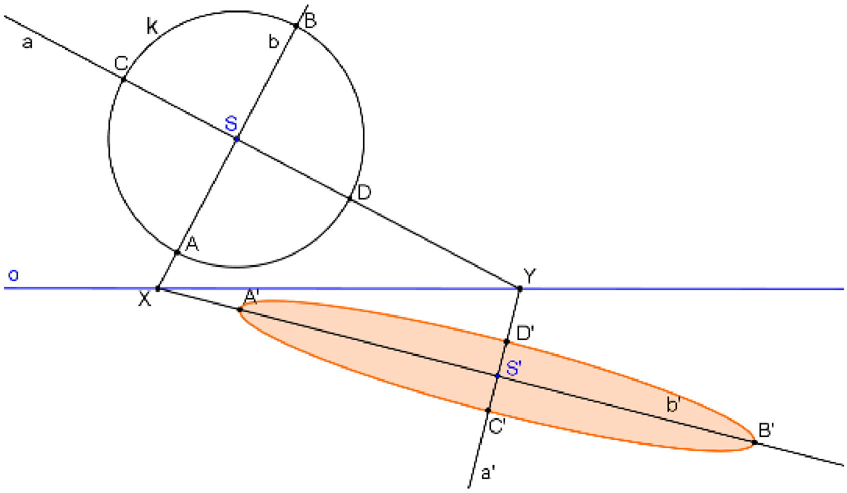
V osové afinitě mezi dvěma rovinami, která není osovou souměrností, existují právě dva vzájemně kolmé směry, jejichž obrazy jsou v osové afinitě opět vzájemně kolmé směry. Tyto směry určíme takto:

- *Je-li osová afinita pravoúhlá, je jeden z nich směr afinity a druhý je určen osou afinity.*
- *Je-li osová afinita šikmá, zvolíme její libovolnou dvojici odpovídajících si bodů A, A', sestrojíme kružnici τ procházející body A, A' a mající střed na ose afinity o a určíme její průsečíky X, Y s touto osou. Hledané směry jsou určeny přímkami AX, AY [4]*

Pro elipsu platí, že jediné dva sdružené průměry, které jsou na sebe kolmé jsou hlavní a vedlejší osy. Hledáme proto takové kolmé průměry kružnice, které se zobrazí opět na kolmé. Díky předchozí větě je nalezneme jednoduše.

Je dána šikmá OA (o, SS'). Dále je v osové afinitě dána kružnice k se středem v bodě S. Hledáme obraz této kružnice v zadané OA. Kružnice τ prochází body S, S'. Proto leží střed kružnice τ (bod T) na ose úsečky SS'. T leží zároveň na ose afinity o (dle předchozí věty). Průsečíky kružnice $\tau(T, |TS|)$ s osou o jsou body X, Y. Přímky XS, YS jsou na sebe kolmé. Také jejich obrazy (přímky XS', YS') jsou na sebe kolmé. Velikost hlavní a vedlejší poloosy určíme jednoduše. Průsečíky přímek SX, SY s kružnicí k, označme

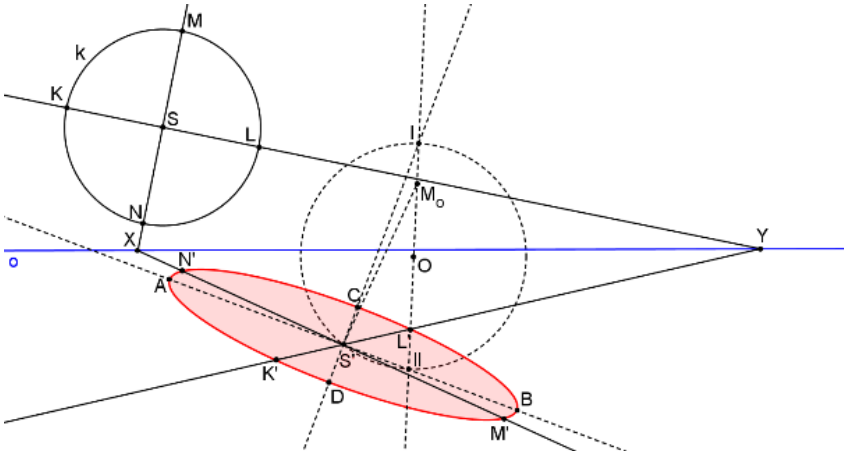
A, B, C, D. Na přímkách $S'X, S'Y$ leží body A', B', C', D'. Tyto body tvoří vrcholy elipsy.



Obrázek 3.24: *Krokované řešení:* OA je dána o, S, S'. Najděte obraz kružnice k.

3.5.3 Nepřímo pomocí Rytzovy konstrukce

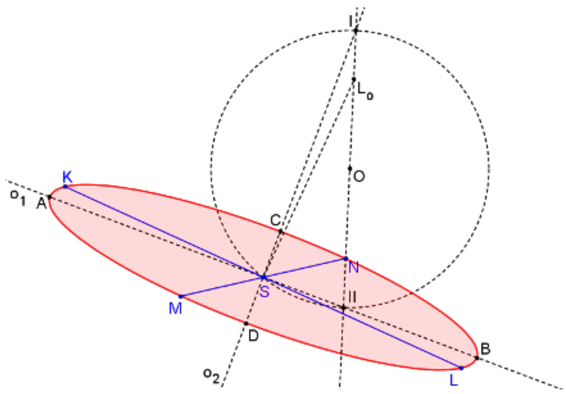
V kružnici zvolíme dva libovolné na sebe kolmé průměry (KL),(MN) a najdeme jejich obrazy $(K'L', M'N')$. Osová afinita nezachovává úhly, takže tímto postupem nejsou určeny hlavní a vedlejší osy. Zachovává se ale rovnoběžnost a dělicí poměr. Proto tvoří úsečky K'L' a M'N' sdružené průměry elipsy. Známe-li dva sdružené průměry elipsy, využijeme k nalezení hlavní a vedlejší osy Rytzovu konstukci.



Obrázek 3.25: *Krokované řešení:* Osová afinita je dána osou o a párem odpovídajících si bodů S, S'. Najděte obraz kružnice k.

Rytzova konstrukce

Rytzovou konstrukcí lze dohledat hlavní a vedlejší osy elipsy, pokud známe dvojici sdružených průměrů elipsy. Nechť jsou dány sdružené průměry KL, MN. Jejich průsečík S je středem hledané elipsy, protože střed se zobrazí opět na střed (viz vlastnosti osové afinity (3.2, str. 18)). Zvolíme jeden z koncových bodů jednoho průměru, např. bod L. Bod L otočíme o 90° kolem středu S do bodu L_o. Bodem L_o a koncovým bodem druhého průměru, např. N, je určena přímka p. Střed úsečky L_oN označme O. Kružnice k má střed v bodě O a poloměr $|OS|$. Kružnice k protíná přímku p ve dvou bodech, I a II. Osy elipsy o_1, resp. o_2 jsou určeny body S, II, resp. S, I. Hlavní osa elipsy o_1 leží vždy v ostrém úhlu sdružených průměrů. Pro velikosti hlavní a vedlejší poloosy platí: $|L_oI|$=b, $|L_oII|$=a. Hlavní vrcholy elipsy (A, B) leží na ose o_1 ve vzdálenosti a od středu S. Vedlejší vrcholy elipsy (C, D) leží na ose o_2 ve vzdálenosti b od středu S.



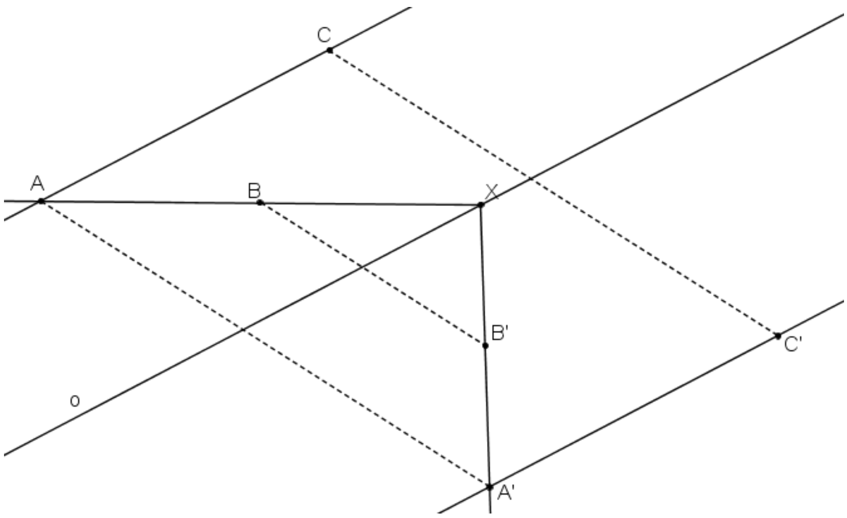
Obrázek 3.26: *Krokované řešení:* Jsou dány sdružené průměry elipsy KL, MN.

Příklady na využití osové afinity při konstrukcích elipsy či řešení poloh přímky s elipsou nalezete v kapitole Konstrukce elipsy (6.3, str. 82) nebo Přímka a elipsa (6.4, str. 91)

3.6 Dourčování prvků

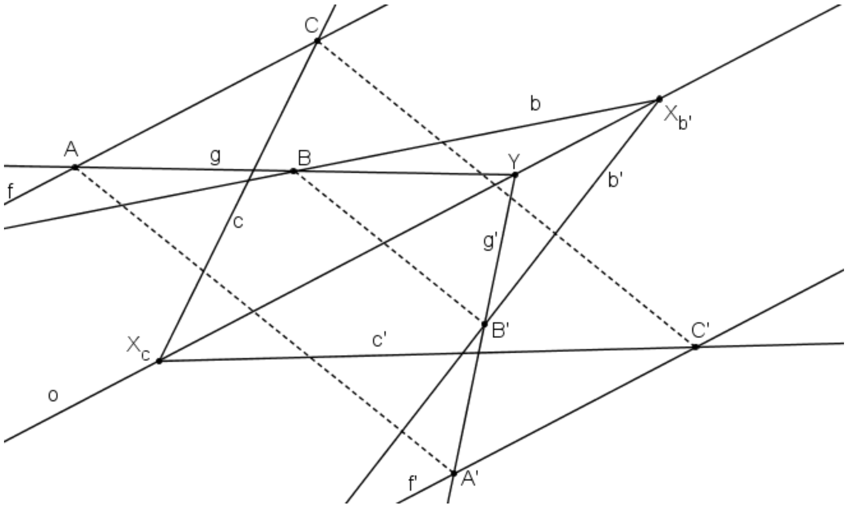
Sadu úloh na procvičení najdete zde: Zadání (viz příloha 2), Řešení (viz příloha 2).

Příklad: V OA (o, AA') určete obrazy bodů (B', C).



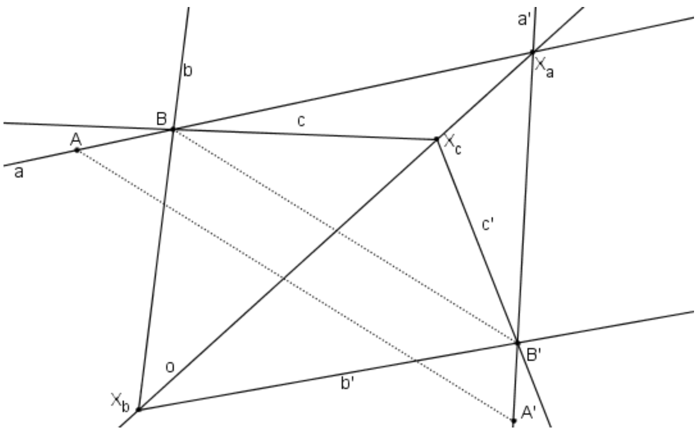
Obrázek 3.27: Obrazy bodů B, C.

Příklad: V OA (o, AA') určete obrazy přímek b, c'.



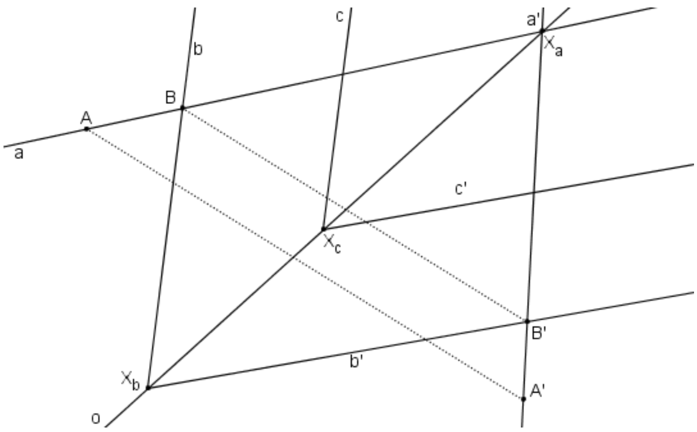
Obrázek 3.28: Řešení: OA je dána (o, AA'). Určete obrazy přímek b, c'.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz různoběžných přímek b, c.



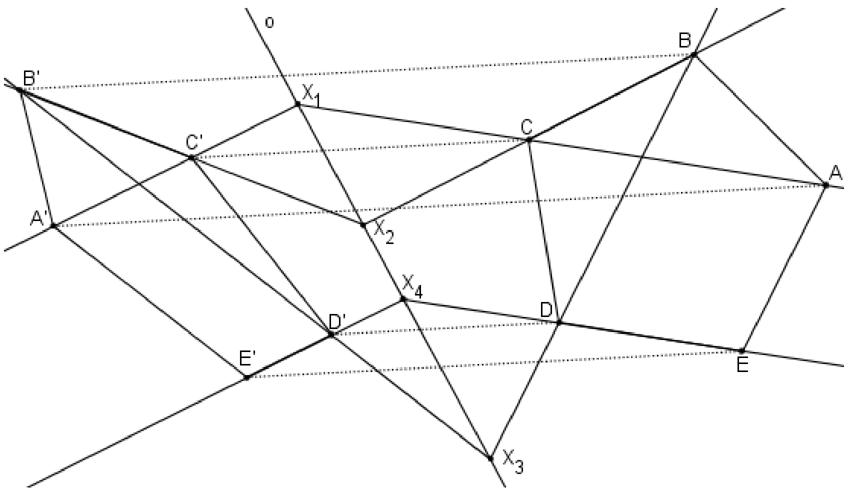
Obrázek 3.29: Obrazy různoběžných přímek b, c.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz rovnoběžných přímek b, c.



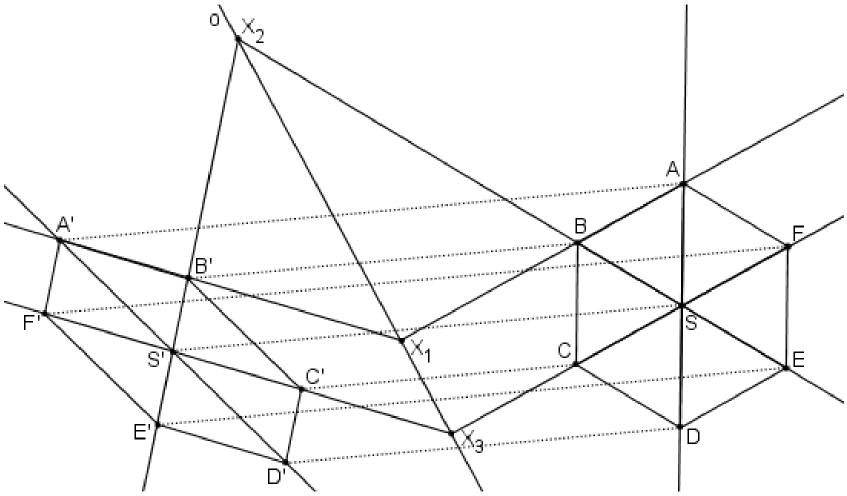
Obrázek 3.30: Obrazy rovnoběžných přímek b, c.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$.



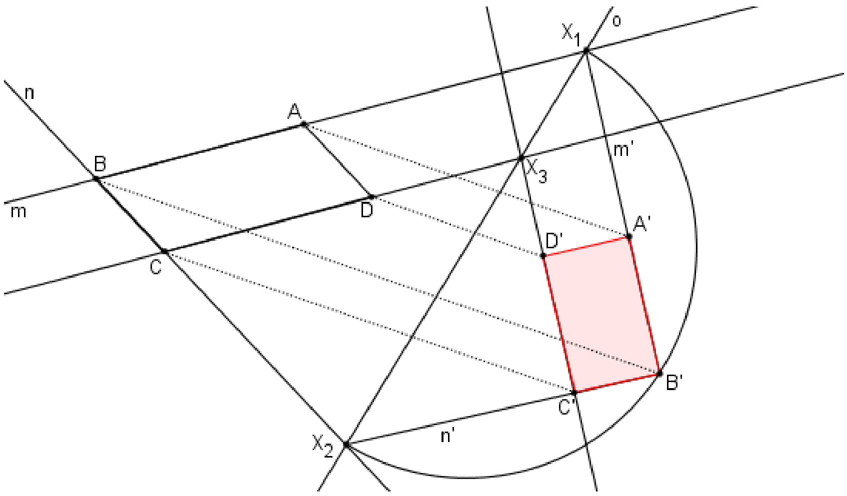
Obrázek 3.31: Obraz pětiúhelníka.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$.



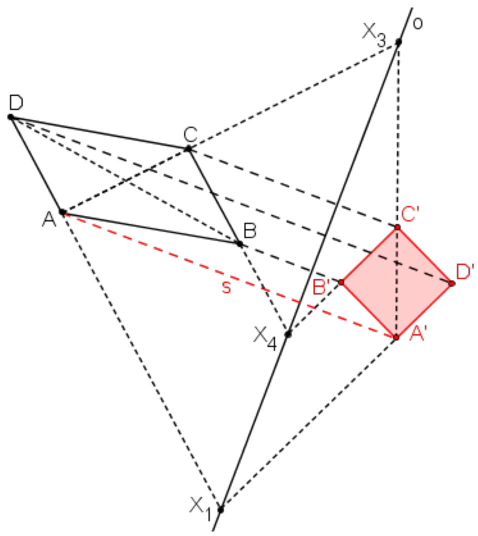
Obrázek 3.32: Obraz šestiúhelníka.

Příklad: Je dán rovnoběžník $ABCD$ a osa afinity o. Dourčete osovou afinitu (body AA') tak, aby byl obrazem rovnoběžníku obdélník $A'B'C'D'$.



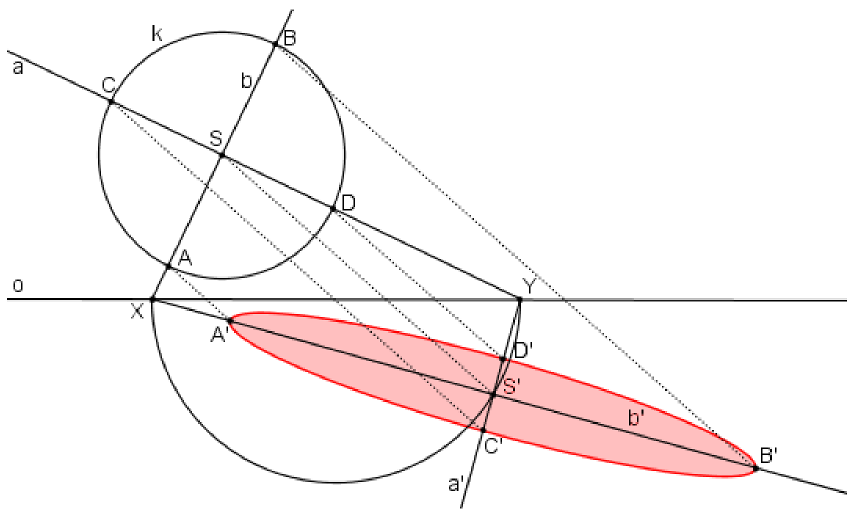
Obrázek 3.33: *Řešení:* Je dán rovnoběžník $ABCD$ a osa afinity o.

Příklad: Je dán rovnoběžník $ABCD$ a osa afinity o. Dourčete osovou afinitu (body AA') tak, aby byl obrazem rovnoběžníku čtverec $A'B'C'D'$.



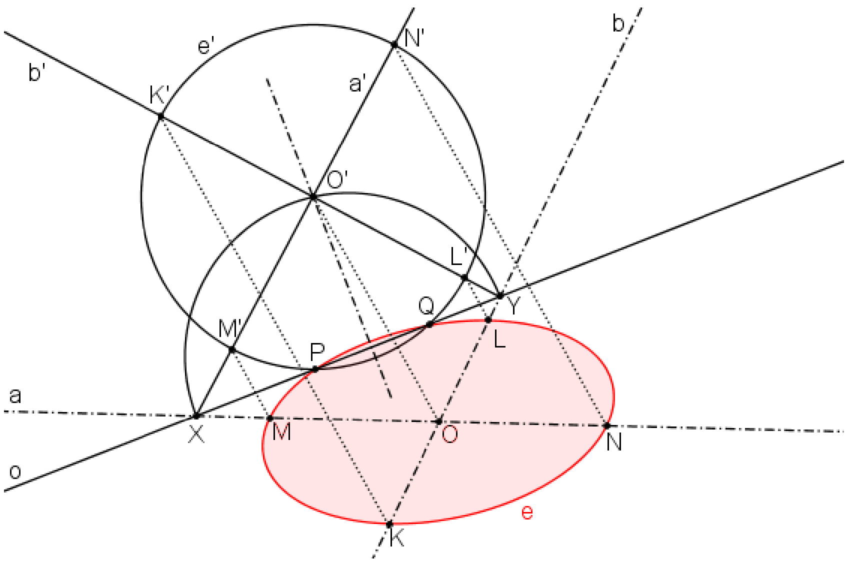
Obrázek 3.34: *Řešení:* Je dán rovnoběžník $ABCD$ a osa afinity o.

Příklad: V OA (o, SS') určete obraz kružnice k.



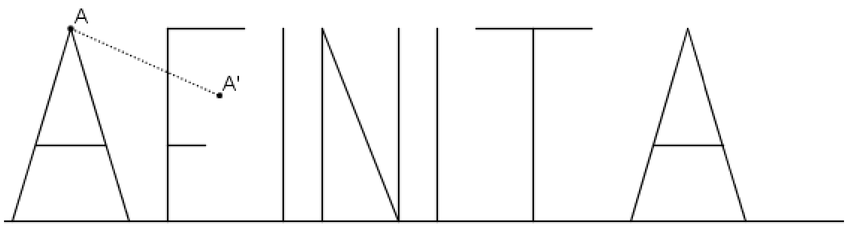
Obrázek 3.35: Obraz kružnice.

Příklad: Jsou dány neomezené sdružené průměry elipsy a, b a dva body na elipse P, Q. Sestrojte elipsu.



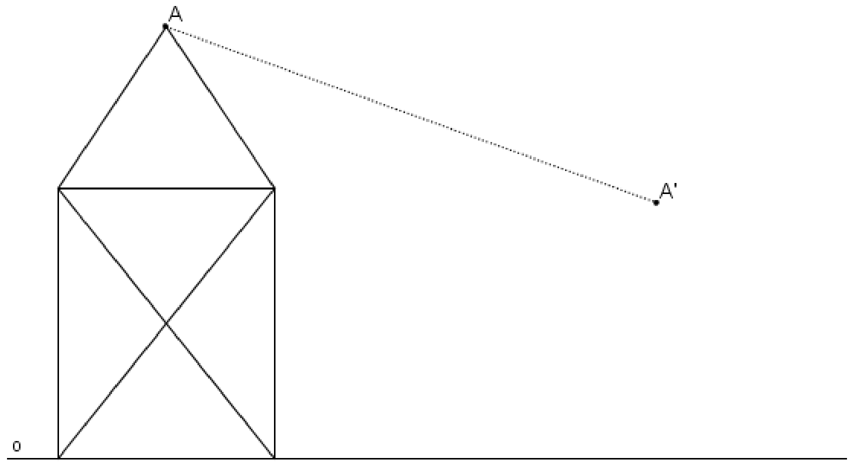
Obrázek 3.36: *Řešení:* Jsou dány neomezené sdružené průměry elipsy a, b a dva body na elipse P, Q. Sestrojte elipsu.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz nápisu AFINITA.



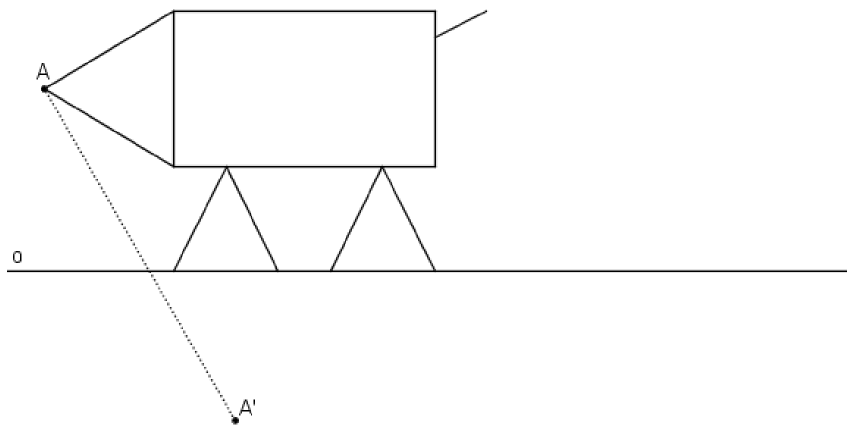
Obrázek 3.37: Zadání úlohy - nápis AFINITA.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz domečku.



Obrázek 3.38: Zadání úlohy - domeček.

Příklad: V OA (o, AA') určete obraz prasátka.



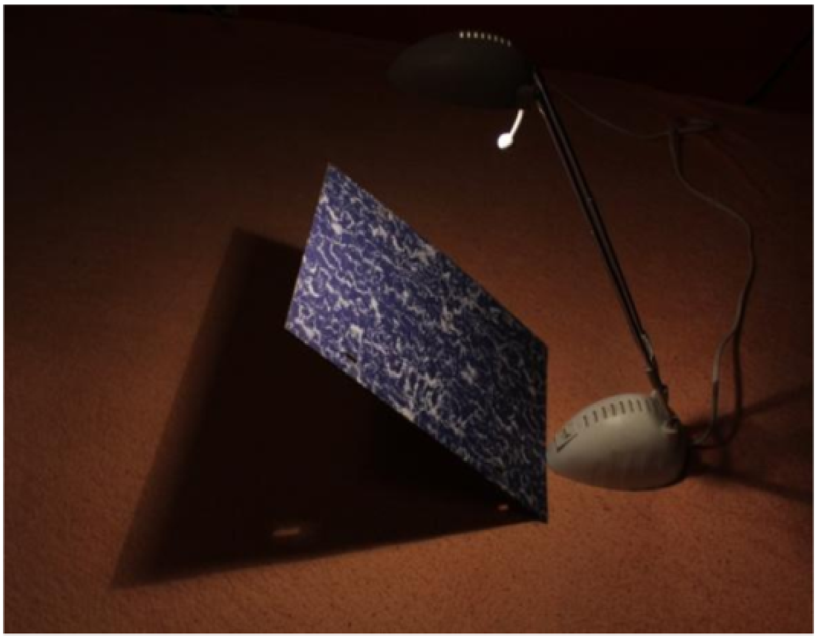
Obrázek 3.39: Zadání úlohy - prasátko.

Kapitola 4

Středová kolineace

4.1 Vztah mezi dvěma rovinami

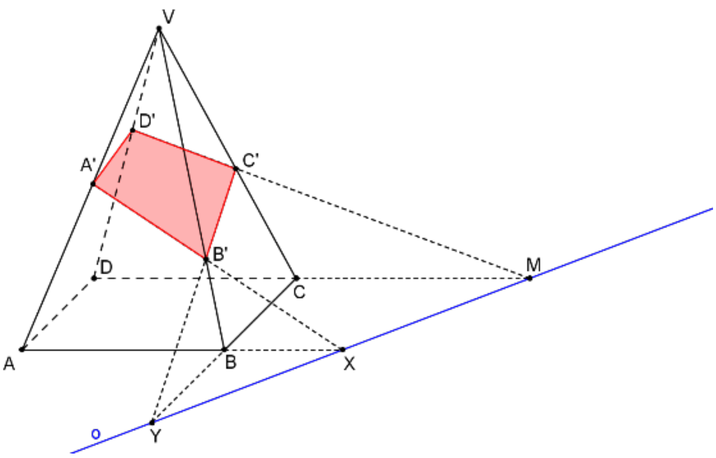
Co si máme pod pojmem středová kolineace představit? Zkusme jednoduchý pokus, který si můžete doma provést. Postavme si na stůl rozsvícenou lampičku a vezměme si tenké desky. Pozorujme stín, který desky vrhají na rovinu stolu. Mezi deskami a jejich stínem je vzájemně jednoznačný vztah, který nazýváme středovou kolineací mezi dvěma rovinami. Podobný vztah můžeme pozorovat také např. večer v ulici osvetlené lampami mezi libovolným plochým předmětem a jeho stínem na chodniku. Vztah mezi člověkem a jeho stínem není přesně vztah středové kolineace, protože lidské tělo neleží v rovině, ale můžeme si ho tak představit.



Obrázek 4.1: Stín, který vrhá kniha osvětlena žárovkou.

Ve středové kolineaci platí určité vztahy mezi body a přímkami. Tyto vztahy si přiblížíme na řezu jehlanu rovinou, která neprochází vrcholem V. Rovinné řezy se probírají ve stereometrii na střední škole.

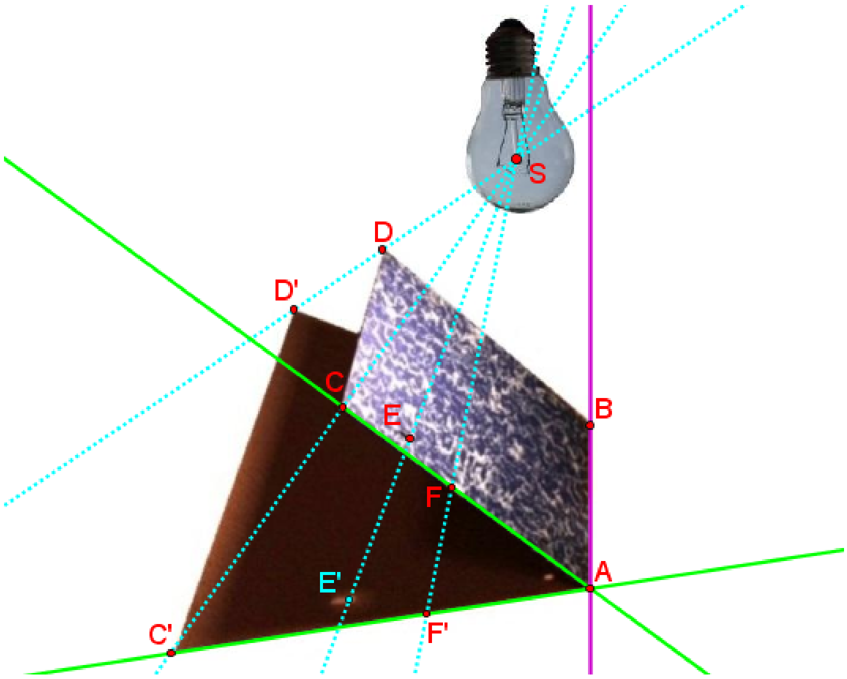
Příklad: Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou ϱ, která je určena body A', B', C'; A' je bodem hrany AV, B' je bodem hrany BV, C' je bodem hrany CV.



Obrázek 4.2: *Krokované řešení:* Zadání úlohy

4.1.1 Definice

Porovnejme si ukázku s lampičkou a deskami s úlohou „řez jehlanu". Do vrcholu umístíme lampičku a do roviny řezu umístíme desky tak, aby byly jednou hranou opřeny o stůl. V rovině stolu leží jejich stín. Všimněme si nyní některých vlastností.



Obrázek 4.3: Stín, který vrhá kniha osvětlena žárovkou.

1. Roh desek, jeho stín a žárovka leží na jedné přímce. Můžeme si všimnout, že to platí nejen pro každý roh, ale i pro každý bod hrany (pro celý stín). Každá spojnice bodu a jeho stínu prochází zdrojem světla.

2. Hrana desek A, B, která leží na stole je totožná se svým stínem. Tato hrana je průsečnice roviny stolu a roviny, ve které desky leží. Hrana neležící na stole, např. A, C, a její stín se protínají na průsečnici roviny stolu a roviny, ve které desky leží.

3. Pokud bod leží na libovolné hraně desek, pak jeho stín náleží stínu příslušné hrany.

Příklad lampičky s deskami nám již vlastně celou středovou kolineaci názorně představil. Pojďme se nyní podívat, jak pozorování zobecnit:

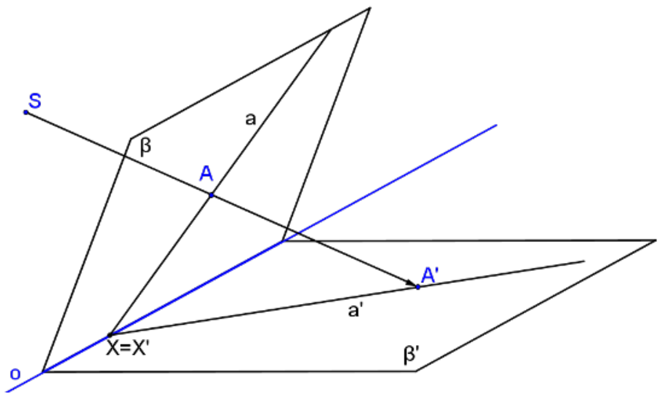
Definice 3 *„Uvažujme dvě různoběžné roviny β, β' s průsečnicí o a zvolme bod S tak, že neleží v žádné z rovin. Potom přiřadíme navzájem body a přímky roviny β bodům a přímkám roviny β' tak, že platí:*

1. *Spojnice odpovídajících si bodů procházejí bodem S.*

2. *Průsečíky odpovídajících si přímek leží na přímce o.*

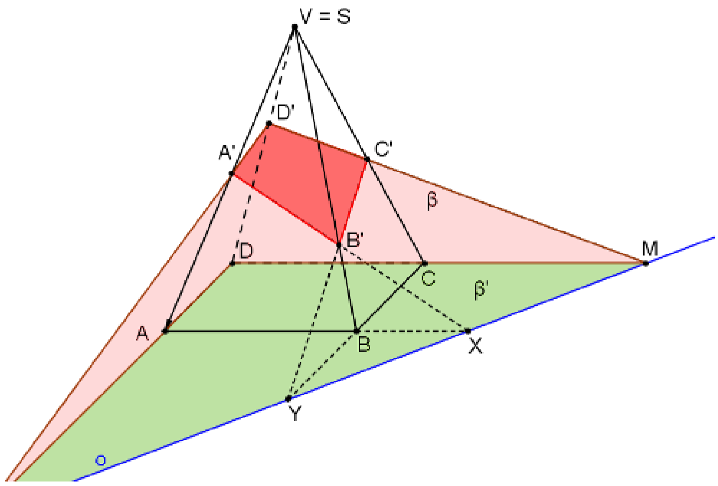
3. *Bod na přímce se zobrazí opět do bodu na přímce.*

Tuto příbuznost nazveme středovou kolineací mezi dvěma různoběžnými rovinami, bod S středem kolineace a přímku o osou kolineace.“ [5]



Obrázek 4.4: Středová kolineace mezi dvěma rovinami.

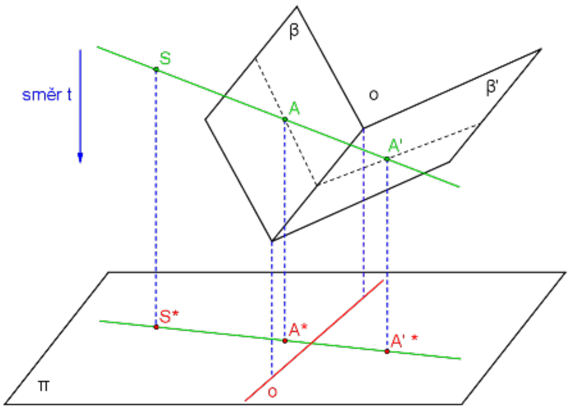
Porovnejme vlastnosti příkladu řez „jehlanu“ se středovou kolineací. Rovina β odpovídá rovině řezu, rovina β' odpovídá rovině stolu. Střed kolineace S odpovídá vrcholu jehlanu V. Odpovídající si body jsou například body A, A'. Osa o, průsečnice rovin β, β', je průsečnice roviny podstavy jehlanu a roviny řezu.



Obrázek 4.5: Porovnání řezu jehlanu se středovou kolineací.

4.2 Středová kolineace v rovině

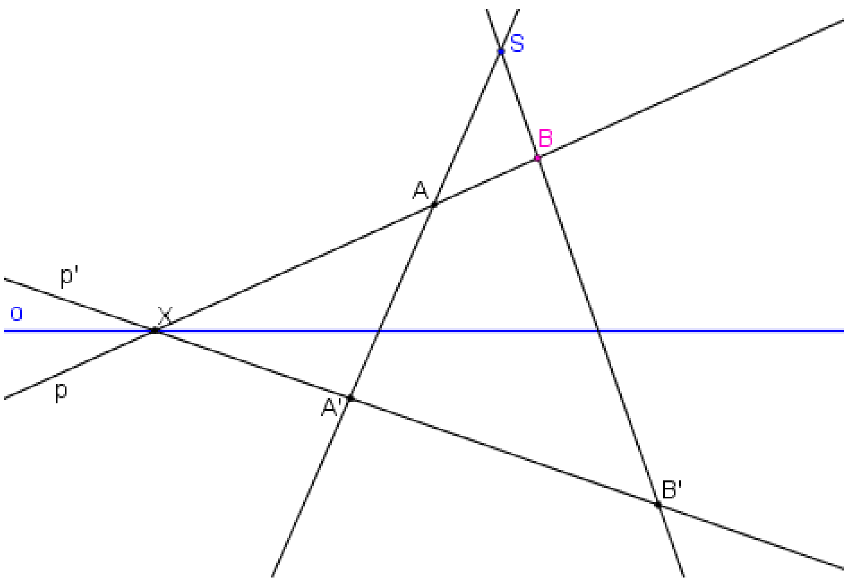
Středovou kolineaci jsme definovali jako vztah v prostoru - mezi dvěma rovinami. Pro řešení úloh je třeba převést vztah z prostoru do roviny. Jak převedeme prostorový vztah do roviny? Tento problém vyřešíme stejně jako všechny prostorové vztahy. Zvolíme si směr promítání a všechny prvky rovnoběžně promítneme. Volíme rovnoběžné promítání, protože zachovává rovnoběžnost. Směr promítání volíme tak, aby nebyl rovnoběžný s žádnou z rovin β, β' Zvolíme si rovinu π, do které budeme promítat a směr promítání t. Osu kolineace o, střed kolineace S a odpovídající si body A, A' promítneme pomocí směru t do roviny π. Pro průměty bodů A, A' platí opět vztah středové kolineace, kde osa kolineace $o*$ je průmětem osy o, střed kolineace $S*$ je průmětem středu S, pár odpovídajících si bodů $A*, A'*$ jsou průměty bodů A, A'.



Obrázek 4.6: P: Průmět prostorového vztahu středové kolineace do roviny.

Podobně jako ve středové kolineaci mezi dvěma rovinami se i ve středové kolineaci v rovině značí osa kolineace o, střed kolineace S. Vzory bodů se značí $A, B, C, \ldots$, obrazy bodů $A', B', C', \ldots$. Podobně jako body se označují vzory přímek $a, b, c, \ldots$ a obrazy přímek $a', b', c' \ldots$.

Takto vypadají již promítnuté prvky středové kolineace. S růžovými body lze pohybovat.



Obrázek 4.7: Applet z programu Geogebra

4.2.1 Vlastnosti středové kolineace

Dvojpoměr

K zavedení dvojpoměru je potřeba dělicí poměr (3.2, str. 18). Dvojpoměr se jako jedna z mála vlastností zachovává ve všech zobrazeních. V zobrazeních, která známe ze střední školy (posunutí, souměrnosti, otáčení) či v osové afinitě platí jiné, jednodušší vlastnosti a proto se v nich s dvojpoměr neuvádí. Na rozdíl od těchto zobrazení, ve středové kolineaci je to jediná vlastnost, která se zachovává.

Definice 4 *Body A, B, C, D leží na jedné přímce, a platí pro ně $A \neq B \neq C \neq A$. Dvojpoměr bodů A, B, C, D je právě jedno číslo μ, pro které platí:*

- *Je-li $D \neq A$ a zároveň $D \neq B$, pak $\mu = \frac{(ABC)}{(ABD)}$*
- *Je-li $D = B$, pak $\mu = 0$.*
- *Je-li $D = A$, pak $\mu = \infty$. [2]*

Dvojpoměr se značí $\mu = (ABCD)$. Může nabývat všech hodnot. Mezi speciální případy patří 0 a ∞, které jsou zahrnuty v definici. Z definice dvojpoměru vidíme, že pokud se $C = D$, pak je dvojpoměr $\mu = 1$. K tomu, aby byl dvojpoměr záporný musí být jeden z dělicích poměrů (ABC), (ABD) kladný a druhý záporný. Jeden z bodů C, D tedy musí ležet uvnitř úsečky AB a druhý vně.

Stejně jako u dělicího poměru, také u dvojpoměru záleží na pořadí bodů. Například pro záměnu bodů C, D platí vztah $(ABCD) = \frac{1}{(ABDC)}$. Tento vztah plyne z definice a platí stejně pro záměnu bodů A, B.

Zde jsou základní převody. Je-li $(ABCD) = \mu$, pak

1. $(ABDC) = \frac{1}{\mu}$
2. $(ACBD) = 1 - \mu$
3. $(ADBC) = 1 - \frac{1}{\mu}$
4. $(ACDB) = \frac{1}{1-\mu}$
5. $(ADCB) = \frac{\mu}{1-\mu}$

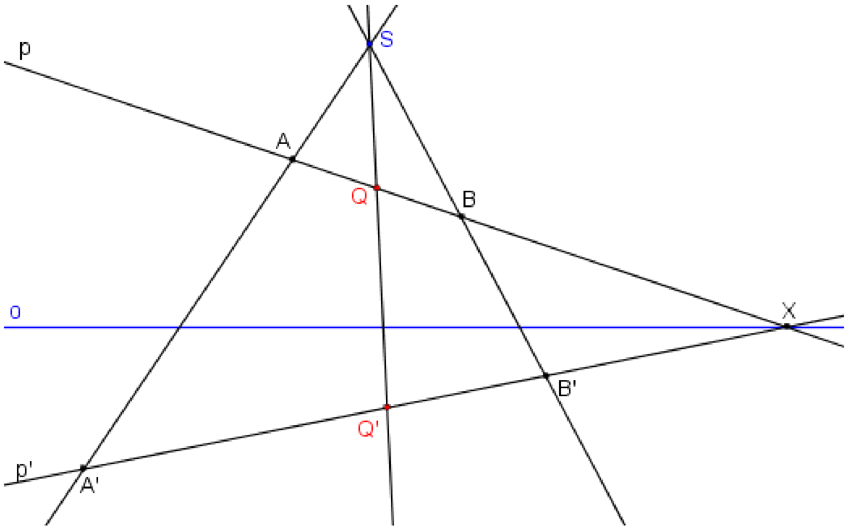
Těchto pět možností zahrnuje všechny možné případy záměn, protože platí vztah $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \mu$. Slovy vyjádřeno, hodnota dvojpoměru se nezmění, jestliže se mezi sebou zamění poslední dva body a zároveň dva první body. Dvojpoměr se dále nezmění, zamění-li se první dva body s dvěma posledními body.

V případě, že $(ABCD) = -1$, říkáme, že body A, B, C, D tvoří *harmonickou čtveřici* bodů. Body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici, jestliže dělicí poměry (ABC), (ABD) jsou až na znaménko stejně velké. V literatuře se setkáváme i s jiným označením harmonické čtveřice. Můžeme říkat, že body C, D jsou harmonicky sdruženy vzhledem k bodům A, B. Body C, D oddělují harmonicky body A, B. Bod D je harmonicky sdružen s bodem C vzhledem k bodům A, B, atd.

Rovnoběžnost a dělicí poměr

V osové afinitě je důležitou vlastností zachovávání dělicího poměru. Ve středové kolineaci se dělicí poměr ani rovnoběžnost *nezachovává*.

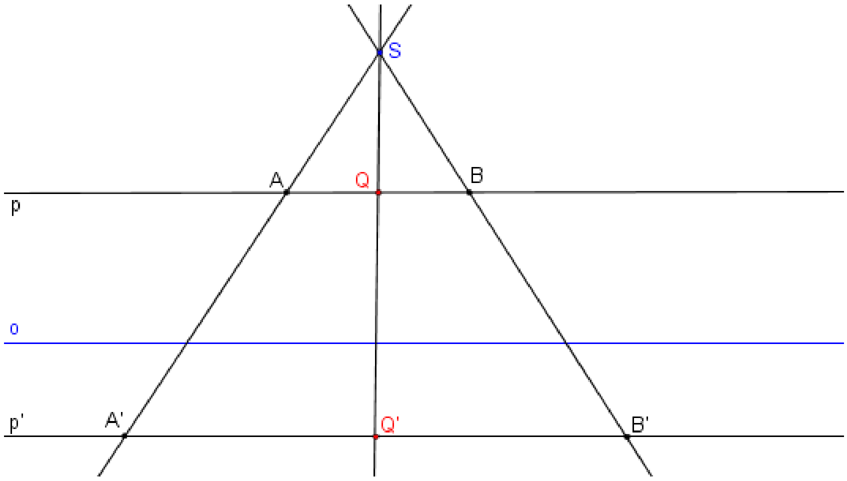
Přímka p je určena body A, B. Bod Q je střed úsečky AB. Bod Q' se nezobrazí jako střed úsečky $A'B'$. S růžovým bodem B lze pohybovat.



Obrázek 4.8: Applet z programu Geogebra

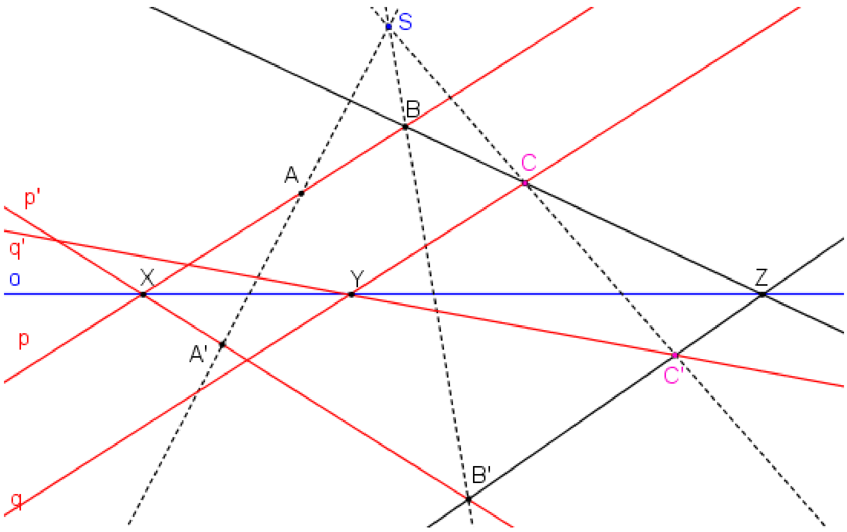
Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Bod Q' se zobrazí jako střed úsečky $A'B'$ pouze v případě, že přímka AB (resp. $A'B'$) je rovnoběžná s osou kolineace o.



Obrázek 4.9: Dělící poměr se zachovává pouze u přímek rovnoběžných s osou o.

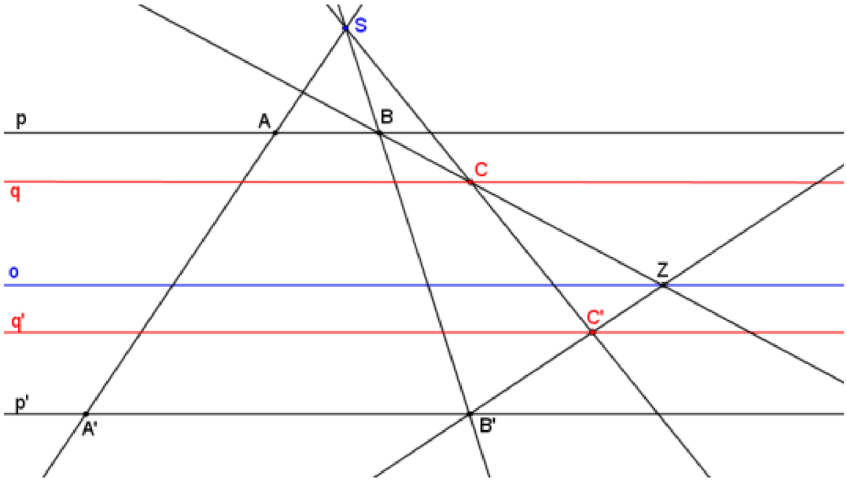
Přímka p je určena body A, B. Přímka q je rovnoběžná s přímkou p a prochází bodem C. Přímky q', p' se nezobrazí jako rovnoběžky. S růžovým bodem lze pohybovat.



Obrázek 4.10: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Přímky q', p' se zobrazí jako rovnoběžky pouze v případě, že přímky p, q jsou rovnoběžné s osou kolineace o.



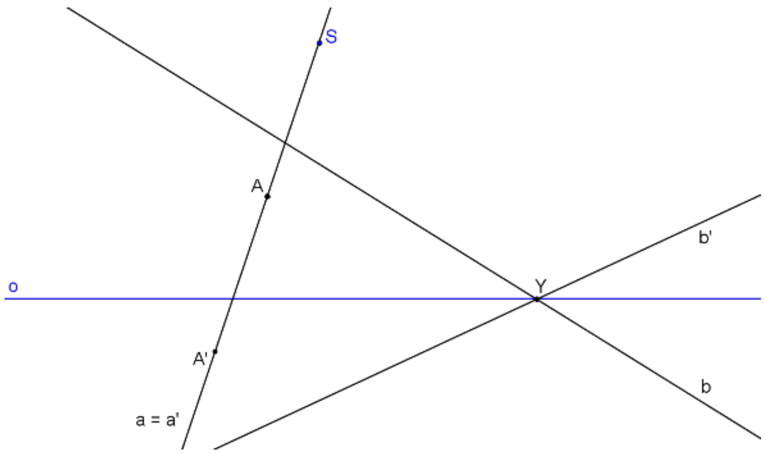
Obrázek 4.11: Rovnoběžnost se zachovává pouze u přímek rovnoběžných s osou.

Incidence

Všechna zobrazení zachovávají incidenci. Platí, že pokud bod Q leží na přímce q, pak obraz Q' bodu Q leží na obrazu q' přímky q. Nikdy se nemůže stát, že bod, který leží na přímce, se zobrazí do bodu mimo obraz přímky.

4.2.2 Samodružné prvky

Ve středové kolineaci nalezneme samodružnou přímku (3.2, str. 18), přímku samodružných bodů (3.2, str. 18) i samodružný bod (3.2, str. 18). Samodružným bodem ve středové kolineaci je střed kolineace S. Na ose kolineace leží samodružný bod Y, který náleží přímce b i přímce b'. Toto platí pro libovolný bod na ose afinity - osa afinity je přímkou samodružných bodů. Jinak řečeno: Všechny body, které leží na ose afinity jsou samodružné. Samodružné přímky jsou přímky procházející středem kolineace S. Přímka a procházející bodem S se zobrazí na a' procházející bodem S tak, že platí $a = a'$. Pro libovolný bod A, ležící na přímce a (kromě samodružného bodu) platí: $A \neq A'$.



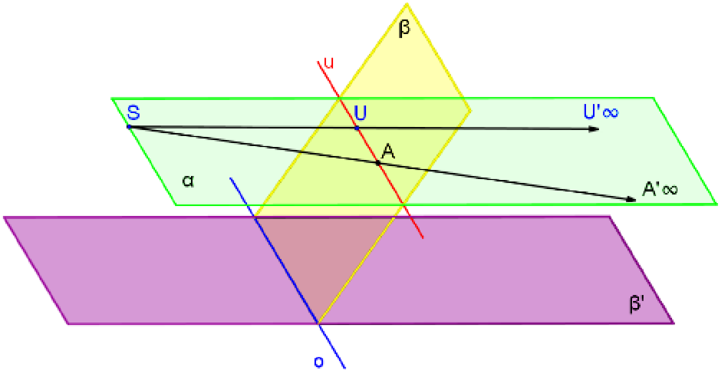
Obrázek 4.12: Samodružné prvky středové kolineace.

4.3 Úběžníky a úběžnice

Ve středové kolineaci je ještě jedna námi zatím neprobádaná oblast, na kterou se společně podíváme právě v této kapitole.

Vrat'me se ke středové kolineaci jako ke vztahu mezi dvěma rovinami. Možná vás napadlo se zeptat, co se stane, když bude bod A v takové poloze, že přímka SA neprotne rovinu β'. Kde je potom obraz bodu A'? Průsečík přímky SA a roviny β' je nevlastní bod (2.2, str. 9) $A'\infty$. Vlastní bod, který se zobrazí na nevlastní bod je tzv. *úběžník*, obvykle jej značíme U.

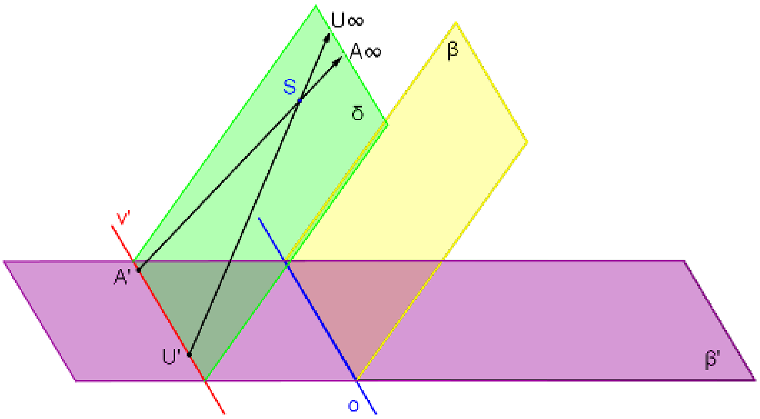
Pojd'me si představu o úběžníku rozšířit. Bodem S můžeme vést nekonečně mnoho přímek rovnoběžných s rovinou β'. Tyto přímky vyplní celou rovinu α rovnoběžnou s rovinou β'. Jak již víme, průsečnice rovnoběžných rovin je tzv. nevlastní přímka (2.4, str. 14). Přímka, která se zobrazí na nevlastní přímku je tzv. *úběžnice*, obvykle ji značíme u. Úběžnicí je průsečnice roviny β s rovinou α.



Obrázek 4.13: *Krokované řešení:* Bod U leží v takové poloze, že přímka SU je s rovinou β' rovnoběžná. Bod $U'\infty$ je nevlastní bod přímky SU. Vlastní bod U, který se zobrazí na nevlastní bod $U'\infty$ - úběžník.

Na problém se můžeme dívat i obráceně. Bod A' leží v rovině β' tak, že přímka SA' neprotne rovinu β. Průsečík přímky SA' a roviny β je nevlastní bod $A\infty$. Nevlastní bod, který se zobrazí na vlastní je tzv. *protiúběžník*, obvykle jej značíme V'.

Úvahu můžeme opět rozšířit tak, že bodem S proložíme rovinu δ, rovnoběžnou s rovinou β. Nevlastní přímka, která se zobrazí na vlastní přímku je tzv. *protiúběžnice*, obvykle ji značíme v'. Protiúběžnice je průsečnice rovnoběžných rovin δ a β'. (Pozn: V některých literaturách je protiúběžnice označena jako úběžnice a protiúběžník pouze jako úběžník.)

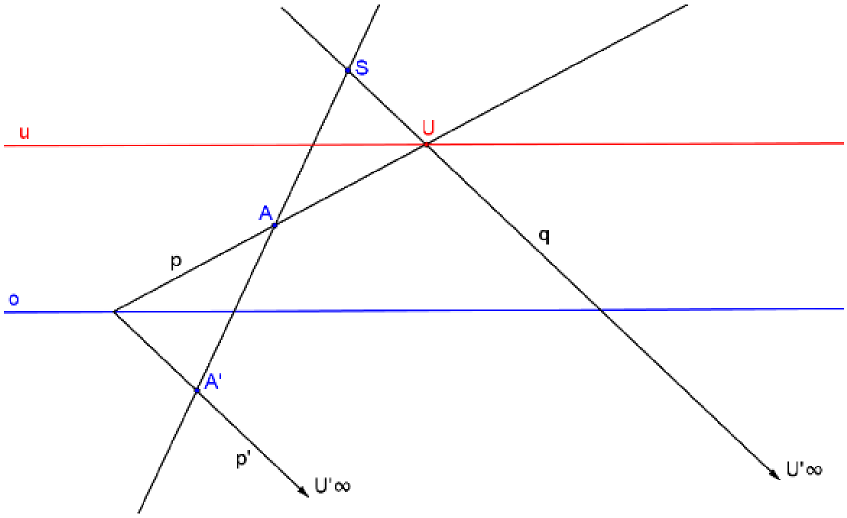


Obrázek 4.14: *Krokované řešení:* Bod U' leží v takové poloze, že přímka SU' je s rovinou β rovnoběžná. Bod $U\infty$ je nevlastní bod přímky SU'. Nevlastní bod $U\infty$ se zobrazí na vlastní bod U' - protiúběžník.

Středovou kolineaci používáme častěji jako vztah v rovině. Stejně jako jsme převedli vztah středové kolineace mezi dvěma rovinami do roviny, najdeme i průměty úběžnice. Prvky převedeme do roviny π pomocí rovnoběžného promítání. V prostoru jsou úběžnice (protiúběžnice) s osou kolineace rovnoběžné. Protože rovnoběžné promítání zachovává rovnoběžnost tak i průmět úběžnice (protiúběžnice) je s průmětem osy kolineace rovnoběžný. Stačí proto najít jeden úběžník U (protiúběžník V'). Úběžnice u (v') prochází bodem U (V') a je rovnoběžná s osou kolineace o.

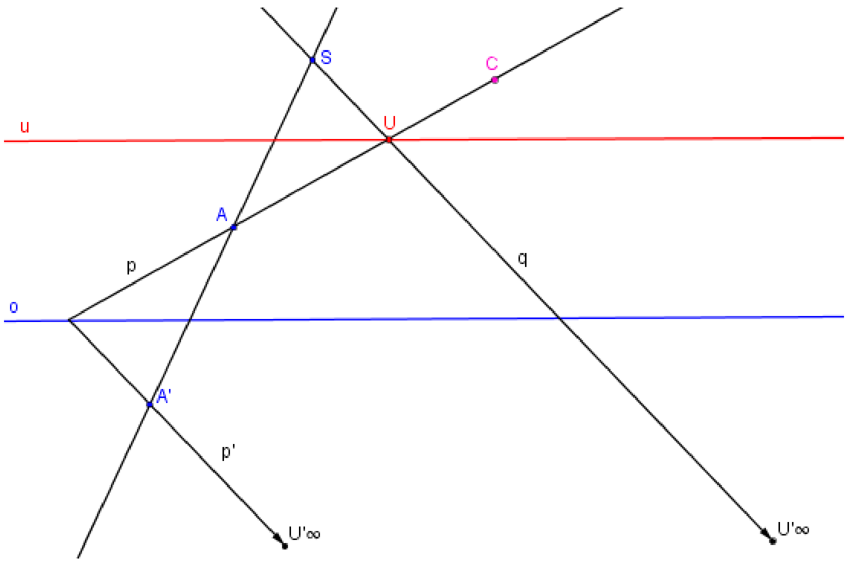
4.3.1 Nalezení úběžnice

Středová kolineace v rovině je dána středem kolineace S, osou kolineace o a párem odpovídajících si bodů A, A'. Jak najdeme úběžnici? Zvolíme si libovolnou přímku p procházející bodem A, která neprochází středem S a není rovnoběžná s osou o, a najdeme její obraz p'. Hledáme bod U přímky p, který se zobrazí na nevlastní bod $U'\infty$. $U'\infty$ je určen směrem přímky p'. Pro body $UU'\infty$ (stejně jako pro libovolné dvojice odpovídajících si bodů) platí, že leží na přímce procházející středem kolineace S. Přímka q, na které leží body $UU'\infty$, proto prochází středem kolineace S. Bod $U'\infty$ leží ve směru přímky p', proto je přímka q rovnoběžná s přímkou p'. Bod U leží na spojnici $SU'\infty$ (přímce q) a zároveň na přímce $p.U = p \cap q$. Nyní známe jeden úběžník U. Z předchozího odstavce víme, že úběžnice a osa kolineace jsou vzájemně rovnoběžné. Úběžnice u je proto rovnoběžná s osou kolineace o a prochází úběžníkem U.



Obrázek 4.15: *Krokované řešení:* SK je dána S, o, A, A'.

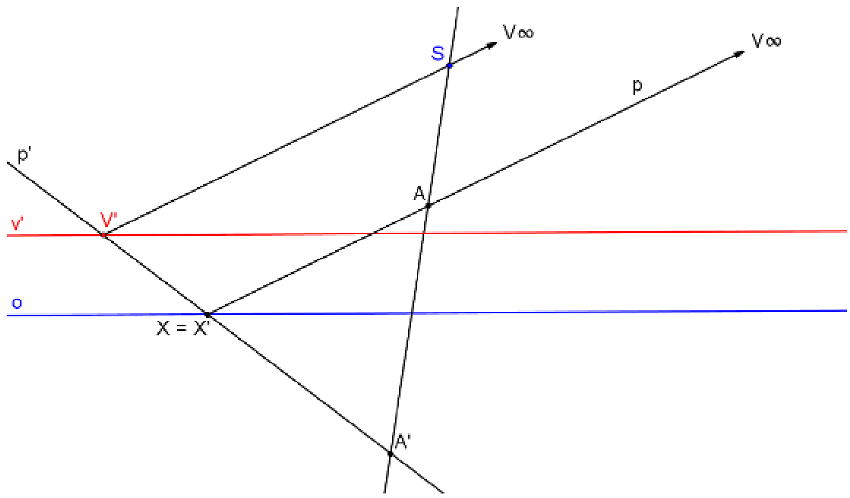
Můžete se přesvědčit, že postup nezávisí na volbě přímky p. S růžovým bodem C lze pohybovat.



Obrázek 4.16: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Obdobně nalezneme protiúběžnici. Zvolíme si libovolnou přímku p procházející bodem A, která neprochází středem S a není rovnoběžná s osou o, a najdeme její obraz p'. Hledáme bod V' přímky p', který se zobrazí na nevlastní bod $V\infty$. $V\infty$ je určen směrem přímky p. Body V, V', S leží na jedné přímce, označme ji q. Bod $V\infty$ leží ve směru přímky p. Přímka q proto rovnoběžná s přímkou p a zároveň prochází středem kolineace S. Bod V' leží na spojnici $SV\infty$ (přímce q) a zároveň na přímce $p'.V' = p' \cap q$. Nyní známe jeden protiúběžník V'. Protiúběžnice v' je rovnoběžná s osou kolineace o a prochází protiúběžníkem V'.



Obrázek 4.17: Jak se hledá protiúběžnice.

4.4 Určenost středové kolineace

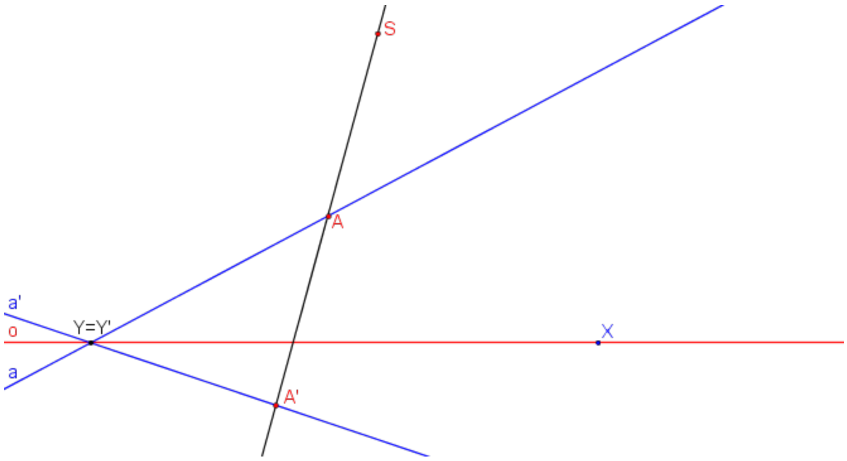
Středová kolineace určena středem S osou o a párem odpovídajících si bodů A, A'. Pokud je SK zadána takto, můžeme hned konstruovat obrazy prvků. Ne vždy je středová kolineace určena právě takto a proto musíme S, o, A, A' nejprve určit. Následují příklady o tom, jak může být středová kolineace zadána a řešení, jak najít střed kolineace osu kolineace a pár odpovídajících si bodů.

- Střed kolinace, samodružný bod na ose kolineace a pár odpovídajících si přímek
- Tři páry odpovídajících si bodů
- Osa kolineace a dva páry odpovídajících si bodů
- Střed kolineace a dva páry odpovídajících si přímek
- Střed kolineace, osa kolineace a úběžník
- Střed kolineace, osa kolineace a úběžnice

- Osa kolineace, pár odpovídajících si přímek a odpovídající si body, které na přímce neleží.
- Střed kolineace, osa kolineace a protiúběžník
- Střed kolineace, osa kolineace a protiúběžnice
- Dva páry odpovídajících si přímek takových, že obrazy přímek jsou rovnoběžné a pár odpovídajících si bodů ležící na jedné z nich

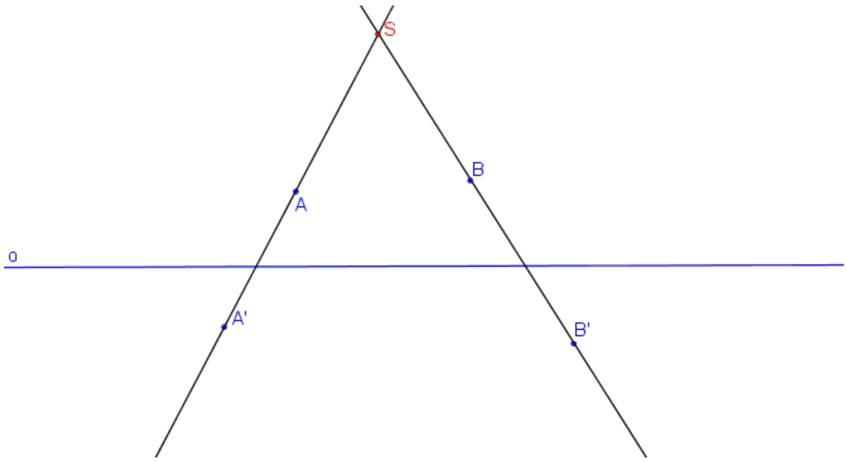
Úlohu si nejprve zkuste provést sami: Zadání (viz příloha 3), Řešení (viz příloha 3). V řešení se používají jednotné barvy. Zadané prvky modrou barvou, hledané prvky červenou barvou.

Střed kolineace S, samodružný bod X na ose kolineace o a pár odpovídajících si přímek a, a'.



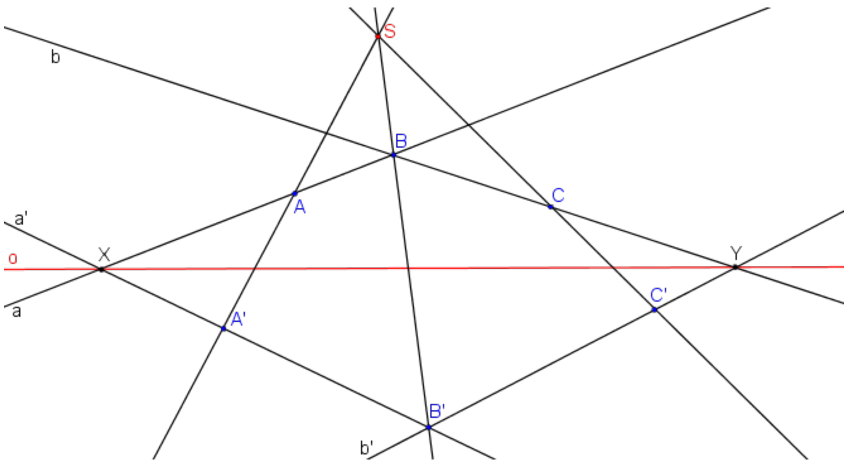
Obrázek 4.18: *Krokované řešení:* SK (S, o, a, a', X).

***Osa kolineace** o **a dva páry odpovídajících si bodů** $A, A'; B, B'$.*



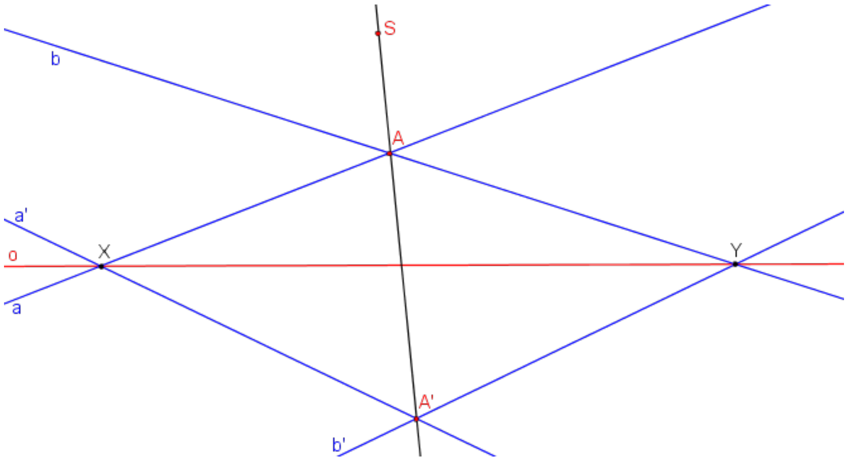
Obrázek 4.19: *Krokované řešení:* SK $(o, A, A'; B, B')$.

***Tři páry odpovídajících si bodů** $A, A'; B, B'; C, C'$.*



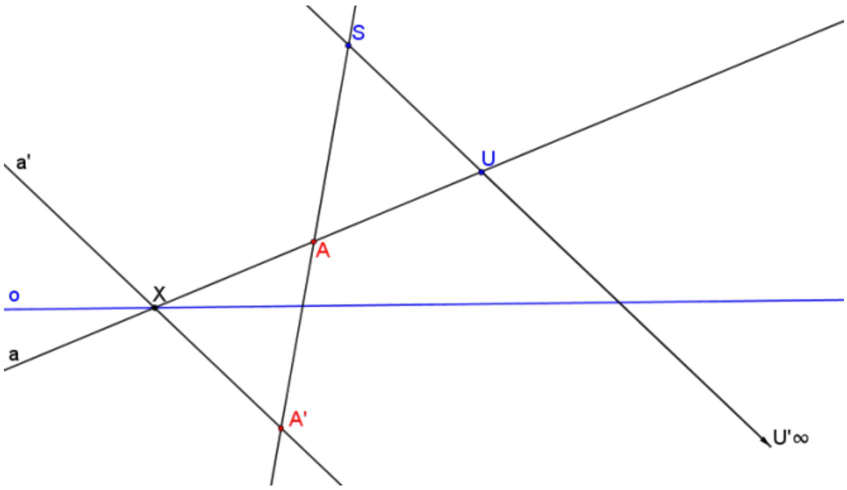
Obrázek 4.20: *Krokované řešení:* SK je dána A, A', B, B', C, C'.

Střed kolineace S ***a dva páry odpovídajících si přímek*** $a, a'; b, b'$***.***



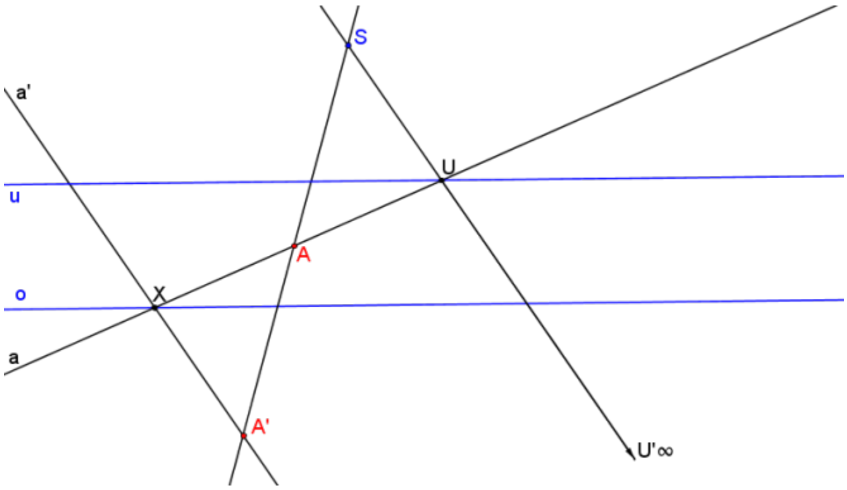
Obrázek 4.21: *Krokované řešení:* SK $(S, a, a'; b, b')$.

Střed kolineace S***, osa kolineace*** o ***a úběžník*** U***.***



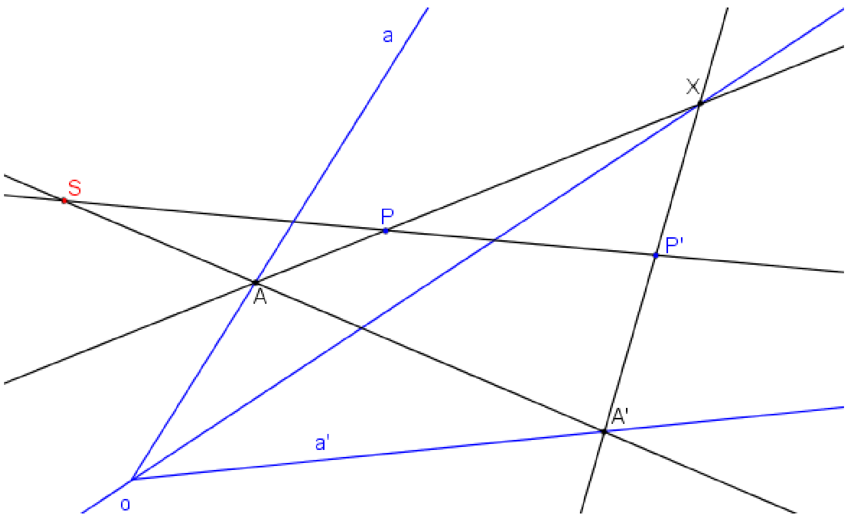
Obrázek 4.22: *Krokované řešení:* SK je dána S, o, U.

Střed kolineace S, osa kolineace o a úběžnice u.



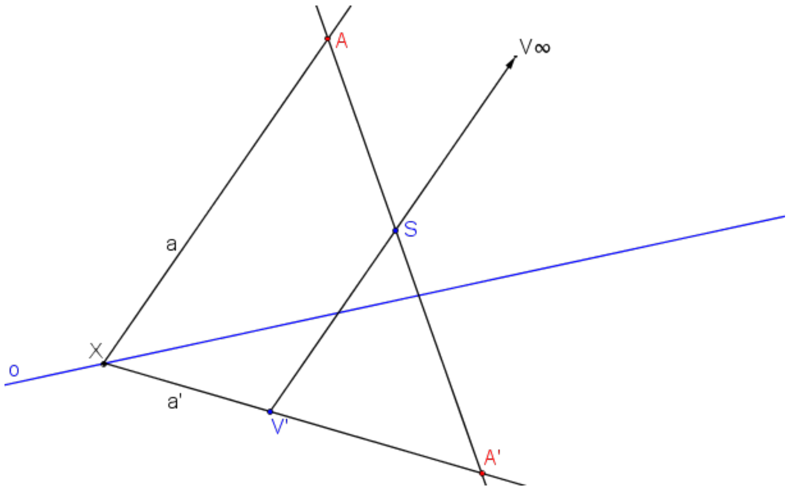
Obrázek 4.23: *Krokované řešení:* SK (S, o, u).

Osa kolineace o, pár odpovídajících si přímek a, a' a odpovídající si body P, P', které na přímce p neleží.



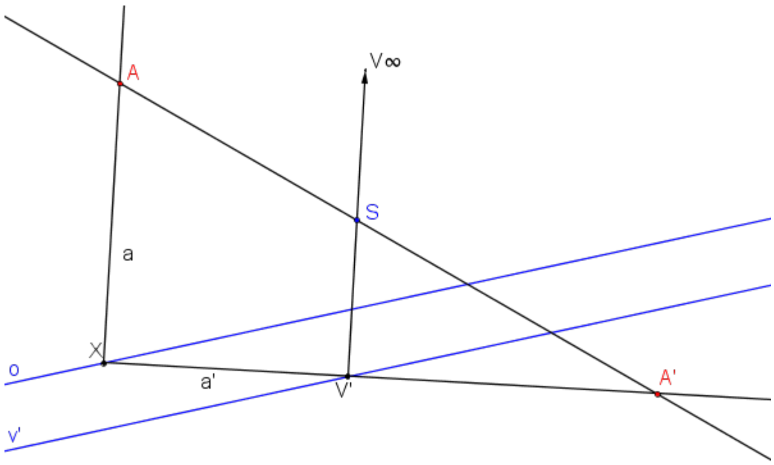
Obrázek 4.24: *Krokované řešení:* SK (o, a, a', P, P').

Střed kolineace S***, osa kolineace*** o ***a protiúběžník*** V'***.***



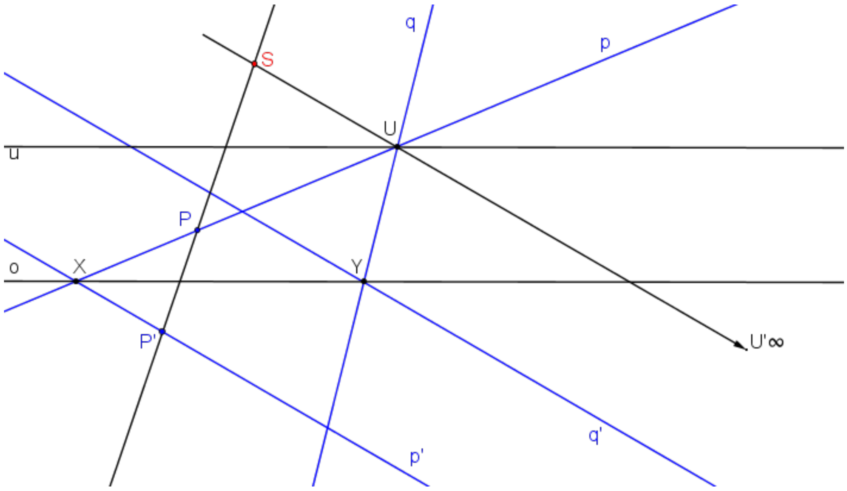
Obrázek 4.25: *Krokované řešení:* SK (S, o, V').

Střed kolineace S***, osa kolineace*** o ***a protiúběžnice*** v'***.***



Obrázek 4.26: *Krokované řešení:* SK (S, o, v').

Dva páry odpovídajících si přímek** $p, p'; q, q'$ **takových, že přímky** p', q' **jsou rovnoběžné a pár odpovídajících si bodů** P, P' **ležící na jedné z přímek.



Obrázek 4.27: *Krokované řešení:* SK $(p, p', P, P'; q, q')$.

4.5 Obraz kružnice ve středové kolineaci

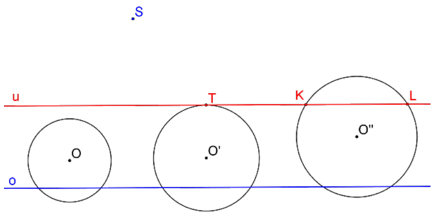
4.5.1 Klasifikace

Obrazem kružnice ve středové kolineaci je regulární kuželosečka a to elipsa, parabola nebo hyperbola. Pomocí metod analytické geometrie to lze snadno dokázat. Proč může být obrazem kružnice i parabola a hyperbola, když v osové afinitě může být obrazem kružnice pouze elipsa? Z kapitoly o úběžnicích (4.3, str. 50) víme, že ve středové kolineaci existují vlastní body, které se zobrazí na nevlastní body, tzv. úběžníky. Tato vlastnost je důležitá, protože regulární kuželosečky můžeme klasifikovat podle toho, kolik mají nevlastních bodů. Elipsa má všechny body vlastní. Parabola má jeden nevlastní bod (má jednu větev). Hyperbola má dva nevlastní body (dvě větve), které leží ve směru asymptot.

Ke konstrukci kuželosečky nejprve určíme na jakou kuželosečku se kružnice zobrazí. Z předchozího odstavce víme, že regulární kuželosečky se liší podle počtu nevlastních bodů. Ve středové kolineaci jim říkáme úběžníky a leží na úběžnici. Díky tomu platí, že:

- Nemá-li kružnice s úběžnicí žádný společný bod, pak je obrazem kružnice *elipsa*. (Nemá žádný bod, který by se zobrazil na nevlastní.)

- Má-li kružnice s úběžnicí právě jeden společný bod, pak je obrazem kružnice *parabola*. (Má jeden bod, který se zobrazí na nevlastní.)
- Má-li kružnice s úběžnicí dva různé průsečíky, pak je obrazem kružnice *hyperbola*. (Má dva body, které se zobrazí na nevlastní.)

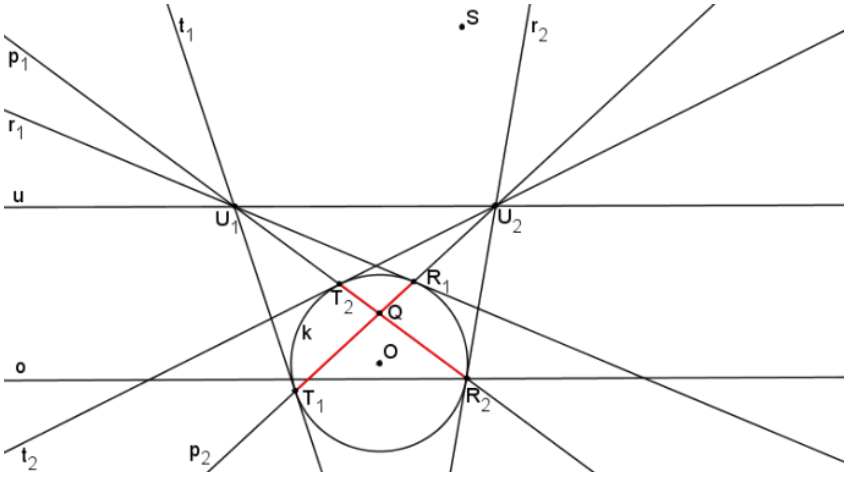


Obrázek 4.28: Kdy je obrazem kružnice elipsa, parabola nebo hyperbola.

4.5.2 Elipsa

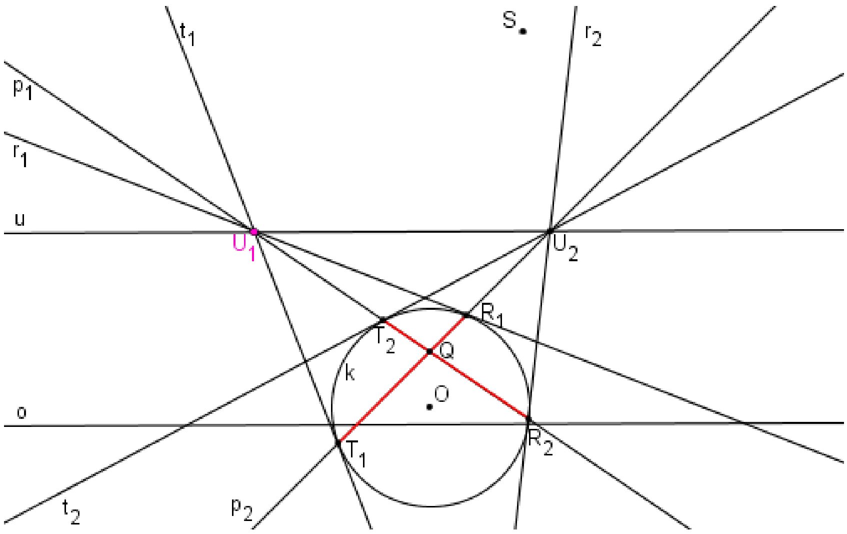
Sdružené průměry

Elipsu sestrojíme pomocí Rytzovy konstrukce. Na Rytzovu konstrukci jsou potřeba sdružené průměry (3.5, str. 29). Úkol se zdá jednoduchý, ale nesmíme zapomenout, že středová kolineace nezachovává dělicí poměr, takže střed kružnice se nezobrazí na střed elipsy. Také průměr kružnice se ve středové kolineaci nezobrazí na průměr elipsy. Průměr elipsy má tu vlastnost, že tečny v jeho koncových bodech jsou navzájem rovnoběžné. Ve středové kolineaci však nesmíme zapomenout, že přímky, které se zobrazí na rovnoběžky se protínají na úběžnici. Proto tětivu kružnice, která se zobrazí na průměr elipsy, najdeme jako spojnici dotykových bodů tečen vedených z libovolného bodu úběžnice. Na úběžnici si proto libovolně zvolíme úběžník U_1, kterým bude procházet tětiva p_1. Dále sestrojíme tečny t_1, r_1 ke kružnici k z úběžníku U_1. Dotykovými body T_1, R_1 je určena druhá tětiva p_2. Přímka p_2 protíná úběžnici v úběžníku U_2. Z bodu U_2 vedeme tečny t_2, r_2 ke kružnici k. Dotykovými body tečen t_2, r_2 (T_2, R_2) je určena tětiva p_1. Tětivy p_1, p_2 jsou díky konstrukci takové tětivy kružnice, které se zobrazí na sdružené průměry elipsy.



Obrázek 4.29: *Krokované řešení:* SK je dána S, o, u a kružnice k se středem v bodě O tak, aby kružnice s úběžnicí neměla žádný společný bod.

Můžete se přesvědčit, že postup nezávisí na volbě úběžníku U_1. S růžovým bodem U_1 lze pohybovat.



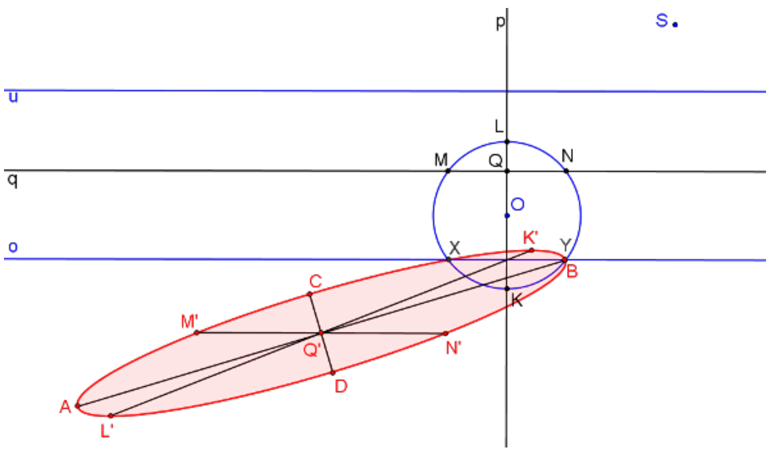
Obrázek 4.30: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Konstrukce elipsy

Pro konstrukci elipsy jako obrazu kružnice ve středové kolineaci využijeme sdružené průměry. Z předchozího odstavce víme, jak tyto průměry najít. Můžeme zvolit úběžník U_1 libovolně a podle předchozí konstrukce najít úběžník

U_2. Můžeme však využít trochu jednodušší způsob, který lze aplikovat i v případě, že neznáme přesnou polohu úběžnice. Jediný průměr kružnice, který se zobrazí na průměr elipsy je průměr kolmý k ose kolineace procházející středem kružnice, označme ho p. Tečny v koncových bodech tohoto průměru jsou rovnoběžné s osou kolineace a zobrazí se na přímky, které jsou opět rovnoběžné s osou kolineace. Průsečíky přímky p s kružnicí k jsou body K, L. Na přímce p' najdeme jejich obrazy, body K', L'. Tyto body jsou krajními body prvního ze sdružených průměrů. Střed úsečky $K'L'$ označme Q'. Bod Q' je středem elipsy e. Bod Q není středem kružnice k, ale je to bod, který se zobrazí na střed elipsy. Tečny v krajních bodech K, L průměru p kružnice jsou rovnoběžné s osou kolineace. Stejně také tečny v odpovídajících bodech K', L' elipsy jsou rovnoběžné s osou kolineace. Druhá tětiva proto leží na přímce q rovnoběžné s osou kolineace a procházející bodem Q. Obrazem přímky q je přímka rovnoběžná s osou kolineace procházející bodem Q'. Průsečíky přímky q s kružnicí k jsou body N, M. Na přímce q' leží body N', M', které jsou koncové body druhého ze sdružených průměrů. Nyní máme nalezeny sdružené průměry elipsy $K'L', M'N'$ a pomocí Rytzovy konstrukce můžeme dorýsovat elipsu.



Obrázek 4.31: *Krokované řešení:* Je dán střed kolineace S, osa kolineace o, úběžnice u a kružnice k se středem v bodě O tak, aby kružnice s úběžnicí neměla žádný společný bod.

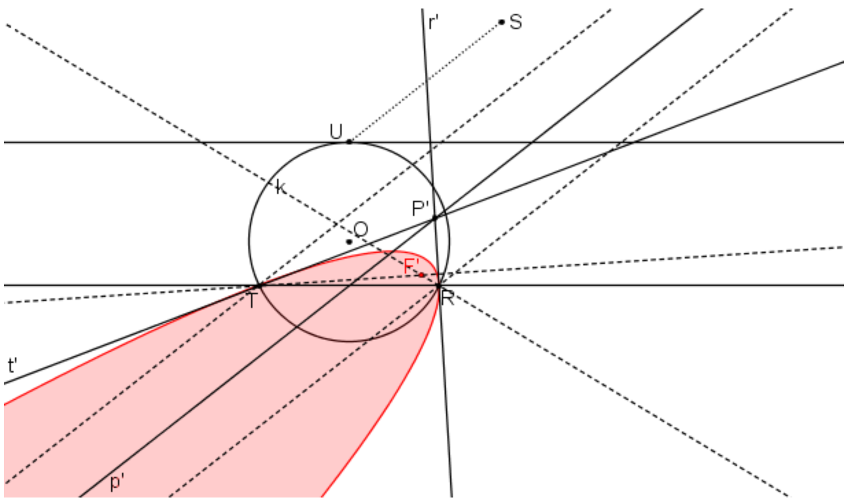
4.5.3 Parabola

Středová kolineace je dána středem kolineace S, osou kolineace o a úběžnicí u. Dále je dána kružnice k se středem O. Jak již víme, aby byla obrazem kružnice k parabola, musí se kružnice dotýkat úběžnice v jednom bodě, který si označíme U. Nevlastní bod $U'\infty$ je dotykovým bodem paraboly k' na nevlastní přímce $u'\infty$. Přímka SU je směrem osy sestrojované paraboly k'. Existují dva způsoby, jak parabolu najít:

1. Libovolně zvolíme dva body (T, R) na kružnici a sestrojíme jejich tečny (t, r) ke kružnici k. Pokud kružnice protíná osu kolineace je výhodné zvolit body T, R jako průsečíky osy kolineace a kružnice k. Body T, R jsou samodružné, protože leží na ose kolineace. Proto body T, T' a R, R' splývají. Dále nalezneme obraz t', r' tečen t, r. V našem případě je najdeme velmi jednoduše. Sestrojíme pomocnou přímku p, která je kolmá k ose kolineace a prochází průsečíkem P tečen t, r. Bod P' leží na přímce p'. Tečny výsledné paraboly t', r' jsou určeny body $T'P', R'P'$. Nyní známe vše, abychom mohli sestrojit parabolu.

   Víte jak parabolu sestrojit?

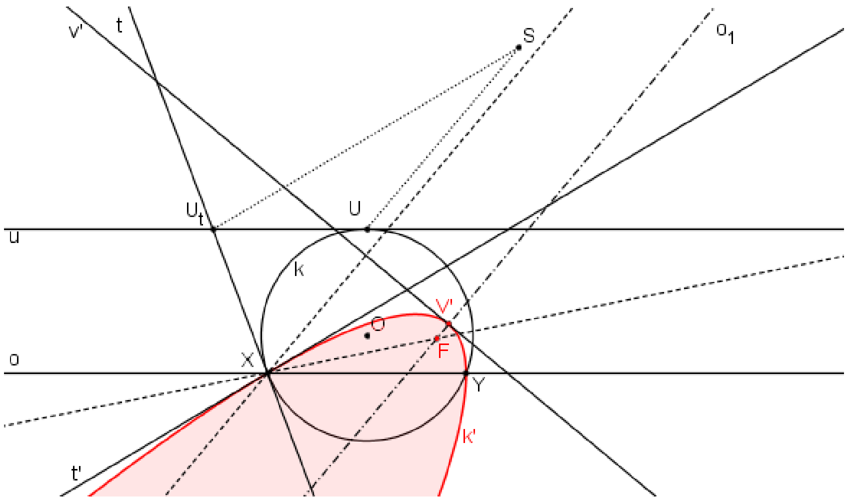
   Protože známe směr osy, známe směr jednoho průvodiče bodu dotyku. Bodem T vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou p'. Pro tečnu paraboly platí věta: „Tečna půlí vnější úhel průvodičů." Známe tečnu a jeden průvodič. Druhý průvodič, označme p_t. Na průvodiči p_t leží ohnisko. Stejný postup provedeme i s tečnou r' a bodem dotyku R. Na průvodiči p_r také leží ohnisko. Ohnisko paraboly F je proto průsečíkem průvodičů p_t, p_r. Bodem F vedeme osu paraboly, která je rovnoběžná s přímkou p'. Vrchol paraboly sestrojíme pomocí například bodů souměrně sdružených s ohniskem F podle tečen.



Obrázek 4.32: *Krokované řešení:* Je dán střed kolineace S, osa kolineace o, úběžnice u a kružnice k se středem v bodě O tak, aby kružnice s úběžnicí měla právě jeden společný bod U.

2. Přímo nalezneme vrcholovou tečnu v' s vrcholem V' hledané paraboly. Přímka SU určuje směr osy paraboly. Vrcholová tečna je kolmá k ose paraboly. Víme proto, že směr vrcholové tečny určuje přímka w procházející středem kolineace S kolmá k přímce SU. Průsečík přímky w s úběžnicí označme K. Jeho obraz $K'\infty$ je nevlastní bod vrcholové tečny v'. Obrazem tečny ke kružnici je tečna k parabole. Proto vedeme z bodu K tečnu v ke kružnici k (různou od úběžnice u). Dotykový bod tečny v s kružnicí k označme V. Obraz v' tečny v tvoří vrcholovou tečnu. Obraz V' bodu V tvoří vrchol paraboly. Nyní známe osu paraboly o_1 a vrchol paraboly V. Podle předchozí konstrukce najdeme jednu tečnu s bodem dotyku. Parabolu již sestrojíme jednoduše [1] (str. 48).

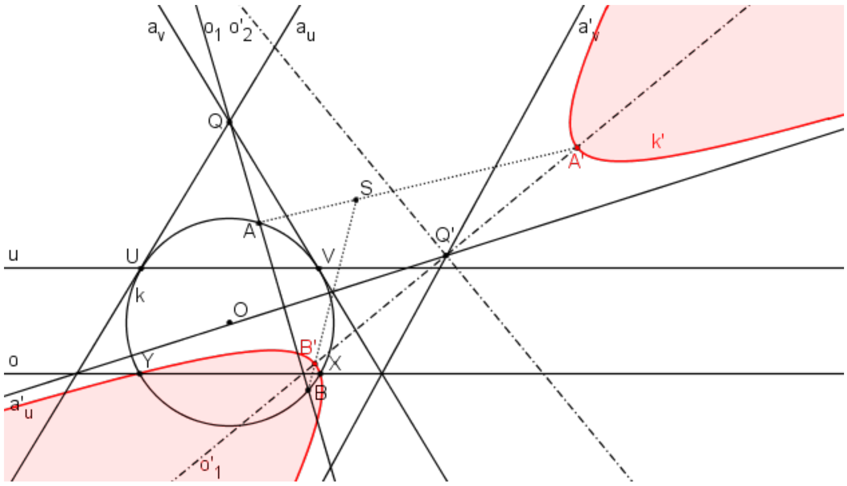
   Je-li bod K přístupný, vyplatí se hledat přímo vrchol paraboly.



Obrázek 4.33: *Krokované řešení:* Je dán střed kolineace S, osa kolineace o, úběžnice u a kružnice k se středem v bodě O tak, aby kružnice s úběžnicí měla právě jeden společný bod U.

4.5.4 Hyperbola

Středová kolineace je dána středem kolineace S, osou kolineace o a úběžnicí u. Dále je dána kružnice k se středem O. Aby obrazem kružnice k byla hyperbola, musí úběžnice protínat kružnici ve dvou bodech. Průsečíky úběžnice u s kružnicí k označme U, V. Bodům U, V odpovídají nevlastní body $U'\infty, V'\infty$. Přímky SU, SV určují směry asymptot sestrojované hyperboly. Tečnám a_u, a_v v bodech U, V ke kružnici k odpovídají asymptoty a'_u, a'_v hyperboly k'. Průsečík asymptot a'_u, a'_v (ozn. Q') je středem hyperboly. Osy hyperboly půlí úhly asymptot. Jako hlavní osu o'_1 označíme tu, pro kterou odpovídající přímka o_1 protíná kružnici k ve dvou bodech, označme je A, B. Druhá přímka o_2 kružnici k neprotíná. Bodům A, B odpovídají body A', B' hyperboly k' - její hlavní vrcholy. Tím je hyperbola určena [5] (str. 48).

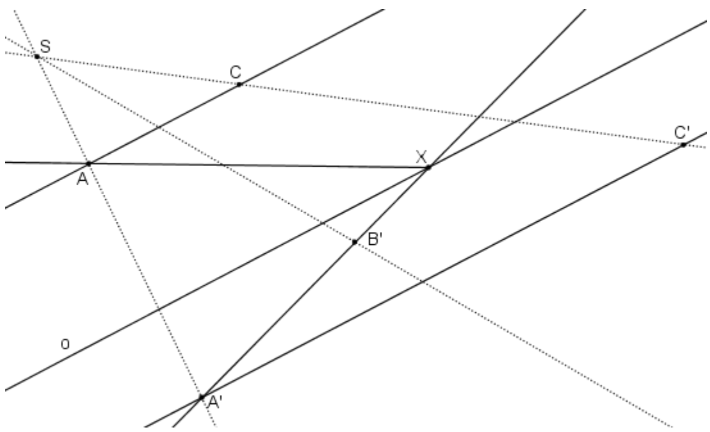


Obrázek 4.34: *Krokované řešení:* Je dán střed kolineace S, osa kolineace o, úběžnice u a kružnice k se středem v bodě O tak, aby úběžnice kružnici protínala ve dvou bodech.

4.6 Dourčování prvků

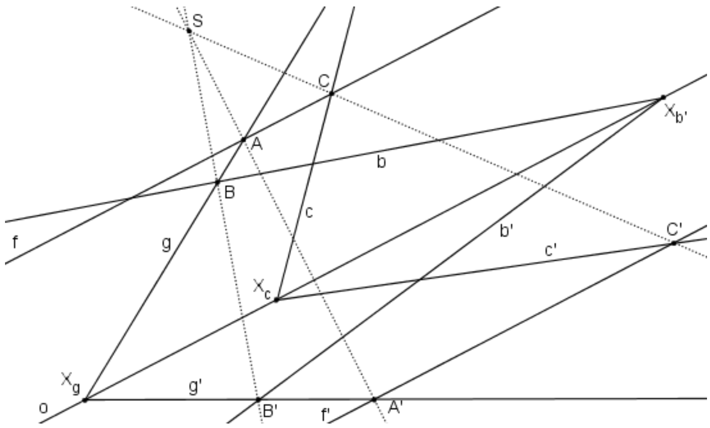
Sadu úloh na procvičení najdete zde: Zadání (viz příloha 4), Řešení (viz příloha 4).

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obrazy bodů (B', C).



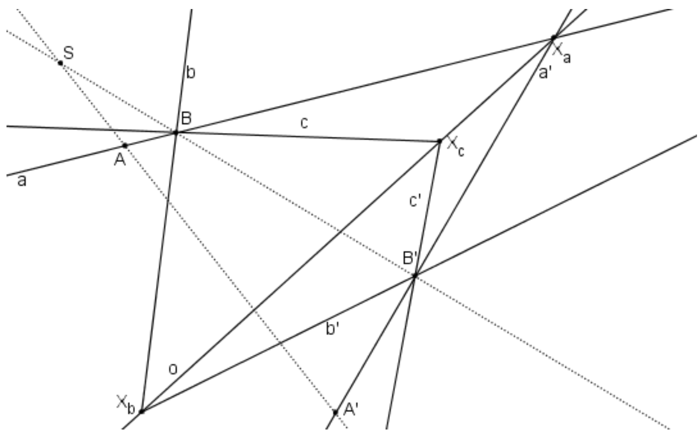
Obrázek 4.35: Obrazy bodů B', C.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obrazy přímek b', c.



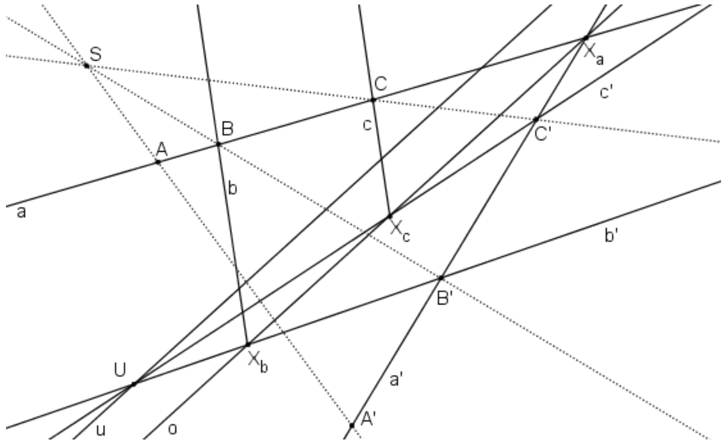
Obrázek 4.36: Řešení: SK je dána (S, o, AA'). Určete obrazy přímek b', c.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz různoběžných přímek b, c.



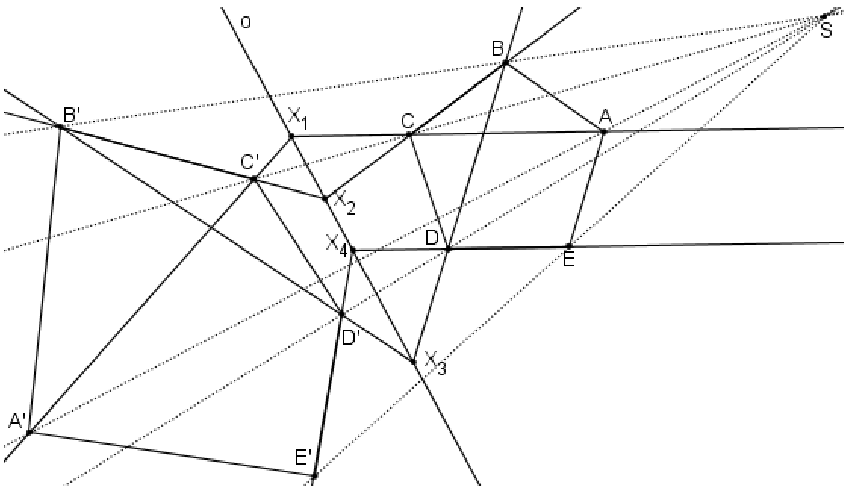
Obrázek 4.37: Obrazy různoběžných přímek b, c.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz rovnoběžných přímek b, c.



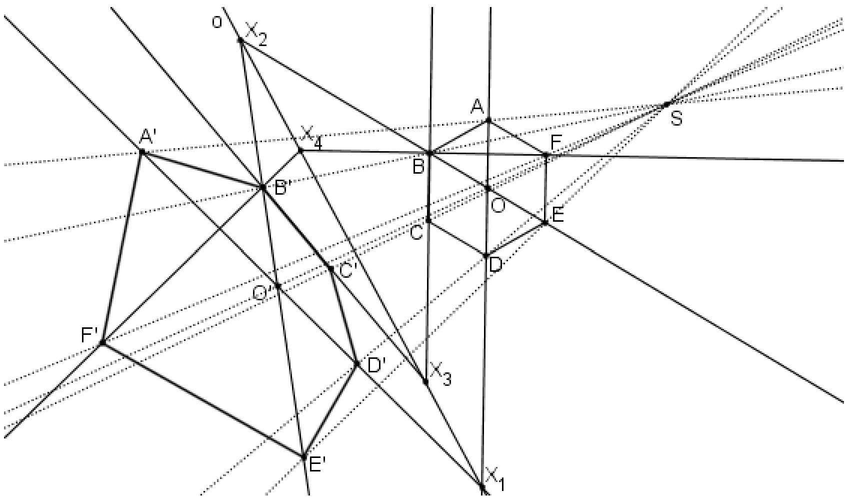
Obrázek 4.38: Obrazy rovnoběžných přímek b, c.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$.



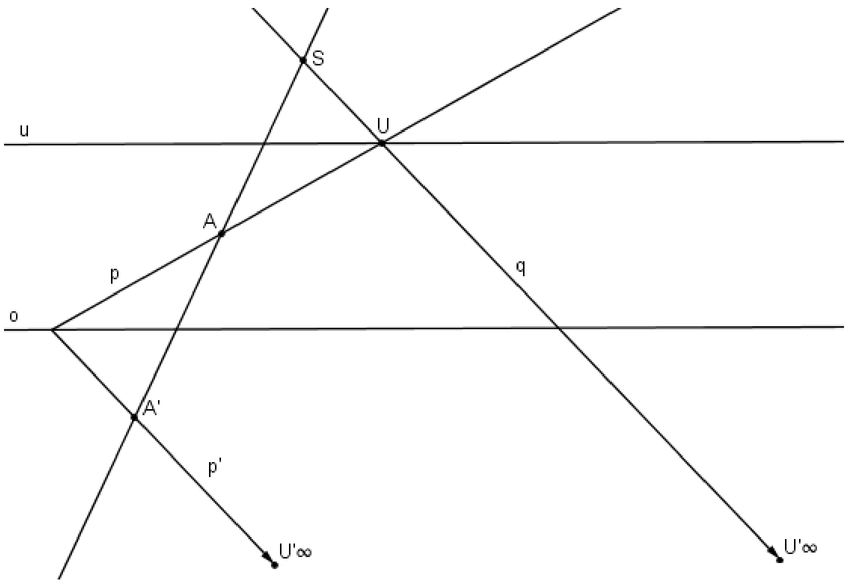
Obrázek 4.39: Obraz pětiúhelníka.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz pravidelného šestiúhelníka $ABCDEF$.



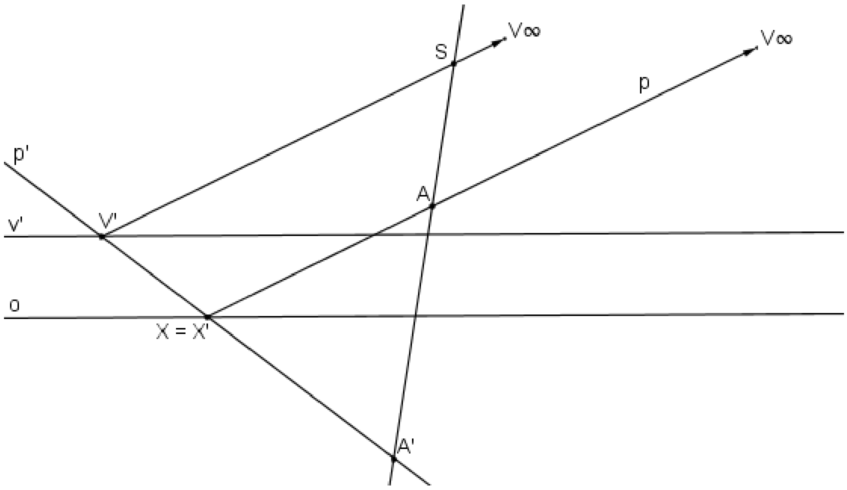
Obrázek 4.40: Obraz šestiúhelníka.

Příklad: V SK (S, o, AA') najděte úběžnici u.



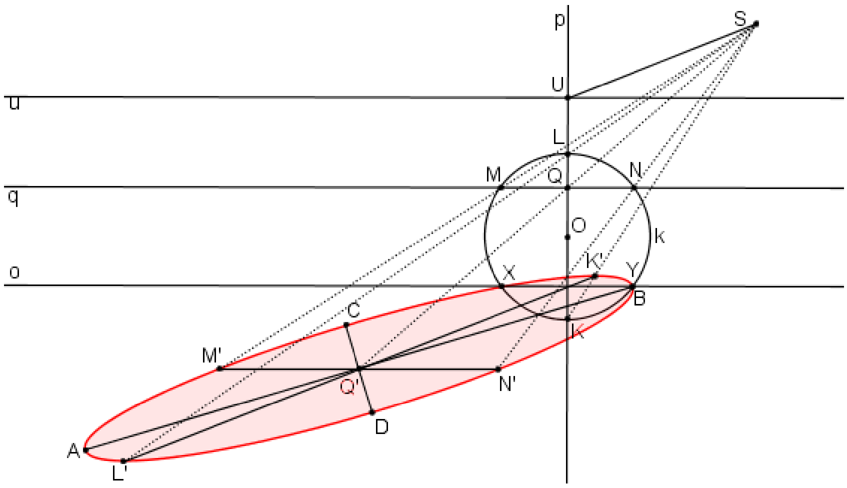
Obrázek 4.41: Najdi úběžnici.

Příklad: V SK (S, o, AA') najděte protiúběžnici v'.



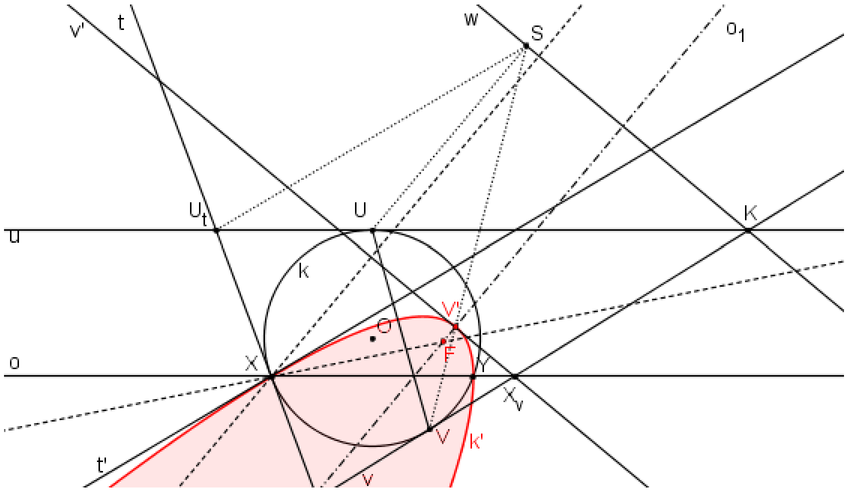
Obrázek 4.42: Najdi protiúběžnici.

Příklad: V SK (S, o, SS') určete obraz kružnice k.



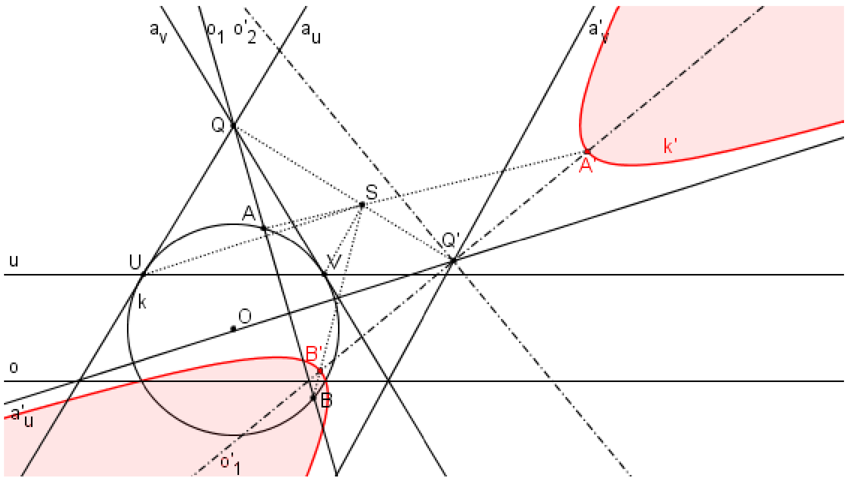
Obrázek 4.43: Obraz kružnice.

Příklad: V SK (S, o, SS') určete obraz kružnice k.



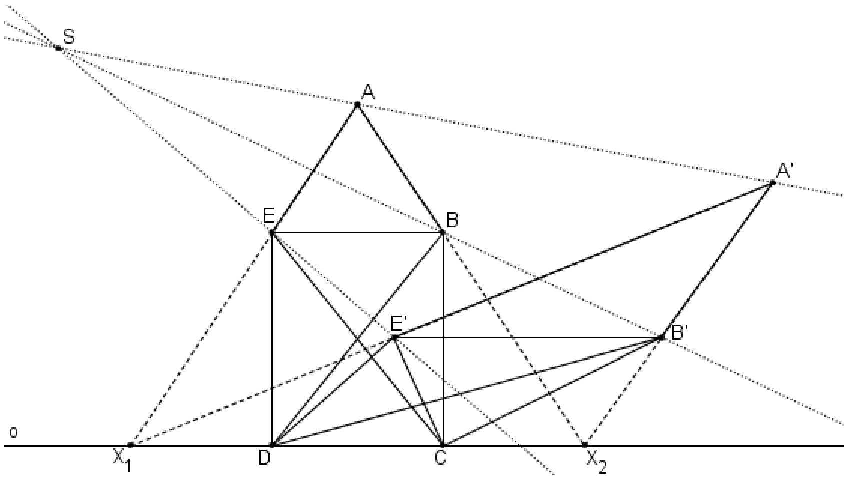
Obrázek 4.44: Obraz kružnice.

Příklad: V SK (S, o, SS') určete obraz kružnice k.



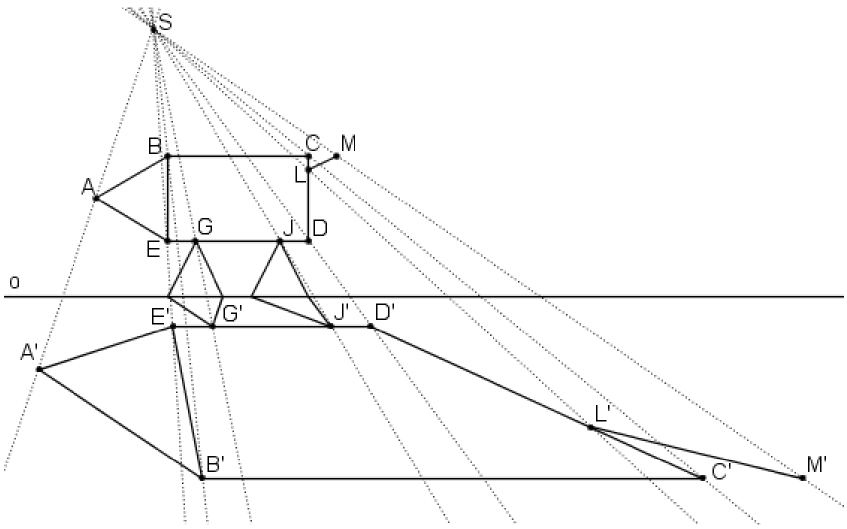
Obrázek 4.45: Obraz kružnice.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz domečku.



Obrázek 4.46: Určete obraz domečku.

Příklad: V SK (S, o, AA') určete obraz prasátka.

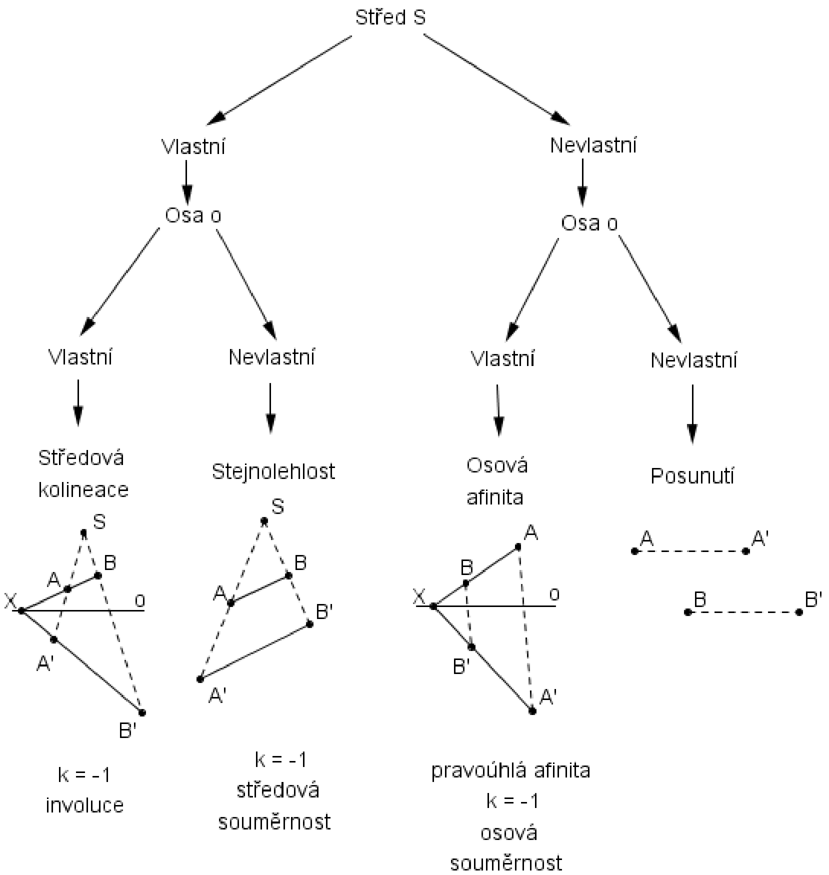


Obrázek 4.47: Určete obraz prasátka.

Kapitola 5

Klasifikace

Zobrazení můžeme rozdělit podle toho, jestli je střed zobrazení vlastní nebo nevlastní a jestli je osa (přímka samodružných bodů) vlastní nebo nevlastní. Například osová afinita je pak středová kolineace, ale střed kolineace je nevlastní bod.



Obrázek 5.1: Klasifikace zobrazení podle středu a osy.

Kapitola 6

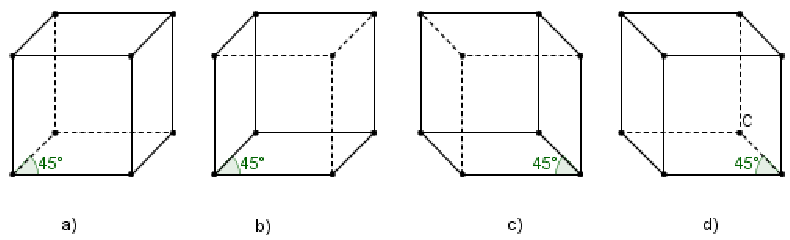
Užití osové afinity

6.1 Řezy hranolů

6.1.1 Volné rovnoběžné promítání

Volné rovnoběžné promítání je druh rovnoběžného promítání, kde promítáme na jednu průmětnu. Útvary, které leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, se zobrazují ve skutečné velikosti. Průměty úseček, které jsou na průmětnu kolmé, svírají s vodorovným směrem úhel α a jejich délka se zkrátí s koeficientem q. Stejně jako ve většině učebnic budeme používat $\alpha = 45°$ a koeficient $q = \frac{1}{2}$. Pozn.: Průmětnu volíme svislou (rovina sešitu, či tabule). Zobrazujeme-li těleso ve volném rovnoběžném promítání je vhodné jej umístit tak, pokud to jde, aby byla jedna stěna rovnoběžná s průmětnou.

Volné rovnoběžné promítání znáte z hodin stereometrie. Všechna tělesa v této kapitole jsou zobrazena pomocí volného rovnoběžného promítání. Podívejme se nejprve na různá zobrazení krychle, protože není jasně určeno, kde se měří 45° mezi vodorovnou přímkou a průmětem úsečky kolmé na průmětnu a které stěny krychle jsou viditelné.



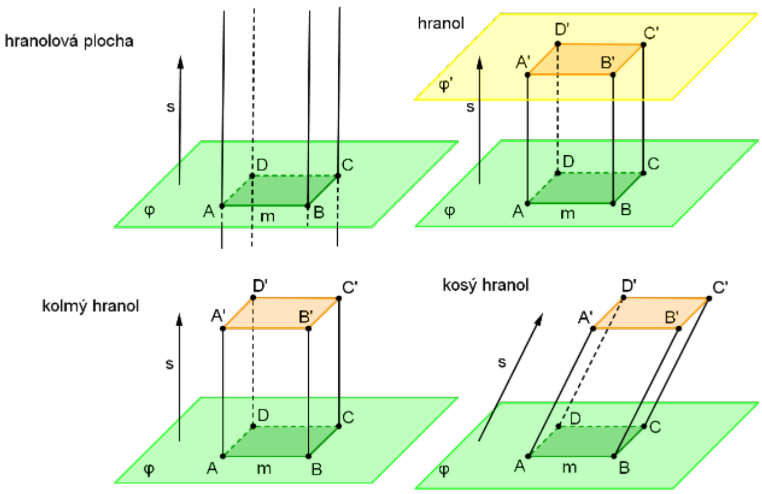
Obrázek 6.1: Volné rovnoběžné promítání - různé pohledy krychle.

a) Pravý nadhled - viditelná je horní, pravá a přední stěna
b) Levý podhled - viditelná je dolní, levá a přední stěna
c) Pravý podhled - viditelná je dolní, pravá a přední stěna
d) Levý nadhled - viditelná je horní, levá a přední stěna
V textu budeme užívat převážně pohled add. a - pravý nadhled.

6.1.2 Hranol, hranolový prostor a hranolová plocha

Než začneme s hranoly pracovat, připomeňme definici hranolové plochy a hranolového prostrou. *„Je dán mnohoúhelník m (tzv.* řídící mnohoúhelník*) ležící v rovině φ a přímka s různoběžná s rovinou φ. Množina všech přímek směru s, které protínají mnohoúhelník m (jeho obvod) se nazývá* hranolový prostor (hranolová plocha)“ [10] (str. 90). Množina všech přímek plochy, které protínají stranu mnohoúhelníka m, tvoří *stěnu hranolové plochy.* Je-li mnohoúhelníkem n-úhelník, mluvíme o n-bokém hranolovém prostoru (hranolové ploše).

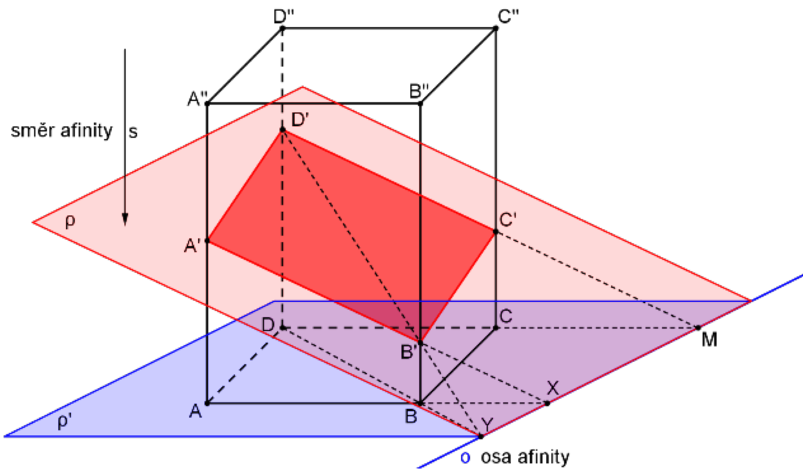
Hranol získáme z hranolového protoru tak, že jej omezíme dvěma rovinami. Jednou rovinou je zpravidla rovina φ a mnohoúhelník m se pak nazývá *podstavou* hranolu. Druhou rovinou je rovina φ' ($\varphi' || \varphi$). Vzdálenost rovin φ, φ' se nazývá *výška* hranolu. Je-li směr s kolmý k rovině φ, pak se hranol nazývá *kolmý*, jinak je *kosý.* Je-li hranol kolmý a mnohoúhelník m je pravidelný n-úhelník, pak se hranol nazývá *pravidelný.*



Obrázek 6.2: Hranol, hranolová plocha, kolmý a kosý hranol.

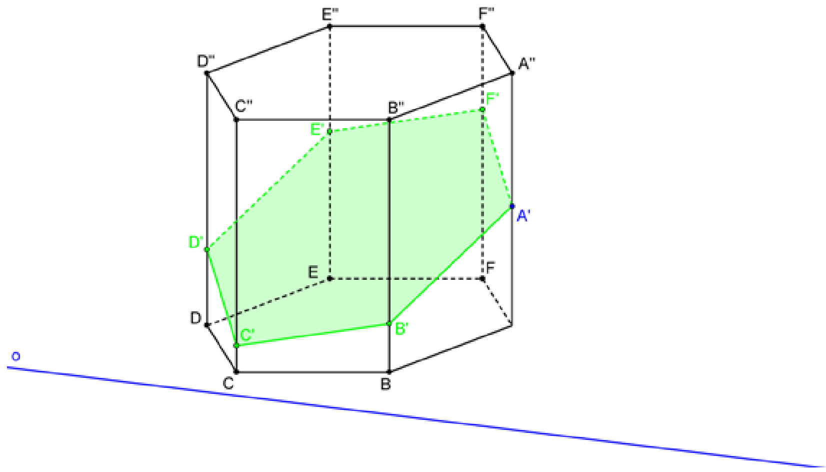
6.1.3 Řezy hranolů

Jak již víme z úvodu kapitoly OA mezi dvěma rovinami (3.1, str. 15), osovou afinitu lze využít při řezu hranolu rovinou. Mezi rovinou podstavy a rovinou řezu je vztah osové afinity. Osou afinity o je průsečnice těchto rovin. Směr afinity je určen hranami AA'', BB'', ... Odpovídající si body jsou body A, A', kde bod A' je bodem hrany AA'' a zároveň leží v rovině řezu a bod A je bodem hrany AA'' a zároveň leží v rovině podstavy.



Obrázek 6.3: Osová afinita a řez hranolu.

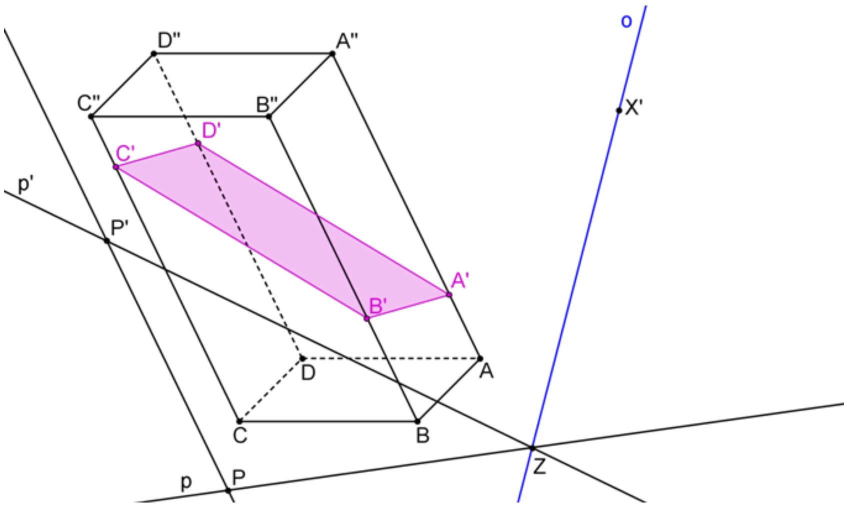
Příklad: Je dán pravidelný šestiboký hranol s podstavou $ABCDEF$. Rovina řezu je dána průsečnicí o roviny řezu a roviny podstavy a bodem A', který leží na hraně AA''.



Obrázek 6.4: *Krokované řešení:* Je dán šestiboký hranol s podstavou $ABCDEF$. Rovina řezu je určena přímkou o, která leží v rovině podstavy, a bodem A'.

Postupujeme stejně, pokud je úkolem sestrojit řez kosého hranolu.

Příklad: Mějme dán kosý čtyřboký hranol s podstavou $ABCD$. Rovina řezu α je určena bodem X' a přímkou p'. Bod X' leží v rovině řezu a zároveň v rovině podstavy. Dále je dána přímka p, která je průmětem přímky p' do roviny podstavy ve směru hran $AA'', BB'', \dots$.



Obrázek 6.5: *Krokované řešení:* Je dán kosý čtyřboký hranol s podstavou $ABCD$. Rovina řezu α je určena bodem X' a přímkou p'. Bod X' leží v rovině řezu a zároveň v rovině podstavy. Dále je dána přímka p, která je průmětem přímky p' do roviny podstavy ve směru hran $AA'', BB'', \dots$.

V jiných zobrazovacích metodách je většinou rovina řezu dána svými stopami. Osou afinity je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Bohužel není dána dvojice odpovídajících si bodů. Musíme proto najít jeden bod řezu pomocí jiných konstrukcí. Konstrukce se liší podle jednotlivých promítání, myšlenka konstrukce je však stále stejná. Bod A' je průsečík hrany hranolu AA'' s rovinou řezu.

Další příklady na vypracování s výsledky:

- Volné rovnoběžné promítání: Zadání (viz příloha 6), Řešení (viz příloha 6)
- Mongeovo promítání: Zadání (viz příloha 7), Řešení (viz příloha 7)
- Kosoúhlé promítání: Zadání (viz příloha 8), Řešení (viz příloha 8)
- Pravoúhlá axonometrie: Zadání (viz příloha 9), Řešení (viz příloha 9)

Tyto úlohy mají více řešení. Uvádíme pouze to řešení, které přímo využívá osovou afinitu.

6.2 Řez válce

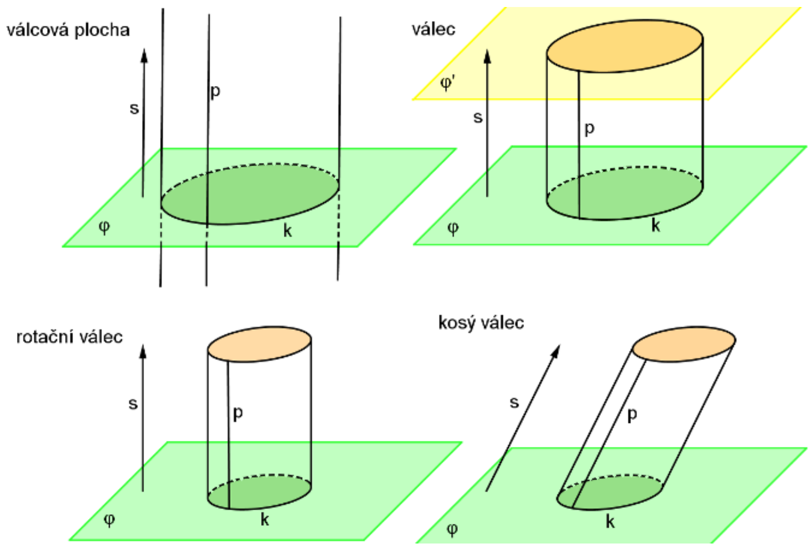
V kapitole budeme pracovat s tělesy, která jsou zobrazena ve volném rovnoběžném promítání (6.1, str. 75)

6.2.1 Válec, válcový prostor a válcová plocha

Než začneme pracovat s válci, připomeňme definici válcové plochy a válcového prostrou. „Válcová plocha (válcový prostor) *je množina všech přímek daného směru s, které protínají kružnici (kruh) k ležící v rovině φ různoběžné se směrem s*“ [10] (str. 95).

Válec získáme z válcového prostoru tak, že jej omezíme dvěma rovinami. Jednou rovinou je zpravidla rovina φ a kružnici k pak nazýváme *podstavou* válce. Druhou rovinou je rovina φ' ($\varphi' || \varphi$). Vzdálenost rovin φ, φ' se nazývá *výška* válce. Je-li směr s kolmý k rovině φ, pak se válec nazývá *rotační*, jinak je *kosý*. Spojnice středů podstav se nazývá osa. V textu budeme pracovat s rotačními i kosými válci.

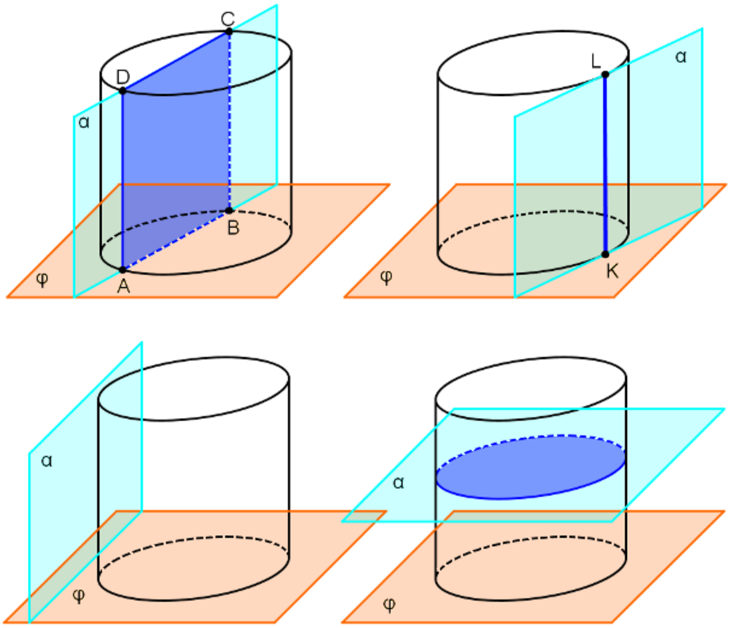
Pozn: Válcová plocha může být obecně množina všech přímek daného směru s, které protínají křivku k ležící v rovině φ různoběžné se směrem s.



Obrázek 6.6: Válec, válcová plocha, rotační a kosý válec.

6.2.2 Řez válce

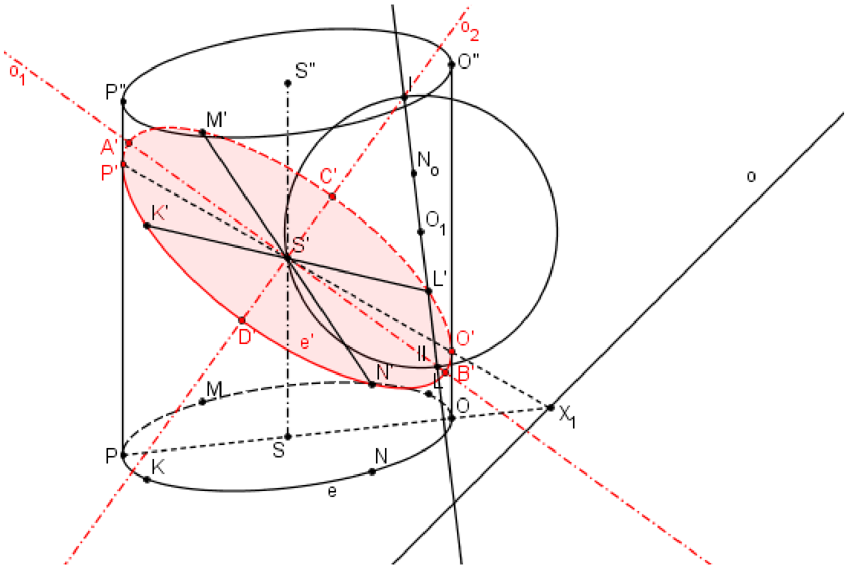
Nejprve se podívejme, jak můžeme volit rovinu řezu α. Rovina α může rovnoběžná se směrem površek s. Pokud průsečnice těchto dvou rovin protíná podstavu, pak je řezem obdélník. Pokud tato průsečnice protíná podstavu pouze v jednom bodě (průsečnice je tečnou kružnice), pak je řezem jedna površka. Pokud průsečnice neprotíná podstavnou kružnici, pak nemá rovina s válcem žádný společný bod. Rovina α může být s rovinou podstavy φ rovnoběžná. Pak je řezem kružnice shodná s podstavnou kružnicí. U těchto typů řezů nevyužíváme osovou afinitu.



Obrázek 6.7: Různe řezy válce.

Stejně jako u řezu hranolu (6.1, str. 75), tak i u řezu válce je mezi rovinou podstavy a rovinou řezu vztah osové afinity. Osou afinity je jejich průsečnice a párem odpovídajících si bodů jsou středy S (střed podstavné kružnice) a S' (průsečík osy válce s rovinou řezu). Obrazem kružnice v osové afinitě je elipsa. Pokud již známe osu afinity a pár odpovídajících si bodů, konstrukce elipsy je stejná jako v kapitole OA Obraz kružnice (3.5, str. 29). Konstrukce jsou stejné i v případě, že je válec kosý. (Pozn. Pokud by měl válec za podstavu obecnou křivku, museli bychom křivku řezu hledat bodově.)

Příklad: Je dán rotační válec, střed podstavy S, osa SS''. Rovina řezu α je určena průsečnicí o roviny podstavy a roviny α a bodem S' ležícím na ose SS''.



Obrázek 6.8: *Krokované řešení:* Je dán rotační válec, střed podstavy S, osa SS''. Rovina řezu α je určena přímkou o (průsečnicí roviny podstavy a roviny α) a bodem S' ležícím na ose SS''.

V jiných zobrazovacích metodách je většinou rovina řezu dána svými stopami. Osou afinity je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy. Nemusí být vždy zadána dvojice dvojice odpovídajících si bodů. Musíme proto najít jeden bod řezu pomocí jiných konstrukcí. Konstrukce se liší podle jednotlivých promítání, myšlenka konstrukce je však stále stejná. Bod S' je průsečík osy válce SS'' s rovinou řezu.

Další příklady na vypracování s výsledky:

- Volné rovnoběžné promítání: Zadání (viz příloha 10), Řešení (viz příloha 10)
- Mongeovo promítání: Zadání (viz příloha 11), Řešení (viz příloha 11)
- Kosoúhlé promítání: Zadání (viz příloha 12), Řešení (viz příloha 12)
- Pravoúhlá axonometrie: Zadání (viz příloha 13), Řešení (viz příloha 13)

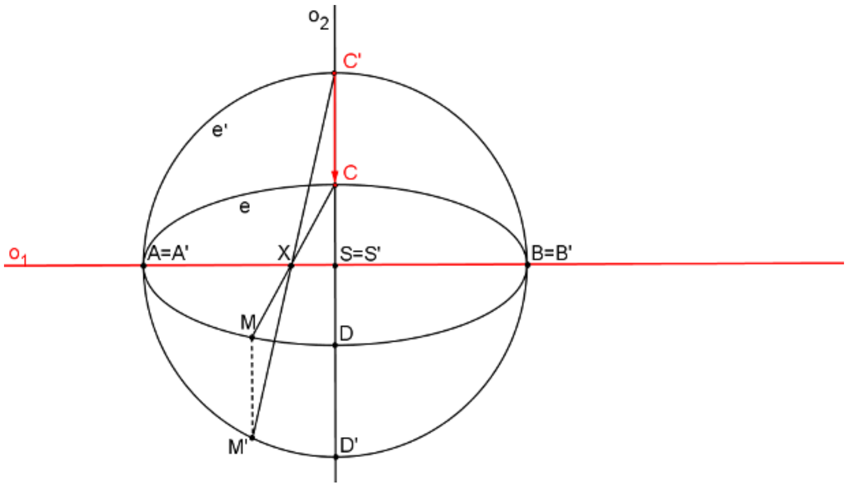
Tyto úlohy mají více řešení. Uvádíme pouze to řešení, které přímo využívá osovou afinitu.

6.3 Konstrukce elipsy

6.3.1 Osová afinita mezi elipsou a kružnicí

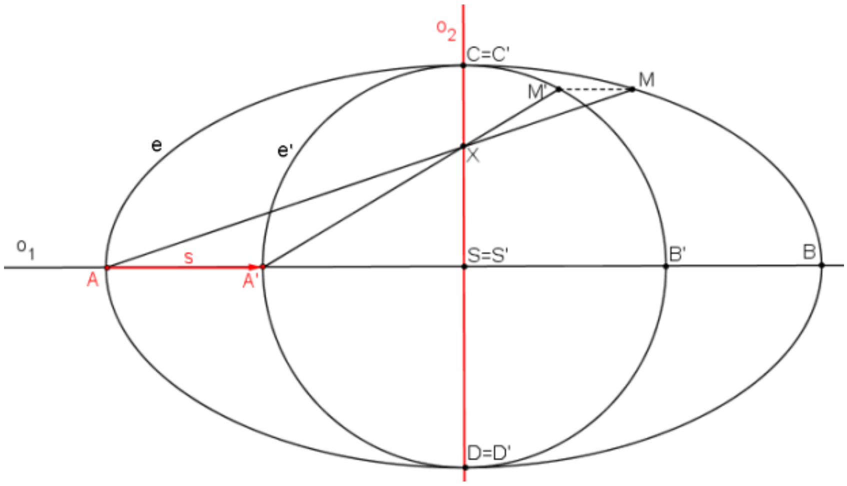
Mezi elipsou a kružnicí se středem v bodě S a poloměrem SA (resp. SC) je vztah osové afinity. Existují dva základní typy pravoúhlé osové afinity mezi elipsou a kružnicí:

- Osa afinity splývá s *hlavní* osou elipsy o_1. Střed S' kružnice splývá se středem elipsy S. Vrcholy A, B jsou samodružné (leží na ose afinity). Kružnice e' má střed v bodě S a poloměr SA. Chybí ještě určit pár odpovídajících si bodů, např. C, C'. Protože hledáme pravoúhlou afinitu, bod C' leží na kolmici k ose afinity procházející bodem C a na kružnici e'.



Obrázek 6.9: Osová afinita mezi kružnicí a elipsou.

- Osa afinity splývá s *vedlejší* osou elipsy o_2. Střed S' kružnice splývá se středem elipsy S. Vrcholy C, D jsou samodružné (leží na ose afinity). Kružnice e' má střed v bodě S a poloměr SC. Pár odpovídajících si bodů, např. dvojice A, A', kde A' leží na kolmici k ose afinity procházející bodem A a na kružnici e'.

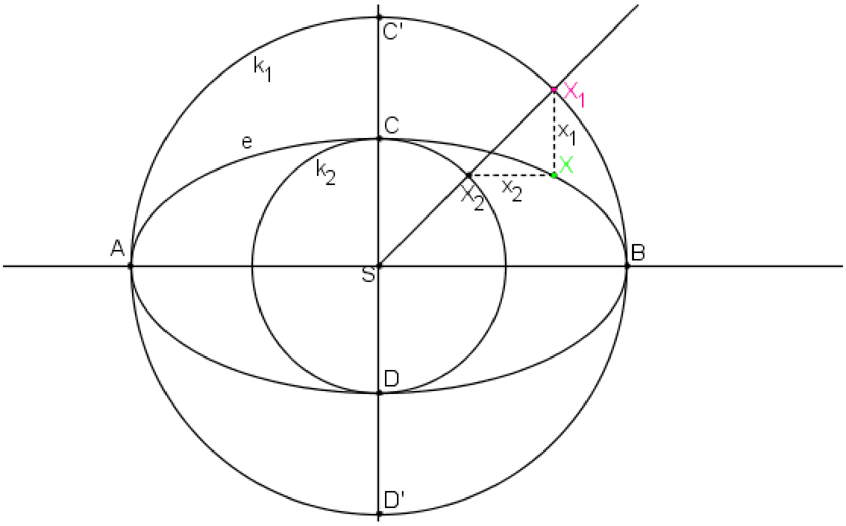


Obrázek 6.10: Osová afinita mezi kružnicí a elipsou.

6.3.2 Trojúhelníková konstrukce

Elipsa je dána hlavními vrcholy A, B a vedlejšími vrcholy $C, D.S$ je střed elipsy. Sestrojíme kružnici $k_1(S, a)$ (pozn. a je velikost hlavní poloosy) a kružnici $k_2(S, b)$ (pozn. b je velikost vedlejší poloosy). Na kružnici k_1 libovolně zvolíme bod X_1. Průsečík polopřímky SX_1 a kružnice k_2 je bod X_2. Přímka x_1 prochází bodem X_1 a je rovnoběžná s vedlejší osou elipsy o_2. Přímka x_2 prochází bodem X_2 a je rovnoběžná s hlavní osou elipsy o_1. Průsečík přímek x_1, x_2 je bod X. Bod X je bodem elipsy. Volbou bodu X_1 na kružnici k_1 získáváme různé polohy bodu X na elipse.

V appletu si můžete zkusit, že bod X vykreslí elipsu. Růžovým bodem X_1 lze pohybovat.



Obrázek 6.11: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Kde je v této konstrukci schovaná osová afinita? Trojúhelníková konstrukce je složena ze dvou osových afinit:

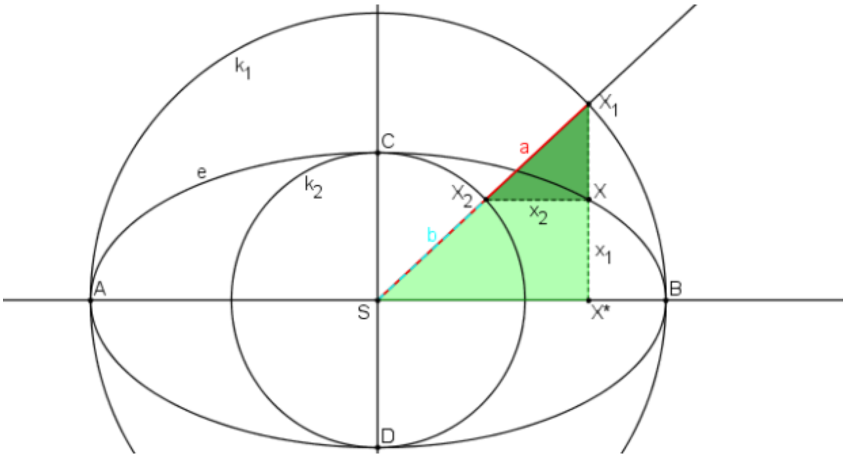
- První pravoúhlá afinita (OA1) je mezi kružnicí k_1 (S, a) a elipsou, kde osa afinity je hlavní osa elipsy.

- Druhá pravoúhlá afinita (OA2) je mezi kružnicí k_2 (S, b) a elipsou, kde osa afinity je vedlejší osa elipsy.

Bod X_1 je obrazem bodu X v OA1. Protože se jedná o pravoúhlou afinitu, bod X leží na přímce x_1 kolmé k ose afinity AB procházející bodem X_1. Obdobně je bod X_2 obrazem bodu X v OA2. Protože se jedná o pravoúhlou afinitu, bod X leží na přímce x_2 kolmé k ose afinity CD procházející bodem X_2. Průsečík přímek x_1, x_2 je bod X ležící na elipse.

Důkaz:

Trojúhelníkovou konstrukci lze dokázat podle podobnosti trojúhelníků SX_1X* a X_2X_1X, kde $X*$ je průsečíkem přímky XX_1 a osy afinity AB. Přímka X_2X je rovnoběžná s osou afinity, proto se rovnají úhly X_1X_2X, X_1SX* a X_1XX_2, X_1X*S. Trojúhelníky SX_1X*, X_2X_1X jsou podobné podle věty uu. V trojúhelnících platí: $\frac{|XX_1|}{|X_1X^*|} = \frac{|X_2S|}{|X_1S|} = \frac{b}{a}$. Osou afinity je hlavní osa elipsy, směr afinity je kolmý k ose afinity. Je dána osa afinity, směr afinity a charakteristika $k = \frac{b}{a}$, čímž je OA jednoznačně určena.



Obrázek 6.12: Důkaz trojúhelníkové konstrukce.

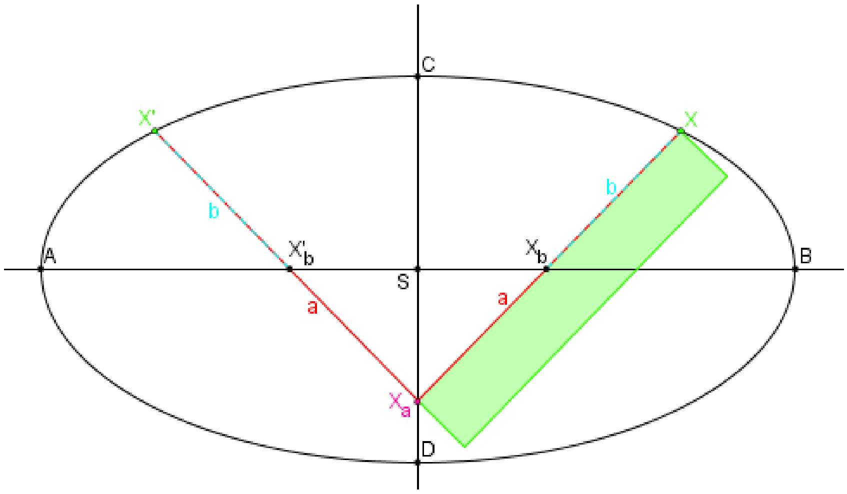
6.3.3 Rozdílová proužková konstrukce

Nejprve si ukažme, jak se pomocí rozdílové proužkové konstrukce sestrojí elipsa. (Pozn. Elipsu lze sestrojit i pomocí součtové proužkové konstrukce.)

Na rovný proužek papíru vyznačíme body X, X_a, X_b, tak že $|XX_a|=a$, $|XX_b|=b$, $|X_aX_b|=a-b$. Nyní pohybujeme proužkem papíru tak, že bod X_a leží vždy na vedlejší ose elipsy (CD) a bod X_b leží na hlavní ose elipsy (AB). Bod X opisuje elipsu, která má velikost hlavní poloosy $= a$ a velikost vedlejší poloosy $= b$.

Pozn: Proužkové konstrukce využijeme hlavně v případě, pokud máme vyrýsovat elipsu z níž známe hlavní vrcholy A, B a libovolný bod M na elipse.

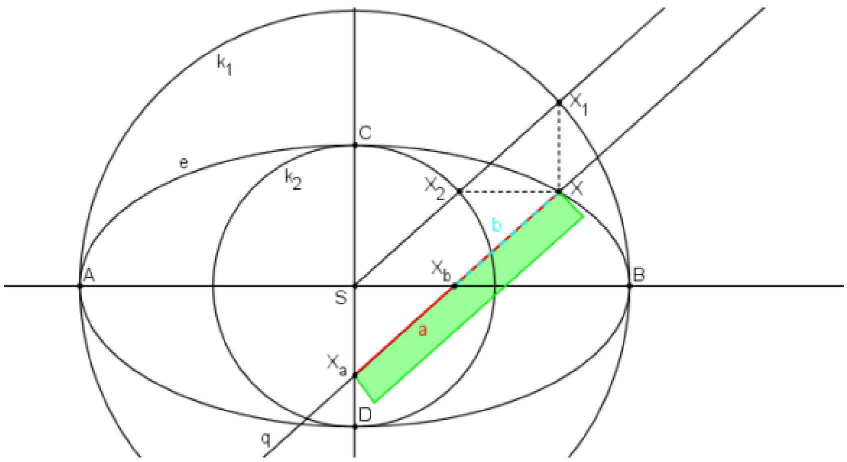
V appletu si můžeme zkusit, že bod X vykreslí elipsu. Růžovým bodem X_a lze pohybovat.



Obrázek 6.13: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Jak se při této konstrukci využívá osová afinita? Bod X sestrojme pomocí trojúhelníkové konstrukce, kde využíváme složení dvou osových afinit. Bodem X vedeme přímku q rovnoběžnou s přímkou SX_1. Průsečík přímky q s vedlejší osou elipsy o_2 je bod X_a. Úsečky X_1X a SX_a jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Úsečky SX_1 a X_aX jsou rovnoběžné. Proto body X_1XX_aS tvoří rovnoběžník a velikost úsečky $X_aX = a$. Obdobně průsečík přímky q s hlavní osou elipsy o_1 je bod X_b. Úsečky X_2X a SX_b jsou rovnoběžné a stejně dlouhé. Úsečky SX_2 a X_bX jsou rovnoběžné. Proto body X_2XX_bS tvoří rovnoběžník a velikost úsečky $X_bX = b$.



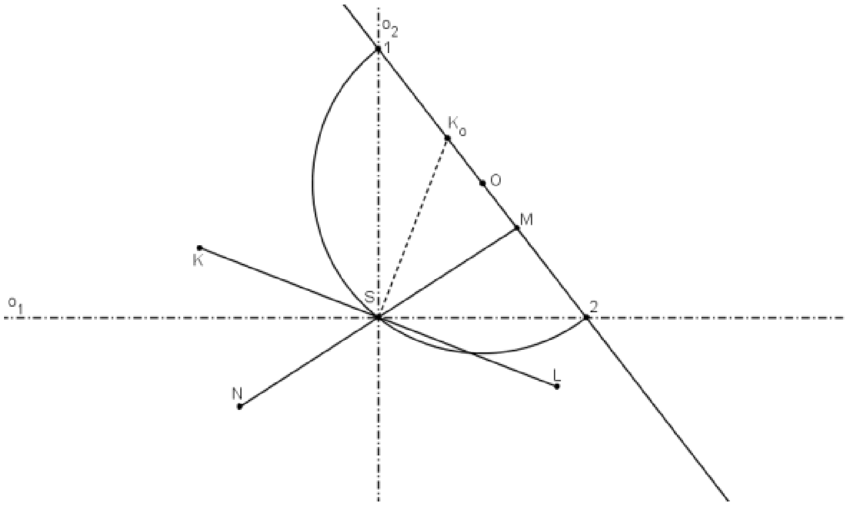
Obrázek 6.14: $|X_aX| = a$.

6.3.4 Rytzova konstrukce

Z kapitoly o obrazu kružnice v osové afinitě víme, že elipsu můžeme sestrojit pomocí Rytzovy konstrukce (3.5, str. 29). I Rytzovu konstrukci lze odvodit ze vztahu osové afinity mezi kružnicí a elipsou.

Opět vyjdeme z trojúhelníkové konstrukce. Na k_1 zvolíme libovolně body K_1, L_1, M_1, N_1 tak, že přímky K_1L_1, M_1N_1 jsou na sebe kolmé a tvoří tak sdružené průměry kružnice. (Stejně jako přímky K_2L_2, M_2N_2.) Pomocí trojúhelníkové konstrukce najdeme body K, L, M, N, které tvoří sdružené průměry elipsy.

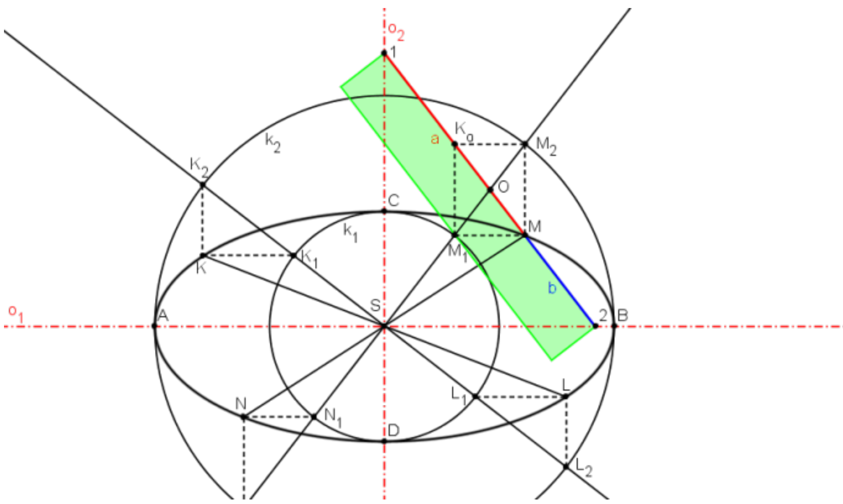
Otočme body K, K_1, K_2 kolem bodu S o 90°. Pak bod K_{1o} splývá s bodem M_1 a bod K_{2o} splývá s bodem M_2. Body M_1, M, M_2, K_o tvoří obdélník ($M_2M \parallel M_1K_o, M_2K_o \parallel M_1M$ a úhel M_2MM_1 je pravý). Bod O je průsečíkem úhlopříček v obdélníku M_1, M, M_2, K_o. Přímka MK_o protíná osy elipsy v bodech $1, 2$. Pro $|M2|<|M1|$ platí, že $|M2| = b$, $|M1| = a$. $|M2| = b$ plyne z podobnosti trojúhelníků $SO2, M_1OM$. Protože vrchol trojúhelníka O je průsečíkem úhlopříček v obdélníku, úhly při vrcholech M_1, M jsou shodné. Úsečky $M_1M, S2$ jsou rovnoběžné. Proto jsou úhly při vrcholech $S, 2$ také shodné. Proto platí: $|SM_1| = |M2| = b$. Pro velikost $|M1| = a$ platí obdobný vztah, ale vycházíme ze shodnosti trojúhelníků M_1OK_o, M_2OM a podobnosti trojúhelníků $SO1, M_2OK_o$. Podobně platí $|K_o1| = b$, $|K_o2| = a$. Protože O je průsečíkem úhlopříček obdélníka M_1, M, M_2, K_o, platí $|OM_1| = |OM| = |OM_1| = |OK_o|$. Proto platí $|O2| = |OS| = |O1|$. Body $S, 1, 2$ proto leží na kružnici se středem v bodě O a poloměrem OS. Při Rytzově konstrukci se využívá této kružnice při hledání bodů $1, 2$. Přímky $S1, S2$ jsou hlavní a vedlejší osa elipsy.



Obrázek 6.15: Průměry K_1, L_1, M_1, N_1 (resp. K_2, L_2, M_2, N_2) jsou na sebe v kružnici k_1 (resp. k_2) kolmé.

6.3.5 Součtová proužková konstrukce

Přímo z Rytzovy konstukce vyplývá součtová proužková konstrukce.

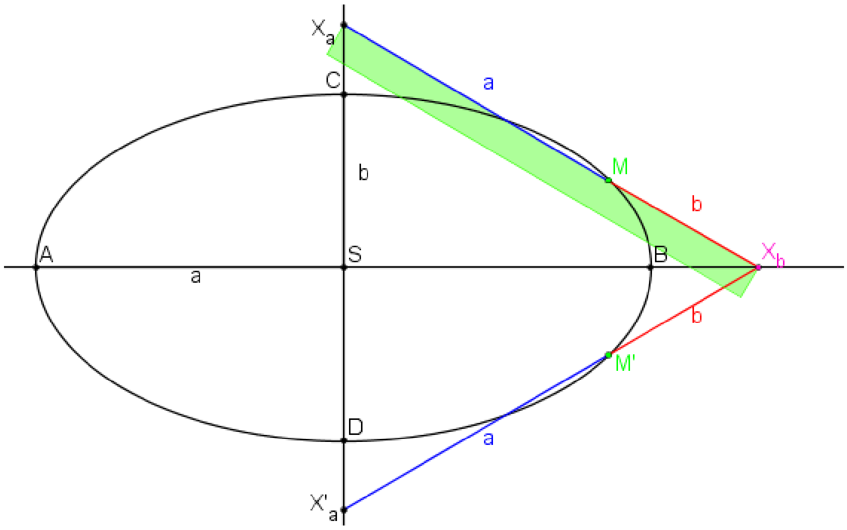


Obrázek 6.16: Přímo z Rytzovy konstrukce vyplývá součtová proužková konstrukce.

Na rovný proužek papíru vyznačíme body M, X_a, X_b, tak že $|MX_a|$=a, $|MX_b|$=b, $|X_aX_b|$= $a + b$. Nyní pohybujeme proužkem papíru tak, že bod X_a leží na vedlejší ose elipsy o_2 a bod X_b leží na hlavní ose elipsy o_1. Bod M

opisuje elipsu, která má velikost hlavní poloosy je rovna a a velikost vedlejší poloosy je rovna b.

V appletu si můžeme zkusit, že bod M vykreslí elipsu. Růžovým bodem X_b lze pohybovat.



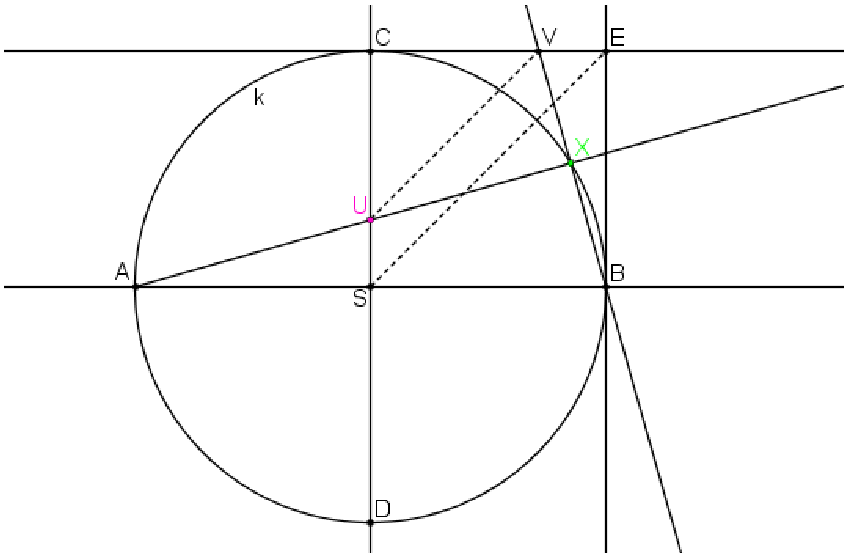
Obrázek 6.17: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

6.3.6 Příčková konstrukce

K příčkové konstrukci elipsy využijeme bodovou konstrukci kružnice. *„Úsečky AB, CD jsou dva k sobě kolmé průměry kružnice k. Bod E je průsečík tečen kružnice v bodech B a C. Je-li bod U bodem úsečky SC a bod V bodem úsečky CE, $UV \parallel SE$, je průsečík X přímek AU a BV bodem kružnice k“* [7].

V appletu si můžete zkusit, že bod X vykresluje kružnici. Růžovým bodem U lze pohybovat.

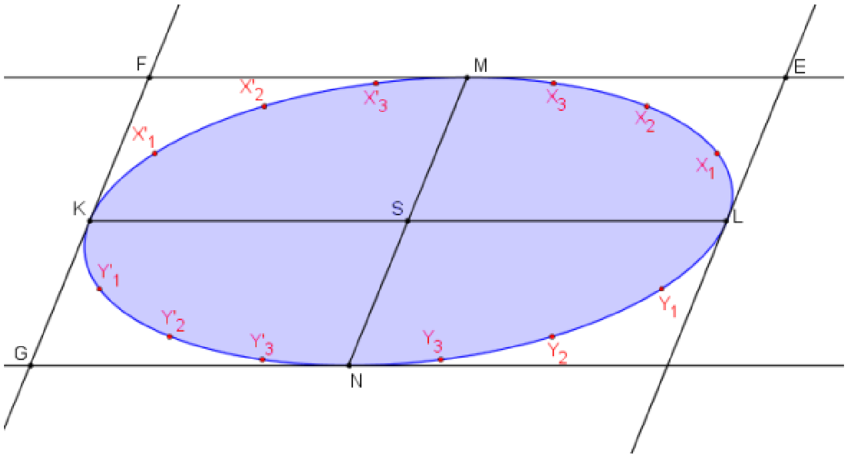


Obrázek 6.18: Applet z programu Geogebra

Applet je vytvořen v programu GeoGebra

Bod V nemusíme vždy hledat pomocí přímky procházející bodem U a rovnoběžné s SE. Můžeme úsečky SC, EC rozdělit na stejný počet dílků a dělicí body očíslovat $V1, V2, V3, ..., U1, U2, U3$,... tak, aby čísla vzrůstala směrem ke společnému bodu úseček, bodu C.

Protože mezi elipsou a kružnicí je vztah osové afinity můžeme tuto konstrukci využít i pro elipsu. Díky zachovávání vlastnosti incidence, rovnoběžnosti a dělicího poměru nemusíme znát hlavní a vedlejší vrcholy, ale libovolné sdružené průměry. Úsečky KL, MN jsou sdružené průměry elipsy e. Úsečky SM, EM rozdělíme na stejný počet dílků (např. čtyři) a dělicí body označíme $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$ tak, že čísla vzrůstají směrem ke společnému průsečíku úseček, bodu M. Bod elipsy X_1 je průsečíkem přímek KU_1, LV_1 (X_2 je průsečíkem přímek KU_2, LV_2, X_3 je průsečíkem přímek KU_3, LV_3). Takto jsme vytvořili několik bodů elipsy v jednom kvadrantu. Konstrukci můžeme zopakovat pro ostatní kvadranty.



Obrázek 6.19: Jsou dány sdružené průměry elipsy KL, MN a tečny v těchto bodech. (Protože KL, MN jsou sdružené průměry, tečny v bodech K, L jsou rovnoběžné s úsečkou MN a tečny v bodech M, N jsou rovnoběžné s úsečkou KL.) Bod E je průsečík tečen elipsy v bodech M, L.

6.4 Přímka a elipsa

V úlohách s přímkou a elipsou můžeme využít osovou afinitu a pomocí ní elipsu zobrazit na kružnici. Úlohu s přímkou a elipsou tak zjednodušíme na úlohu s přímkou a kružnicí. Úlohy s přímkou a kružnicí již vyřešíme jednoduše.

Zadání úloh na prorýsování najdete zde: Zadání (viz příloha 5), Řešení (viz příloha 5).

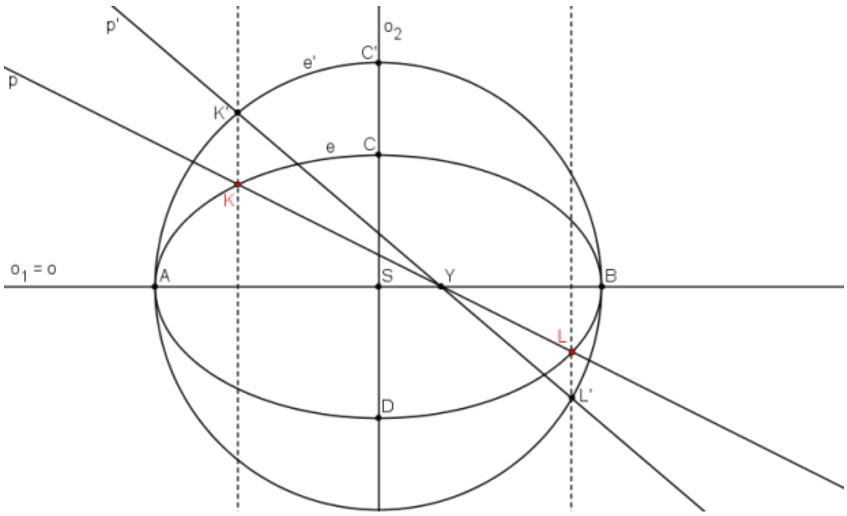
6.4.1 Průsečíky přímky s elipsou

Je dána přímka p, která protíná elipsu e. Najděte průsečíky této přímky s elipsou.

Tato úloha se zdá jednoduchá. Průsečíky jsou jednoduše tam, kde přímka protíná elipsu. Bohužel ale nejsme schopni vykreslit elipsu přesně. Můžeme si pomoci oskulačními kružnicemi nebo velkým počtem přesně sestrojených bodů, ale přesně elipsu nikdy nevykreslíme. My samozřejmě chceme určit průsečíky přesně. K tomu nám pomůže osová afinita.

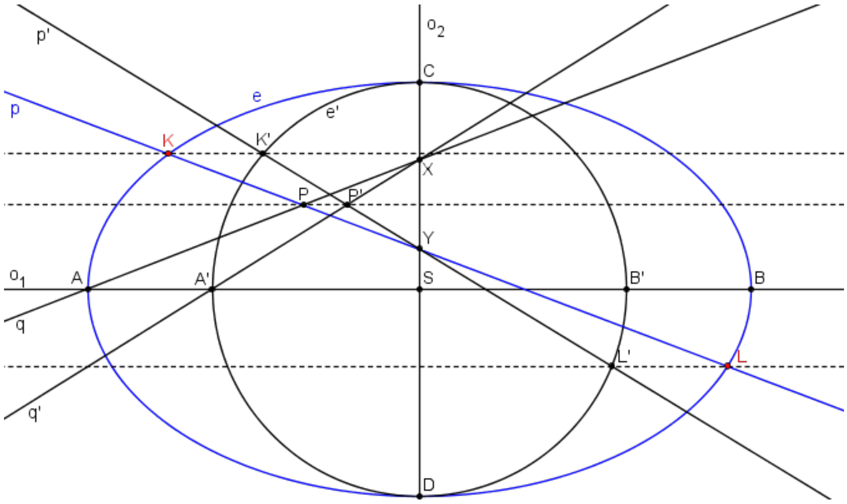
Elipsa je dána hlavní osou o_1, na které leží hlavní vrcholy A, B, a vedlejší osou o_2, na které leží vedlejší vrcholy C, D. Zvolíme osu afinity a pár odpovídajících si bodů tak, aby obrazem elipsy byla kružnice. Průsečíky přímky s kružnicí již najdeme, protože kružnici umíme vykreslit přesně. Osovou afinitu můžeme volit dvěma způsoby (viz osová afinita mezi elipsou a kružnicí (6.3, str. 82)):

- Osa afinity splývá s *hlavní* osou elipsy. Střed elipsy S a body A, B jsou proto samodružné. Bod C' je jedním z průsečíků kružnice k $(S, |SA|)$ s vedlejší osou elipsy o_2. Nyní máme určenou osovou afinitu (o, CC') a obraz elipsy. Dále určíme obraz p' přímky p. Průsečíky přímky p' s kružnicí e' jsou body K', L'. Ve směru afinity a na přímce p leží body K, L. Body K, L jsou průsečíky přímky p s elipsou.

- 

Obrázek 6.20: *Krokované řešení:* Je dána elipsa e a přímka p. Určete průsečíky přímky p s elipsou e.

- Osa afinity splývá s *vedlejší* osou elipsy. Střed elipsy S a body C, D jsou proto samodružné. Bod A' je jedním z průsečíků kružnice k $(S, |SC|)$ s hlavní osou elipsy o_1. Nyní máme určenou osovou afinitu (o, AA') a obraz elipsy. Dále určíme obraz p'přímky p. Průsečíky přímky p' s kružnicí k jsou body K', L'. Ve směru afinity a na přímce p leží body K, L. Body K, L jsou průsečíky přímky p s elipsou.

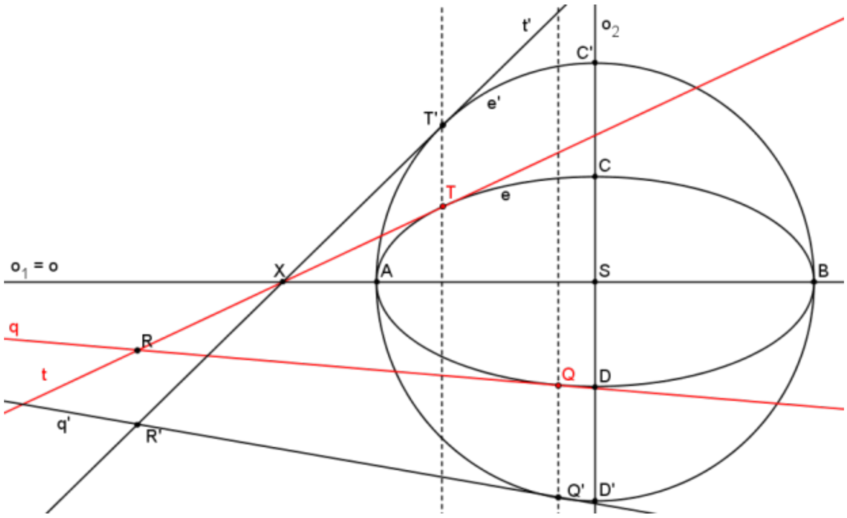


Obrázek 6.21: Průsečíky přímky s elipsou.

6.4.2 Tečna k elipse z vnějšího bodu

Elipsa je dána hlavními vrcholy A, B a vedlejšími vrcholy C, D. Bod R leží vně elipsy. Sestrojte tečny elipsy z bodu R.

Tuto úlohu můžeme řešit pomocí ohniskových vlastností elipsy. Ukážeme si, že lze využít i osovou afinitu. Stejně jako v úloze „Průsečíky přímky s elipsou“ zvolíme kolmou afinitu tak, že osa afinity splývá s hlavní (nebo vedlejší) osou elipsy. Elipsa e se zobrazí na kružnici e' se středem v bodě S a poloměrem SA. Obraz C' bodu C leží na kružnici e' a přímce kolmé k ose afinity procházející bodem C. Najdeme obraz R' bodu R. Nyní máme úlohu zjednodušenou - z vnějšího bodu R' sestrojte tečny ke kružnici e'. Pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem SR' najdeme dotykové body T', Q' tečen t', Q' ke kružnici e'. Tečny t, q jsou určeny přímkami RT, RQ. Body T, Q jsou dotykové body tečen t, q vedených bodem R k elipse e.

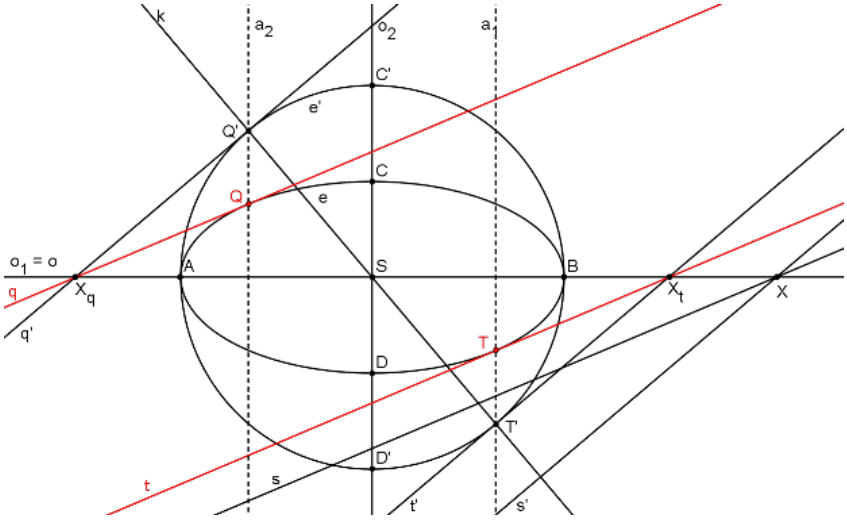


Obrázek 6.22: *Krokované řešení:* Je dána elipsa e a bod R. Sestrojte tečny k elipse e z bodu R.

6.4.3 Tečna k elipse rovnoběžná s přímkou

Elipsa je dána hlavními vrcholy A, B a vedlejšími vrcholy C, D. Dále je dána přímka s. Sestrojte tečny elipsy rovnoběžné s přímkou s.

Úloha by se opět dala řešit pomocí ohniskových vlastností elipsy. Pomocí osové afinity ji ale můžeme také vyřešit. Zvolme kolmou afinitu tak, že osa afinity splývá s hlavní (nebo vedlejší) osou elipsy. Elipsa se zobrazí na kružnici se středem v bodě S a poloměrem SA. Obraz C' bodu C leží na kružnici k a přímce kolmé k ose afinity procházející bodem C. Dále najdeme také obraz s' přímky s. Nyní řešíme úlohu - sestrojte tečny rovnoběžné s přímkou s' ke kružnici e'. Středem kružnice e' vedeme kolmici k k přímce s'. Průsečíky kolmice k s kružnicí e' jsou body $T', Q'.T', Q'$ jsou dotykové body tečen. Tečny t', q' jsou rovnoběžné s přímkou s'. Najdeme vzory tečen t', q'. Body T, Q jsou dotykové body tečen t, q k elipse.



Obrázek 6.23: *Krokované řešení:* Je dána elipsa e a přímka s. Sestrojte tečny k elipse e, které jsou rovnoběžné s přímkou s.

6.5 Otáčení roviny do průmětny v rovnoběžných promítáních

S osovou afinitou se můžeme setkat při otáčení obecné roviny α do roviny průmětny π, kde rovina α není s rovinou π rovnoběžná. Otočit rovinu znamená najít osu otáčení a otočit její libovolný bod, který neleží na ose otáčení. Osou otáčení je průsečnice roviny α s průmětnou π, tj. stopa $p\alpha$. Zvolíme libovolný bod A roviny α, který neleží na ose otáčení. Abychom mohli otočit bod A potřebujeme zjistit střed otáčení, poloměr otáčení a rovinu otáčení.

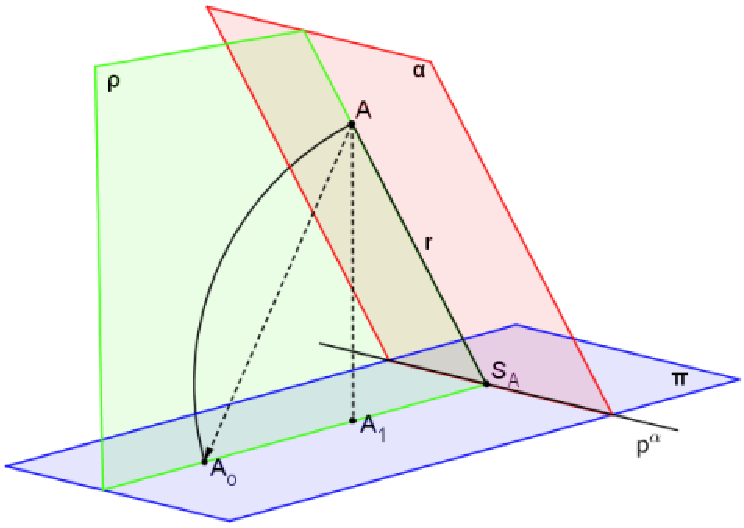
Rovina otáčení ϱ bodu A je kolmá k ose otáčení $p\alpha$.

Střed otáčení S_A bodu A je průsečík roviny otáčení ϱ s osou otáčení $p\alpha$.

Poloměr otáčení r bodu A je jeho vzdálenost od středu otáčení $S_A, r = |AS|$.

Otočený bod A (A_o) potom leží na průsečnici roviny otáčení s průmětnou π a na kružnici se středem v bodě S_A a poloměrem r.

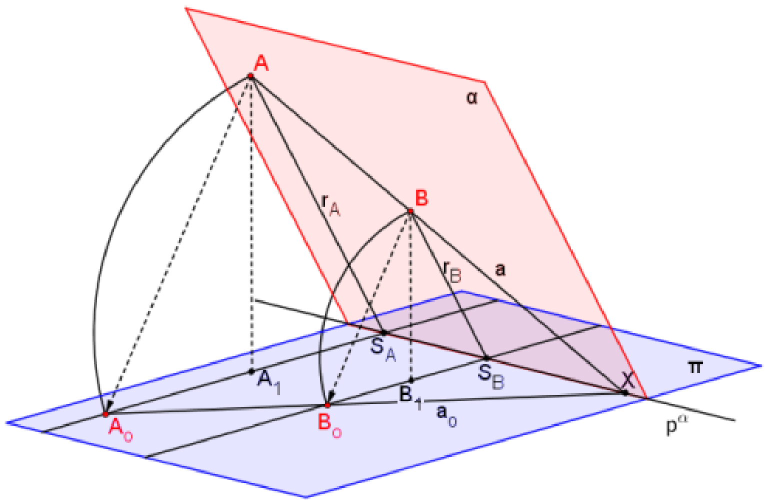
Zdrojem pro tuto kapitolu je kniha Aloise Urbana Deskriptivní geometrie I [10].



Obrázek 6.24: Otáčení obecné roviny do roviny průmětny.

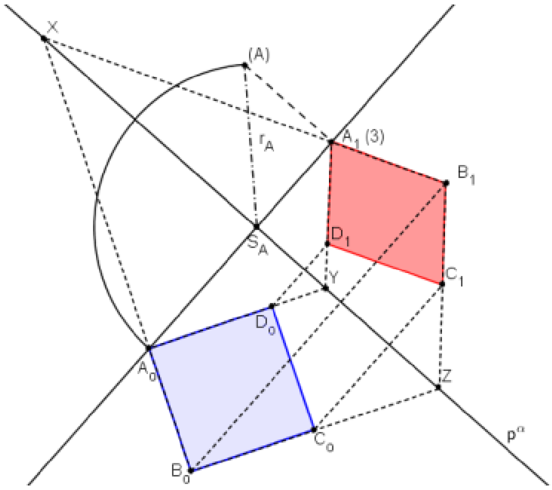
6.5.1 Otáčení roviny do průmětny a osová afinita

Otáčet jednotlivé body roviny α do roviny průmětny π je možné, ale zdlouhavé. K otočení dalších bodů roviny α do roviny průmětny π je výhodnější využít osové afinity mezi rovinami α, π. Osou afinity je průsečnice rovin α, π (tzn. osa otáčení = osa afinity), odpovídající si body jsou bod A a jeho otočená poloha A_o.



Obrázek 6.25: Otáčení obecné roviny do roviny průmětny a osová afinita.

Otáčení roviny do průmětny je prostrová úloha. Proto ji musíme převést do roviny na vztahy mezi body a přímkami. Body a přímky roviny α pravoúhle promítneme do roviny π. Bod A se tak zobrazí do bodu A_1 (Pozn. V jednotlivých promítáních pracujeme přímo s bodem A_1). Osová afinita v rovině je pak určena stopou roviny α a odpovídajícími si body A_o, A_1. Směr A_o, A_1 je vždy kolmý k ose afinity, ale nemusí se tak ve všech promítáních zobrazit.



Obrázek 6.26: Otáčení obecné roviny do roviny průmětny.

6.5.2 Užití otáčení

Otáčení využijeme například při určování *skutečné velikosti rovinného obrazce* ležícího v dané rovině α. Pouze v jednom případě vidíme hned skutečnou velikost obrazce a to tehdy, když je rovina α rovnoběžná s průmětnou π. Pokud je rovina α s průmětnou π různoběžná, průmět skutečného obrazce se zkreslí. Například vidíme, že průmětem útvaru je rovnoběžník. Nejsme ale schopni říci, jestli je útvar ve skutečnosti čtverec, obdélník či jen obecný rovnoběžník.

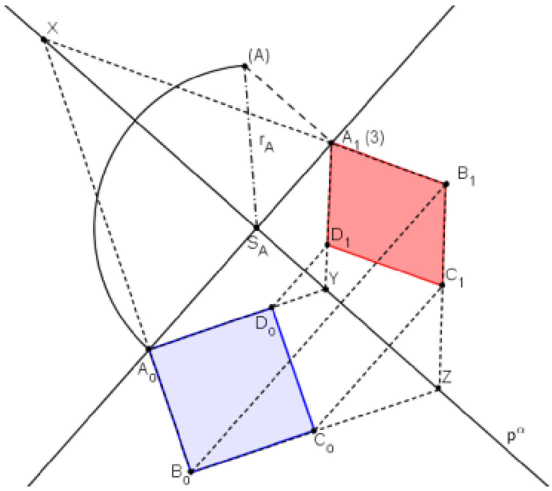
Podobně využijeme otáčení při určování *skutečné velikosti řezu.* Řez tvoří obecný n-úhelník, který leží v rovině řezu. Postup je stejný jako při určování skutečné velikosti rovinného obrazce. Skutečnou velikost řezu potřebujeme například pro vytvoření modelu.

Obdobnou úlohou je *sestrojení útvaru ležícího v rovině.* Úkolem je sestrojit například pravidelný n-úhelník ležící v dané rovině α. Protože nevíme, jak se n-úhelník zkreslí, musíme nejprve rovinu α otočit do průmětny. V průmětně vidíme n-úhelník ve skutečné velikosti - můžeme ho tam proto sestrojit. Pomocí osové afinity mezi rovinou α a průmětnou pak otočíme rovinu α zpět do své původní polohy.

6.5.3 Otáčení v různých promítáních

S otáčením se setkáme v různých promítáních, kde je osová afinita určena různými způsoby. Osu afinity určíme lehce, protože osa afinity = osa otáčení = průsečnice rovin α, π. Princip otáčení je všude stejný, ale konstrukce otočeného bodu A (A_o) se v každém promítání trochu liší. K tomu je potřeba více znalostí, které nejsou náplní této práce.

Ukažme si, jak se otáčí například v kótovaném promítání.



Obrázek 6.27: V kótovaném promítání je dána stopa roviny α, ve které leží body A, B. V rovině α sestrojte čtverec $ABCD$.

Kapitola 7

Užití středové kolineace

7.1 Řezy jehlanů

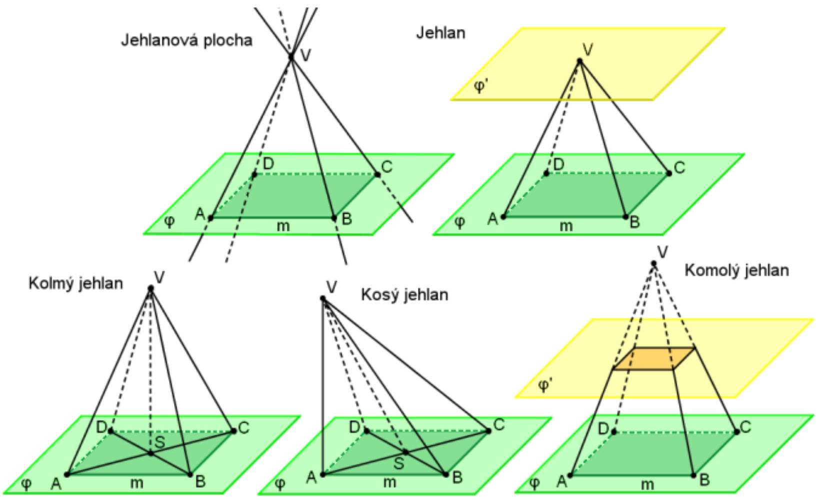
V kapitole budeme pracovat s tělesy, která jsou zobrazena ve volném rovnoběžném promítání (6.1, str. 75)

7.1.1 Jehlan, jehlanový prostor a jehlanová plocha

Než začneme pracovat s jehlany, připomeňme definici jehlanové plochy a jehlanového prostrou. *„Množina všech přímek procházejících daným bodem V a protínajících mnohoúhelník m (jeho obvod), který leží v rovině φ neprocházející bodem V, se nazývá* jehlanový prostor (jehlanová plocha)" [10] (str. 90). Bod V se nazývá *vrchol*. Množina všech přímek plochy, které protínají stranu mnohoúhelníka m, tvoří *stěnu jehlanové plochy*. Je-li mnohoúhelníkem n-úhelník, mluvíme o n-boké jehlanové ploše.

Jehlan získáme z jehlanového prostrou tak, že jej omezíme dvěma rovinami. Jednou rovinou je zpravidla rovina φ a mnohoúhelník m pak nazýváme *podstavou* jehlanu. Druhou rovinou je rovina φ' ($\varphi'||\varphi$) procházející vrcholem V. Vzdálenost rovin φ, φ' se nazývá *výška* jehlanu. Má-li podstava střed S a platí, že přímka SV je kolmá k rovině φ, pak se jehlan nazývá *kolmý*, jinak je *kosý*. Je-li jehlan kolmý a jeho podstavu (mnohoúhelník m) tvoří pravidelný n-úhelník, pak se jehlan nazývá *pravidelný*.

Můžeme se setkat ještě s jedním typem jehlanu - *komolý jehlan*. Komolý jehlan získáme z jehlanové plochy tak, že ji omezíme dvěma rovinami. Jednou rovinou je zpravidla rovina φ. Druhou rovinou je rovina φ' ($\varphi'||\varphi$), která však neprochází vrcholem V a vzdálenost rovin φ, φ' je menší než výška jehlanu.

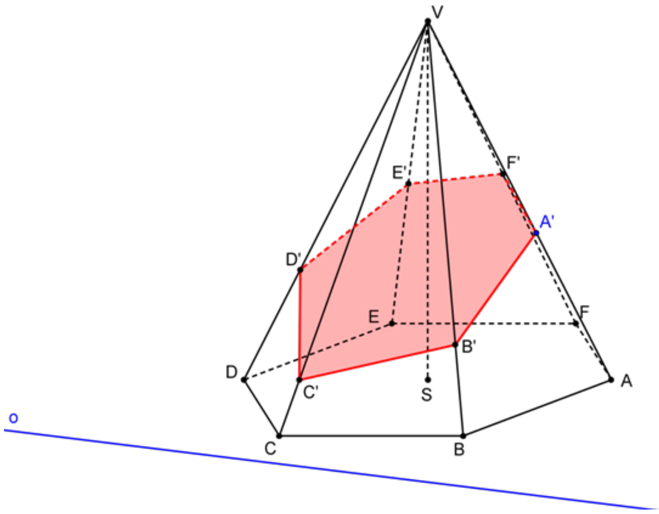


Obrázek 7.1: Jehlan a jehlanová plocha.

7.1.2 Řezy jehlanů

Jak již víme z úvodu kapitoly SK mezi dvěma rovinami (4.1, str. 40), středovou kolineaci lze využít při řezu jehlanu rovinou. Hrany AV, BV,... prochází společným bodem V. Vrchol V je proto zároveň střed kolineace S. Osu kolineace tvoří průsečnice roviny podstavy a roviny řezu. Odpovídající si body jsou body A, A', kde bod A' je bodem hrany AV a zároveň leží v rovině řezu a bod A je bodem hrany AV a zároveň leží v rovině podstavy.

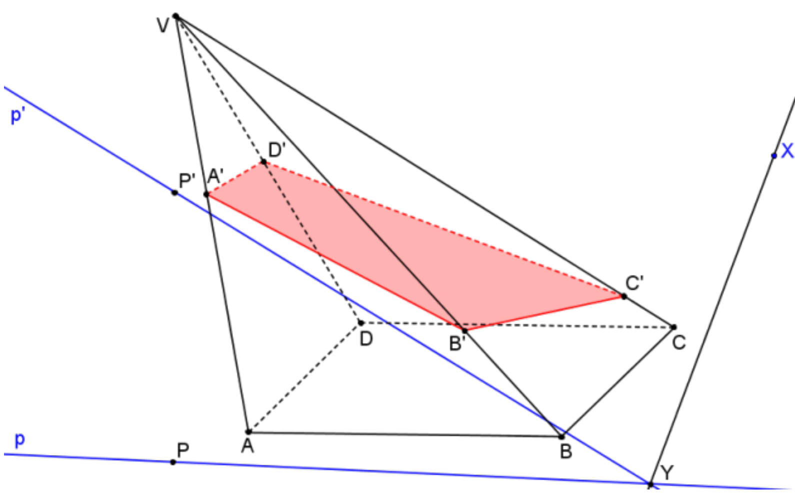
Příklad: Je dán pravidelný šestiboký jehlan s podstavou $ABCDEF$. Rovina řezu je dána průsečnicí o roviny řezu a roviny podstavy a bodem A', který leží na hraně AV.



Obrázek 7.2: *Krokované řešení:* Je dán šestiboký jehlan s podstavou $ABCDEF$. Rovina řezu je určena přímkou o a bodem A'.

Postupujeme stejně, pokud je úkolem sestrojit řez kosého jehlanu.

Příklad: Mějme dán kosý čtyřboký jehlan $ABCDV$. Rovina řezu α je určena bodem X' a přímkou p'. Bod X' leží v rovině řezu a zároveň v rovině podstavy. Dále je dána přímka p, která je průmětem přímky p' do roviny podstavy z bodu V .



Obrázek 7.3: *Krokované řešení:* Je dán kosý čtyřboký jehlan s podstavou $ABCD$. Rovina řezu α je určena bodem X' a přímkou p'. Bod X' leží v rovině řezu a zároveň v rovině podstavy. Dále je dána přímka p, která je průmětem přímky p' do roviny podstavy z bodu V

V jiných zobrazovacích metodách je většinou rovina řezu dána svými stopami. Osou kolineace je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy, střed kolineace S je vrchol jehlanu V. Bohužel není dána dvojice odpovídajících si bodů. Musíme proto najít jeden bod řezu pomocí jiných konstrukcí. Konstrukce se liší podle jednotlivých promítání, myšlenka konstrukce je však stále stejná. Bod A' je průsečík hrany jehlanu AV s rovinou řezu.

Další příklady na vypracování s výsledky:

- Volné rovnoběžné promítání: Zadání (viz příloha 14), Řešení (viz příloha 14)
- Mongeovo promítání: Zadání (viz příloha 15), Řešení (viz příloha 15)
- Kosoúhlé promítání: Zadání (viz příloha 16), Řešení (viz příloha 16)
- Pravoúhlá axonometrie: Zadání (viz příloha 17), Řešení (viz příloha 17)

Tyto úlohy mají více řešení. Uvádíme pouze to řešení, které přímo využívá středovou kolineaci.

7.2 Řez kužele

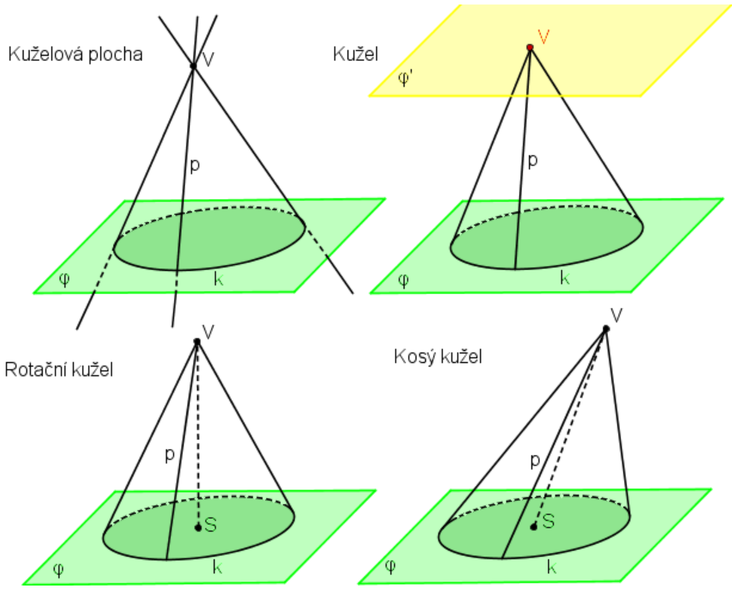
V kapitole budeme pracovat s tělesy, která jsou zobrazena ve volném rovnoběžném promítání (6.1, str. 75)

7.2.1 Kužel, kuželový prostor a kuželová plocha

Než začneme pracovat s kuželi, připomeňme definici kuželové plochy a kuželového prostrou. *„Množina všech přímek procházejících bodem V a protínajících kružnici (kruh) k, která leží v rovině φ neprocházející bodem V, se nazývá* kuželová plocha (kuželový prostor)“ [10] (str. 92). Bod V se nazývá *vrchol.*

Kužel získáme z kuželového prostoru tak, že jej omezíme dvěma rovinami. Jednou rovinou je zpravidla rovina φ a kružnici k pak nazýváme *podstavou* kužele. Druhou rovinou je rovina φ' ($\varphi'||\varphi$) procházející vrcholem V. Vzdálenost rovin φ, φ' se nazývá *výška* kužele. Spojnice středu podstavy S s vrcholem V se nazývá osa. Je-li osa kolmá k rovině podstavy, pak se kužel nazývá *rotační*, jinak je *kosý*. V textu budeme pracovat s rotačními i kosými kuželi.

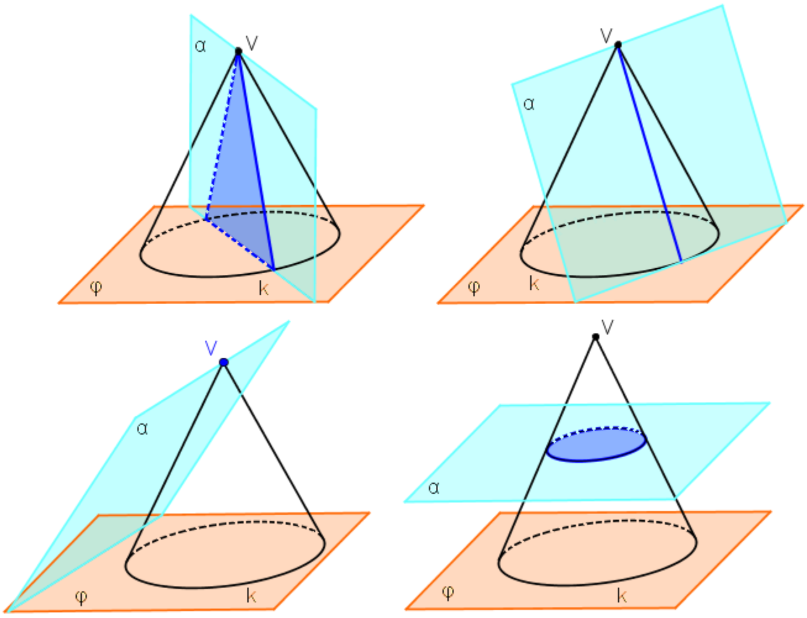
Pozn: Kuželová plocha může být obecně množina všech přímek procházející bodem V, které protínají křivku k ležící v rovině φ neprocházející bodem V.



Obrázek 7.4: Kužel, kuželová plocha, kolmý a kosý kužel.

7.2.2 Řez kužele

Nejprve se podívejme, jak můžeme volit rovinu řezu α. Speciálním případem je, když rovina α prochází vrcholem kuželu. Této rovině říkáme vrcholová rovina. Pokud průsečnice vrcholové roviny a roviny podstavy φ protíná podstavnou kružnici ve dvou bodech, pak je řezem trojúhelník procházející vrcholem V. (Pokud bychom uvažovali tento řez kuželovou plochou, pak jsou řezem různoběžné přímky procházející vrcholem V.) Pokud tato průsečnice protíná podstavu pouze v jednom bodě (průsečnice je tečnou kružnice), pak je řezem jedna površka. Pokud průsečnice neprotíná podstavnou kružnici, pak je řezem pouze jeden bod - vrchol V. Dalším speciálním případem je, pokud je rovina α rovnoběžná s rovinou podstavy φ. Pak je řezem kružnice. U těchto typů řezů nevyužíváme středovou kolineaci.



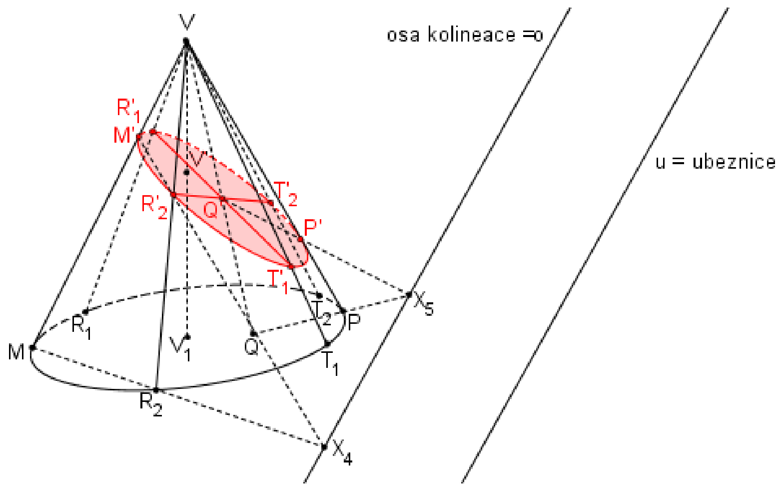
Obrázek 7.5: Různe řezy kužele.

Stejně jako u řezu jehlanu (7.1, str. 99), tak i u řezu kužele je mezi rovinou podstavy a rovinou řezu vztah středové kolineace. Osou kolineace je jejich průsečnice, středem kolineace je vrchol kužele V. Párem odpovídajících si bodů je nejčastěji střed podstavné kružnice S a průsečík osy kužele SV s rovinou řezu, ozn. S'. Obrazem kružnice ve středové kolineaci může být elipsa, parabola či hyperbola. Viz klasifikaci (4.5, str. 60). Jsou dva způsoby jak rozlišit, jakou kuželosečkou je řez:

- Najdeme úběžnici středové kolineace (V, o, S, S'). Podle počtu průsečíků podstavné kružnice s úběžnicí určíme, jakou kuželosečku řez tvoří. Viz klasifikaci (4.5, str. 60).
- Vrcholem kužele V vedeme vrcholovou rovinu rovnoběžnou s rovinou řezu. Přímka p je průsečnice roviny podstavy a vrcholové roviny. Podle počtu průsečíků podstavné kružnice s přímkou p určíme, jakou kuželosečku řez tvoří. Pokud je přímka p sečnou podstavné kružnice, pak je řezem hyperbola. Pokud je přímka p tečnou podstavné kružnice, pak je řezem parabola. Pokud nemá přímka p s podstavou žádný společný bod, pak je řezem elipsa.

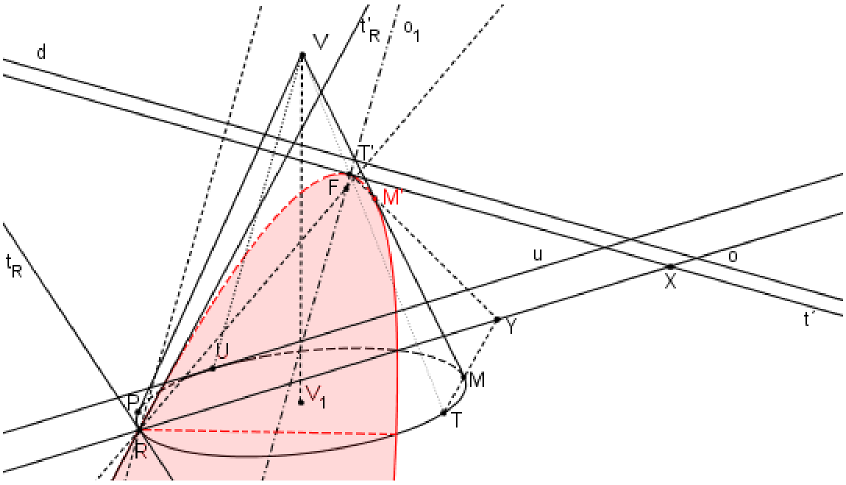
Podstava se ve většině zobrazení promítne jako elipsa. Ve středové kolineaci však platí, stejně jako u kružnice, že obraz elipsy je kuželosečka (elipsa, parabola či hyperbola). Proto můžeme při konstrukcích využít stejných postupů jako v kapitole obrazu kružnice ve středové kolineaci (4.5, str. 60) a to i v případě, že je kužel kosý.

Příklad: Je dán rotační kužel, střed podstavy V_1, vrchol V. Rovina řezu α je určena průsečnicí o roviny podstavy a roviny α a bodem V' na ose V_1V.



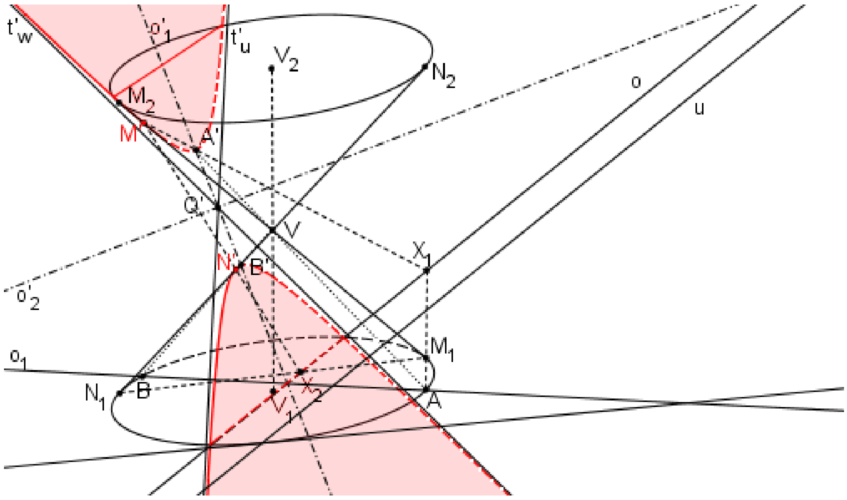
Obrázek 7.6: *Řešení:* Je dán rotační válec. Rovina řezu α je určena přímkou o (průsečnicí roviny podstavy a roviny α) a bodem V' ležícím na ose V_1V.

Příklad: Je dán rotační kužel, střed podstavy V_1, vrchol V. Rovina řezu α je určena průsečnicí o roviny podstavy a roviny α a úběžnicí u.



Obrázek 7.7: *Řešení:* Je dán rotační kužel. Rovina řezu α je určena přímkou o (průsečnicí roviny podstavy a roviny α) a úběžnicí u dotýkající se podstavné kružnice v právě jednom bodě U. Protože úběžnice má s podstavnou kružnicí právě jeden společný bod, výsledným řezem je parabola.

Příklad: Je dán rotační kužel, střed podstavy V_1, vrchol V. Rovina řezu α je určena průsečnicí o roviny podstavy a roviny α a úběžnicí u.



Obrázek 7.8: *Řešení:* Je dán rotační kužel. Rovina řezu α je určena přímkou o (průsečnicí roviny podstavy a roviny α) a úběžnicí u protínající podstavnou kružnici ve dvou bodech. Protože úběžnice má s podstavnou kružnicí právě dva společné body, výsledným řezem je hyperbola. Postupujeme stejně jako v kapitole SK Obraz kružnice (4.5, str. 60).

V jiných zobrazovacích metodách je většinou rovina řezu dána svými stopami. Osou kolineace je průsečnice roviny řezu a roviny podstavy, střed kolineace S je vrchol jehlanu V. Nemusí být vždy zadána dvojice odpovídajících si bodů. Musíme proto najít jeden bod řezu pomocí jiných konstrukcí. Konstrukce se liší podle jednotlivých promítání, myšlenka konstrukce je však stále stejná. Bod S' je průsečík osy kužele SV s rovinou řezu.

Další příklady na vypracování s výsledky:

- Volné rovnoběžné promítání: Zadání (viz příloha 18), Řešení (viz příloha 18)
- Mongeovo promítání: Zadání (viz příloha 19), Řešení (viz příloha 19)
- Kosoúhlé promítání: Zadání (viz příloha 20), Řešení (viz příloha 20)
- Pravoúhlá axonometrie: Zadání (viz příloha 21), Řešení (viz příloha 21)

Tyto úlohy mají více řešení. Uvádíme pouze to řešení, které přímo využívá středovou kolineaci.

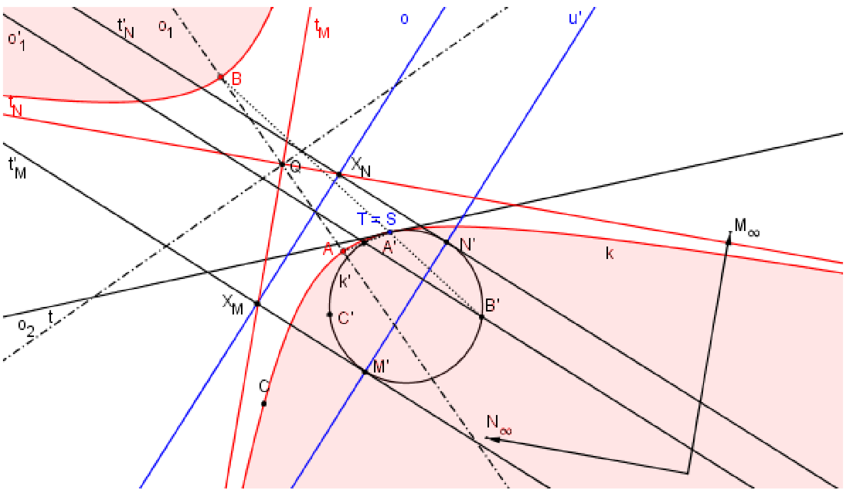
7.3 Konstrukce kuželoseček

Díky tomu, že obrazem kružnice ve středové kolineaci je elipsa, parabola i hyperbola, můžeme středovou kolineaci využít při řešení úloh o kuželosečkách. K úlohám jsou však často potřeba znalosti projektivní geometrie, kterými se tato práce nezabývá a většina konstrukcí je nad rámec středoškolského učiva. Uveďme si tedy pouze několik příkladů, ve kterých můžeme SK použít. U příkladů najdete literaturu, kde můžete najít řešení.

Středová kolineace mezi kružnicí a kuželosečkou se užívá při konstrukci kuželosečky dané body a tečnami. Vždy je potřeba pět určujících prvků (nebo čtyři prvky + typ kuželosečky).

- *Příklad:* Sestrojte rovnoosou hyperbolu, je-li dán směr $M\infty$ jedné asymptoty, tečna t s dotykovým bodem T a bod C.

  Řešení: „Střed kolineace S zvolíme v dotykovém bodě T tečny t a kružnici k' tak, aby se dotýkala tečny t v bodě T. K bodům $C, M\infty, N\infty$ (směr $N\infty$ je kolmý ke směru $M\infty$, protože hyperbola má být rovnoosá) najdeme odpovídající body C', M', N'. Úběžnice je přímka $u' = M'N'$. Osa kolineace o je rovnoběžná s u' a prochází průsečíkem přímek $CN\infty, C'N'$“ [10] (str. 387).Tímto jsme našli kolineaci, která převádí kružnici k' na hledanou hyperbolu. K sestrojení hyperboly využijeme postup popsaný v kapitole SK Obraz kružnice (4.5, str. 60).



Obrázek 7.9: *Krokované řešení:* Sestrojte rovnoosou hyperbolu, je-li dán směr $M\infty$ jedné asymptoty, tečna t s dotykovým bodem T a bod C.

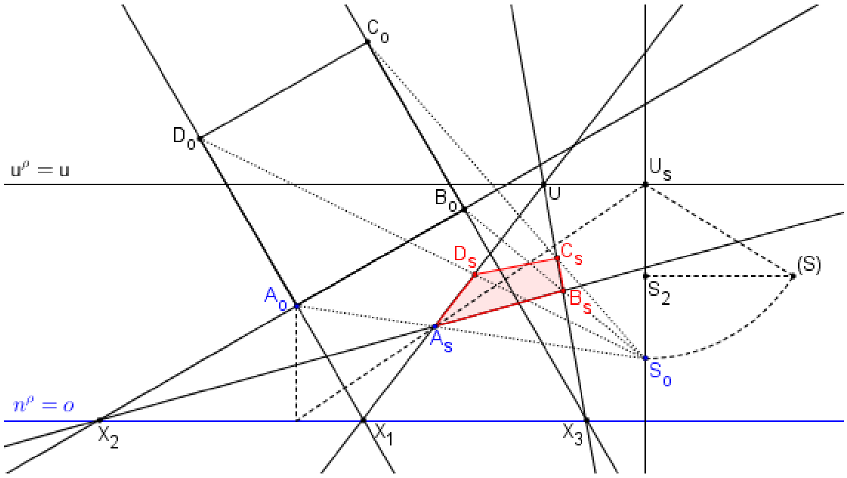
- *„Kuželosečka je dána dvěma tečnami a, b s body dotyku A, B a dalším bodem C. Sestrojte další bod“* [10] (str. 384).
- *„Sestrojte parabolu, jsou-li dány dva její body A, B a tečny c, d“* [10] (str. 386).
- *„Sestrojte hyperbolu, je-li dána její asymptota m a tři body A, B, C“* [10] (str. 386).
- *„Sestrojte rovnoosou hyperbolu, která je dána tečnou t s bodem dotyku T a dvěma body M_1, M_2“* [5] (str. 51).
- *„Sestrojte kuželosečku, jsou-li dána tři její body A, B, C a ohnisko F“* [2] (str. 202).
- *„Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány tři její body a dvě tečny“* [2] (str. 201).
- *„Sestrojte kuželosečku, jsou-li dány dva její body a tři tečny“* [2] (str. 202).

7.4 Otáčení roviny do průmětny ve středových promítáních

Tak jasme osovou afinitu využili při otáčení roviny do průmětny v rovnoběžných promítáních, využijeme středovou kolineaci při otáčení roviny do průmětny ve středových promítáních.

Středové promítání:

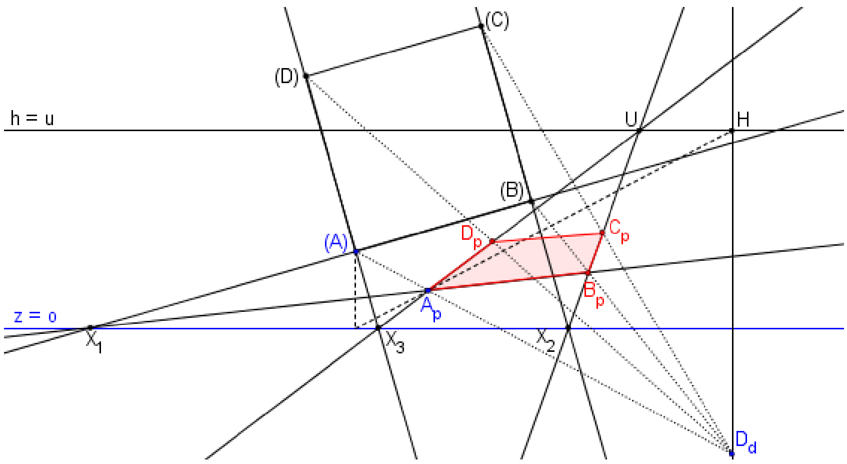
Při zobrazování rovinných útvarů, které leží v rovině ϱ, která není rovnoběžná s průmětnou ani neprochází středem promítání musíme rovinu otočit. Mezi středovými průměty A_s a otočenými polohami A_o bodu A roviny ϱ platí vztah středové kolineace. Osou kolineace je stopa dané roviny ϱ, středem kolineace je otočená poloha S_o středu promítání S.



Obrázek 7.10: Otáčení základní roviny do průmětny ve středovém promítání.

Lineární perspektiva:

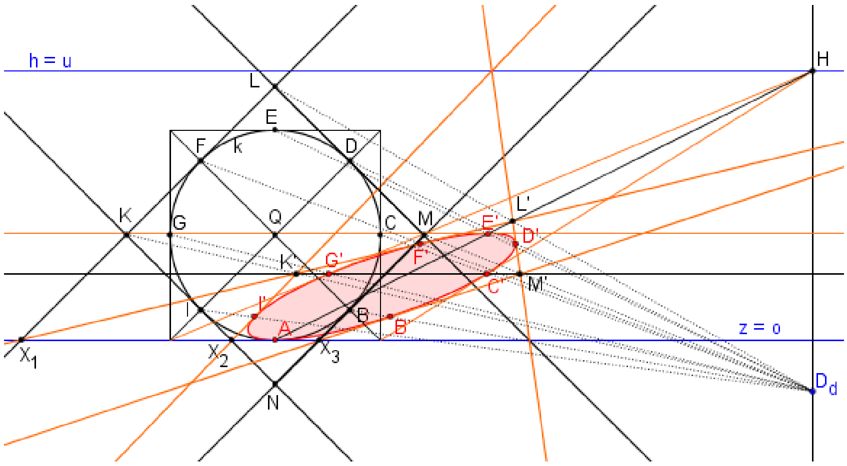
Lineární perspektiva je speciální případ středového promítání, můžeme proto využít všechny konstrukce, které se tam používají, tedy i středovou kolineaci. SK využijeme hlavně při otáčení základní roviny π do nárysny. Perspektiva bodu A_p a jeho otočená poloha (A) si odpovídají ve středové kolineaci, kde osa kolineace je základnice z, střed kolineace je dolní distančník D_d a úběžnice splývá s horizontem h.



Obrázek 7.11: Otáčení základní roviny do průmětny v lineární perspektivě.

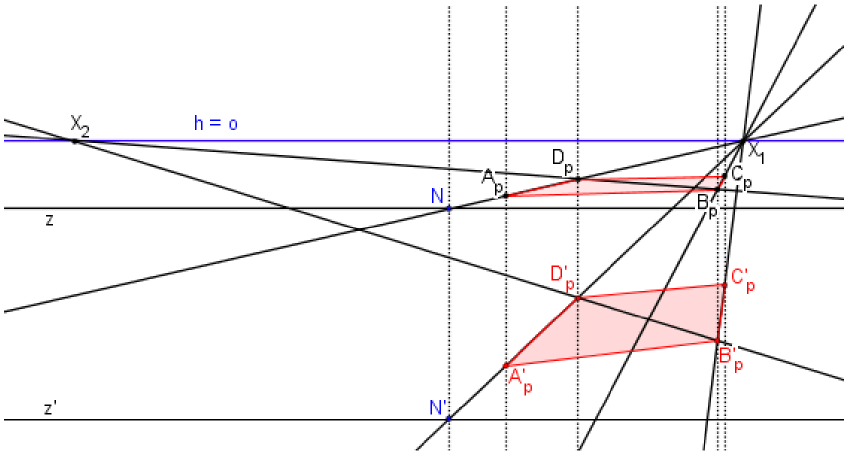
Obraz kružnice v lineární perspektivě:

Mezi otočenou polohou kružnice a jejím perspektivním průmětem můžeme opět využít vztahu středové kolineace, stejně jako při otáčení základní roviny do průmětny. Uvažujme pouze případ, kdy se kružnice zobrazí na elipsu. Jsou dvě možnosti, jak elipsu sestrojit. Můžeme využít přesnou konstrukci, při které použitím středové kolineace nalezneme sdružené průměry elipsy a pomocí Rytzovy konstrukce vyrýsujeme elipsu. Podrobný postup naleznete v kapitole SK Obraz kružnice (4.5, str. 60). Druhým možným způsobem, je využití tzv. osmibodové konstrukce. Osmibodová konstrukce využívá osmi vhodně zvolených bodů na kružnici a jejich tečen ke kružnici. Pomocí obrazů těchto bodů a jejich tečen nesestrojíme přesně osy a vrcholy elipsy, ale k přibližnému určení elipsy postačí. Obrazy prvků získáme pomocí středové kolineace, kde středem kolineace je dolní distančník, osou kolineace je základníce a úběžnicí je horizont. Jak vhodně volíme body a jejich tečny v lineární perspektivě vidíme na následujícím obrázku.



Obrázek 7.12: Osmibodová konstrukce elipsy v lineární perspektivě.

Poznámka: V lineární perspektivě se kromě středové kolineace se setkáme i se vztahem osové afinity a to při snížení půdorysu. Snížení půdorysu se využívá v případě, že vzdálenost horizontu od základnice je velmi malá a obrázek je pak nečitelný či nepřesný. Pomocnou rovinu π' získáme posunutím základní roviny π ve směru kolmém k rovině π. Vztah pravoúhlé osové afinity mezi půdorysem π a sníženým půdorysem π' je určen osou afinity = horizont h, odpovídající si přímky z, z'.



Obrázek 7.13: Snížení půdorysu v lineární perspektivě.

Zdrojem pro tuto kapitolu je kniha Aloise Urbana Deskriptivní geometrie I [10].

Kapitola 8

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit webovou aplikaci pro osovou afinitu a středovou kolineaci tak, aby si čtenář osvojil a rozšířil jejich vlastnosti. Studenti středních a vysokých škol se o osové afinitě a středové kolineaci dozví nejvíce při hodinách deskriptivní geometrie, ale rozsah učiva závisí na učiteli a počtu vyučovaných hodin. Ne vždy je čas na probrání detailů.

Vytvořila jsem proto souhrn informací o osové afinitě, středové kolineaci a jejich využití. Využila jsem názorných obrázků, appletů a krokovaných obrázků, aby vedly čtenáře k lepšímu pochopení textu.

Literatura

[1] Harant M., Lanta O.. *Desktiptivní geometrie část I. pro 2. ročník SVVŠ.* Praha: SPN, 1966.

[2] Havlíček K.. *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček.* Praha: SNTL, 1956.

[3] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J.. *Deskriptivní geometrie díl I.*. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1945.

[4] Kraemer E.. *Zobrazovací metody.* Praha: SPN, 1991.

[5] Drábek K., Harant F., Setzer O.. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL, 1978.

[6] Piska R, Medek V.. *Deskriptivní geometrie I.* Praha: SNTL, 1966.

[7] Pomykalová E.. *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* Praha: Prometheus, 2010.

[8] Pomykalová E.. *Matematika pro gymnázia – stereometrie.* Praha: Prometheus, 1998.

[9] Sobotka J.. *Deskriptivní geometrie promítání parallelního.* Praha: nákladem Jednoty českých matematiků a české matice technické, 1906.

[10] Sobotka J.. *Deskriptivní geometrie promítání parallelního.* Praha: nákladem Jednoty českých matematiků a české matice technické, 1906.

Příloha A

Sada úloh s řešením

1. Určenost osové afinity
2. Dourčování prvků v osové afinitě
3. Určenost středové kolineace
4. Dourčování prvků ve středové kolineaci
5. Sada úloh – přímka a elipsa
6. Řezy hranolů – Volné rovnoběžné promítání
7. Řezy hranolů – Mongeovo promítání
8. Řezy hranolů – Kosoúhlé promítání
9. Řezy hranolů – Pravoúhlá axonometrie
10. Řezy válců – Volné rovnoběžné promítání
11. Řezy válců – Mongeovo promítání
12. Řezy válců – Kosoúhlé promítání
13. Řezy válců – Pravoúhlá axonometrie
14. Řezy jehlanů – Volné rovnoběžné promítání
15. Řezy jehlanů – Mongeovo promítání
16. Řezy jehlanů – Kosoúhlé promítání
17. Řezy jehlanů – Pravoúhlá axonometrie

18. Řezy kuželů – Volné rovnoběžné promítání

19. Řezy kuželů – Mongeovo promítání

20. Řezy kuželů – Kosoúhlé promítání

21. Řezy kuželů – Pravoúhlá axonometrie