UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vybrané matematické objevy na cestě k Newtonovu kalkulu

Selected mathematical discoveries on the way to Newton's calculus

Autor: Lukáš Mixa

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Ph.D.

Praha 2013

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením Prof. RNDr. Ladislava Kvasze, Ph.D. V práci jsou použity informační zdroje uvedené na konci práce v seznamu literatury.

V Praze dne 9. června 2013

____

Lukáš Mixa

Děkuji vedoucímu mé bakalářské práce, Prof. RNDr. Ladislavu Kvaszovi, Ph.D., *za* velkou ochotu *a trpělivost, cenné rady* a *připomínky, které mi pomohly* k realizaci *této bakalářské práce*.

Děkuji své rodině a nejbližším za podporu při studiu.

Abstrakt

Sedmnácté století je významné nejen z hlediska matematiky, ale i společenského vývoje v Evropě. Práce nabízí přehled o vývoji matematiky v Anglii v tomto období. Uvádím v ní pouze ty matematické objevy, které lze vztáhnout k dílu Isaaca Newtona. V první části se zabývám konstrukcí logaritmu Johnem Napierem, Henry Briggsem a Gregory Saint-Vincentem. Ve druhé části se věnuji metodám hledání tečen a kvadratur. Popisuji postupy Pierra Fermata, Johna Wallise a Isaaca Barrowa. V závěrečné třetí části ukazuji, jak výše uvedené objevy využil Isaac Newton k definování diferenciálního a integrálního počtu. Na tomto příkladu vývoje kalkulu lze demonstrovat, že historický přístup k matematice nabízí názorné propojení geometrie, algebry i matematické analýzy a může být využit ve výuce.

Klíčová slova: logaritmus, tečna, kvadratura, fluxie, fluenta, Newtonův kalkulus

Abstract

Seventeenth century is important not only for mathematics but for European social development in general. This thesis offers an overview about development of mathematics in the seventeenth century England. I present only those mathematical discoveries, which were relevantfor the work of Isaac Newton. In the first part I show the construction of logarithms by John Napier, Henry Briggs and Gregory Saint-Vincent. The second part is dedicated to methods of tangents and quadrature. I describe works of Pierre Fermat, John Wallis and Isaac Barrow. In the third part is shown how Isaac Newton used the mentioned findings for the development of the calculus. I use this example to demonstrate, that historical approach offers an illustrative connection between geometry, algebra and mathematical analysis and can be used in teaching.

Keywords: Logarithm, tangent, quadrature, fluxion, fluent, calculus

Obsah

Úvod

Betty Dobbsová charakterizuje bádání v oblasti historie matematiky následovně: „Podvědomě předpokládáme, že myšlení myslitelů minulosti v podstatě probíhalo stejně jako naše. Pak se na ně podíváme zblízka a ke svému údivu zjistíme, že naši vzdělaní předchůdci z minulosti se nám vůbec nepodobají; nevidí plně důsledky své vlastní práce, odmítají věřit tomu, co je dnes zcela bezesporné, jsou omezeni metafysickými a náboženskými předsudky, o nichž by měli vědět, že je ke studiu přírody nepotřebují; a hrůzo hrůzoucí, berou vážně tak nelegitimní pojmy jako je astrologie, alchymie, kouzla a hudba sfér, Boží prozřetelnost a historie spasení“ (Dobbs, 1994 cit. podle Saxl, 2008, s. 8).

Pokrok v oblasti matematiky v 17. století je důsledkem renesance, která navazuje na vzdělanost starověkého Řecka, a zámořských plaveb, které pro navigaci potřebovaly přesné astronomické výpočty. Ve své práci se zabývám historickým vývojem matematiky v sedmnáctém století v Anglii. Jedná se o nejvýznamnější období, ve kterém byly položeny základy analytické geometrie, logaritmů a diferenciálního počtu. V této době můžeme rozlišit dva hlavní proudy vývoje matematiky, kontinentální a anglický. Kořeny kontinentálního proudu sahají do renesanční Itálie. Následně se centrum vzdělanosti přesunulo do Francie, kde mezi nejvýznamnější představitele patřili René Descartes (1596 – 1650), Pierre de Fermat (1601 – 1665), Christian Huygens (1629 – 1695) a Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716). Anglický proud je ovlivněn dílem Archimédovým. Mezi jeho představitele patří John Wallis (1616 – 1703), Isaac Barrow (1630 – 1677) a hlavně jedna z nejvýznamnějších postav vědeckého pokroku vůbec, Sir Issac Newton (1642 – 1727).

Prvním impulzem pro zvolení tématu byl můj zájem o historii matematiky. Zvolil jsem konkrétní matematické objevy, které lze vztáhnout k dílu Isaaca Newtona. Cílem práce je čtenáři představit matematiku v 17. století a nalézt podměty, které vedli ke vzniku diferenciálního a integrálního počtu. Snažím se nabídnout inspiraci z historie matematiky pro zpestření výuky. Může pomoci historický přístup k snazšímu pochopení pojmů derivace, integrál nebo logaritmus?

V první části se věnuji logaritmu jako nástroji numerické matematiky i jeho přínosu pro diferenciální počet. Popisuji proces, kterým John Napier zkonstruoval logaritmus a první logaritmické tabulky. Jeho práci brzy zdokonalil Henry Briggs, jehož dekadický logaritmus se používá do dnes a jeho tabulky byly před dobou počítačů nezbytnou součástí vědeckých výpočtů. Kromě této numerické konstrukce se ke stejným výsledkům dospělo i geometricky. Proto v této části uvádím i objev vlámského jezuity Gregory Saint-Vincenta.

Ve druhé části uvádím osobnosti, které svými výzkumy přispěly k objevu diferenciálního a integrálního počtu. Popisuji zde postup Pierra Fermata k určování tečen a výpočtům obsahů pod křivkou. Věnuji se Johnu Wallisovi a jeho interpolační metodě, která vedla k velmi přesnému vyčíslení $\pi/4$ a poskytla motivaci Isaacu Newtonovi k vytvoření nekonečných řad. Zmiňuji zde i práci Newtonova učitele Isaaca Barrowa.

Závěrečná třetí kapitola je o životě a matematickém díle Isaaca Newtona. Rozsah jeho poznání je natolik veliký, že shrnuje všechny objevy uvedené v této práci a mílovými kroky je přibližuje našemu dnešnímu chápání.

Snažil jsem se napsat práci tak, aby byla pochopitelná i pro ty, kteří se matematikou nezabývají. Při výkladu matematických skutečností vycházím hlavně z C. H. Edwardse: The Historical Development of the Calculus, s. 142 – 230, kterého jsem doplnil tak, abych co nejsrozumitelněji vyložil vybrané téma. Obrázky a tabulky použité v práci jsou vytvořeny v programech Geogebra a MS excel.

1 Logaritmus

V 16. Století došlo v souvislosti se zámořskými objevy a rozvojem astronomie a navigace k potřebě sestrojení přesných trigonometrických tabulek. Koperníkův žák Georg Joachim Rheticus (1514-1576) začal s konstrukcí podrobných patnáctimístných tabulek, které byly vydané roku 1596. Trigonometrie má základní význam při triangulaci, která se používá v astronomii k měření vzdáleností mezi dvěma hvězdami a v geodézii k měření vzdálenosti dvou bodů na povrchu země. Zrodila se tak potřeba najít způsob, jak usnadnit výpočty operující s vícecifernými čísly.

S rozvojem astronomie a fyziky na počátku 17. století vystupuje naléhavě potřeba rozsáhlých a přesných numerických výpočtů. Dalekohled byl objeven roku 1608 a již roku 1609 jej Galileo Galilei namířil na oblohu. Už před tím však prováděl Tycho Brahe pouhým okem s využitím zaměřovacích přístrojů (velkých zaměřovacích úhloměrů nazývaných kvadranty a sextanty) tak přesná měření, že z nich Johanes Kepler mohl odvodit zákony pohybu planet Sluneční soustavy. Zatímco předchozí praxe potřebovala především obchodní počty a důležité bylo umět rychle sčítat a odčítat, vědeckotechnické výpočty vyžadují mnohem častěji násobení, případně dělení. Nahradit násobení opakovaným sčítáním není rozumné, protože to výpočty velmi zpomaluje. Na vyřešení tohoto problému se nejvíce podílel John Napier (1550-1617), který vynalezl mechanickou pomůcku pro násobení velkých čísel dnes známou jako Napierovy kostky a první logaritmické tabulky.

Analogii mezi geometrickou a aritmetickou posloupností popsal už Michael Stifel (1487-1567) ve své díle *Aritmetica Integra* z roku 1544 (Edwards 1979, s. 143). Upozornil, že sčítání v aritmetické posloupnosti odpovídá násobení v posloupnosti geometrické.

0	1	2	3	**4**	**5**	6	7	8	**9**	10	…
1	2	4	8	**16**	**32**	64	128	256	**512**	1024	…

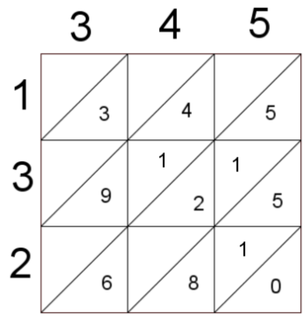
Například pro aritmetickou posloupnost platí, že $4 + 5 = 9$ a geometrickou posloupnost platí, že $16 \,.\, 32 = 512$. Vztah $2^4 . 2^5 = 2^{4+5} = 512$ ale ve své době napsat nemohl, protože ještě nebyla vynalezena notace, která by to umožnila.

1.1 John Napier

Napier byl nejstarším synem skotského barona Archibalda von Merchiston. Narodil se roku 1550 v Merchiston Castle u Edinburghu. Své vzdělání získal nejprve na univerzitě St. Andrews, potom údajně procestoval Evropu a osvojil si vědomosti z matematiky a literatury. V roce 1572 obdržel od svého otce mnoho pozemků. Zabýval se matematikou, fyzikou, astronomií a astrologií. Roku 1593 vydal knihu *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, ve které důkazy v euklidovském duchu dokazuje, že papež je antikrist a že roku 1786 nastane konec světa. Po této teologické knize začal roku 1594 práci, která následujícím generacím usnadnila numerické počítání. Výpočty vedoucí k sestrojení prvních logaritmických tabulek mu zabraly celých 20 let, které strávil v izolaci na svém zámku.

Roku 1614 vydává *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, obsahující logaritmické tabulky spolu s návodem na jejich používání (Edwars 1979, s. 142). Když dostal Kepler Napierovy tabulky, použil jich k ulehčení zdlouhavých výpočtů, které vedly k objevení třetího zákona planetárního pohybu. Po objevu dalekohledu přispěly logaritmické tabulky k dalšímu zrychlení rozvoje astronomie. Napier zemřel roku 1617 na svém zámku Merchiston Castle u Edinburghu. Posmrtně vyšla roku 1619 jeho druhá kniha *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* obsahující popis postupu, kterým Napier svoje tabulky zkonstruoval.

Ještě před napsáním svých tabulek vynalezl Napier mechanický nástroj pro násobení dnes známý jako „Napierovy kostky“. Název je odvozen od jejich vzhledu – jednalo se o bílé podlouhlé hranoly podobné kostem. Tyto hranoly byly pravidelné čtyřboké a měly výšku rovnou desetinásobku délky hrany podstavy a na jejich stěnách byly napsány násobky všech číslic od 1 do 9. Na každé ze čtyř bočních stěn byla jiná násobilka, protože číslice se v každém z činitelů mohou opakovat. Při počítání se vybraly vhodné kostky a jejich boční stěny, a tak se poskládal jeden z činitelů. Druhý činitel vznikl vybráním odpovídajících řádků ve skládačce z kostek odpovídajících prvnímu činiteli. Napierovy kostky byly založeny na ve středověku využívaném algoritmu pro násobení gelosia.

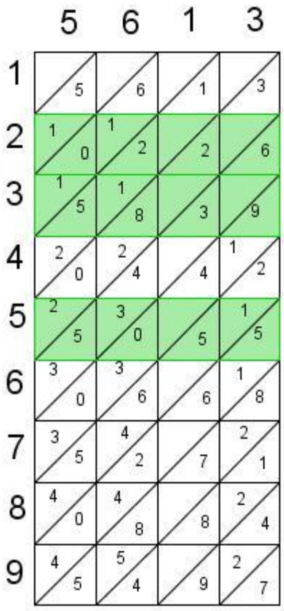


Obrázek 1

Na obrázku 1 je tabulka, která se využívala pro algoritmus gelosia. Chceme vynásobit čísla 132 a 345. Pro násobení dvou tříciferných čísel obsahuje devět polí, každé rozdělené úhlopříčkou. Nad úhlopříčku zapíši desítky, pod úhlopříčku jednotky. Činitele napíši k tabulce, viz Obrázek 1. Prvky v tabulce získám násobením čísel, která odpovídají dané buňce tabulky. Druhý řádek v tabulce je: 3.3 = 9; 3.4 = 12; 3.5 = 15. Následně sčítáme zprava doleva po úhlopříčkách:

0; (5+1+8); (5+1+2+6); (4+1+9); 3

Číslo zapíši 3, 14, 14, 14, 0; desítky (označené červeně) přičtu k vyššímu řádu a dostanu výsledek 45540.



Obrázek 2

Princip Napierových kostek je jednoduchý. Složím ty kostky, které obsahují násobilku jednotlivých cifer čísla, které chci násobit. Ukázka výpočtu součinu na obrázku 2 představuje 5613 krát 235.

Vezmu hranoly, které obsahují násobilku 5, 6, 1, 3, a zapíšu pod sebe součty po úhlopříčce v řádku 2, 3, 5 a vzájemně sečtu. Princip je stejný jako násobení na papíře, jen s tím rozdílem, že nemusím vůbec ovládat násobilku, postačí ovládat sčítání.

5613 .235 = 1319055

11226

16839

28065

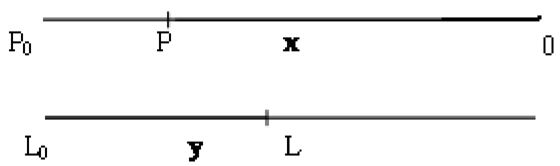
1319055

Na základu Napierových kostek byl zkonstruován první mechanický kalkulátor. Prototyp sestrojil roku 1623 profesor astronomie na univerzitě v Tübingenu Wilhelm Shickard (1592 – 1635) (Musílek 2010, s. 9). Jeho „počítací hodiny“, jak se kalkulátoru díky využití ozubených kol přezdívalo, ovládaly všechny čtyři základní početní operace, ovšem nikoliv čistě mechanicky. Přístroj vyžadoval kvalifikovanou obsluhu, počtář musel rozumět násobení pomocí Napierových kostek.

Napier přesto dál hledal nějaký nový princip, který by přinesl výraznější zrychlení násobení a také by vyřešil dělení. Napierovy kostky řešily pouze násobení. To ho přivedlo na myšlenku vytvořit vztah, který by dokázal převést násobení na sčítání a dělení na odečítání.

1.1.1 Napierův logaritmus a logaritmické tabulky

Napierův logaritmus se zakládá na představě spojitého pohybu dvou bodů a ukazuje tak na význam fyzikální představ pro zrod pojmu funkce.



Obrázek 3

Napierova definice logaritmu: „První bod se pohybuje po úsečce $P_0 0$ dlouhé 10^7z bodu P_0. Jeho rychlost je v každém bodě rovna vzdálenosti $P0$. Druhý bod se pohybuje po polopřímce z bodu L_0 s konstantní rychlostí. Napier definuje úsečku $L_0 L$ jako logaritmus úsečky $P0$" (Edwards 1979, s. 148).

Úsečku $P_0 0$ označíme pro přehlednost jako *x* a úsečku $L_0 L$ označíme jako *y*. Využijeme základní vztah pro pohyb: dráha rovná se čas krát rychlost ($s = v \,.\, t$). Čas si můžeme zvolit libovolný podle toho, jak hustě chceme úsečku $P_0 0$ dělit. Zvolíme velmi malý časový úsek 10^{-7} (stejný zvolil i Napier při tvorbě první tabulky). Nyní diskrétně popíšeme několik kroků:

V čase *t*=0: $|P_0 0| = 10^7$

$|L_0 L_0| = 0$

V čase $t = \frac{1}{10^7}$: $|P_0 P_1| = 10^7 . 10^{-7} = 1$

$|P_1 0| = 10^7 - 1 = 10^7(1 - 10^{-7})$

$|L_0 L_1| = 1$

V čase $t = \frac{2}{10^7}$: $|P_1P_2| = 10^7(1-10^{-7})\,.\,10^{-7} = 1-10^{-7}$

$|P_2 0| = 10^7(1-10^{-7}) - (1-10^{-7}) = 10^7(1-10^{-7})^2$

$|L_0L_2| = 2$

V čase $t = \frac{3}{10^7}$: $|P_2P_3| = 10^7(1-10^{-7})^2.\,10^{-7} = (1-10^{-7})^2$

$|P_3 0| = 10^7(1-10^{-7})^2 - (1-10^{-7})^2 = 10^7(1-10^{-7})^3$

$|L_0L_3| = 3$

…

Dráhu pohybu bodu *P* po přímce *x* mohu popsat jako geometrickou posloupnost $P_n = 10^7(1-10^{-7})^n\,; n = 0, 1, 2, \dots$ a dráhu pohybu bodu *L* po přímce *y* mohu popsat jako aritmetickou posloupnost $L_n = 0 + k\,.\,t\,; k \in \mathbb{R}$

$$0 = |L_0L_0| \sim |P_0 0| = 10^7(1-10^{-7})^0$$
$$1 = |L_0L_1| \sim |P_1 0| = 10^7(1-10^{-7})^1$$
$$2 = |L_0L_2| \sim |P_2 0| = 10^7(1-10^{-7})^2$$
$$3 = |L_0L_3| \sim |P_3 0| = 10^7(1-10^{-7})^3$$

...

Definici Napierova logaritmu je v dnešní době považována za funkci. Pohyb bodu *P* mohu popsat diferenciální rovnicí $\frac{dx}{dt} = -x$. Znám také počáteční podmínku $x(0) = 10^7$ (poloha bodu *P* v čase 0). Rovnici mohu upravit

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

Rovnici integruji:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int dt$$

$$\ln x + c_1 = -t$$

Po dosazení podmínky dostávám:

$$\ln 10^7 + c_1 = 0$$

$$c_1 = -\ln 10^7$$

Řešením této diferenciální rovnice je

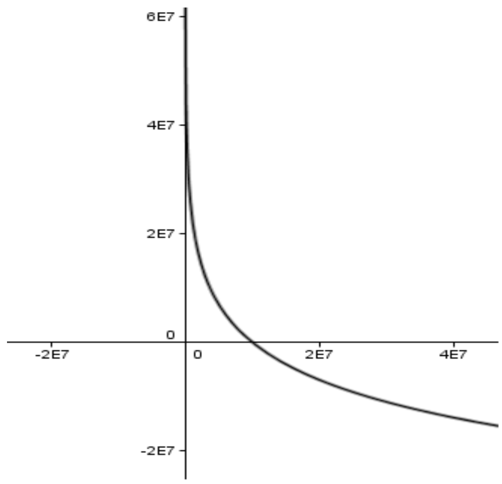
$$\ln x = -t + \ln 10^7\,.$$

Po úpravě dostanu vztah $t = \ln\frac{10^7}{x}$. Pohyb bodu L vyjádřím v závislosti na čase t.

$$y = 10^7 t$$

$$y = 10^7 \ln\frac{10^7}{x} = Nlog\, x$$

Na obrázku 4 je rekonstrukce grafu Napierova logaritmu v kartézské soustavě. Zvláštností Napierových logaritmů je, že jejich základ je menší než 1. Na rozdíl od logaritmů používaných dnes tvoří Napierův logaritmus klesající funkci.



Obrázek 4

Napier nad logaritmem vůbec neuvažoval jako nad funkcí[1]. Chtěl pouze využít vztah mezi geometrickou a aritmetickou posloupností pro ulehčení práce s velkými čísly. Uvažoval, že aby vztah mezi aritmetickou a geometrickou posloupností byl co nejvíce použitelný pro praktické počítání, kvocient geometrické posloupnosti by měl být co nejbližší 1. Napier zvolil pro první tabulku časový úsek $t = n.10^{-7}$ pro pohyb bod P. V definici Napierova logaritmu tento úsek odpovídá geometrickému kvocientu $(1 - 10^{-7})$. První tabulka obsahovala sto členů geometrické posloupnosti $10^7.(1 - 10^{-7})^n\,; n = 0, 1, 2, \ldots, 100$

Členy této tabulky dostal Napier odčítáním:

0	10000000,0000000
	–1,0000000
1	9999999,0000000
	–0,9999999
2	9999998,0000001
	–0,9999998
3	9999997,0000003
	....
100	**9999900,0004950**

[1] Pojem funkce pravděpodobně poprvé použil Leibniz v roce 1673 v rukopise Methodus tangentium inversa, seu du functionibus (Inverzní metoda tečen nebo–li o funkcích)

Napier nazval čísla 0, 1, 2, …, 100 logaritmy čísel v pravém sloupci. Logos jako poměr a aritmos jako číslo. Napierův logaritmus čísla x menšího jak 10^7 je počet činitelů $(1-10^{-7})$, kterými je třeba vynásobit 10^7, aby dostal x. Označíme-li $y = Nlog\,x,$ tak $x = 10^7.(1-10^{-7})^y$. I když výše uvedený postup v podstatě definuje logaritmus pro každé číslo menší jak 10^7, vyžádalo by si jejich určení 6 900 000 kroků, aby dospěl k číslu 5000000, což je polovina z 10^7. Napier v této tabulce jako vůbec první použil desetinnou čárku (Edwards 1979, s. 143).

Přešel k druhé tabulce, kde zvolil kvocient $(1-10^{-5})$, a počítal prvních 50 členů geometrické posloupnosti $10^7.(1-10^{-5})^k\ ; k = 0, 1, 2, \ldots, 50$. Členy této posloupnosti získal odčítáním:

0	10000000,000000
	–100,000000
1	9999900,000000
	– 99,999000
2	9999800,001000
	– 99,998000
3	9999700,003000
	………………………
50	9995001,224804

Napier udělal v této tabulce chybu a v posledním řádku uvedl číslo 9995001,222927. Takže jeho výpočty měly přesnost na 9 platných míst. Ale i s kvocientem $(1-10^{-5})$ by další počítání vyžadovalo 69 000 kroků, aby dosáhl čísla 5000000. Napier v této tabulce dále nepokračoval. První a druhá tabulka mu sloužily jako pomůcka pro konstrukci třetí tabulky, která měla 21 řádků a 69 sloupců.

Každý řádek třetí tabulky je geometrická posloupnost s 69 členy a kvocientem $\left(1-\frac{1}{100}\right)$. Každý sloupec třetí tabulky je geometrická posloupnost s 21 členy a kvocientem $\left(1-\frac{1}{2000}\right)$. Tyto kvocienty zvolil záměrně, aby mohl odkázat na každou buňku v tabulce. Platí $\left(1-\frac{1}{2000}\right)^{20} \approx \left(1-\frac{1}{100}\right)$, což znamená, že se poslední člen každého sloupce přibližně rovná prvnímu členu sloupce následujícího.

p/q	1	2	...	68	69
1	10000000,0000	9900000,0000	...	5099857,4625	5048858,8879
2	9995000,0000	9895050,0000	...	5097307,5338	5046334,4584
3	9990002,5000	9890102,4750	...	5094758,8800	5043811,2912
...	...	...	...	...	...
20	9905426,2912	9806372,0283	...	5051626,2190	5001109,9568
21	9900473,5780	9801468,8422	...	5049100,4059	4998609,4019

Tabulka 1

Vzorec pro každou buňku v tabulce je

$$a_{p,q} = 10^7 \left(1 - \frac{1}{2000}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{q-1}.$$

Proto je 1449 čísel tabulky rovnoměrně rozložených na intervalu 5.10^6 až 10^7.

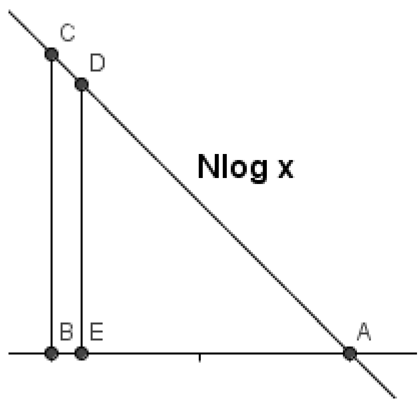
Pokud čísla v každém řádku a každém sloupci tvoří geometrickou posloupnost, jejich logaritmy tvoří aritmetickou posloupnost. Proto logaritmus čísla v p-tém řádku a q-tém sloupci je

$$(p-1).Nlog\, 9995000 \;+\; (q-1).Nlog\, 9900000.$$

Zbývá určit logaritmy čísel 9995000 a 9900000. Za tím účelem měl Napier zkonstruovanou první a druhou tabulku, které jsou popsány výše.

První tabulka přímo udává logaritmy čísel a končí číslem 9999900,0004950 s logaritmem 100. Druhá tabulka nemá kvocient 9999900,0004950, ale číslo o málo menší, totiž 9999900,0000000. Logaritmus bude o málo větší než 100. Napier musel najít logaritmus 9999900. Použil k tomu lineární interpolaci, kde využil vztah $Nlog 10^7 = 0$. Princip lineární interpolace spočívá v podobnosti trojúhelníků. Napierův logaritmus se na námi určeném intervalu chová podobně jako přímka. Znám hodnoty:

$$A = (10^7;\ 0)$$
$$C = (9999900{,}0004950\ ;\ 100)$$
$$D = (9999900\ ; Nlog\ 9999900)$$



Obrázek 5

Z podobnosti trojúhelníků vyplývá rovnost:

$$\frac{|DE|}{|CB|} = \frac{|AE|}{|AB|}$$

$$\frac{Nlog 9999900}{100} = \frac{10^7 - 9999900{,}0000000}{10^7 - 9999900{,}0004950} = \frac{100}{99{,}9995050}$$

Jako výsledek Napier dostal rovnost

$$Nlog\,9999900 \;=\; 100{,}000495.$$

To znamená, že ve druhé tabulce dvě po sobě jdoucí čísla mají rozdíl logaritmů 100,000495. Druhá tabulka je stokrát řidší než první tabulka, která sloužila pro zavedení logaritmů. Na určení zbytku 0,000495 potřeboval první tabulku. Poslední padesátý řádek druhé tabulky má logaritmus

$$Nlog\,9995001{,}2248 \;=\; 50\,.\,100{,}000495 \;=\; 5000{,}02475.$$

Napier opět použil lineární interpolaci

$$\frac{Nlog999500}{5000{,}02475} = \frac{10^7 - 9995000{,}0000}{10^7 - 9995001{,}2248} = \frac{5000}{4998{,}7752}$$

Dostal tím hodnotu

$$Nlog\,9995000 = 5001{,}24506,$$

která odpovídá rozdílu logaritmů dvou po sobě jdoucích čísel v prvním sloupci. Logaritmus posledního členu prvního sloupce třetí tabulky je

$$Nlog\,9900473{,}578 \;=\; 20\,.\,5001{,}24506 \;=\; 100024{,}9$$

Touto úvahou byl už blízko pro logaritmus čísla 9900000.

Utvořil ještě jednu buňku 1. sloupce, aby se ještě více přiblížil hledané hodnotě $Nlog$ 9900000.

$$Nlog\,9895523{,}34 \;=\; Nlog\left(9900473{,}478\,.\left[1 - \frac{1}{2000}\right]\right) =$$
$$= \;100024{,}9 \;+\; 5001{,}25 = \;105026{,}15$$

Číslo 9900000 se nachází mezi hodnotami 9900473 a 9895523. Opět použil lineární interpolaci a dostal tak hledaný logaritmus

$$\frac{Nlog(9900000) - Nlog\,(9895523{,}34)}{Nlog(9900473{,}578) - Nlog\,(9895523{,}34)} = \frac{9900000 - 9895523{,}34}{9900473{,}578 - 9895523{,}34}$$

$$Nlog\,(9900000) = 100503{,}36$$

Tím našel oba logaritmy, které potřebovat, aby mohl používat třetí tabulku na hledání logaritmů.

Napier ještě určil poslední dva členy v 69. sloupci

$$Nlog\,5001109{,}96 \;=\; 19\,.\,5001{,}245 \;+\; 68\,.\,100503{,}36 \;=\; 6929252{,}14$$
$$Nlog\,4998609{,}40 \;=\; 20\,.\,5001{,}245 \;+\; 68\,.\,100503{,}36 \;=\; 6934253{,}38$$

Lineární interpolací mezi těmito dvěma čísly třetí tabulky získal logaritmus čísla 500000.

$$Nlog\,5000000 \;=\; 6931472{,}12$$

Přesná hodnota je 6931471,81. Napierova poslední tabulka je platná na sedm míst. Třetí tabulka jeho logaritmů tak tvoří referenční body v interpolačním schématu, pomocí kterého lze určit Nlog každého čísla na intervalu $5.\,10^6$ až 10^7. Napier pracoval s takto velkými čísly hlavně proto, že se v té době nepoužívala desetinná čárka. Byl první, kdo ji začal systematicky používat.

Napier chtěl nalézt vztah mezi geometrickou a aritmetickou posloupností, který můžeme vyjádřit

$$f(x\,.\,y) = f(x) + f(y)$$

Pro případ $x = y = 1$ musí platit:

$$f(1\,.\,1) = f(1) + f(1)$$
$$f(1) = f(1) + f(1)$$
$$0 = f(1)$$

Pro Napierův logaritmus jsem odvodil funkci

$$Nlog\,x = 10^7 \ln \frac{10^7}{x}$$

ze které hned plyne, že nesplňuje podmínku $f(1) = 0$.

$$Nlog\,1 = 10^7 \ln 10^7 = 161\,180\,957.$$

Pro Napierův logaritmus platí, že

$$Nlog\,(x.\,y) = Nlog\,x + Nlog\,y - Nlog\,1.$$

Proto používání Napierových logaritmů vyžadovalo neustále připočítávání čísla $Nlog\ 1$. To značně komplikovalo používání Napierových tabulek. Jeho systém ale brzy vylepšil anglický matematik Henry Briggs.

1.2 Henry Briggs a dekadický logaritmus

Henry Briggs se narodil v únoru roku 1561 ve Warley Wood, poblíž Halifaxu, v Anglii. Studoval latinu a řečtinu na místní škole. Roku 1577 nastoupil na John´s College v Cambridge, kde po absolvování studia i působil a vedl lekce fyziky a matematiky. Během tohoto období se začal zajímat o navigaci a astronomii. Studoval dílo Johana Keplera (1571 – 1630). Roku 1596 se stal prvním profesorem geometrie na Gresham College v Londýně, kde působil 23 let a pomohl Gresham College stát se centrem matematiky v Anglii. Zemřel 26. ledna 1630 v Londýně.

Roku 1615 navštívil Briggs Napiera ve Skotsku. Tato návštěva ho přivedla na myšlenku konstrukce vylepšeného logaritmu a nových logaritmických tabulek. Základ toho logaritmu je 10. Uvažoval, že tento základ je nejpřirozenější, protože používáme desítkovou soustavu. Dodnes je jeho logaritmus znám pod pojmem dekadický logaritmus. Základ logaritmu je tedy větší než 1 a tudíž je funkcí rostoucí. Také platí $\log 1 = 0$, takže odpadá neustálé přičítání konstanty.

Roku 1624 Briggs vydal dílo *Aritmetica logarithmica*, které obsahovalo tabulky čtrnáctimístných logaritmů čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000. Mezeru zaplnil roku 1628 Holanďan Adrian Vlacqom (1600 – 1667), který vydal desetimístné tabulky logaritmů od 1 do 100 000. Tyto tabulky se staly základem pro všechny logaritmické tabulky vydané následujících 300 let.

I Briggsův logaritmus má základní myšlenku převést násobení a dělení na sčítání a odčítání a umocňování převést na násobení. Briggs logaritmus definoval tak, aby platila následující pravidla

$$log\,(x\,.y) = \log x + \log y$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

$$\log(10^n x) = n + \log x$$

Odvodím vztah mezi Briggsovým a Napierovým logaritmem.

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log x = \frac{\ln x + \ln 10^7 - \ln 10^7}{\ln 10 + \ln 10^7 - \ln 10^7}$$

$$log\,x = \frac{ln\,10^7 - ln\frac{10^7}{x}}{ln\,10^7 - ln\frac{10^7}{10}} \cdot \frac{10^7}{10^7}$$

$$\log x\ = \frac{10^7 \ln 10^7 - 10^7 \ln\frac{10^7}{x}}{10^7 \ln 10^7 - 10^7 \ln\frac{10^7}{10}}$$

Pro Napierův logaritmus platí: $Nlog\,x = 10^7 \ln\frac{10^7}{x}$. Briggsův logaritmus mohu vyjádřit pomocí logaritmu Napierova

$$\log x = \frac{Nlog\,1 - Nlog\,x}{Nlog\,1 - Nlog\,10},$$

ze kterého okamžitě plyne, že $\log 1 = 0$.

Při tvorbě logaritmických tabulek Briggs z tohoto nevycházel. Místo transformace Napierovy tabulky vypočítal celou tabulku znovu. Jeho myšlenka při tvorbě logaritmických tabulek byla, že každé číslo lze vyjádřit pomocí odmocnin z deseti. Nejprve postupně vypočítal odmocniny z deseti. Dnes se algoritmus pro písemné počítání druhé odmocniny nevyužívá (uveden v příloze).

Briggs uvedl, že spočítal 54 druhých odmocnin z čísla 10. Ve skutečnosti spočítal prvních 27 odmocnin s přesností na 16 desetinných míst. V tabulce uvedl tyto odmocniny na 14 desetinných míst, aby měl jistotu, že i čtrnáctá cifra je bez zaokrouhlovacích chyb. Proto dělal výpočty s přesností o 2 řády vyšší. Další odmocniny až do řádu 54 nepočítal namáhavým odmocňováním. Všiml si, že při každém dalším odmocnění se zlomková část zmenší o polovinu. Proto místo úmorného odmocňování jednoduše dělil dvěma.

	s	10^s	(10^s -1)/s
0	1	10,0000000	9,0000000
1	1/2	3,1622777	4,3245553
2	1/4	1,7782794	3,1131176
3	1/8	1,3335214	2,6681715
4	1/16	1,1547820	2,4765118
5	1/32	1,0746078	2,3874505
6	1/64	1,0366329	2,3445074
7	1/128	1,0181517	2,3234204
8	1/256	1,0090350	2,3129715
9	1/512	1,0045074	2,3077705
10	1/1024	1,0022511	2,3051759

Tabulka 2

Pro názornost jsem vytvořil po vzoru Briggse Tabulku 2 s přesností na 7 desetinných míst do desáté mocniny druhé odmocniny, která odpovídá číslu $\sqrt[1024]{10}$.

Součástí Briggsovy tabulky byl i třetí sloupec spočtený podle vzorce $\frac{10^s-1}{s}$, kde s znamená $\frac{1}{2^n}$; $n=0,1,2,\dots$ Tento sloupec sestrojil, aby lépe viděl, která zlomková část klesá. Členy třetího sloupce skutečně konvergují. Jejich limita se blíží číslu 2,3025850. Pomocí této hodnoty můžeme určit hodnotu čísla $10^{\varepsilon/1024}$.

$$10^{\varepsilon/1024} = 1 + 2{,}3025850\left(\frac{\varepsilon}{1024}\right) = 1 + 0{,}0022486\varepsilon$$

Pomocí tohoto triku vypočítal Briggs dalších 27 odmocnin, až dostal 2^{54} odmocninu z čísla 10. Postupoval podobně jako Napier, určoval logaritmus čísla hodnotou blížící se jedné. Z těchto odmocnin zkonstruoval svoje tabulky. Briggsova tabulka odmocnin slouží k určení logaritmu libovolného čísla. Briggsovo hledání logaritmů ukážu na příkladech.

Příklad 1: hledáme $\log 2 = ?$

Prvně hledáme takovou mocninu čísla 10 z naší tabulky, pro kterou platí $2 < 10^?$

$$2 < 10^{\frac{1}{4}}$$

Tímto číslem vydělíme číslo 2

$$2 \,:\, 1{,}7782794 \;=\; 1{,}124682$$

Pro výsledný podíl opět hledáme příslušné číslo z naší tabulky.

$$1{,}124682 < 10^{\frac{1}{32}}$$

Opět vydělíme a budeme tyto kroky opakovat, pokud nám to naše tabulka dovolí.

$$1{,}124682 \,:\, 1{,}0746074 \;=\; 1{,}046598 \;< 10^{\frac{1}{64}}$$

$$1{,}046598 \,:\, 1{,}0366329 \;=\; 1{,}009612 \;< 10^{\frac{1}{256}}$$

$$1{,}009612 \,:\, 1{,}0090350 \;=\; 1{,}000571$$

Poslední podíl už je mimo Tabulku 2. Na určení jeho logaritmu použijeme konstantu, kterou Briggs určoval hodnotu ε.

$$1{,}000571 = 1 + 0{,}0022486\varepsilon$$

$$0{,}000571 \,:\, 0{,}0022486 \;=\; 0{,}254$$

Na určení hodnoty $\log 2$ stačí sčítat příslušné exponenty, které v průběhu výpočtu korespondovaly s odmocninou z desíti.

$$\log 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{0{,}254}{1024} \;=\; \frac{308{,}254}{1024} \;=\; 0{,}30103$$

Další příklady uvedu bez slovního popisu

Příklad 2 : $\log 20 = ?$

$$20 : 10^1 = 2 < 10^{\frac{1}{4}}$$

$$2 : 1{,}118279 = 1{,}1214682 < 10^{\frac{1}{32}}$$

$$1{,}1214682 : 1{,}074608 = 1{,}0465983 < 10^{\frac{1}{64}}$$

$$1{,}0465983 : 1{,}036633 = 1{,}0096131 < 10^{\frac{1}{256}}$$

$$1{,}0096131 : 1{,}009035 = 1{,}0005729 < 10^{\frac{1}{1024}}$$

Opět dopočítám hodnotu ε.

$$0{,}0005729 : 0{,}0022486 = 0{,}2548 \quad ; \quad 0{,}2548/1024$$

Výsledek je

$$\log 20 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{0{,}2548}{1024} = 1{,}30103$$

Příklad 3 : $\log 200 = ?$

$$200 : 10^2 = 2 < 10^{\frac{1}{4}}$$

$$2 : 1{,}118279 = 1{,}1214682 < 10^{\frac{1}{32}}$$

$$1{,}1214682 : 1{,}074608 = 1{,}0465983 < 10^{\frac{1}{64}}$$

$$1{,}0465983 : 1{,}036633 = 1{,}0096131 < 10^{\frac{1}{256}}$$

$$1{,}0096131 : 1{,}009035 = 1{,}0005729 < 10^{\frac{1}{1024}}$$

Opět dopočítám hodnotu ε.

$$0{,}0005729 : 0{,}0022486 = 0{,}2548 \quad ; \quad 0{,}2548/1024$$

Výsledek je

$$\log 200 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{0{,}2548}{1024} = 2{,}30103$$

Na zvolených příkladech vidíme, že čísla, pro která hledáme logaritmy, jsou desetinásobky čísla 2, jejich logaritmy se liší o 1.

1.3 Gregory St. Vincent a obsah pod hyperbolou

Gregory Saint-Vincent se narodil roku 1584 ve městě Brugy v Belgii. Roku 1595 začal studovat teologii na Jesuit College v Brugách a matematiku a filozofii v Douai v severní Francii. Jako jezuitský novic odjel do Říma, kde se v roce 1607 stal členem jezuitského řádu. Byl studentem Chistophera Clavia na Collegio Romano v Římě. Poté, co Galileo publikoval své výsledky o heliocentrickém vesmíru, představení jezuitského řádu chtěli znát názor matematiků z Collegio Romano. Gregory Saint-Vincent a jeho kolegové byli z Galileových výsledků nadšeni, což nepotěšilo Jezuitské představené, kteří trvali na tom, že podporují Aristotelův pohled na svět.

Roku 1613 byl vysvěcen na kněze a zároveň nastoupil dráhu učitele řečtiny na jezuitské koleji v Boise. V průběhu holandského povstání proti Španělsku za třicetileté války byl nucen vykonávat pozici kaplana španělským vojákům. Od roku 1621 byl tři roky učitelem matematiky na jezuitské koleji v Antverpách, která v té době byla přestěhována do Louvainu. Mezi lety 1626 a 1632 pobýval v Praze jako kaplan Římského císaře Ferdinanda II. Po vpádu Švédů do Čech, kde musel zanechat svoje dílo, odjel Gregory do Vídně. Od roku 1632 nastoupil na jezuitskou kolej v Ghentu, kde byl učitelem po zbytek svého života. Až po deseti letech se mu vrátily jeho matematické listy z Prahy, na základě kterých vydal roku 1647 svoje nejslavnější dílo *Opus geometricum quadraturae circuli sectionum coni*. Gregory Saint-Vincent zemřel roku 1667. Posmrtně vyšlo ještě dílo *Opus geometricum ad mesolabium*. Jeho největší přínos matematice bylo zkoumání obsahu pod hyperbolou.

1.3.1 Zkoumání obsahu pod hyperbolou

Pokud je *[a,b]* uzavřený interval na kladné ose, označme $A_{a,b}$ plochu ohraničenou tímto intervalem a hyperbolou $xy = 1$. Interval *[a,b]* Gregory rozdělil na *n* podintervalů body

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

a nad těmito podintervaly zkonstruoval obdélníky. Obdélník má základnu o velikosti $(a - b)/n$ a výšku $1/x_i$ respektive $1/x_{i-1}$. Proto platí

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \le A_{a,b} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}$$

Poté vzal interval $[ta, tb]$ pro $t > 0$ a rozdělil ho novými body opět na n podintervalů

$$ta = tx_0 < tx_1 < \cdots < tx_{i-1} < tx_i < \cdots < tx_n = tb$$

Obsahy obdélníků pod hyperbolou $xy = 1$ mají základnu $(tb - ta)/n$ a výšku $1/tx_i$ respektive $1/tx_{i-1}$. Výslednou plochu na intervalu $[ta, tb]$ mohu zapsat

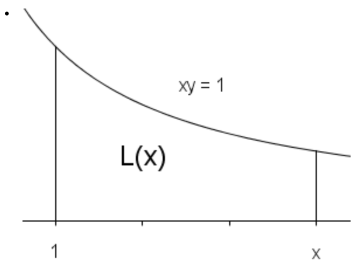
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{tb-ta}{ntx_i} \le A_{ta,tb} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{tb-ta}{ntx_{i-1}}$$

Parametr t v sumách mohu vykrátit

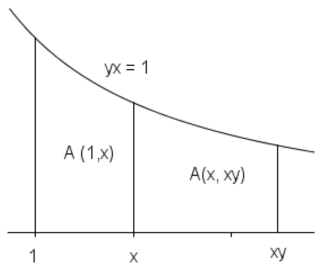
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \le A_{ta,tb} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}$$

Gregoryho objev můžeme vyjádřit následovně. Jestli $t > 0$ potom platí

$$A_{ta,tb} = A_{a,b}$$



Obrázek 6



Obrázek 7

Pokud nyní zavedeme funkci $L(x) = A_{1,x}$, tak $L(x)$ má vlastnosti Briggsových logaritmů

$$L(x\,.y) = A_{1,xy} = A_{1,x} + A_{x,xy} = A_{1,x} + A_{1,y} = L(x) + L(y).$$

To znamená, že funkce $L(x)$ se chová jako logaritmus v tom smyslu, že převádí geometrickou posloupnost na posloupnost aritmetickou.

2 Předchůdci Newtonova kalkulu

O diferenciálním počtu můžeme hovořit až poté, co si matematikové uvědomili, že derivování a integrování jsou navzájem inverzní operace. Text Barrowa (1674) ukazuje, že toto povědomí existovalo, ale nebylo ještě využíváno. Pro diferenciální počet se v anglicky mluvících zemích používá označení kalkulus. Mluví-li se o Newtonových metodách diferenciálního počtu, používá se ustálené spojení Newtonův kalkulus.

V sedmnáctém století nemůžeme ještě hovořit o integrování a derivování jako takovém, hledali se tečny a obsahy křivkami určené. Matematici jevili zájem o tyto předměty z různých příčin. Hlavním příčinou byl kvantitativní popis pohybu: vzdálenost, kterou urazí těleso za určitou dobu; okamžitá rychlost tělesa; zrychlení tělesa a jeho dráha. Dalším rychle se rozvíjejícím oborem byla optika. Zkoumal se průchod světla čočkou, což vyžadovalo spočítat normály a tečny k ploše čočky.

Důležitým zjištěním bylo, že tečna k dráze pohybu udává směr rychlosti. Metody pro určení normály a tečny dávaly návody, jak zpracovat problémy maxim a minim, které se objevují ve fyzice, astronomii a matematice (Jahnke 2007, s. 32). Také zde byly nevyřešené otázky minulosti. Stále se hledalo matematické určení obsahu kruhu (kvadratura kruhu).

2.1 Pierre de Fermat

Pierre de Fermat se narodil 17. srpna 1601. Pocházel z francouzského šlechtického rodu, z městečka Beaumont de Lomagne. Vystudoval práva a také se jako právník živil. Konec dvacátých let sedmnáctého století strávil v Bordeaux, kde začal studovat práci Francois Vieta (1540 – 1603). Fermat postavil svou matematiku na pokračování ve Vietově tradici. Vietova teorie kladla důraz na vztah mezi řešením a původní rovností.

Charakteristické pro Fermatovu matematiku bylo, že použil algebraickou analýzu pro objevení vztahu mezi problémy a jejich řešením. Většinu svého výzkumu se snažil o „redukční analýzu“, kterou se pokusil daný problém redukovat na jiný nebo určit třídu problému, pro kterou už znal obecné řešení. Tato redukční analýza složená z teorie rovností mohla být ve většině případů obrácena a použita jako generátor tříd řešení problémů (Mahoney, s. 567).

Fermat dosáhl mnoha vynikajících výsledků hned v několika oblastech matematiky. Na základě dopisování s Mersennem a Robervalem na jaře roku 1636 Fermat vytvořil svůj „*Ad locos planos et solidos isagoge*“, ve kterém zavedl systém analytické geometrie. Tento systém byl téměř identický s výsledky Descarta, který je publikoval roku 1637 v díle „*Geometrie*“ (Mahoney, s. 576). Další významný Fermatův přínos spočívá ve studiu pravděpodobnosti. Touto otázkou se zabýval společně se svým přítelem Blaisem Pascalem, významným filozofem a matematikem. Byli požádáni, aby odhadli šanci na vítězství ve hře v kostky. Společně fakticky vytvořili první teorii pravděpodobnosti.

Při studiu Diofantovi *Aritmetiky*, Fermat napsal na prázdný okraj vedle textu větu, že $x^n + y^n = z^n$ nemá žádné řešení (v přirozených číslech) pro *n* větší než dvě. Tato věta byla dokázána až ve dvacátém století.

Tehdejší společnost ho ale vnímala hlavně jako soudního úředníka žijícího v Toulouse, který se matematikou zabýval jen jako amatér pro vlastní potěšení. Žádné své matematické objevy za svého života nepublikoval. Většina jeho matematických prací byla zveřejněna až posmrtně. Podobně tomu bylo i s jeho studiem křivek, při kterém se těsně přiblížil k vytvoření integrálního a diferenciálního počtu. Pierre de Fermat, dnes považován za jednoho z největších matematiků všech dob, zemřel dne 12. ledna 1665.

2.1.1 Metoda maxim a minim

Fermat byl první, kdo zkoumal problém maxim a minim pomocí chování polynomu v blízkosti extrémních hodnot. Například určil, jak rozdělit segment délky b na dva úseky, x a $b - x$, jejichž součin je maximem. Úlohu převedl na hledání rovnoběžníků s obvodem *2b*, který má maximální obsah.

$$x(b-x) = bx - x^2 \qquad (1)$$

Prvně substituoval $x + e$, za neznámou *x*.

$$b(x+e) - (x+e)^2 = bx + be - x^2 - 2xe - e^2 . \qquad (2)$$

Polynomická křivka se v okolí svého vrcholu (maxima nebo minima) téměř nemění. Proto je-li *e* dostatečně malé, mohl výraz (2) porovnat s původním výrazem (1).

$$bx + be - x^2 - 2xe - e^2 \sim bx - x^2$$

$$be - 2xe - e^2 \sim 0$$

Poté výraz konstantou *e* vydělil.

$$2x + e \sim b$$

Protože se *e* se blíží k *0,* odstraněním se hodnota výrazu nezmění.

$$x = \frac{b}{2}$$

Tak dostal hodnotu pro *x,* které je výraz $bx - x^2$ maximální. Hledaným rovnoběžníkem je čtverec.

Vysvětlení se velmi blíží modernímu vnímání diferenciálního počtu. Jestli *f(x)* je maximum (nebo minimum) funkce *f*, potom se hodnota funkce *f* velmi pomalu mění podle proměnné *x*. Proto, jestli je *e* dostatečně malé, potom *f(x)* a *f(x+e)* jsou přibližně stejně velké.

$$f(x + e) \sim f(x)$$

$$f(x + e) - f(x) \sim 0$$

Pokud je *f (x) polynom*, poté bude $f(x + e) - f(x)$ dělitelné *e*. Tím získáme vztah

$$\frac{f(x + e) - f(x)}{e} \sim 0.$$

Za předpokladu, že se *e* limitně blíží k *0*, je tento Fermatův vztah vyjádřením derivace, respektive hledáním extrémů křivky pomocí první derivace *f´(x)=0.* Fermat neuměl rozlišit mezi lokálním a globálním extrémem. Jeho metoda určovala inflexní body.

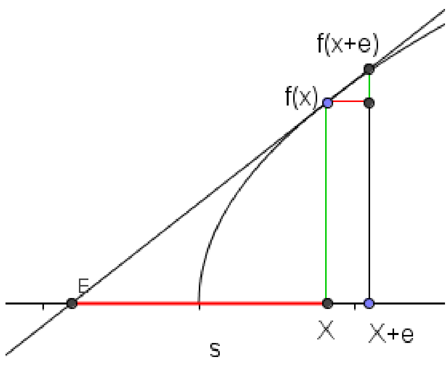
Fermat použil svoji jednoduchou techniku i pro konstrukci tečen ke křivce. Metoda vychází z principu podobnosti trojúhelníků.

$$\frac{f(x)}{s} \sim \frac{f(x + e) - f(x)}{e}$$

$$s \sim \frac{ef(x)}{f(x + e) - f(x)}$$

Zapsáno pomocí derivace dostanu vztah

$$s = \frac{f(x)}{f'(x)} \; .$$



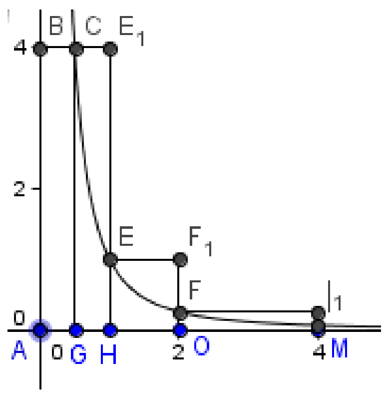
Obrázek 8

2.1.2 Metoda kvadratur[2]

Fermatův výzkum kvadratur křivek a kubatur těles začal roku 1636, kdy se prvně zabýval Archimédovou kvadraturou paraboly. Fermat stejně jako Gregory Saint-Vincent (1584 – 1667) zkoumal kvadratury hyperbol a parabol. Fermat užívá dvou pohybujících se bodů a ne jen jediného jako Gregory Saint-Vincent. Neuvažoval obecnější křivky než ty, které zachovávaly geometrickou posloupnost, tj. celá geometrická posloupnost úseček odpovídající křivce dávala ještě jednu geometrickou posloupnost souřadnic (Dhombres 1995, s. 28).

Roku 1646 vypracoval v podstatě novou metodu kvadratur. Nevěnuje se jen jedné křivce, ale najednou celé třídě křivek, zobecněných parabol a hyperbol. Dnes je přirozené představit si tyto křivky jako funkce tipu $y^{\beta} = kx^{\alpha}$ a $y^{\beta}x^{\alpha} = k$ (α ,β jsou kladné indexy pro které platí $\alpha + \beta > 2$). Zkoumané kvadratury popisoval pomocí geometrických řad. Nekonečný součet je pro Fermata východiskem pro výpočet kvadratury.

Fermat od počátku používal analytické vyjádření křivek, i když to nejsou rovnice v kartézských souřadnicích. Jedná se o křivky, pro něž je konstantní součin nebo podíl mocnin velikostí vodorovných a svislých úseček. Jsou-li α a β kladná čísla, pak $AG^{\alpha}.CG^{\beta} = konst.$, nebo $\frac{AG^{\alpha}}{CG^{\beta}} = konst.$ Fermat definoval hyperbolické křivky ubíhající do nekonečnu tak, aby byl vždycky stejný poměr mezi mocninou AH a AG na jedné straně a mocninami CG a EH na straně druhé.



Obrázek 9

$$\frac{AG^{\alpha}}{AH^{\alpha}} = \frac{CG^{\beta}}{EH^{\beta}}$$

Fermat přišel s myšlenou, že součet geometrické řady může být chápán jako metoda. Tuto skutečnost vyjadřuje takto:*„Nechť je dána geometrická posloupnost, jejíž členy klesají do nekonečna. Pak rozdíl dvou po sobě následujících členů této posloupnosti k menšímu z nich se má jako největší člen této posloupnosti k součtu všech zbývajících do nekonečna"*

[2] Při výkladu vycházím z článku Dhombres 2010, Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami

Fermatův výrok ukážu na příkladu. Zavedu geometrickou posloupnost $x_1 = a\,, x_2 = ax\,, x_3 = ax^2\,, x_4 = ax^3\,, \ldots$
Pak podle Fermata platí:

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1}\,.$$

Kde $S = \sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Vztah mohu ještě upravit na tvar

$$\frac{ax^n - ax^{n+1}}{ax^{n+1}} = \frac{1-x}{x} = \frac{a}{S-a}\,.$$

Fermat umístil na vodorovné ose rostoucí geometrickou posloupnost s kvocientem q > 1 počínaje prvním členem AG, následovaný druhým $AG\,.\,q = AH$, třetím $AG\,.\,q^2 = AO$, čtvrtým $AG\,.\,q^3 = AM$, atd. Po kvocientu q se požaduje, aby se blížil k jedné.

Fermat říká: *„Nechť jsou členy blízké jeden druhému. Pak podle Archimédovy metody je lze považovat za adekvalentní*[3]*“*

Výpočet, který Fermat provedl s *α=2* a *β=1*, ukázal, že plochy obdélníků GHE_1C, HOF_1E, OMI_1F vytvářejí geometrickou posloupnost jako délky AG, AH, AO atd. Toto dokázali Fermat i Gregoire a Saint Vincentio s použitím teorie proporcí, zejména skládáním poměrů, tj. jejich součinu v dnešním smyslu slova. Fermat neužívá algebru descartovským způsobem. Aplikuje jen kaskádu vlastností geometrické posloupnosti. Tyto vlastnosti vytvářejí zvláštní algebru, které Gregoire Saint Vincentio dodal geometrickou interpretaci (Dhombres 2010, s. 20).

Máme-li geometrickou posloupnost, potom rozdíly dvou po sobě jdoucích členů tvoří také geometrickou posloupnost se stejným kvocientem. Jestliže je $x_1\,.\,q^{n-1}$ obecný *n*-tý člen dané posloupnosti, pak také

$$x_1\,.\,q^n - x_1\,.\,q^{n-1} = x_1\,.\,q^{n-1}(q-1)$$

je *n*-tý člen geometrické posloupnosti. Součiny odpovídajících si členů dvou geometrických posloupností vytvářejí geometrickou posloupnost, jejíž kvocient je součinem odpovídajících kvocientů. To je to, co Grégory Saint-Vincent ukázal geometricky. Obsahy po sobě jdoucích obdélníků GHE_1C, HOF_1E, OMI_1F atd.

[3] adekvalizace: přibližná rovnost, která vznikne přechodem k logaritmu

odpovídají součinu členů dvou geometrických posloupností. Posloupnost GC, HE, OF atd. na jedné straně, na druhé straně posloupnost rozdílů GH, HO, OM atd.

Nechť je koeficient α větší než β. Poněvadž kvocient q je od počátku větší než jedna, posloupnost obsahů obdélníků je klesající, má smysl provést nekonečný součet obsahů.

$$A = S(GHE_1C) + S(HOF_1E) + S(OMI_1F) + \cdots$$

Obsah prvního obdélníku GHE_1C je x_1 a lze ho chápat jako konstantu a.

$$a = GH\,.GC$$

Fermat automaticky reprezentoval obsahy po sobě jdoucích obdélníků geometrickou posloupností úseček AM, AO, AH, AG. Je to posloupnost poměru inverzní k tomu, který byl zaveden na začátku. Nyní stačí pro výpočet obsahu pod křivkou použít vzorec, který jsme uvedli na začátku

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1}\ .$$

$$\frac{GH}{AG} = \frac{a}{A - a}$$

Výraz mohu rozšířit

$$\frac{GH\,.GC}{AG\,.GC} = \frac{GH\,.GC}{A - a}$$

Označíme-li B obdélník ABCG, který je na **Chyba! Nenalezen zdroj odkazů.** pevně zvolen, dostáváme vztah

$$B = A - a.$$

Stejně Fermat postupoval pro další koeficienty α a β. Získané výsledky lze shrnout takto: Označíme-li písmenem S obsah hledané plochy, pak v jednotlivých případech dostáváme:

$$hyperbolický\ případ:\qquad S = B\,, \alpha = 2\,, \beta = 1$$

$$hyperbolický\ případ:\qquad S = \frac{1}{2}\mathrm{B}\,, \alpha = 3\,, \beta = 1$$

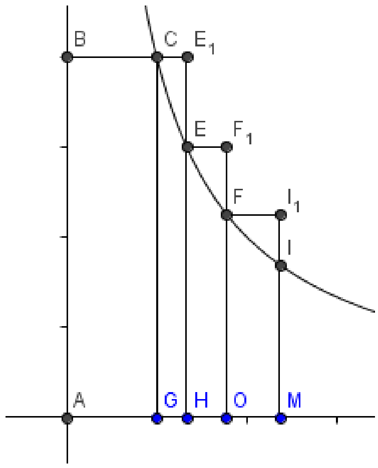
$$parabola:\qquad S = \frac{2}{3}B\,, \alpha = 1\,, \beta = 2$$

$$parabolický\ případ:\qquad S = \frac{3}{5}B\ \,, \alpha = 2\ \,, \beta = 2$$

(Dhombres 2010, s.26).

Vhodné použití geometrické řady vede k zobecnění, protože poskytuje stejnou metodou kvadraturu celé třídy křivek jdoucích k nekonečnu. Tento způsob vidění má velkou tu výhodu, že se jedná o čistou geometrickou konstrukci, která byla nezbytná i pro kvadraturu Archimédovy paraboly, kde musely být brány v úvahu „průměry" paraboly. Úspěch je spjatý se způsobem znázorňování obsahů polygonů řadami čísel (geometrickými řadami) reprezentovanými úsečkami. Je to v souladu s duchem analytické geometrie, neboť křivka není nic jiného než příležitost k výpočtům (Dhombres 2002).

Ještě bych rád uvedl tento postup pro případ $\alpha = \beta = 1$. Jedná se o křivku $y = \frac{1}{x}$. Souřadnice bodů *A, G, H, O, M*, tvoří rostoucí geometrickou posloupnost. Body *C, E, F, I* náleží křivce *1/x*, tvoří tak inverzní geometrickou posloupnost, která je klesající. Obdélníky GHE_1C, HOF_1E, OMI_1F mají stejné obsahy. Z toho plyne, že obsahy obdélníků vzhledem k jednotce času mají charakter aritmetické posloupnosti. Tím jsme dospěli ke stejnému závěru (který je dnes všeobecně známý), že obsah plochy pod hyperbolou má logaritmický charakter. Dnes tuto skutečnost vyčte z tabulky primitivních funkcí



Obrázek 10

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c\,.$$

.

2.2 John Wallis

John Brehaut Wallis se narodil 23. listopadu roku 1616 v Ashfordu, oblast Kentu v Anglii, jako třetí z pěti dětí reverenda Johna Wallise. V průběhu svých školních let se učil latinu, řečtinu, hebrejštinu, logiku a aritmetiku. Roku 1632 nastoupil na univerzitu v Cambridgi, kde získal bakalářský a magisterský titul. Roku 1640 byl vysvěcen na kněze. Díky svým matematickým dovednostem rozluštil zašifrované zprávy Royalistů v průběhu občanské války. Roku 1645 se oženil a přestěhoval do Londýna, kde se začal zabývat matematikou.

Inspirací pro studium matematiky mu bylo dílo Williama Oughtreda(1575 – 1660) *Clavis Mathematicae* („Klíč k Matematice"). Roku 1649 byl jmenován Salviliánským profesorem geometrie na univerzitě v Oxfordu, kde se plně věnoval matematice až do své smrti. Studoval práce Evaista Torricelliho (1608-1647), Bonaventury Cavalieriho (1598-1647) a metodu nedělitelných a její použití k určení kvadratury křivek. Na základě těchto prací vydává roku 1655 své nejdůležitější dílo *Arithmetica Informatorum* („Počítání nekonečna"), kde rozšířil Cavalieriho pravidlo pro kvadraturu $\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}$ (zapsáno dnešní notací) i pro záporné a lomené indexy. Také zde uvedl svůj asi největší objev, určení velmi přesné hodnoty $\frac{\pi}{2}$.

Dílo mu přineslo slávu a stal se nejvýznamnějším matematikem Anglie před Newtonem. *Aritmetica Infomatorum* se ale také setkala s výraznou kritikou, zejména od Thomase Hobbese a Christiana Huygense. Roku 1657 vydal dílo *Mathesis Universalis* („Univerzální matematika"). Publikoval zde další vylepšení matematické notace. Wallis byl také aktivní na vědeckých setkáních, které se konaly týdně od roku 1645 a vedly k založení „ Royal society" roku 1660.

Roku 1685 vydal další pozoruhodné dílo *Treatise of Algebra* („Pojednání o algebře"), kde se poprvé objevila myšlenka komplexních čísel. Také v tomto díle publikoval Isaac Newton popis aplikace nekonečných řad na studium křivek. John Wallis zemřel v říjnu roku 1703 v Oxfordu.

2.2.1 Wallisova interpolační metoda

Wallis hledal kvadratury kruhu. Ve své práci se ale již oprostil od geometrického pozadí, které používal Bonaventura Cavaliery (1598 – 1647). Za mnoho nedělitelných dílků si dosazuje numerické hodnoty. Prvnímu nedělitelnému dílku přiřadí délku 0, druhému 1, třetímu 2, až poslednímu n-tému přiřadí délku n-1.

Zkoumal podíl obsahů nedělitelných dílků.

Pro dva:

$$\frac{0^2+1^2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

Pro tři:

$$\frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2}=\frac{5}{12}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

Pro čtyři:

$$\frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2}=\frac{14}{36}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

A pro n+1 nedělitelných dílků

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2+n^2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\ .$$

Toto je ukázka, jak odvodil vzorec pro obsah plochy pod křivkou x^2. Pro n nedělitelných dílků uvažoval, že zlomek 1/6n je stejný jako 1/∞ a to je 0 (Merzbach 2010, s. 350). Pomocí tohoto numerického experimentu pro malé hodnoty *k* dospěl k závěru, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k}=\frac{1}{k+1} \qquad (1)$$

pro všechny celočíselné hodnoty k. Wallis věděl, že přirozené *k* je plocha pod křivkou. Dnešní zápis pomocí integrálu je

$$\int_0^1 x^k dx=\frac{1}{k+1}.$$

Wallis při hledání kvadratury kruhu studoval křivky typu:

1) $y = (1 - x^2)^{\frac{0}{2}}$

2) $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$

3) $y = (1 - x^2)^{\frac{2}{2}}$

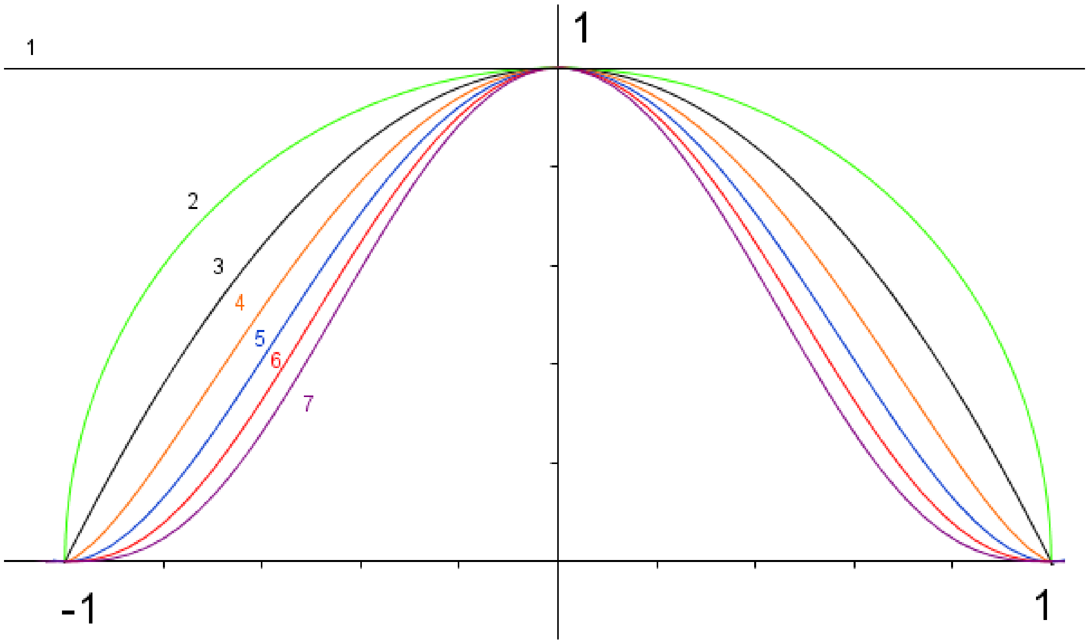
4) $y = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

5) $y = (1 - x^2)^{\frac{4}{2}}$

6) $y = (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$

7) $y = (1 - x^2)^{\frac{6}{2}}$

Na intervalu (-1,1) v kartézské soustavě mohu křivky zakreslit:



Obrázek 11

Plocha ohraničená kladnými poloosami a křivkami 1, 3, 5, 7 lze vyjádřit:

$$x\ ;\ x - \frac{1}{3}x^3\ ;\ x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5;\ x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7\ .$$

Uvažoval, že zápis křivek tvoří geometrickou posloupnost $1, x^2, x^4, x^6$ (indexy tvoří aritmetickou posloupnost 0, 2, 4, 6). Jmenovatelé v zápisu plochy tvoří aritmetickou posloupnost 1, 3, 5, 7 a čitatelé jsou prvky binomického rozvoje pro přirozené exponenty (1); (1, 1); (1, 2, 1); (1, 3, 3, 1). Z tohoto jednoduchého pozorování usoudil, že stejné pravidlo bude platit i pro posloupnost křivek

$$1, \sqrt[q]{x}^1, \sqrt[q]{x}^2, \sqrt[q]{x}^3, \dots, \sqrt[q]{x}^p\ .$$

Index této posloupnosti je p/q a proto ho můžeme dosadit do vztahu (1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[q]{0}^p + \sqrt[q]{1}^p + \sqrt[q]{2}^p + \dots + \sqrt[q]{n}^p}{\sqrt[q]{0n}^p + \sqrt[q]{n}^p + \sqrt[q]{n}^p + \dots + \sqrt[q]{n}^p} = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p + q} \quad (2)$$

Přiřazení zápisu křivky $\sqrt[q]{x}^p$ index $\frac{p}{q}$ bylo velmi odvážné tvrzení. Zobecnil totiž konvenci zápisu, kterou Descart zavedl ve svém díle *Geometrie* z roku 1637, kdy pro přirozená čísla *n* zapsal mocninu x^n pomocí horního indexu.

Wallis ještě svůj zápis (2) nedokázal. Důkaz podali Pierre Fermat a Evangelista Toricelli pomocí triku, kdy při výpočtu plochy pod křivkou interval nerozdělili na stejné úseky, ale pomocí bodů, které tvořili geometrickou posloupnost.

Pro další postup využiji dnešní zápis pro integrál

$$\int_0^1 (1-\sqrt[q]{x})^p dx = \int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p \, dx \, . \qquad (3)$$

Wallisovým cílem bylo zobecnit vzorec (3) pro případ racionálních hodnot pro parametry *p*, *q*. Potom by hledanou kvadraturu kruhu vypočetl pro *p* = *q* = ½. Označím *1/X* jako obsah kruhu. Na základě vztahů (2) a (3) mohu problém kvadratury přepsat pomocí integrálu.

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{X} \left(= \frac{\pi}{4}\right)$$

Aby našel hledané zákonitosti, začal pracovat s převrácenou hodnotou.

$$X = f(p,q) = \frac{1}{\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{q}})^p \, dx} \qquad (4)$$

První tabulku vytvořil Wallis za účelem nalézt obsah jednotkového kruhu pomocí interpolace křivek s celočíselnými indexy. Wallis vypočítal hodnoty $f(p,q)$ pro p,q od 0 do 10 a získané výsledky zapsal do tabulky.

$$f(p,q) = a_{p,q}$$

Hodnota $a_{p,q}$ je uvedená v p-tém řádku a q-tém sloupci. Wallis vytvořil tabulka na základě poznatků o posloupnostech, které získal při odvození vzorce (2). Hledaný obsah kruhu by pak odpovídal buňce $a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. Tabulku vyplnil pomocí vzorce pro výpočet binomických celočíselných koeficientů.

$$a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q}$$

p/q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378
10	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756

Tabulka 3

Na základě vypočtených hodnot Wallis hledal další možné vztahy mezi buňkami tabulky. Třetí řádek/sloupec tvoří posloupnost 1, 3, 6, 10, …, kterou můžeme vyjádřit vzorcem

$$a_{2,q} = \frac{1}{2}(q+1)(q+2).$$

Čtvrtý řádek/sloupec tvoří posloupnost 1, 4, 10, 20, …, kterou lze vyjádřit vzorcem

$$a_{3,q} = \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)\ .$$

Tím našel i obecný vzorec pro výpočet buněk v tabulce.

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)\ (q+p)$$

$$a_{p,q} = \frac{q+p}{p}\ .\left(\frac{1}{(p-1)!}(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)\right)$$

$$a_{p,q} = \frac{q+p}{p}\ .\ a_{p-1,q}$$

Poté Wallis vytvořil druhou tabulku, do které vložil řádky a sloupce, které měly i poloviční hodnotu. Aby byly další jeho kroky přehledné, změnil označení. Položil $m=2p$ a $n=2q$ a $a_{p,q} = b_{m,n}$.

$$b_{m,n} = a_{p,q} = a_{m/2,n/2}$$

$$b_{m,n} = \frac{\frac{m}{2}+\frac{n}{2}}{\frac{m}{2}}\ .\ a_{\left(\frac{m}{2}-1\right),\frac{n}{2}}$$

$$b_{m,n} = \frac{m+n}{m}\ .\ b_{m-2,n}$$

Pro vyplnění druhé tabulky využil Wallis vzorce:

$$b_{m,n} = a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}$$

$$b_{m,n} = \frac{m+n}{m} \, . \, b_{m-2,n}$$

p/q		0	1/2	1	3/2	2	5/2	3
	m/n	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	1	?	3/2	?	15/8	?	35/16
1	2	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4
3/2	3	1	?	5/2	?	35/8	?	105/16
2	4	1	15/8	3	35/8	6	63/8	10
5/2	5	1	?	7/2	?	63/8	?	231/16
3	6	1	35/16	4	105/1	10	231/1	20

Obrázek 12

Pro druhou tabulku také platí:

$$a_{p,q} = f(p,q) = b_{2p,2q} = b_{m,n}$$

Předpokládal, že tabulka je symetrická podle hlavní osy, proto doplnil tabulku v řádkách pro necelá čísla. Ze 49 buněk mu scházelo doplnit pouze 9 a to pro případy, kdy p a zároveň q nejsou celá čísla.

Pomocí vzorce (4) vyjádřil hodnoty buněk v prvním sloupci pro liché řádky:

$$b_{1,1} = X\,, \qquad b_{3,1} = \frac{4}{3}.X\,, \qquad b_{5,1} = \frac{6}{5}.\frac{4}{3}.X\,, \qquad b_{7,1} = \frac{8}{7}.\frac{6}{5}.\frac{4}{3}.X \ldots$$

$$b_{m,1} = \frac{m+1}{m}.\frac{m}{m-1}\ldots\frac{6}{5}.\frac{4}{3}.\frac{2}{1}.\frac{X}{2} = \frac{X}{2}\prod_{1}^{\frac{m+1}{2}}\frac{2m}{2m-1}$$

A stejně tak vyjádřil hodnoty buněk v prvním sloupci pro sudé řádky:

$$b_{2,1} = \frac{3}{2}\,, b_{4,1} = \frac{5}{4}.\frac{3}{2}\,, b_{6,1} = \frac{7}{6}.\frac{5}{4}.\frac{3}{2}\,, b_{8,1} = \frac{9}{8}.\frac{7}{6}.\frac{5}{4}.\frac{3}{2}$$

$$b_{m,1} = \frac{m+1}{m}.\frac{m}{m-1}\ldots\frac{5}{4}.\frac{3}{2}.1 = \prod_{1}^{\frac{m}{2}}\frac{2m+1}{2m}$$

Tímto se mu povedlo vyjádřit všechny chybějící buňky i v dalších sloupcích pomocí jediné neznámé X.

Pro výpočet hodnot v prvním sloupci využil vztah (4). Tím dostával vztah

$$b_{m,1} = f\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{m}{2}}\, dx}$$

Posloupnost $b_{m,1}$ je monotónně rostoucí, tedy

$$b_{1,1} < b_{2,1} < b_{3,1} < b_{4,1} < \dots < b_{m,1} < b_{m+1,1} \dots$$

Nyní vzal $b_{2n-1,1} < b_{2n,1} < b_{2n+1,1}$, odkud dostal nerovnost

$$\frac{X}{2}\prod_{k=1}^{m}\frac{2k}{2k-1} < \prod_{k=1}^{m}\frac{2k+1}{2k} < \frac{X}{2}\prod_{k=1}^{m+1}\frac{2k}{2k-1}$$

Tento vztah následně přeskupil

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} < \frac{2}{X} < \left[\prod_{k=1}^{m}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right]\frac{2m+2}{2m+1}$$

Když $\frac{2}{X} = \frac{\pi}{2}$ a zlomek $\frac{2m+2}{2m+1}$ se limitně blíží k 1, dostal vyjádření

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{(2k-1)}.\frac{2k}{(2k+1)} =$$

$$= \frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}\dots$$

Wallisovi se tak podařilo pomocí této velmi důmyslné interpolační procedury určit hodnotu, kterou hledal. Jeho metody však narazily na kritiku Thomase Hobbse a Piera Fermata. Wallis v odpovědi kritikům zdůraznil, že jeho cílem nebylo najít metodu důkazu, ale metodu určení na objevování věcí ještě neznámých. Dnes se pohlíží na tuto proceduru jako na jednu z nejodvážnějších analogií, která kdy vedla ke správnému výsledku.

2.3 Isaac Barrow

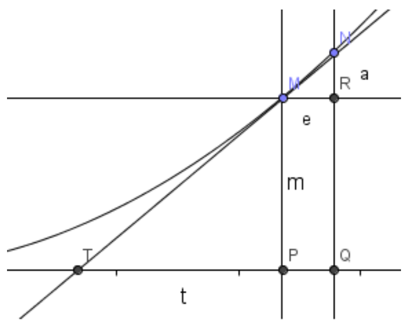
Isaac Barrow se narodil v Londýně v říjnu 1630. Začal studovat v Cambridgi a roku 1646 by přijat na Trinity College kde byl o tři roky později zvolen jejím členem. V roce 1652 získal magisterský titul na Cambrige a o rok později i na Oxfordu. Pro své politické názory byl nucen roku 1655 opustit Anglii. Cestoval po Evropě. Navštívil Paříž, Itálii, Turecko, Německo i Holandsko. Do Anglie se vrátil až poté, co se k moci vrátili Stuartovci.

Roku 1660 byl profesorem řečtiny. Překládal řecká díla, mezi jinými i dílo Euklidovo. Profesorem geometrie na Gresham College v Londýně a také členem Royal Sociatyn se stal roku 1662. Brzy na post profesora na Gresham College rezignoval, protože byl zvolen prvním lucasovským[4] profesorem v Cambridge. Lucasovksým proto, že roku 1663 dal reverend Henry Lucas univerzitě půdu, která zajistila plat pro jednoho profesora matematiky.

Barrowova hlavní vědecká činnost na tomto postu se týkala optiky a geometrie. Jeho nejvýznamnější dílo je *Lectiones opticae et geometricae* vydané roku 1669, na jehož realizaci se podílel i Isaac Newton. Ve stejném roce se Barrow vzdává v Newtonův prospěch postu lucasovského profesora a odjíždí do Londýna, kde se stává královým kaplanem. Isaac Barrow zemřel roku 1670 v Londýně.

2.3.1 Metoda hledání tečen

V díle *Lectiones opticae et geometricae* se Barrow zabýval problémem tečen a problémem kvadratury. Přemýšlel o geometrii jako o „steady flow of point", stálém toku bodů (Merzbach 2010, s. 356). Na rozdíl od Fermata, který používá pouze jednu „diferenci", kterou značí *e*, Barrow používá dvě (dnes známé jako $\Delta x, \Delta y$).



Obrázek 13

Svou metodu hledání tečen popsal následovně. Bod M je bod křivky zapsané polynomickou rovnicí $f(x, y) = 0$ a bod T vznikl průnikem tečny v bodě M a osou *x*. Potom Barrow vyznačil nekonečně malý oblouk křivky body *MN*. Body M a N vedl kolmice, jejichž průsečíky s osou *x*

[4] Současným lucasovským profesorem je Stephen Hawking.

označil P a Q. Bodem M vedl rovnoběžku s osou x, jejíž průsečík s přímkou QN označil bodem R.

Na základě shodnosti trojúhelníků TPM a MRN dostal rovnost.

$$\frac{|RN|}{|RM|} = \frac{|PT|}{|PM|}$$

Dané velikosti označil a, e, m, t.

$$\frac{a}{e} = \frac{m}{t}$$

Podíl $\frac{a}{e}$ pro a,e nekonečně malé určuje sklon křivky. Proto mohl za x a y do rovnice $f(x, y) = 0$ dosadit $x+e$ a $y+a$. Barrow se nepřímo dostal ke stejnému výsledku jako Fermat. Nyní postupoval stejně jako Fermat. Rovnici upravil na základní tvar, a protože a a e jsou nekonečně malé, zanedbal je. Nakonec všechny zbývající členy a a e nahradil členy m a t. Z tohoto znal členy x a m, a proto mohl odvodit i velikost t. Tento algoritmus byl považován pouze za vylepšení Fermatovy metody tečen. Žádný matematik se nevydal přímo Barrowovou cestou. Jeho metody popsané v díle *Lectiones geometricae* jsou považovány za těžko pochopitelné. Newton pracoval na stejném problému, ale publikoval svoje vlastní poznatky.

3 Sir Isaac Newton

Isaac Newton se narodil 25. prosince 1642[5] na statku Woolsthorpu v Lincolském hrabství přibližně 200 kilometrů severně od Londýna. Byl pohrobek. Jeho matka se po třech letech opět provdala, ale chlapec zůstal na statku, kde byl vychováván babičkou a strýcem. V roce 1653 jeho matka opět ovdověla a vrátila se do Woolsthropu. Na obecné škole Newton nevynikal. Prokazoval však, že je zručný a stavěl si různé přístroje. Roku 1655 začal navštěvovat vyšší školu v Granthamu. Bydlel u místního lékárníka, který mu umožnil přístup do své knihovny a také mu dovolil podílet se na práci v laboratoři. Zde se Newton blíže seznamuje s alchymií, která je pro něj v pozdější době nesmírně důležitá. Po dvou letech se vrací na statek do Woolsthorpu, kde se má ujmout hospodářství. K tomu však neprokazuje žádné schopnosti, proto se vrací do školy v Granthamu. Po jejím dokončení má znalost latiny i základů řečtiny a hebrejštiny. Především se zde seznámil s anglikánskou věroukou. Roku 1660 dává král Karel II. svolení se založením „The Royal society of London for the Improvement of Natural Knowledge“ (Královská společnost v Londýně pro pokrok přírodních znalostí, zkráceně Royal Society).

Ve svých 19 letech nastupuje na universitu v Cambridge, kde stráví příštích 35 let. Zde se setkal s mnoha významnými osobnostmi své doby. Velkým inspiračním zdrojem mu je Isaac Barow, který přednáší geometrii. Newton s Barowem často o látce diskutuje. Získané poznatky pak použije pro položení základů optiky, mechaniky a matematiky. V letech 1665-7 propukne v Cambidge morová epidemie a univerzita je uzavřena. Newton odjíždí domů do Woolsthorpu. Zde intenzivně pracuje. Toto období je později nazýváno „annus mirabilis“. V tomto období v podstatě vznikly všechny jeho velké objevy v přírodních vědách, formuluje gravitační zákon, rozklad bílého světla a základy diferenciálního počtu.

Po svém návratu na univerzitu získává magisterský titul. Univerzita Cambridge byla vyhlášená hlavně studiem teologie. Matematika byla v té době na vynikající úrovni hlavně na univerzitě v Oxfordu, Cambridge v tomto oboru pokulhávala. V roce 1669 odešel z vedení lucasovské katedry matematiky Isaac Barow a jeho nástupcem se stal Isaac Newton. První Newtonovy přednášky byly věnovány optice. Do té doby nic ze svých výsledků nepublikoval. Teprve když se

[5] 25. Prosince 1642 podle starého juliánského kalendáře; 4. ledna 1643 podle gregoriánského kalendáře

roznesla zpráva, že zkonstruoval první zrcadlový dalekohled a Barrow jej v roce 1671 předvedl na zasedání Royal Socoety a posléze i králi, začal být známý a své objevy týkající se rozkladu bílého světla při odrazu a průchodu hranolem publikoval ve *Philosophical Transaction of Royal Society* v roce 1672. (Saxl, 2010, s. 9)

Práce měla ohlas, ale setkala se i s kritikou dvou významných myslitelů té doby, Roberta Hookea a Christiana Huygense. I další jeho článek v roce 1675 byl kritizován, proto se Newton na určitou dobu odmlčel a věnoval se hlavně alchymii. Pro žáky i učitele univerzity v Cambridge platila striktní pravidla. Jedno z nich bylo, že každý profesor musel být vysvěcen. Při přípravě na vysvěcení Newton zavrhl učení o svaté Trojici, a proto vysvěcení odmítl a chtěl z univerzity odejít. Na žádost Royal Society dostal od krále Karla II. výjimku a mohl ve své práci pokračovat.

Newton během svého života prodělal několik nervových zhroucení. První bylo roku 1678. Jeho příčiny jsou nejasné, ale uvažuje se o tom, že při svých pokusech v alchymii se nadýchal výparů rtuti.

Newton, inspirován Robertem Hookem, se zabývá i pohybem planet. Při návštěvě Edmunda Halleyho byl v řešení tohoto problému hodně daleko. Roku 1687 Newton publikoval za významné Halleyho morální i finanční podpory stěžejní dílo *Philosophiae naturalis principia mathematica* a stal se_mezinárodně proslulým vědcem. Byl také znám svými protikatolickými názory, což mu v tehdejší politické situaci pomohlo ke zvolení za Cambridge do parlamentu v roce 1688 a začal jezdit do Londýna. V roce 1693 mu vyhořela alchymistická dílna. Shořely i některé alchymistické spisy, které nikdy znovu nenapsal a Newton prodělal další psychické zhroucení.

Za své zásluhy v oblasti vědy a také pro své alchymistické znalosti byl roku 1696 odměněn postem dozorce královské mincovny a roku 1699 se stal královským mincmistrem a ředitelem mincovny (v podstatě ministrem financí). Vydává i několik ekonomických článků. Roku 1700 vznikl spor mezi Newtonem a Leibnizem o to, kdo první vymyslel diferenciální a integrální počet.

Kvůli své nové funkci už není schopen vykonávat práci profesora na Cambridge, roku 1701 se svého postu vzdal. Dílo *Optick* vydává až po smrti Roberta Hooka, který je jeho velkým kritikem. Je zvolen prezidentem Royal Society a roku 1705 je královnou Annou povýšen do šlechtického stavu.

Sir Isaac Newton umírá 20. března roku 1727 (podle juliánského kalendáře) a je pohřben ve westminsterském opatství.

Po Newtonově smrti získaly velkou část rukopisu hrabata z Portsmouthu, ale k systematickému zpracování nedošlo. První Newtonův životopis byl zpracován až v 19. století skotským fyzikem Davidem Brewsterem, ale nebyl prozkoumán ani zlomek Newtonova díla. Bylo nahlíženo pouze do rukopisů o přírodních vědách.

Majitelé sbírky jeho rukopisů se je rozhodli v roce 1936 vydražit v aukci pořádané firmou Sotheby. Dílo bylo prodáno pod cenou a rozptýleno. O shromáždění Newtonova díla se zasloužil matematik a ekonom John Maynard Keynes. Nyní jsou rukopisy v knihovnách v Cambridge, v Jeruzalémě a v knihovně M.I.T. v Bostonu. V roce 1998 se rozběhl bohatě dotovaný *Newton project* s cílem přepsání Newtonových teologických, alchymistických i přírodovědných rukopisů a jejich internetové prezentace (Saxl; 2010; str. 11). Dochované dílo tvoří cca čtyři miliony slov o teologii, jeden milion slov o alchymii a pouze dvě stě tisíc slov o přírodních vědách.

3.1 Objevení binomické řady

Abychom mohli plně ocenit Newtonův úspěch, musíme si uvědomit dva komplikující historické fakty. Za prvé moderní zápis exponentů jak ho známe dnes, byl zaveden Descartesem v jeho *La Geometrie* z roku 1637 a používalo se výhradně přirozených čísel (Edawards 1979, s. 168). Ještě Francois Viete (1540-1603) používal místo A^3 „A cubus".

Druhá věc stojící za zapamatování je, že binomická věta nebyla známa ve formě umožňující záporné a lomené mocniny. Binomické koeficienty se odvozovaly z Pascalova trojúhelníku. První, kdo našel i jiné souvislosti mezi binomickými koeficienty byl John Wallis.

Newtonův objev binomické řady roku 1665 byl inspirovaný právě dílem Johna Wallise *Aritmetica infinitorum*. Byl to jeho první objev trvalého významu, při kterém zavedl používání záporných a zlomkových exponentů. Při svém objevu Newton vycházel z Wallisovi interpolace, ale tam, kde Wallis uvažoval posloupnost čísel

$$a_n = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\,dt\,,$$

Newton uvažuje posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^{\frac{n}{2}}\,dt\,.$$

Odlišný přístup k tomuto problému byl dán i prostředím univerzity v Cambridge. Profesorem matematiky na Cambridgi byl Isaac Barrow, který se také zabýval tečnami a kvadraturou kruhu. Barrow upřednostňuje pohybový model Torricelliho před statickým modelem Wallise, který na problém nahlížel jako obsahy neměnných útvarů.

Pokud je *n* sudé, můžeme funkci $f_n(x) = (1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ spočítat přímo.

$$f_0 = 1(x)$$

$$f_2 = 1(x) + 1\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$$

$$f_4 = 1(x) + 2\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 1\left(\frac{1}{5}x^5\right)$$

$$f_6 = 1(x) + 3\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + 3\left(\frac{1}{5}x^5\right) + 1\left(-\frac{1}{7}x^7\right)$$

Prozatím je postup identický s postupem Wallisovým. Ale protože Newton na problém nahlížel jako na posloupnost funkcí, vytvořil následující tabulku.

m/n	0	2	4	6	8	10
0	a	a	a	a	a	a
1	b	a+b	2a+b	3a+b	4a+b	5a+b
2	c	b+c	a+2b+c	3a+3b+c	6a+4b+c	10a+5b+c
3	d	c+d	a+b+2c+d	2a+3b+3c+d	5a+6b+4c+d	11a+10b+5c+d

Tabulka 4

Tabulku Newton vyplnil obecně na základě vztahu $a_{m,n+2} = a_{m-1,n} + a_{m,n}$, aby byl zřejmý vztah mezi řádky a sloupci. Wallis ve svých tabulkách uvedl hodnoty, nikoli vztahové vzorce a používal i trochu jiný vztah mezi jednotlivými buňkami tabulky ($a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q}$).

Newton předpokládal, že stejné schéma platí i pro tabulku rozšířenou o liché sloupce. Tuto tabulku vyplnil konkrétními čísly.

	n												
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	**1**	**1**
1	0	1/2	**1**	3/2	**2**	5/2	**3**	7/2	**4**	9/2	**5**	11/2	**6**
2	0	?	0	?	**1**	?	**3**	?	**6**	?	**10**	?	**15**
3	0	?	0	?	0	?	**1**	?	**4**	?	**10**	?	**20**
4	0	?	0	?	0	?	0	?	**1**	?	**5**	?	**15**
5	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	**1**	?	**6**
6	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	0	?	**1**

Tabulka 5

Pro první dva řádky tabulky platí:

$$a_{0,n} = 1\ ;\ a_{1,n} = \frac{n}{2}$$

V tabulce jsou zvýrazněny sloupce, které tvoří binomické koeficienty podle Pascalova trojúhelníku. Newton byl velký praktik, nebál se přistupovat k problému zcela novým způsobem, hlavně když to vedlo k výsledku. Aby mohl nalézt hodnoty v tabulce 5, využil vyjádření z tabulky 4, kde měl popsán vztah mezi jednotlivými buňkami v řádku. Podle Newtona se liché i sudé prvky posloupnosti $f_n(x)$ musí chovat stejně. Tím mu vznikla jednoduchá soustava rovnici spojením druhého řádku tabulky 4 a druhého řádku tabulky 5.

Soustava rovnic pro *m=2:*

$0 = c$

$? = b + c$

$0 = a + 2b + c$

$? = 3a + 3a + c$

$1 = 6a + 4b + c$

$? = 10a + 5b + c$

$C = 0\ ;\ b = -1/8\ ;\ a = 1/4$ ...

$b + c = \boldsymbol{a}_{2,1} = -\frac{1}{8};\ 3a + 3b + c = \mathrm{a}_{2,3} = \frac{3}{8};\ 10a + 5b + c = a_{2,5} = \frac{15}{8}$

Tímto postupem pokračoval dále pro $m = 3$, $\boldsymbol{a}_{1.3} = \frac{1}{16}$; $m = 4$, $\boldsymbol{a}_{4,1} = -\frac{5}{128}$; … až vypočítal $\boldsymbol{a}_{6,1} = -\frac{21}{1024}$. V tomto okamžiku se mu podařilo rozpoznat všeobecný tvar koeficientů pro první sloupec. Uvědomil si, že prvky vznikají jako postupné prvky v součinu.

$$a_{1,1} = \frac{1}{2}$$

$$a_{2,1} = \frac{1}{2} . \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$a_{3.1} = \frac{1}{2} . \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} . \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} = \frac{1}{16}$$

$$\dots$$

$$a_{m,1} = \frac{1}{2} . \frac{\frac{1}{2} - 1}{2} . \frac{\frac{1}{2} - 2}{3} . \frac{\frac{1}{2} - 3}{4} . \ \dots \quad (1)$$

Dospěl k vyjádření (1) stejně jako Wallis ke svému objevu „Wallisovi formule“. Když se mu podařilo nalézt zobecnění pro první sloupec koeficientů, nalezl i obecný vzorec, dnes známý v podobě

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} \ ,$$

kde α může být libovolné racionální číslo.

Newtonův přístup byl již od počátku jako přístup k posloupnosti funkcí. Sloupec $a_{m,1}$ je rozvojem funkce $f_1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Touto cestou vznikla binomická formule, kterou dnes známe ve tvaru

$$(1 - x^2)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} x^{2k}.$$

Takto napsaná definice je pro nás díky dnešní notaci pěkně srozumitelná. Newton zjistil, že s nekonečnými řadami můžeme počítat podobně jako s čísly. Řady můžeme sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat a odmocňovat. Počítání s nekonečnými řadami podléhá stejným všeobecným pravidlům jako algebra konečných veličin. Nekonečné řady tak přestaly být považované jen za pomocné nástroje k aproximaci veličin. Staly se formou prezentace samotných „funkcí“. Tím byl i konec strachu z nekonečna, který měli už Řekové.

Newton sám nikdy nepublikoval teorii binomické řady, ale napsal několik článků o analýze nekonečna. Chronologicky byly tyto články spolu s některými rukopisy z let 1665 - 1666 složeny do díla *De analysis per aequationes numero terminorum infinitas* roku 1669. Avšak tyto spisy byly vydány až roku 1711.

Newton binomickou formuli vyslovil v dopise Leibnizovi dnes známém jako *Epistola prior* ze 3.června 1676 následovně:
„Extrakce kořenů je mnohem kratší v teorii

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{(m-n)}{2n}BQ + \frac{(m-2n)}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$

Kde $P+PQ$ představuje množství, jehož kořeny nebo mocniny nebo mocninné kořeny hledáme. P je první člen množství, Q je zbývající člen množství rozdělený na výraz první a numerický index mocniny *m/n* původního výrazu $P+PQ$, exponent může být zlomek, a to kladný i záporný“ (Merzbach 2010, s. 357).

Každý ze symbolů A, B, C,… označuje bezprostředně předcházející člen,

$$A = P^{\frac{m}{n},}\ ;\ B = \frac{m}{n}AQ\ ;\ C = \frac{m-n}{2n}BQ\ ;\ \ldots$$

Při všeobecném redukování kořenů v nekonečnou řadu tímto pravidlem si Newton uvědomil, že byl před tím seznámen s kvadratickými kořeny polynomu. Svou teorii si ověřil na příkladu

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 - \cdots$$

Ověření ho motivovalo k použití těchto řad k získávání kořenů polynomu. Následoval při tom Vietovy metody pro určení kvadratického kořene čísla N.

Určil A jako $\sqrt{N}$, a chybu označil E, $\sqrt{N} = A + E$. Potom

$$N - A^2 = (A+E)^2 - A^2 = 2AE + E^2 \cong 2AE$$

$$E \cong \frac{N-A^2}{2A}.$$

Jestli je A dobrý odhad $\sqrt{N}$ takový, že E^2 je menší v porovnání 2AE, potom se nám úspěšně podaří aproximovat hledanou odmocninu z čísla N. Odhad opakuje do té doby, dokud není spokojen s přesností.

3.2 Logaritmus a obsahy pod hyperbolou

Napierův objev logaritmu a logaritmické tabulky měly veliký vliv na rozvoj numerické matematiky. K logaritmické funkci se ale také dospělo při hledání obsahů plochy pod křivkou. Význam logaritmu pro rozvoj matematické analýzy pochází z objevu Gregory Saint-Vincent, který geometricky zkoumat obsah pod hyperbolou.

Analogie Gregoryho Staint-Vincenta podnítila Newtona okolo roku 1667 k numerickým výpočtům logaritmů jako hyperbolických oblastí. Napřed rozvinul hyperbolu v řadu

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad (1)$$

Potom využil skutečnost, že plochu pod hyperbolou mohl místo kvadratury určit formálním integrováním. Takto dostal vyjádření

$$A(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Platí rovnost $A(x+1) = \ln(x+1)$. Newton nenazýval $A(x+1)$ logaritmem, ale funkcí, která převádí součin a součet. Položil $x = \pm 0{,}1$ a $x = \pm 0{,}2$ a vypočítal *A(0,8), A(0,9), A(1,1) a A(1,2)* s přesností na 57 desetinných míst. Dále si uvědomil, že $2 = \frac{1{,}2.1{,}2}{0{,}8.0{,}9}$; $3 = \frac{1{,}2.2}{0{,}8}$; $5 = \frac{2.2}{0{,}8}$; $10 = 2.5$; $11 = 10.1{,}1$; $100 = 10.10$

Tak dostal *A(2), A(3), A(5), A(10), A(11), A(100)* čistě pomocí sčítání a odčítání. Potom do řady (1) dosadil $x = \pm 0{,}02$ a $x = 0{,}001$ a spočítal *A(0,98), A(1,02), A(0,999)* a *A(1,001).* To mu umožnilo spočítat logaritmy 7, 13 a 17.

$$7 = \sqrt{\frac{100.0{,}98}{2}} \quad ; \quad 13 = \frac{1000.1{,}001}{7.11} \quad ; \quad 17 = \frac{100.1{,}02}{6}$$

Aby Newton zkontroloval přesnost svých výpočtů, vypočítal *A(0,9984)* dvěma způsoby. Jednak dosadil $x = -0{,}0016$ do řady (1) a potom podle rozkladu

$$0{,}9984 = \frac{2^8.3.13}{10^5},$$

podle kterého je A(0,9984) = 8A(2) + A(3) +A(13) – 5A(10). Newton zjistil, že se tyto vyjádření se shodují na více jak 50 desetinných míst.

3.3 Newtonův Kalkulus

Roku 1665 Newton studoval problémy tečen metodou kombinující rychlost a pohyb bodu v uzavřeném systému. Tento přístup k vyšetřování tečen mu zajistil motivaci pro novou metodu fluxií a zároveň klíč ke geometrickým aplikacím. Roku 1666 shromáždil Newton výsledky z předchozích dvou let týkající se kalkulu, později známé pod označením „*The October 1666 Tract of Fluxions*“. Byly to první formální listy kalkulu, které však byly vydány až při uspořádávání Newtonovy pozůstalosti ve dvacátém století. V těchto rukopisech se poprvé objevuje myšlenka počítat obsah pod křivkou pomocí antidiferencionálu (Edwards 1979, s. 195). Pojem antidiferencionál dnes nazýváme primitivní funkce.

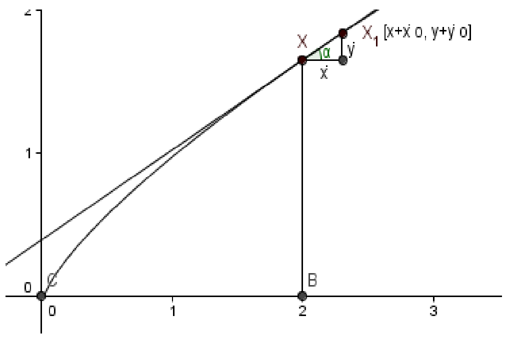
Roku 1671 Newton uspořádal svoje výsledky v oblasti matematické analýzy, ke kterým došel za posledních 6 let, a napsal rozsáhlé pojednání *Metoda fluxií a nekonečných řad a jejich aplikace na geometrické křivky*. Jeho pokusy toto dílo vydat ale ztroskotaly a vyšlo až posmrtně roku 1736. V tomto spisu objasňuje svoje chápání fluxií: „*Čas považujeme za tekoucí, nebo narůstající spojitým tokem (continual flux) a ostatní veličiny považujeme za spojitě narůstající s časem. Z toku času (fluxion of time) dávám jméno fluxa rychlostem, s kterými narůstají ostatní veličiny. Čas vyjadřujeme pomocí libovolné veličiny, která rovnoměrně teče a její fluxii označujeme jednotkou. Fluxie ostatních veličin vyjadřujeme libovolným jiným symbolem. Tato metoda je odvozena bezprostředně od samotné přírody*.“

Pojednání *Metoda fluxií a nekonečných řad a jejich aplikace na geometrické křivky* obsahuje dvě tabulky integrálů/derivací. První se nazývá *Katalog křivek příslušných k přímočarým útvarům* a obsahuje seznam křivek, jejichž primitivní funkce lze najít v explicitním tvaru. Druhá se nazývá *Katalog křivek příslušných ke kuželosečkám* a obsahuje seznam křivek, jejichž kvadraturu lze redukovat na kvadraturu vhodně zvolené kuželosečky. Tato druhá tabulka vyšla poprvé v dodatku k *Optice* roku 1704 nazvaném *De quadratura Curvalum.* V Newtonově nejslavnějším díle *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* z roku 1687 je také mnoho infinitezimálních úvah a limitních argumentů.

Předchozí infinitezimální techniky měly základní princip v určení plochy jako limitu součtu nekonečně malých částí plochy. Newton předvedl techniku určení podílu změny z požadované plochy (s ohledem na x) a počítání plochy pomocí primitivní funkce. V kombinaci s fluxionálním přístupem k tečnám vytvořil jako první přesný a přirozený vztah mezi tečnou a plochou. Primitivní funkce i fluxie jsou počítány s ohledem na jeden matematický předmět, který charakterizuje odlišný a všeobecně aplikovatelný algoritmický proces.

3.3.1 Metoda fluxií

Newton považoval křivku $f(x, y) = 0$ za množinu průsečíků dvou pohybujících se přímek, vertikální a horizontální. Souřadnice x a y pohybujícího se bodu jsou poté funkcemi času t, které udávají polohu vertikální a horizontální osy. Pohyb bodu je tak složen z horizontálního pohybu s rychlostí $\dot{x}$ a vertikálního pohybu s rychlostí $\dot{y}$. Vektor rychlosti dostaneme jako vektorový součet vertikální a horizontální komponenty, sklon tečny ke křivce je



Obrázek 14

$$tg(\alpha) = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \ .$$

Newtonovým prvním problémem bylo nalézt vztah mezi fluxiemi $\dot{x}$ a $\dot{y}$, pokud známe vztah $f(x, y) = 0$ mezi fluentami x a y. Jeho myšlenka byla, že v průběhu nekonečně krátkého časového intervalu o je každý pohyb v podstatě lineární, proto se fluenty x a y za dobu o změní na $x + \dot{x}o$, respektive na $y + \dot{y}o$. Protože pracoval s polynomy funkce $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0$, mohl do vztahu dosadit

$$\sum a_{ij} (x + \dot{x}o)^i (y + \dot{y}o)^j = 0 \ .$$

Binomickým rozvojem dostal:

$$\sum a_{ij} x^i y^j + \sum a_{ij} x^i (j y^{j-1} \dot{y}o + členy\ s\ o^2) + \sum a_{ij} y^j (i x^{i-1}\, \dot{x}o + členy\ s\ o^2) +$$
$$+ \sum a_{ij} (i x^{i-1} \dot{x}o + \cdots)(j y^{j-1} \dot{y}o + \cdots) = 0$$

Využitím vztahu $\sum a_{ij}x^i y^j = 0$ a zanedbáním všech členů obsahujících o^2 je výsledek

$$\sum a_{ij}(ix^{i-1}\dot{x}o + jy^{j-1}\dot{y}o) = 0\,.$$

Fluxie $\dot{x}\ a\ \dot{y}$ přímek $x\ a\ y$ jsou rychlosti, pomocí kterých se body pohybují s „flux (flowing) of time“ (tekoucím časem). Tuto myšlenku považoval za zřejmou na základě fyzikálních vlastností. V dnešní terminologii jsou fluxie $\dot{x}$ a $\dot{y}$ prosté derivace *x* a *y* podle času *t*

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad a \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad .$$

Notace s tečkou je typicky Newtonovská, ale Newton ji důsledně přijal až v devadesátých letech sedmnáctého století. V počáteční práci obvykle používal různá písmena *p*, q místo $\dot{x}$, $\dot{y}$.

Rovnice $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ není nic jiného, než popis rovnoměrného přímočarého pohybu, který se učí již na základní škole. Stačí pouze změnit značení a dostanu

$$v = \frac{s}{t}\ ,$$

neboli rychlost je vzdálenost překonaná za určitý čas. Toto je první diferenciální rovnice.

Newton postupoval při tvoření tabulky derivací (při čtení tabulky pozadu máme tabulku primitivních funkcí) následovně:

Chci vypočítat $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ například pro funkci $y = (1+x^n)^{\frac{3}{2}}$. Zavedu proměnou $z = 1 + x^n$, pro kterou platí $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$. Po úpravě dostanu podíl $\frac{\dot{x}}{\dot{z}} = \frac{1}{nx^{n-1}}$. Pro původní funkci platí $y^2 = z^3$ a platí i $2y\dot{y} = 3z^2\dot{z}$. Opět mohu upravit na podíl $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{3z^2}{2y}$.

Z těchto vztahů dostávám

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}/\dot{z}}{\dot{x}/\dot{z}} = \frac{3z^2/2y}{1/nx^{n-1}} = \frac{3}{2}nx^{n-1}\sqrt{(1+x^n)}\ .$$

Tento postup mohu ještě zobecnit pro případ $y = (1 + x^n)^\alpha$.

Opět substituuji $z = 1 + x^n$

$$\frac{\dot{x}}{\dot{z}} = \frac{1}{nx^{n-1}}$$

$$y = z^\alpha$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \alpha z^{\alpha-1}$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{\frac{1}{nx^{n-1}}} = \alpha n x^{n-1}(1 + x^n)^{\alpha-1}$$

Pro názornost jsem zvolil polynom $1 + x^n$, se kterým pracoval už John Wallis. Algoritmus ale mohu použít pro libovolnou křivku *f(x).* Tento Newtonův postup je téměř shodný s tím dnešním. Podobným způsobem Newton vytvořil rozsáhlou tabulku derivací, která zároveň sloužila k určení primitivní funkce.

3.3.2 Metoda fluent

Poté, co určil fluxie na základě vztahu $f(x, y) = 0$ mezi proměnnými, formuluje Newton opačnou úlohu. Jak vyjádřit x ze vztahu mezi y a poměrem fluxií $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$. V případě, kdy je tato rovnice v jednoduchém tvaru $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \phi(x)$, jedná se o problém hledání primitivní funkce. V obecném případě jde o diferenciální rovnici.

Newton přišel s myšlenkou napřed určit rychlost (fluxii) změny obsahu, a potom nehledat obsah, ale funkci s příslušnou fluxií. Tím se poprvé dostává do souvislosti problém tečen s výpočtem obsahu pod křivkou.

Vytvořil si funkci *A(x)* udávající obsah plochy pod křivkou $y = f(x)$. Směrnice tečny ke grafu funkce *A(x)* v bodě x_0 odpovídá funkční hodnotě *f(x).* Geometricky je tato souvislost složitá. Newton ale na tento problém nahlíží dynamicky. Uvažoval plochu pod křivkou $y = f(x)$ a představoval si, že je tato plocha vymezena vertikální osou, která se pohybuje směrem doprava konstantní rychlostí $\dot{x} = 1$. Potom rychlost, s jakou narůstá obsah plochy, bude rovná hodnotě $f(x_0)$. Rychlost nárůstu plochy je tedy derivace funkce *A(x)* v bodě x_0, která se rovná právě $f(x_0)$. Toto je objev nesmírného významu, protože redukuje problém hledání kvadratury na problém hledání primitivní funkce. Nemusíme už řezat útvar na tenké plátky a ty poté pracně sčítat. Stačí jenom nalézt k funkci *f(x)*, která ohraničuje příslušný útvar, její primitivní funkci *A(x)*.

Newton ve svých *Principiích* uvedl konkrétní pravidla, podle kterých lze nalézt kvadraturu křivek:

Nad základnou AB je jistá křivka AD a od ní kolmice BD. Nazveme AB = x, BD = y a nechť a, b, c, … jsou dané veličiny a m, n celá čísla.

Pravidlo I. *Nejjednodušší kvadratura křivek*

Jestliže $ax^{\frac{m}{n}} = y$, pak bude $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ = ploše ABD.

Příklad: $4\sqrt{x} = 4x^{\frac{1}{2}} = y$

$$plocha\ ABD = \frac{4\,.2}{1+2}x^{\frac{1+2}{2}} = \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Pravidlo II. *Kvadratura křivek složených z jednoduchých*

Jestliže hodnota samotného *y* je složena z více členů výše uvedeného druhu, plocha se také skládá z ploch, které vyplývají z jednotlivých členů.

Příklad: $x^3 + x^{\frac{1}{3}} = y$

$$plocha\ ABD = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$$

Pravidlo III. *Kvadratura všech ostatních*

Jestliže hodnota samotného *y* nebo libovolného jeho členu je složitější než v předcházejících případech, pak je nutno ho redukovat na jednodušší členy. Přitom se pracuje s písmeny stejným způsobem, jako v aritmetice se s desetinnými čísly dělí, odmocňuje nebo řeší rovnice, a z takto získaných členů odvodíme podle předcházejících pravidel povrch hledané křivky.

Příklad dělení pro pravidlo III: $y = \frac{a^2}{b+x}$

$$a^2 : (b+x) = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3} - \frac{a^2x^3}{b^4} + \cdots$$

$$-a^2 - \frac{a^2x}{b}$$

$$\frac{a^2x}{b} + \frac{a^2x^2}{b^2}$$

$$-\frac{a^2x^2}{b^2} - \frac{a^2x^3}{b^3}$$

$$\dots$$

Touto metodou byl Newton schopen napsat obsah pod křivkou pro libovolnou funkci, jak sám napsal „za půl čtvrtiny hodiny“. Jeho tabulka integrálů, takřka nezměněna, pouze postupem času doplněna o transcendentální funkce, byla součástí standardních učebnic matematické analýzy. Technika numerické aproximace hodnot funkcí pomocí těchto tabulek byla základní technikou v aplikacích matematiky až do vzniku počítačů.

Závěr

Pro dnešního člověka bývá problémem přijmout fakt, že v 17. století nebyl znám pojem funkce, a že kartézská soustava byla zavedena až v první polovině tohoto století. Představené matematické objevy pro srovnání ukazuji i pomocí obrázků v kartézské soustavě.

Představuji skutečnost, že logaritmus byl definován jako vztah aritmetické a geometrické posloupnosti. Nezávisle na numerické definici lze určit logaritmus pomocí obsahu pod hyperbolou. V kapitole o Fermatově kvadratuře pomocí programu Geogebra názorně ukazuji, že když na osu x nanesu rostoucí geometrickou posloupnost bodů a zkonstruuji obdélníky, jejichž jeden z vrcholů náleží hyperbole $f(x)=1/x$, jsou obsahy těchto obdélníků stejné, čímž je dokázán logaritmický charakter obsahu pod hyperbolou. Tato ukázka vede k elementární představě o diferenciálním a integrálním počtu, který dává do souvislosti metody pro určování tečen s určováním kvadraturu.

Newtonova myšlenka, že určování tečen a kvadratur jsou dvě navzájem inverzní operace, je revoluční. Její originalitu si nejvíce uvědomíme při nahlédnutí do dobových matematických zápisů, které jsou pro nás psány nestandardním, těžko pochopitelným způsobem. Má práce je napsána dnešní matematickou notací, proto lze tuto souvislost spatřit již v práci Newtonových předchůdců, kteří považovali metody pro výpočet tečen a kvadratur za zcela nezávislé.

Historický přístup k matematice nabízí názorné propojení geometrie, algebry i matematické analýzy. Má práce je přehledem o vybraném období matematiky a přináší inspiraci pro zpestření výuky.

Použitá literatura

- BEČVÁŘ, Jindřich (ed.). *Matematika v proměnách věků VI*. Praha: Matfyzpress, 2010. Dějiny matematiky, svazek 45. ISBN 978-80-7378-146-0.
- BOYER, Carl B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover publication, 1959. ISBN 0-486-60509-4.
- DOBBS, Betty. *Newton and the Culture of Newtonianism*. New York: Prometheus Books, 1995. ISBN 9781573925457
- EDWARDS, C.H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979. ISBN 0-540-90436-0
- FAUVEL, John a Jeremy GRAY. *The History of Mathematic - A Reader*. London: The Open University, 1987. ISBN 0-333-42791-2.
- HRNČIŘÍK, Zdeněk. *Aplikace diferenciálního počtu funkcí jedné proměnné ve slovních úlohách*. Brno, 2008. Diplomová práce. Masarykova Univerzita. Vedoucí práce RNDr. Šárka Hošková, Ph.D.
- JAHNKE, Hans Niels. *Historie analýzy*. Pardubice: RNDr. Karel Vašíček-mathpublishing.eu, 2007. ISBN 978-80-903838-1-4.
- MAHONEY, Michael, S. *Peirre Fermat*. In: *Dictionary of scientific biografy*. 1989. vyd. New York: Scrimber, s. 566 - 576. ISBN 0684101149.
- MERZBACH, Uta C. a Carl B. BOYER. *A History of Mathematics*. New Jersey: John Willey&Sons, 2010. ISBN 978-0-470-52548-7
- MUSÍLEK, Michal. *Kapitoly z dějin informatiky: Od starověku do 19.století*. Hradec Králové: Centrum talentů MFI, 2010
- NÁDENÍK, Zbyněk. *Matematika v 16. a 17. století: Seminář historie matematiky III*. Praha: Prometheus, 1999.
- NOVÝ, Luboš a SMOLKA, Josef. *Isaac Newton*. 1. vyd. Praha: Orbis, 1969. 192, [4] s. Portréty; Sv. 36.
- SAXL, Ivan. Isaac Newton alchymista, filosof, heretik. In: *Matematika v proměnách věků VI*. 2010. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010, s. 7-47. Dějiny Matematiky, svazek 45. ISBN 978-80-7378-146-0.
- ŠTEFKOVÁ, Lenka. *Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon*. Olomouc, 2008. Bakalářská práce. Univerzita Palackého v Olomouci.

- ŠTĚPÁNOVÁ, Irena. *Newton - poslední mág starověku*. Praha: Karolinum, 2012. ISBN 978-80-246-2061-9
- STRUIK, Dirk J. *Dějiny Matematiky*. Praha: Orbis, 1963
- ZNÁM, Štefan, kolektiv. *Pohľad do dejín matematiky*. Bratislava: Alfa, 1986. ISBN 6357286.

Elekronické zdroje

- BOYER, Carl B. *Pierre de Fermat* [online]. 1976[cit. 2013-05-30]. Dostupné z: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/204668/Pierre-de-Fermat
- DHOMBRES, Jean. *Jak Fermat pracoval s matematickými křivkami* [online]. 2010[cit. 2013-06-5]. Dostupné z: http://www.cefres.cz/pdf/c28/dhombres_2002_fermat_matematicke_krivky.pdf
- MORDECHAI, Feingold. *Isaac Barrow* [online]. 1990[cit. 2013-05-20]. Dostupné z: http://www.britannica.com/EBchecked/topic/54184/Isaac-Barrow
- O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. *Gregorius Saint-Vincent* [online]. 2010[cit. 2013-05-13]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Saint-Vincent.html

Příloha

Algoritmus pro hledání druhé odmocniny

V době počítačů nikdo již algoritmus pro ruční počítání druhé odmocniny nepoužívá. Proto bych ho rád uvedl. Ale také je to ukázka, na jaké úrovni byla numerická matematika v 17. století. Henry Briggs ve své tabulce uvedl odmocniny spočtené na 14 desetinných míst. Uvedu zde příklad na pouhá 4 desetinná místa.

Hledám $\sqrt{10}$

Krok 1 $10 \sim a^2 \ldots a = 3\,, zb.1$

Krok 2 $10 \sim (3 + 0,b)^2 = 9 + 0,6b + 0,0b^2$

$1 \sim 0,6b \ldots b = 1$

Krok 3 $10 \sim (3,1 + 0,0c)^2 = 9,61 + 0,062c + 0,000c^2$

$0,39 \sim 0,062c \ldots c = 6$

Krok 4 $10 \sim (3,16 + 0,00d)^2 = 9,9856 + 0,00632d + 10^{-6}d^2$

$0,0144 \sim 0,00632d \ldots d = 2$

Krok 5 $10 \sim (3,162 + 0,000e)^2$

$0,001756 \sim 0,0006324 \ldots e = 2$

…

$$\sqrt{10} \cong 3,1622$$

Algoritmu mohu zjednodušit. Číslo 10,000000 rozdělím od desetinné čárky vpravo i vlevo na dvojčíslí. Pro první dvojčíslí určím nejbližší druhou mocninu čísla. Číslo napíši do výsledku a od dvojčíslí odečtu druhou mocninu tohoto čísla. ($10 - 3^2 = 1$). Zanedbám poslední číslo připsaného dvojčíslí a dělím dvojnásobkem výsledku (v našem případě 10 : 6 = 1). Číslo 1 připíši k výsledku a k číslu 6 na místo jednotek. Vynásobím 1 (výsledek dělení) a odečtu od „dvojčíslí“ se kterým právě pracuji (61 . 1 = 61; 100 – 61 = 39). Sepíši další dvojčíslí a celý postup opakujeme.

$$10|,00|00|00|00 \quad = \quad 3,1622$$
$$-9$$
$$100 \quad ; \quad 10 : 6 = 1\,; \quad 61\,.1 = 61$$
$$-61$$
$$3900 \quad ; \quad 390 : 62 = 6 \quad ; \quad 626\,.6 = 3756$$
$$-3756$$
$$14400 \quad ; \quad 1440 : 632 = 2 \quad ; \quad 6322\,.2 = 12644$$
$$-12644$$
$$175600 \quad ; \quad 17560 : 6252 = 2 \quad ; \quad 62522\,.2 = 125044$$
$$-125044$$
$$50556$$
$$\ldots$$