Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Antonín Komora

Robustní optimalizace pro řešení neurčitých optimalizačních úloh

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:
prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.

Studijní program: Matematika
Obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2013

Rád bych poděkoval vedoucí práce **prof. RNDr. Jitce Dupačové, DrSc.** za cenné rady, ochotu pomoci a projevenou trpělivost při tvorbě této práce. Dále bych rád poděkoval všem, kteří se podíleli na závěrečné kontrole této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne Bc. Antonín Komora

Název práce: Robustní optimalizace pro řešení neurčitých optimalizačních úloh
Autor: Bc. Antonín Komora
Katedra: Katedra Pravděpodobnosti a Matematické Statistiky MFF UK
Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.

Abstrakt: Robustní optimalizace je cennou alternativou k stochastickému programování. Veškeré podkladové pravděpodobnostní struktury jsou v ní nahrazeny tzv. neurčitou množinou a podmínky z ní pramenící musí být splněny za každých okolností. Tato práce přibližuje základní aspekty robustní optimalizace, a pojednává o nejčastější typech úloh a neurčitých množin. Zahrnuje zejména polyedrické a eliptické množiny neurčitosti a v případech lineárního, kvadratického, semidefinitního či diskrétního programování jsou pro druhý typ formulovány výpočetně schůdnější podoby robustifikovaných úloh. Další část práce se pak zabývá všeobecně známým problémem květinářky. Nejprve je pomocí principů robustní metodologie vytvořen základ pro konstrukci robustifikované varianty a posléze je, v návaznosti na předchozí část práce, formulováno, otestováno a porovnáno několik pro řešení vhodnějších variant.

Klíčová slova: robustní optimalizace, neurčitost, problém květinářky

Title: Robust optimization for solution of uncertain optimization programs
Author: Bc. Antonín Komora
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics MFF UK
Supervisor: prof. RNDr. Jitka Dupačová, DrSc.

Abstract: Robust optimization is a valuable alternative to stochastic programming, where all underlying probabilistic structures are replaced by the so-called uncertainty sets and all related conditions must be satisfied under all circumstances. This thesis reviews the fundamental aspects of robust optimization and discusses the most common types of problems as well as different choices of uncertainty sets. It focuses mainly on polyhedral and elliptical uncertainty and for the latter, in the case of linear, quadratic, semidefinite or discrete programming, computationally tractable equivalents are formulated. The final part of this thesis then deals with the well-known Flower-girl problem. First, using the principles of robust methodology, a basis for the construction of the robust counterpart is provided, then multiple versions of computationally tractable equivalents are formulated, tested and compared.

Keywords: robust optimization, uncertainty, Flower-girl problem

Obsah

Úvod

V této práci se budeme zabývat úlohami robustní optimalizace. Původní myšlenka pro tento typ úloh pochází z práce *Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming* ([11]). Zde se pojednává o metodách řešení problémů lineárního programování s neurčitými daty, tedy takovými, které nám nemusí být při řešení přesně známy. Pro práci s problémy tohoto typu je volen postup, který využívá studia tzv. tvrdých podmínek, jinými slovy těch podmínek, které musí být splněny, ať již je řešení problému jakékoliv.

Kupříkladu pro systém vodních nádrží by se jednalo o největší a nejmenší možný objem zadržované vody v jednotlivých nádržích nebo skutečnost, že do nádrže níže po proudu nemůže natéct více vody než vypustíme z nádrží přímo "nad ní".

Tato práce se dále zabývá konvexní optimalizací, kde je využito poznatků práce *Robust Convex Optimization* ([2]), a posléze pracuje s principy dynamických úloh převzatými z práce *Adjustable Robust Solutions of Uncertain Linear Programs* ([1]).

Při práci s neurčitými úlohami lze využít také stochastického programování a reprezentace neznámých složek pomocí náhodných veličin. Základním problémem zde však je to, že může dojít (s určitou pravděpodobností) k porušování tvrdých podmínek.

Tato práce je strukturována následovně. V kapitole 1 budeme konstruovat robustní optimalizační úlohy a formulovat jejich základní principy. V kapitole 2 se pak budeme zabývat základními otázkami, které jsou spojeny s řešitelností úloh robustní optimalizace. Kapitola 3 pak obsahuje výčet základních typů neurčitosti a nejčastěji uvažovaných typů úloh. V kapitole 4 je pak na problému květinářky robustní metodologie aplikována, a tyto poznatky pak jsou výpočetně ilustrovány v kapitole 5.

V příloze A je pak uveden kód procedury v programu Matlab, která byla využita pro tuto výpočetní aplikaci.

Kapitola 1

Konstrukce

Úlohy robustní optimalizace lze, ostatně jako každou jinou optimalizační úlohu, obecně vyjádřit v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \min\ & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) \\ s.t.\ & g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq 0 \quad l = 1, \ldots, L \\ & h_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad k = 1, \ldots, K \\ & \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

nebo ekvivalentně:

$$\begin{aligned} \min\ & E \\ s.t.\ & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq E \\ & g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) \leq 0 \quad l = 1, \ldots, L \\ & h_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = 0 \quad k = 1, \ldots, K \\ & \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde $\mathcal{X}$ značí pevně daný nosič vektoru $\boldsymbol{x}$, tedy množinu, která definuje pevné podmínky pro tento vektor (v této práci využíváme nejčastěji nezápornost). Neurčitost zde reprezentují prvky $\boldsymbol{\omega}$, u nichž předpokládáme pouze znalost množiny $\mathcal{U}$, do níž tyto koeficienty patří. Splnění již zmíněných tvrdých podmínek v podstatě znamená, že podmínky řešitelnosti úlohy (1.1) (resp. (1.2)) nesmí být porušeny pro žádné $\boldsymbol{\omega}$ v rámci předem definované množiny $\mathcal{U}$.

Varianta (1.1) je praktičtější v případech, kdy funkce f neobsahuje neurčité prvky, neboť tehdy může "stát stranou"našich snah o přetvoření úlohy do vhodnějšího tvaru. Pokud však neurčitost v účelové funkci máme, můžeme využít buď variantu (1.2), nebo některou ze zjednodušujících úprav uvedených dále v práci (oddíl 1.2).

Pro jednoduchost zvolíme pro zavedení základních pojmů lineární programování, kde máme původní (určitou) úlohu ve tvaru:

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\} \tag{1.3}$$

Uvážením tzv. plné neurčitosti (tzn. ve všech částech úlohy) získáme místo úlohy (1.3) její robustifikovanou verzi (orig. robust counterpart):

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \quad \forall \, (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) \in \mathcal{U} \right\}. \tag{1.4}$$

Libovolné přípustné řešení robustifikované úlohy musí splňovat všechny podmínky dané množinou $\mathcal{U}$ (z definice) a optimální řešení této úlohy bývá označováno pojmem robustní řešení. Často se také hovoří o tzv. (ne)přípustných robustifikovaných úlohách, což pouze znamená, že pro danou úlohu (ne)existuje přípustné řešení.

Pro zjednodušení zápisu budeme nadále pro indexy řádků i a sloupců j matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ užívat množiny $\mathcal{I} = \{1, \ldots, m\}$ a $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$.

1.1 Neurčitá množina

Množina $\mathcal{U}$ je klíčovou součástí všech úloh robustní optimalizace a její struktura ovlivňuje takřka vše - od podoby robustifikované varianty až po její samotnou řešitelnost. Podoba této množiny může být obecně jakákoliv, od diskrétního souboru vektorů po konvexní či kompaktní množinu. Mnohdy lze díky její struktuře robustifikovanou úlohu vyjádřit v jednodušším či pro výpočet vhodnějším tvaru, což je také základní podstatou robustní optimalizace.

Pro jednodušší představu struktury množiny $\mathcal{U}$ si parametrizujme neurčitost úlohy - tím získáme množinu $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$. Nyní lze množinu $\mathcal{U}$ vyjádřit jako:

$$\left\{ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}) \middle| \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda, \Lambda \subset \mathbb{R}^k \right\},$$

kde $\boldsymbol{f} : \Lambda \to \mathbb{R}^{m \times n}$ je funkce zobrazující vektor parametrů na množinu matic $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$. Nyní je již patrné, že struktura množiny $\mathcal{U}$ je dána tvarem funkce $\boldsymbol{f}$, který může být obecně libovolný.

Důležitým aspektem problematiky, který je nutné zdůraznit, je velká provázanost podoby (a existence) řešení úlohy se strukturou neurčité množiny. Jak je totiž patrné z kapitol 3 a 5, pro různě definované množiny $\mathcal{U}$ může stejná úloha dosáhnout různých řešení nebo dokonce pozbýt řešitelnosti jako takové. A nejedná se ani o různé typy množin, stačí uvažovat konkrétní úlohu a za $\mathcal{U}$ vzít:

$$\mathcal{U} = \left[(1 - \theta)\, \bar{\omega}, (1 + \theta)\, \bar{\omega} \right].$$

Pak pro libovolné $\bar{\omega}$ a dvě různé hodnoty θ dosáhneme dvou různých řešení (viz kapitola 5).

Velmi často bývají při konstrukci neurčitých množin uplatňovány pevně zvolené "středy"množiny, které jsou získávány nejrůznějšími způsoby - expertní odhady, střední hodnoty, apod. Od těchto středů pak nějakým způsobem konstruujeme, například za pomoci omezení nerovnostmi, normami apod. (více viz kapitola 3). Aplikace takto zvolených množin je pak sice jednodušší, ale je třeba mít na paměti, že se může jednat o podstatné omezení neurčitosti.

1.2 Ekvivalence úloh

Při práci s neurčitými úlohami je zapotřebí věnovat pozornost prvkům podléhajícím neurčitosti. V různých pramenech často bývá uvažována pouze v levé straně podmínek řešitelnosti, ale v obecném případě může být obsažena i ve vektoru pravých stran nebo dokonce i v účelové funkci. V tomto oddílu si přiblížíme jednoduchý postup, jak lze jednotlivé varianty mezi sebou převádět, a tedy jejich ekvivalenci.

Vyjdeme z obecného případu lineárního programování (viz (1.4)):

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \quad \forall \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\right) \in \mathcal{U} \right\}. \tag{1.5}$$

Níže uvedené úvahy jsou rozvedením myšlenky uvedené v [2, str. 775] a předpokládají (bez újmy na obecnosti), že vektory $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ lze rozložit na součet dvou dalších vektorů reprezentujících jejich určitou a neurčitou část. Nejprve ukážeme převod neurčitosti z pravé strany úlohy (1.5), poté učiníme totéž s účelovou funkcí. Nakonec sloučíme obě tyto úvahy dohromady.

Rozložíme-li vektor $\boldsymbol{b}$, lze (1.5) vyjádřit následovně:

$$\begin{aligned} &\min \ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &s.t. \ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \\ &\qquad \forall \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}\right) \in \mathcal{U}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X} \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{b}_2$ převedeme, sloučíme levou stranu nerovnosti a doplníme další potřebné prvky:

$$\begin{aligned} &\min \ \left(\boldsymbol{c}, 0\right)^T \left(\boldsymbol{x}, 1\right) \\ &s.t. \ \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b}_2 \end{array} \right) \left(\boldsymbol{x}, 1\right) \leq \boldsymbol{b}_1 \\ &\qquad \forall \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}\right) \in \mathcal{U}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že vektor $\boldsymbol{c}$ je součtem určitého a neurčitého vektoru. Převod úlohy (1.5) je v tomto případě trochu složitější, neboť vyžaduje zavedení nové proměnné:

$$\begin{aligned} &\min \ \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x} + E \\ &s.t. \ \boldsymbol{c}_2^T \boldsymbol{x} - E \leq 0 \\ &\qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ &\qquad \forall \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2\right) \in \mathcal{U}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Po úpravě pak úloha vypadá následovně:

$$\begin{aligned} &\min \ \left(\boldsymbol{c}_1, 1\right)^T \left(\boldsymbol{x}, E\right) \\ &s.t. \ \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{c}_2^T & -1 \\ \hline \boldsymbol{A} & 0 \end{array} \right) \left(\boldsymbol{x}, E\right) \leq \boldsymbol{b} \\ &\qquad \forall \left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_2\right) \in \mathcal{U}, \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Sloučíme-li výše uvedené úvahy dohromady, dostaneme z (1.5) úlohu:

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^{*T}\boldsymbol{x}^* \middle| \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}^* \leq \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{x}^* \in \mathcal{X}^* \quad \forall \boldsymbol{A}^* \in \mathcal{U} \right\},$$

kde

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^* &= \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{c}_2^T & 0 & -1 \\ \hline \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{0} \end{array} \right) \\
\boldsymbol{x}^* &= (\boldsymbol{x}, 1, E) \\
\boldsymbol{c}^* &= (\boldsymbol{c}_1, 0, 1)\,.
\end{aligned}$$

V souvislosti s úvahami učiněnými v tomto oddíle budeme nadále předpokládat následující: Nebude-li pro danou sekci řečeno jinak, budeme v souvislosti s úvahami učiněnými v tomto oddíle nadále předpokládat, že pokud se neurčitost vyskytovala i v jiných částech úlohy než pouze v matici $\boldsymbol{A}$ (resp. pouze v levé straně podmínek řešitelnosti), byly na úlohu před jejím uvedením aplikovány postupy uvedené v tomto oddíle. Jinými slovy budeme předpokládat, že $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$.

Dále je zapotřebí podotknout, že často bývá jako $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ uvažována nezápornost vektoru $\boldsymbol{x}$, avšak proměnná E je z definice proměnnou reálnou. Pro zjednodušení zápisu budeme v případě, že bylo zapotřebí provést výše uvedené opatření předpokládat, že podmínka $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{X}^*$ utvořena s ohledem na E, i když to nebude explicitně uvedeno.

1.3 Srovnání řádkové a sloupcové neurčitosti

V robustní optimalizaci pracujeme se dvěma základními principy - tzv. řádkové a sloupcové neurčitosti. Zde se předpokládá, že řádkové (resp. sloupcové) vektory matice omezení $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ patří do daných množin K_i (resp. L_i). Podmínky úlohy (1.4) tím dostávají následující podobu (pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$):

Řádková neurčitost:

$$\boldsymbol{r}_i\boldsymbol{x} \leq b_i \quad (\boldsymbol{r}_i, b_i) \in K_i, \quad i \in \mathcal{I}. \tag{1.6}$$

Sloupcová neurčitost (dle [11]):

$$\sum_{j=1}^{n} x_j s_i^j \leq b_i \quad \left(\boldsymbol{s}^j, \boldsymbol{b}\right) \in L_j, \quad j \in \mathcal{J}, \tag{1.7}$$

kde $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{e}_i$ jsou řádkové vektory matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{s}^j = \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{e}_j$ jsou vektory sloupcové a $\boldsymbol{e}_k$ značí k-tý kanonický vektor odpovídající dimenze.

Pro obecný problém robustní optimalizace je volba řádkové neurčitosti značně výhodnější oproti sloupcové neurčitosti. Dle [3] je tomu tak i v případě, že se soustava podmínek (1.6) neskládá z podmínek lineárních. Jedním z hlavních důvodů je skutečnost, že díky této metodě získáme samostatnou podmínku pro každý vektor ze všech množin K_i, což činí jednotlivé K_i navzájem nezávislé. A jelikož vyžadujeme splnění všech takovýchto podmínek najednou, je práce s touto soustavou značně jednodušší než s omezeními složenými z částí vektorů ze všech množin L_j u sloupcové neurčitosti, které nejen že mohou být poněkud komplikovanější, ale pro určitá zadání jich může být i podstatně více.

Pro další práci tedy zvolíme metodu řádkové neurčitosti, neboť tato je také značně intuitivní. Označíme-li si totiž prvky $\mathcal{U}$ jako $(\boldsymbol{A}_\alpha, \boldsymbol{b}^\alpha)$, lze soustavu podmínek

$$\{\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \quad \forall\, (\boldsymbol{A}_\alpha, \boldsymbol{b}^\alpha) \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

přímo přepsat do tvaru:

$$\{\boldsymbol{r}_i^\alpha \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad \forall\, (\boldsymbol{r}_i^\alpha, b_i^\alpha) \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\},$$

kde $\boldsymbol{r}_i^\alpha$ je i-tý řádek matice A_α a b_i^α značí i-tou složku vektoru $\boldsymbol{b}^\alpha$. Nyní již stačí pouze sdružit řádkové vektory do množin $K_i = \{(\boldsymbol{r}_i^\alpha, b_i^\alpha)\ \forall \alpha\}$ a získali jsme řádkovou neurčitost.

1.4 Vztah k dualitě

V předchozí sekci jsme si uvedli dva základní přístupy, jak vyjádřit podmínky řešitelnosti pro úlohy neurčitého programování. Ačkoliv tyto působí značně odlišně, je mezi nimi pevné pouto, které se zakládá na principech duality a které v tomto oddílu uvedeme.

Vycházíme z primární úlohy lineárního programování (viz (1.3)):

$$\min \left\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}$$

Jak již bylo dříve uvedeno, tato úloha s neurčitostí ve tvaru:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \in \mathcal{U}, \quad \mathcal{U} = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$$

intuitivně směřuje v řádkovou neurčitost a tvoří robustifikovanou úlohu:

$$\begin{aligned} &\min \left\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \middle|\ \boldsymbol{r}_i \boldsymbol{x} \leq b_i, \quad \forall\, (\boldsymbol{r}_i, b_i) \in K_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}\right\} = \\ &\quad \min \left\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \middle|\ (\boldsymbol{r}_i, -b_i)^T (\boldsymbol{x}, 1) \leq 0, \quad \forall\, (\boldsymbol{r}_i, b_i) \in K_i, \quad \forall i \in \mathcal{I}\right\}. \end{aligned}$$

Nyní si vyjádříme duální úlohu k (1.3):

$$\max\left\{\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\right\},$$

V tuto chvíli je naším úkolem převést množinu přípustných řešení duální úlohy na tvar sloupcové neurčitosti a zjistit vztah jednotlivých L_j k $\boldsymbol{b}$, tedy vektoru pravých stran úlohy (1.3). Vycházíme z množiny:

$$\left\{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Vynásobíme zleva prvkem $(-\boldsymbol{x}^T)$, kde $\boldsymbol{x}$ je přípustné řešení úlohy (1.3):

$$\left\{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Z věty o slabé dualitě [8, str. 33] získáme:

$$\left\{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq -\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\right\}. \tag{1.8}$$

Dále budeme uvažovat jen kladná $\boldsymbol{y}$, neboť pro $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ úloha platí triviálně. Vynásobíme tedy podmínku v (1.8) zprava výrazem $\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|^2}$ ($\| \ . \ \|$ značí euklidovskou normu):

$$\left\{-\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T \leq -\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Využijeme skutečnost, že řádky $\boldsymbol{A}^T$ odpovídají sloupcům $\boldsymbol{A}$ a převedeme na tvar:

$$\left\{-\sum_{j=1}^{n} x_j s_i^j \leq -b_i, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \forall i \in \mathcal{I}\right\}. \tag{1.9}$$

Z předchozího vyjádření je patrné, že vztah mezi sloupcovými vektory matice $\boldsymbol{A}$ a vektorem pravých stran $\boldsymbol{b}$ je poněkud volnější než u řádkové neurčitosti, a proto si upravíme (1.9) na následující tvar:

$$\left\{(\boldsymbol{x}, 1)^T \begin{pmatrix} -\boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix} \leq 0, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}.$$

Nyní je již patrné, že hledané množiny $L_j, \ j = 0, 1, \ldots, n$ vypadají následovně:

$$\begin{aligned} L_0 &= \{-\boldsymbol{b}\} \\ L_j &= \left\{-\boldsymbol{s}^j\right\} \quad j \in \mathcal{J} \end{aligned}$$

Shodu řádkové a sloupcové neurčitosti již máme zajištěnou díky principu duality.

1.5 Rozšíření množiny neurčitosti

V [3, str. 3] autoři uvádějí, že nahradíme-li $\mathcal{U}$ jejím konvexním obalem, pak robustifikovaná úloha zůstane nezměněna. V tomto oddíle si přiblížíme, proč tomu tak j. Vyjdeme z následující podoby úlohy (1.4):

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{x},1) \leq \boldsymbol{0} \quad \forall\,(\boldsymbol{A},-\boldsymbol{b}) \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\right\}.$$

Neurčité prvky si označíme indexem $\alpha \in T$. Potom lze neurčitou množinu $\mathcal{U}$ vyjádřit následovně:

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{R}_\alpha | \boldsymbol{R}_\alpha = (\boldsymbol{A}_\alpha, \boldsymbol{b}^\alpha)\,,\ \alpha \in T\} \tag{1.10}$$

Dále označíme i-tý řádkový vektor matice $\boldsymbol{R}_\alpha$ jako $\boldsymbol{r}_i^\alpha$ a následně lze díky řádkové neurčitosti vyjádřit (1.10) jako množinu všech těchto řádkových vektorů, tedy:

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{r}_i^\alpha,\ i \in \mathcal{I},\ \alpha \in T\}\,. \tag{1.11}$$

Označíme si množinu přípustných řešení robustifikované úlohy (viz (1.4)) jako $M_{\mathcal{U}}$. Tato množina je tvaru:

$$M_{\mathcal{U}} = \{\boldsymbol{x} |\ \boldsymbol{r}_i^\alpha \boldsymbol{x} \leq 0,\ i \in \mathcal{I},\ \alpha \in T,\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\}$$

a je zároveň průnikem všech $M_{\boldsymbol{R}_\alpha}$, což jsou množiny přípustných řešení úlohy (1.3) pro konkrétní matice $\bar{\boldsymbol{R}}_\alpha \in \mathcal{U}$:

$$M_{\bar{\boldsymbol{R}}_\alpha} = \left\{\boldsymbol{x} \middle| \bar{\boldsymbol{R}}_\alpha \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\right\}$$

Nyní tvar množiny $M_{\mathcal{U}}$ závisí na mohutnosti indexové množiny T. Pokud je konečná, získáme $M_{\mathcal{U}}$ jako průnik konvexních polyedrických množin, a tedy je $M_{\mathcal{U}}$ z definice konvexní a uzavřená množina. Pokud je T spočetná, pak polyedrickou množinu sice nezaručíme, ale konvexita a uzařenost zůstává neporušena. V případě nespočetnosti T lze z $\mathcal{U}$ vybrat určitý soubor vektorů $\boldsymbol{r}_{i_k}^{\alpha_l}$ (pro nějaké posloupnosti k, l), které tvoří nerovnosti generující přímo $M_{\mathcal{U}}$, a jelikož se stále jedná o soustavu lineárních nerovností, opět platí, že $M_{\mathcal{U}}$ je konvexní a uzavřená.

Pokud máme z množiny $\mathcal{U}$ vybrán libovolný soubor vektorů, který (ve formě lineárních nerovností) generuje konvexní (a uzavřenou) množinu $M_{\mathcal{U}}$, pak libovolná jiná konvexní kombinace prvků z tohoto výběru a prvků mimo tento výběr tvoří nadmnožinu $M_{\mathcal{U}}$. Tedy nahradíme-li $\mathcal{U}$ jejím konvexním obalem, pak výsledek robustifikované úlohy (a tím i úloha jako taková) zůstane beze změny (v návaznosti na [3, str. 3]), a proto můžeme dále rovněž předpokládat, že $\mathcal{U}$ je konvexní a uzavřená.

Kapitola 2

Řešitelnost

V této kapitole budeme vycházet z úlohy lineárního programování ve tvaru uvedeném v [3]. Pro její konkrétní podobu platí následující:

- Neurčitost předpokládáme pouze v matici $\boldsymbol{A}$ (viz oddíl 1.2).
- Zavedeme podmínku $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1$, jejíž význam vyplyne později.
- Množinou $\mathcal{X}$ budeme uvažovat všechny nezáporné prvky prostoru $\mathbb{R}^n$.

Výchozí úlohu máme ve tvaru:

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}. \tag{2.1}$$

Její robustifikovaná varianta vypadá následovně:

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1, \quad \forall \boldsymbol{A} \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\right\}, \tag{2.2}$$

kde množina neurčitých parametrů $\mathcal{U}$ je reprezentována nějakou podmnožinou reálných matic řádu $m \times n$.

Pro potřeby dalších úvah v této kapitole si označíme:

- úlohu (2.1) neurčitého lineárního programování s některou (konkrétní) maticí $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$ jako (P)
- rodinu úloh (P) pro dané globální hodnoty $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}$ a všechny matice $\boldsymbol{A}$ jako $\mathcal{P}$
- robustifikovanou úlohu (2.2) jako $(P_{\mathcal{U}})$

2.1 Ilustrační příklad

Mezi daným problémem lineárního programování a jeho robustifikovanou variantou existuje pevné pouto, které však nemusí nutně implikovat řešitelnost. Toto si ilustrujeme na příkladu (dle [3, str. 4]), který je zadán následovně:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 \\
s.t.\ & ax_1 + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + bx_2 \geq 1 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& (a, b) \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
$$

Neurčitost je zde reprezentována prvky a, b a je soustředěna na množině:

$$\mathcal{U} = \left\{ a + b = 2 \middle| a \in \left\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} \right\rangle \right\}. \tag{2.3}$$

Po převedení na tvar (2.1) máme:

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \middle| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} = 1 \right\},$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, 1)^T$, $\boldsymbol{c} = (1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{f}^T = (1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & b & -1 \end{pmatrix}$.

Pokud bychom tento problém řešili běžnými metodami lineárního programování, pak pracujeme s maticí $\boldsymbol{A}$ jako celkem, tedy dostaneme řešení pro každou realizaci a, b, a to se stejnou optimální hodnotou 1, protože $x_1 + x_2 = 1$.

Zvolíme-li výpočet s využitím robustifikace (a řádkové neurčitosti), pak nám z podmínky $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ vznikne soustava:

$$\boldsymbol{r}_i \boldsymbol{x} \geq 1 \quad \boldsymbol{r}_i \in K_i \quad i = 1, 2, \tag{2.4}$$

kde $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ jsou všechny možné varianty řádkových vektorů matice omezení $\boldsymbol{A}$.

Rozklad $\mathcal{U}$ na množiny K_1, K_2 není na první pohled patrný, neboť je zapotřebí učinit jednotlivé parametry nezávislými. Toho dosáhneme parametrizací prvku a a jeho pomocí pak vyjádříme b. Pak lze množiny K_i vyjádřit v následujícím tvaru:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left\{ (a, 1, -1) \middle|\ a \in \left\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} \right\rangle \right\} \\
K_2 &= \left\{ (1, 2-a, -1) \middle|\ a \in \left\langle \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2} \right\rangle \right\}.
\end{aligned}
$$

Všechny výše zmíněné podmínky (2.4) musí být splněny zároveň, tedy stačí nalézt dva vektory generující nerovnosti, které spolu s podmínkou $x_1 + x_2 = 1$ tvoří prázdnou množinu. Pokud takové najdeme, pak úloha nemá řešení.

Jednou z největších předností řádkové nerovnosti je skutečnost, že hodnotu parametru a lze volit různou pro různé množiny K_i. Jinými slovy můžeme zvolit i hodnoty parametrů, které nesplňují rovnici $a+b = 2$ (viz (2.3)). Proto zvolíme krajní hodnoty intervalů - pro K_1 nejmenší hodnotu parametru a a pro K_2 největší. Tímto získáme vektory:

$$\boldsymbol{r}_1^* = \left(\frac{1}{2}, 1, -1\right) \qquad \boldsymbol{r}_2^* = \left(1, \frac{1}{2}, -1\right).$$

Nyní máme dílčí úlohu $(P) \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 \\
s.t.\ & \frac{x_1}{2} + x_2 \geq 1 \\
& x_1 + \frac{x_2}{2} \geq 1 \\
& x_1 + x_2 = 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Množina přípustných řešení je prázdná, a tedy neexistuje ani přípustné řešení, natož pak řešení optimální. Jinými slovy je celá robustifikovaná úloha nepřípustná (viz definice na začátku dalšího oddílu).

2.2 Problém řešitelnosti

V návaznosti na příklad uvedený v oddíle 2.1 vyvstávají dvě základní otázky, na něž je (pro efektivní řešení robustifikovaných úloh) třeba nalézt odpověď, nejprve je ale nutné zavést následující definici:

Definice 1. *Řekneme, že je robustifikovaná úloha (ne)přípustná, pokud pro ni (ne)existuje přípustné řešení.*

A nyní již zmíněné otázky:

1. Pokud je úloha $(P_{\mathcal{U}})$ nepřípustná, znamená to, že existuje problém $(P) \in \mathcal{P}$, který je rovněž nepřípustný?

2. Je-li $(P_{\mathcal{U}})$ přípustná s konečnou optimální hodnotou, existuje pak $(P) \in \mathcal{P}$ se stejnou optimální hodnotou?

Pokud předpokládáme následující dvě podmínky (dle [3, str. 4-5]), pak na obě tyto otázky můžeme odpovědět kladně a zároveň si zajistíme, že $(P_{\mathcal{U}})$ nemá horší složitost než nejhorší úloha z $\mathcal{P}$:

1) Neurčitost je chápána po jednotlivých omezeních (dále jen "neurčitost po omezeních"). Jinými slovy $\mathcal{U}$ lze vyjádřit následovně:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2 \times \ldots \times \mathcal{U}_m.$$

Toto odpovídá užití podmnožin K_i v řádkové neurčitosti, neboť jednotlivé $\mathcal{U}_i$ zde udávají množiny všech možných variant i-tého řádku matice omezení $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$.

2) (tzv. Předpoklad omezitelnosti) Existuje množina $\boldsymbol{Q} \subset \mathbb{R}^n$, která je konvexní a kompaktní a která jistě obsahuje přípustná řešení všech úloh $(P) \in \mathcal{P}$.

Každou neurčitou množinu $\mathcal{U}$ lze rozvést do podoby po omezeních a toto rozvedení úlohu $(P_{\mathcal{U}})$ nezmění (viz např. oddíly 2.1 nebo 4.4). Rovněž z tohoto předpokladu vyplývá, že $\boldsymbol{x}$ je přípustným řešením $(P_{\mathcal{U}})$ právě tehdy, když:

$$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq 0,\ \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{a} \in \mathcal{U}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \tag{2.5}$$

Splnění předpokladu omezitelnosti lze dosáhnout například zajištěním neprázdnosti průniku všech množin přípustných řešení jednotlivých úloh (P). Díky podmínce $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1$ a nezápornosti $\boldsymbol{x}$ máme zajištěnou omezenost a řešení úlohy se bude nalézat v průniku konvexních obalů množin krajních bodů jednotlivých množin přípustných řešení.[1]

[1] Viz úvahy v oddíle 1.5.

2.3 Základní věta

Zde si uvedeme základní větu pro práci s robustními úlohami tak, jak ji definovali Ben-Tal a Nemirovski (viz [3]).

Věta 1. *Je-li neurčitá množina $\mathcal{U}$ po omezeních a platí-li předpoklad omezitelnosti, pak platí následující:*

i) $(P_{\mathcal{U}})$ není přípustná právě tehdy, když existuje nepřípustná úloha $(P) \in \mathcal{P}$.

ii) Pokud je úloha $(P_{\mathcal{U}})$ přípustná a c^* je její optimální hodnota, pak platí:

$$c^* = \sup \left\{ c^*_{(P)} \middle| (P) \in \mathcal{P} \right\},$$

kde $c^*_{(P)}$ označuje optimální hodnotu úlohy (P).

Pro důkaz této věty využijeme následující variantu Farkasova lemmatu (viz [8]):

Lemma 2 (Farkas)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je reálná matice a $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ reálný vektor, pak právě jeden z následujících systémů má řešení:*

(1) $\forall \boldsymbol{y} : \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{y} < 0$

(2) $\boldsymbol{A\lambda} = \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}$

A nyní již k důkazu věty 1:

Důkaz.

i) $\Leftarrow$ Pro každou matici $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$ máme definovánu samostatnou úlohu $(P) \in \mathcal{P}$ s podmínkami

$$\left\{ \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} = 1, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \right\}$$

a pro výpočet $(P_{\mathcal{U}})$ vyžadujeme splnění všech těchto podmínek najednou. Jinými slovy je množina všech přípustných řešení robustifikované úlohy obsažena v každé množině přípustných řešení úloh z $\mathcal{P}$, což dokazuje implikaci.[2]

i) $\Rightarrow$ Nyní předpokládejme, že úloha $(P_{\mathcal{U}})$ je nepřípustná. Pro neznámý vektor $\boldsymbol{x}$ máme soustavu podmínek (2.5), spolu s existencí kompaktní a konvexní množiny $\boldsymbol{Q}$, do níž $\boldsymbol{x}$ patří (z předpokladu omezitelnosti). Tato soustava však nemá řešení ($(P_{\mathcal{U}})$ je nepřípustná).

Z kompaktnosti $\boldsymbol{Q}$ plyne, že existuje konečná podmnožina podmínek:

$$\left\{ \boldsymbol{a}_p^T \boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{x} = 1, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \quad p = 1, \ldots, N \right\},$$

[2] Obdobný přístup jsme již aplikovali v oddíle 1.5.

která nemá v $\boldsymbol{Q}$ řešení. Předpokládejme, že $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_N \in \mathcal{U}$ jsou ty matice, z nichž dotyčné $\boldsymbol{a}_p$ získáme. Tedy systém podmínek:

$$\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1, \quad p = 1, \ldots N,$$

nemá řešení jak v $\boldsymbol{Q}$ (z konstrukce), tak ani v $\mathbb{R}^n \setminus \boldsymbol{Q}$ (z předpokladu omezitelnosti), tedy využijeme lemma 2 (bod 1). Abychom jej mohli aplikovat, tak dosadíme za $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{f}$. Dostaneme existenci systému:

$$\{\lambda_{ip} \geq 0, \quad i \in \mathcal{I},\ p = 1, \ldots, N\}$$

a kladného μ takových, že splňují:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{p=1}^{N} \boldsymbol{a}_i^p \lambda_{ip} + \mu \boldsymbol{f} = 0, \quad \text{kde } \boldsymbol{a}_i^p \text{ udává i-tý řádek matice } A_p \tag{2.6}$$

Nechť $\sum_{p=1}^{N} \lambda_{ip} = \lambda_i$. Označíme:

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{cases} \lambda_i^{-1} \sum_{p=1}^{N} \boldsymbol{a}_i^p \lambda_{ip} & \forall i \in \mathcal{I} \text{ taková, že} : \lambda_i \neq 0 \\ \boldsymbol{a}_i^1 & \forall i \in \mathcal{I} \text{ taková, že} : \lambda_i = 0 \end{cases}.$$

Z předpokladu neurčitosti po omezeních plyne, že jednotlivá $\boldsymbol{a}_i^p$ patří do částečných neurčitých množin $\mathcal{U}_i$, a jelikož předpokládáme $\mathcal{U}$ konvexní, pak konvexní kombinace prvků $\boldsymbol{a}_i^p$ (tedy výše vytvořené $\boldsymbol{a}_i$) tam rovněž patří. Protože platí $\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{U}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}$, pak také $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}_i\}_{i=1}^m \in \mathcal{U}$.

Zároveň z (2.6) plyne, že rovnice $\sum_{i \in \mathcal{I}} \boldsymbol{a}_i \lambda_i + \mu \boldsymbol{f} = 0$ a $\mu > 0$ má řešení, což je ale bod 1 z lemmatu 2 pro námi nalezenou matici $\boldsymbol{A}$. Odsud plyne, že problém daný maticí $\boldsymbol{A}$ je nepřípustný.

ii) Označme si $d = \sup\{c^*(P) \mid (P) \in \mathcal{P}\}$. Jelikož je d supremum přes všechna přípustná řešení, pak z prvního bodu tvrzení plyne, že $d \leq c^*$. Nyní je třeba dokázat, že neplatí $d < c^*$, což učiníme sporem.

Předpokládejme, že $d < c^*$. Přidáním horní meze d pro účelovou funkci $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq d$ dostaneme pro přípustná řešení pouze omezení $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq d\left(\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}\right)$, tj. máme úlohu:

$$(P_d) \qquad \min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0};\ \boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} = 1;\ d\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq 0\right\}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}.$$

Jelikož přidaná podmínka vznikla určitým omezením účelové funkce (tedy neobsahuje žádný neurčitý prvek), je neurčitost úlohy (P_d) stále ve formě po omezeních a úloha sama rovněž splňuje předpoklad omezitelnosti. A protože d je supremum přes všechna přípustná řešení, je jím daná podmínka pouze jakýmsi omezením množiny přípustných řešení, což ale z úloh splňujících tuto podmínku nepřípustné netvoří. Tedy za předpokladů věty (pro množinu $\mathcal{U}$) je robustifikovaná varianta pro $\mathcal{P}_d$ (dle prvního bodu tvrzení) přípustná.

Tato úloha však není nic jiného, než $(P_{\mathcal{U}})$ s přidanou podmínkou $d\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq 0$. Z této podmínky však pro přípustné $\boldsymbol{x}$ dostaneme $d \geq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ a posléze $d \geq c^*$, což dává nepřípustnou robustifikovanou úlohu, a to je spor.

□

Kapitola 3

Přehled základních typů úloh a neurčitých množin

Jak již bylo uvedeno v kapitole 1, jednotlivé základní typy úloh robustní optimalizace lze obecně vyjádřit v následujícím tvaru (viz úlohy (1.1) a (1.2)):

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \; & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) \\ s.t. \; & g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I}, l = 1, \ldots, L \\ & h_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) = 0 \quad i \in \mathcal{I}, k = 1, \ldots, K \\ & \boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{U}_i, \; \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

nebo ekvivalentně:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}, E} \; & E \\ s.t. \; & f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) \leq E \\ & g_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I}, l = 1, \ldots, L \\ & h_k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}_i) = 0 \quad i \in \mathcal{I}, k = 1, \ldots, K \\ & \boldsymbol{\omega}_i \in \mathcal{U}_i, \; \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \times \mathcal{U}_m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tvar funkcí f, g_j, h_k spolu se strukturou množiny neurčitosti $\mathcal{U}$ určuje typ úlohy, složitost postupu robustifikace, a tedy i přístup k řešení, neboť v obecném případě nelze mnohdy robustifikovanou úlohu ani vytvořit. Jediný požadavek, který na typ funkcí klademe, je, aby odpovídal úloze, s níž pracujeme, tedy abychom například neuvažovali kvadratickou účelovou funkci v lineárním programování apod.

Řešitelnost úloh robustní optimalizace značně závisí na struktuře množiny neurčitosti a typu úlohy. Pro některé z těchto typů nemusí být robustifikovaná varianta úlohy vůbec řešitelná, pro některé naopak existují velmi efektivní postupy řešení. V této kapitole si uvedeme některé základní typy úloh a rovněž také některé základní typy neurčitostí.

3.1 Základní typy neurčitých množin

S ohledem na úvahy uvedené v oddíle 1.2 budeme nadále předpokládat, že nemáme neurčitost ani v účelové funkci, ani v pravých stranách nerovností.

3.1.1 Eliptická neurčitost

Eliptická neurčitost je mnohdy nejobecnější strukturou, pro níž lze formulovat řešitelnou robustifikovanou úlohu (často pouze přibližně). Než přikročíme k definici samotné neurčité množiny, je potřeba nejprve obecně definovat elipsoid.

Řekneme, že množina G je elipsoid v $\mathbb{R}^\alpha$, pokud platí (dle [3]):

$$G = U\left(\Pi, \boldsymbol{Q}\right) = \left\{\Pi\left(\boldsymbol{u}\right) \middle| \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}\| \leq 1\right\}, \tag{3.3}$$

kde $\boldsymbol{u} \longmapsto \Pi\left(\boldsymbol{u}\right)$ je afinní vnoření $\mathbb{R}^\beta$ do $\mathbb{R}^\alpha$ a $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{\gamma\times\beta}$ je daná matice. Kromě běžných elipsoidů v $\mathbb{R}^\alpha$ (tedy varianty pro $\alpha = \beta = \gamma$ a $\boldsymbol{Q}$ regulární) umožňuje tato definice pokrýt i následující typy množin:

- Ploché elipsoidy - elipsoidy ve vlastních afinních podmnožinách $\mathbb{R}^{m\times n}$. Tyto množiny často korespondují s částečnou neurčitostí (tzn. některé prvky neurčité matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ jsou známy) a jedná se o případ, kdy $\alpha > \beta = \gamma$ a $\boldsymbol{Q}$ je regulární.

- Eliptické válce - součin plochého elipsoidu a lineárního podprostoru, tedy případy, kdy $\boldsymbol{Q}$ je singulární matice.

Nyní můžeme přikročit k definici eliptické neurčitosti, jak byla uvedena v [3]. Řekneme, že neurčitá množina $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ je eliptická, pokud:

1. Je omezená.

2. Je průnikem konečně mnoha elipsoidů, tedy množin $U\left(\Pi_k, \boldsymbol{Q}_k\right)$ pro pevně daná $\Pi_k, \boldsymbol{Q}_k$ a $k = 1, \ldots, K$.

3. Platí *Slaterova podmínka*, tedy existuje matice $\boldsymbol{A} \in \mathcal{U}$, která patří do relativního vnitřku $U\left(\Pi_k, \boldsymbol{Q}_k\right)$, jinými slovy platí:

$$\forall k \leq K\ \exists \boldsymbol{u}_k : \boldsymbol{A} = \Pi_k\left(\boldsymbol{u}_k\right), \|\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{u}_k\| < 1. \tag{3.4}$$

Níže jsou uvedeny dva základní tvary, v jakých bývají eliptické neurčité množiny definovány.

Jednoduchý elipsoid

$$\mathcal{U} = \left\{ \boldsymbol{A} \middle| \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^0 + \sum_{l=1}^{L} u_l \boldsymbol{P}^l, |\boldsymbol{u}| \leq 1 \right\}, \tag{3.5}$$

kde $\boldsymbol{P}^l, l = 0, \ldots, L$ jsou matice řádu $m \times n$.

Vícerozměrný elipsoid

Tato definice vychází z neurčitosti po složkách, jednotlivé $\mathcal{U}_i$ obsahují varianty i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a vypadají následovně:

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \boldsymbol{a}_i \mid \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{v}_i \right\} \quad i \in \mathcal{I}, \tag{3.6}$$

pro nějaké $\boldsymbol{v}_i \in \mathbb{R}^{L_i}, \|\boldsymbol{v}_i\| \leq 1$, kde $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^m$ reprezentuje i-tý kanonický vektor, $\boldsymbol{p}_i$ jsou vektory v $\mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times L_i}$ jsou reálné matice).

3.1.2 Polyedrická neurčitost

Zde je množina $\mathcal{U}$ zastoupena konečně mnoha lineárními nerovnostmi a díky této vlastnosti jsou podmínky robustifikované varianty rovněž lineární.

Jako vhodný příklad je možné uvést množiny definované jako průnik konečně mnoha poloprostorů. Jestliže je množina neurčitosti $\mathcal{U}$ takto definována, lze ji zapsat následovně (pro daná $\boldsymbol{d}_i, r_i$, kde $\boldsymbol{d}_i \neq \boldsymbol{0}$):

$$\mathcal{U} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_i = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^m \mid \boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{u} \leq r_i \right\}.$$

Dle [3, str.9] je možné, ačkoliv to není na první pohled patrné, i takto definované množiny zařadit mezi elipsoidy. Pokud je totiž $\mathcal{U}$ omezená, lze ji přepsat jako průnik "pásů"(pro daná $\boldsymbol{d}_i, r_i, s_i$, kde $\boldsymbol{d}_i \neq \boldsymbol{0}$):

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}^m \mid s_i \leq \boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{u} \leq r_i \right\}.$$

A tento "pás"je ve své podstatě jednoduchý eliptický válec $U(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{I}; \boldsymbol{Q}_i)$, kde $\boldsymbol{p}_i$ je libovolný vektor, pro nějž platí $\boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{p}_i = \frac{s_i + r_i}{2}$, $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice řádu k a $\boldsymbol{Q}_i$ je k-složkový vektor definovaný rovnicí: $\boldsymbol{Q}_i \boldsymbol{u} = \frac{s_i + r_i}{2} \boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{u}$.

Jinými slovy lze polyedrickou neurčitost považovat za speciální případ neurčitosti eliptické.

3.1.3 Neurčitost omezená mohutností

Myšlenkou omezené neurčitosti se zabýval již Soyster (orig. *cardinality constrained uncertainty* - viz [11]). Ve své práci však používal sloupcovou neurčitost, a tedy níže uvedené úvahy jsou transformací do neurčitosti řádkové.

Jako množinu $\mathcal{X}_1$ pro Soysterův postup opět uvažujeme nezáporné prvky $\mathbb{R}^n$. Později pak tuto definici obměníme.

Základní myšlenkou práce [11] je ekvivalence následujících dvou úloh:

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t.\ & \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq b_i \quad \forall \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{U}_i \quad i \in \mathcal{I} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t.\ & \sup_{\boldsymbol{a}_i \in \mathcal{U}_i} \{\boldsymbol{a}_i\} \boldsymbol{x} \leq b_i \quad i \in \mathcal{I} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jednotlivé složky neurčité množiny jsou v [11] uvažovány v následujícím tvaru:

$$\mathcal{U}_i = \{\boldsymbol{v} | \ \|\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{a}}_i\| \leq \rho_i\} \quad i \in \mathcal{I} \ ,$$

kde $\hat{\boldsymbol{a}}_i$ je nějaký pevný bod (např. jakýsi střed množiny) a ρ_i je nezáporná konstanta. Díky struktuře takto definované množiny pak platí:

$$\sup_{\boldsymbol{a}_j \in \mathcal{U}_j} (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{a}_j) = \hat{a}_{ij} + \rho_j \qquad i \in \mathcal{I}, j \in \mathcal{J}.$$

Nyní je možné úlohu (3.8) transformovat na úlohu (již bez neurčitosti):

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t.\ & \sum_{j \in \mathcal{J}} \hat{a}_{ij} x_j + \sum_{j \in \mathcal{J}} \rho_j x_j \leq b_i \quad i \in \mathcal{I} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Na tyto úvahy navázali Bertsimas a Sim ([6]) s předpokladem, že prvky a_{ij} neurčité matice $\boldsymbol{A}$ jsou modelovány pomocí omezené symetrické náhodné veličiny $\tilde{a}_{ij}, j \in J_i$, která nabývá hodnot z intervalu $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$. Množiny $J_i \subseteq \mathcal{J}$ jsou v tomto případě tvořeny indexy všech prvků řádku i matice $\boldsymbol{A}$, které podléhají neurčitosti.

Množina $\mathcal{X}$ je pro tento postup reprezentována následovně (pro daná reálná $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{h}$ a nezáporné $\boldsymbol{y}$):

$$\mathcal{X}_2 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n | \ v_j \in [d_j, h_j] \cap [-y_j, y_j] \quad j \in \mathcal{J}\} \tag{3.10}$$

Vyjdeme z upravené[1] úlohy (3.7):

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &s.t. \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{a}_{ij} x_j \leq b_i \quad i \in \mathcal{I} \\ &\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_2, \ \tilde{\boldsymbol{A}} \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pro formulaci pojistného výrazu pro neurčitost omezenou mohutností (definované v [6]) využijeme symetrickou náhodnou veličinu $\eta_{ij} = \frac{\tilde{a}_{ij} - a_{ij}}{\hat{a}_{ij}}$ definovanou na intervalu $[-1, 1]$ a vyjdeme z podmínek řešitelnosti úlohy (3.11). Postupovat budeme dle [6, str. 36]:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathcal{J}} \tilde{a}_{ij} x_j = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \eta_{ij} \hat{a}_{ij} x_j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| \leq \\ \leq \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} y_j \leq b_i \quad \forall i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Z platnosti (3.12) plyne ekvivalence úloh (3.11) a následující:

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &s.t. \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} y_j \leq b_i \quad i \in \mathcal{I} \\ &\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_2, \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde člen:

$$\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} y_j \quad i \in \mathcal{I} \tag{3.14}$$

je již jednou z možných formulací onoho pojistného výrazu pro oddělení $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j$ od b_i.

Tento postup sice nabízí nejvyšší stupeň zajištění proti různým hodnotám neurčitosti, avšak za cenu značného konzervativismu, neboť optimální hodnoty účelové funkce jsou podstatně níže než pro řešení původní lineární úlohy (viz [6], str. 36). Maje toto na paměti, zavádějí Bertsimas a Sim ([6]) tzv. omezení mohutností.

[1] Jedná se v podstatě o stejnou úlohu s několika podmínkami navíc.

Ve své podstatě se jedná pouze o reformulaci pojistného výrazu (3.14) a rozumíme tím zavedení prvků $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$, $i \in \mathcal{I}$, které omezují počet koeficientů, jimž je dovoleno měnit své hodnoty. Snahou je pojistit se proti změnám až $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ prvků a změně nějakého konkrétního a_{it} o $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\, \hat{a}_{it}$. Jinými slovy díky změnám Γ_i jsme schopni ovlivňovat úroveň zajištění neurčitosti[2].

Bertsimas a Sim ([6]) definují robustifikovanou úlohu s omezením mohutností následovně (prvek $\boldsymbol{y}$ byl definován v (3.10)):

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}} \; \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
&s.t. \sum_{j \in \mathcal{J}} a_{ij} x_j + \max_{M} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\, \hat{a}_{it_i} y_{t_i} \right\} \leq b_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \\
&\quad M = \{ S_i \cup \{t_i\} \mid S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i \} \\
&\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

kde pojistkou pro i-tou podmínku rozumíme (pro $i \in \mathcal{I}$):

$$\beta_i(\boldsymbol{x}, \Gamma_i) = \max_{M} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\, \hat{a}_{it_i} |x_j| \right\}. \tag{3.16}$$

Toto β_i je již zmíněným rozšířením dříve uvedeného pojistného výrazu (3.14).

Úloha (3.15) sice není lineární, ale v [6] je uveden postup, kterým ji lze na úlohu lineárního programování převést. Pro ověření je potřeba přeformulovat (3.16) (dle [6, str. 37]):

Lemma 3. *Pro daný vektor* $\boldsymbol{x}$ *lze výraz* (3.16) *pro* $i \in \mathcal{I}$ *ekvivalentně vyjádřit pomocí následující optimalizační úlohy:*

$$\begin{aligned}
\beta_i(\boldsymbol{x}, \Gamma_i) = \max \; & \left\{ \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |x_j| z_{ij} \right\} \\
s.t. & \sum_{j \in J_i} z_{ij} \leq \Gamma_i \\
& 0 \leq z_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in J_i
\end{aligned} \tag{3.17}$$

V optimálním řešení úlohy (3.17) figuruje právě $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ proměnných o hodnotě 1 a právě jedna o hodnotě $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)$, což je v důsledku pouze reformulací (3.16). Díky lemmatu 3 je pak možné formulovat hlavní větu pro neurčitost omezenou pomocí mohutnosti (viz [6, str. 37]).

[2] Tento termín byl převzat z [13]

Věta 4. *Úlohu* (3.15) *s podmínkou* (3.16) *lze ekvivalentně formulovat jako úlohu lineárního programování ve tvaru:*

$$\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x}}\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
s.t. & \sum_{j\in\mathcal{J}} a_{ij}x_j + z_i\Gamma_i + \sum_{j\in J_i} p_{ij} \le b_i \quad \forall i\in\mathcal{I} \\
& z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij}y_j \quad j\in J_i, \forall i\in\mathcal{I} \\
& \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_2 \\
& p_{ij}\ge 0 \quad j\in J_i, \forall i\in\mathcal{I} \\
& z_i, y_j \ge 0 \quad \forall i\in\mathcal{I}, \forall j\in\mathcal{J}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Důkaz. Vyjdeme z duální úlohy k (3.17):

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{j\in J_i} p_{ij} + z_i\Gamma_i \\
s.t.\ & z_i + p_{ij} \ge \hat{a}_{ij}\left|x_j\right| \quad j\in J_i, \forall i\in\mathcal{I} \\
& p_{ij}\ge 0 \quad \forall j\in J_i, \forall i\in\mathcal{I} \\
& z_i \ge 0 \quad \forall i\in\mathcal{I}, \forall j\in\mathcal{J}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Dle věty o silné dualitě [8, str. 34] plyne z přípustnosti a omezenosti úlohy (3.17) přípustnost a omezenost úlohy (3.19) a také rovnost jejich optimálních hodnot.

Z lemmatu 3 máme ekvivalenci úloh (3.16) a (3.17), a tak prostým dosazením vztahů z (3.19) do úlohy (3.15) plyne tvrzení. □

3.1.4 Normovaná neurčitost

Dle [4] lze úlohu s neurčitostí omezenou pomocí (obecně libovolné) normy převést na úlohu konvexního programování s podmínkami, jež závisí na duální normě. Nejprve zformulujeme postup pro jednodušší množiny $\mathcal{U}$ a následně přikročíme k obecnější variantě.

Myšlenka definovat neurčité množiny pomocí norem je přímým potomkem práce s neurčitostí omezené mohutností (viz oddíl 3.1.3). Jistou formu omezení množiny neurčitosti pomocí normy uvažoval již Soyster ([11]):

$$\mathcal{U}_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m | \|\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{a}}\| \leq \rho\},$$

kde $\rho \in \mathbb{R}$ je nezáporná konstanta a $\hat{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m$ je pevně zvolený vektor. Množinu, jejíž využitím na jeho práci navázali Bertsimas a Sim ([6] (viz oddíl 3.1.3), lze vyjádřit následovně:

$$\mathcal{U}_2 = \{\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m | \tilde{\boldsymbol{a}} \in [\boldsymbol{s} - \hat{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{s} + \hat{\boldsymbol{a}}]\},$$

kde $\boldsymbol{s}, \hat{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m$ jsou pevně dané vektory. Jednoduchými úpravami je možné tuto množinu upravit na tvar:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &= \{\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m | \|\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}\| \leq \|\hat{\boldsymbol{a}}\|\} \\ &= \{\tilde{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}^m | (\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{s}) \in \boldsymbol{M}\}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

kde $\boldsymbol{M} = \times_{i=1}^{m} [0, |\hat{a}_j|]$ je m-rozměrný obdélník, a tedy omezená a uzavřená množina. Vhodnost této úpravy vyplyne později.

Pro další úvahy nechť:

- $\boldsymbol{S}$ je uzavřená, omezená a konvexní množina
- $vec\,(\boldsymbol{A}) \in \mathbb{R}^{(nm)\times 1}$ značí vektor na sebe poskládaných řádků matice $\boldsymbol{A}$
- $\bar{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ značí nominální (pevně zvolenou) matici
- $\hat{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ značí prvky neurčité množiny
- $\mathcal{X}$ zde nemá specifikovanou strukturu, proto bude značena obecně

Uvažujme množinu v následujícím tvaru:

$$\mathcal{U}_3 = \left\{\hat{\boldsymbol{A}} \middle| \left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right) - vec\,(\bar{\boldsymbol{A}})\right) \in \boldsymbol{S}\right\}.$$

V podstatě se jedná o omezení odchylek hodnot neurčitých prvků $\hat{a}_{ij}$ od nominálních hodnot $\bar{a}_{ij}$. Tato množina je nejen strukturou podobná polyedrické neurčitosti, ale jedná se i o takřka identickou definici jako (3.20), čímž se jedná o přímý důsledek neurčitosti omezené mohutností. Pro takto definovanou množinu neurčitosti platí následující tvrzení ([4, str. 511]):

Věta 5. *Úlohu:*

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \forall \boldsymbol{A} \in \mathcal{U}_3,\ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\right\}$$

lze přeformulovat na tvar:

$$\begin{aligned} &\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \bar{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x} + \max_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \leq b_i \quad i \in \mathcal{I} \\ &\quad\ \ \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Důkaz. Pro $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ plyne z kompaktnosti množiny $\boldsymbol{S}$:

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i \quad \forall\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right) - vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right) \in \boldsymbol{S} \ \Leftrightarrow \max_{\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)-vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)\in\boldsymbol{S}} \left\{\hat{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x}\right\} \leq b_i.$$

Tvrzení pak plyne z následujícího:

$$\begin{aligned} \max_{\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)-vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)\in\boldsymbol{S}} \left\{\hat{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x}\right\} &= \max_{\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)-vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)\in\boldsymbol{S}} \left\{\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)\right)^T \boldsymbol{x}^i\right\} = \\ &= \left(vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)^T \boldsymbol{x}^i + \max_{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{S}} \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

kde $\boldsymbol{x}^i \in \mathbb{R}^{(mn)\times 1}$ je vektor, který mezi pozicemi $(i-1)n+1$ a in obsahuje vektor $\boldsymbol{x}$ a jinak samé 0. □

Nyní přejdeme k případu, kdy je vzdálenost (měřená pomocí normy) mezi neurčitými prvky $\hat{a}_{ij}$ a nominálními hodnotami $\bar{a}_{ij}$ omezená. Jinými slovy uvažujeme:

$$\mathcal{U}_4 = \left\{\hat{\boldsymbol{A}}\middle|\|\boldsymbol{M}\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right) - vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)\| \leq \Delta\right\},$$

kde $\boldsymbol{M}$ je invertibilní matice, Δ nezáporné reálné číslo a $\|\centerdot\|$ je obecná norma.

K uvedení základní věty pro úlohy s normovanou neurčitostí je ještě zapotřebí následující definice (obojí viz [4, str. 512]):

Definice 2. *Řekneme, že norma $\|\centerdot\|^*$ je duální k normě $\|\centerdot\|$, pokud platí:*

$$\|\boldsymbol{s}\|^* = \max_{\{\|\boldsymbol{x}\|\leq 1\}} \boldsymbol{s}^T\boldsymbol{x}.$$

Věta 6. *Úlohu:*

$$\min\left\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\middle|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}\in\mathcal{U}_4,\ \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}\right\}$$

lze přeformulovat na tvar:

$$\begin{aligned}&\min\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\&s.t.\ \bar{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x}+\Delta\|\left(\boldsymbol{M}^T\right)^{-1}\boldsymbol{x}^i\|^*\le b_i\quad i\in\mathcal{I}\qquad\qquad \boldsymbol{x}\in\mathcal{X}_2.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Důkaz. Pokud si označíme $\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{M}\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)-vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)}{\Delta}$, můžeme upravit $\mathcal{U}_4$ na tvar

$$\left\{\boldsymbol{y}\middle|\|\boldsymbol{y}\|\le1\right\}.$$

Pak pro $\boldsymbol{x}\in\mathcal{X}$ platí:

$$\begin{aligned}\max_{vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)\in\mathcal{U}_4}\left\{\hat{\boldsymbol{a}}_i^T\boldsymbol{x}\right\}&=\max_{vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)\in\mathcal{U}_4}\left\{\left(vec\left(\hat{\boldsymbol{A}}\right)\right)^T\boldsymbol{x}^i\right\}=\\&=\max_{\{\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}\|\le1\}}\left\{\left(vec\left(\bar{\boldsymbol{A}}\right)\right)^T\boldsymbol{x}^i+\Delta\left(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{y}\right)^T\boldsymbol{x}\right\}=\\&=\bar{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x}+\Delta\max_{\{\boldsymbol{y}\|\|\boldsymbol{y}\|\le1\}}\left\{\boldsymbol{y}^T\left(\left(\boldsymbol{M}^T\right)^{-1}\boldsymbol{x}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Použitím definice 2 vyjádříme poslední maximum pomocí duální normy a tvzení pak plyne z Věty 5. □

3.2 Základní typy úloh

Obecně řečeno, čím složitější je původní úloha a struktura neurčitosti, tím složitější je robustifikovaný tvar. Velmi často rovněž dochází k tomu, že pro jinou než eliptickou či polyedrickou neurčitost se jedná dokonce o NP-složité úlohy.

Například u lineárního programování může být robustifikovaná úloha opět lineární a je tomu tak v případě polyedrické neurčitosti (viz kapitola 1). Pro eliptickou neurčitost již v případě lineárních problémů dostáváme úlohu programování kvadratického, a pro kvadratické máme již úlohu semidefinitní optimalizace. U úloh semidefinitní optimalizace dostáváme již (při dnešních možnostech) neřešitelné robustifikované varianty, bez ohledu na typ neurčitosti.

S přihlédnutím ke struktuře podmínek řešitelnosti mnohdy existují speciální případy, kdy je možné robustifikovanou verzi úlohy vyjádřit v rozumném tvaru. V tomto oddílu si uvedeme některé základní typy úloh a stejně tak i některé jejich speciální případy, které při robustifikaci vedou k řešitelným úlohám.

Co se neurčitosti týče, tak každá z úloh uvedených v této sekci počítá s trochu odlišnou strukturou a mnohdy i umístěním (účelová funkce, pravé strany), avšak v návaznosti na úvahy uvedené v oddíle 1.2 nebudeme tyto odlišnosti dále rozvíjet. Rovněž předpokládáme účelovou funkci v jednoduchém tvaru.

3.2.1 Lineární programování

Na tomto typu optimalizačních úloh jsme již dříve (viz kapitola 1) definovali základní charakteristiky robustní optimalizace. Jedná se o úlohu ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t. \ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \forall \boldsymbol{A} \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

což lze pro jednotlivé vektory $\boldsymbol{a}_i$ reprezentující řádky matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ převést na:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}} \ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ s.t. \ & \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \forall \boldsymbol{a}_i \in \mathcal{U}_i \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

Složitost této úlohy se, jak již bylo dříve řečeno, odvíjí od struktury neurčité množiny - např. pro vícerozměrný elipsoid (viz (3.6) - sekce 3.1.1) lze robustifikovanou úlohu formulovat ve tvaru kuželovitého kvadratického programování (CQP - viz sekce 3.2.2). Jednotlivá $\mathcal{U}_i$ jsou tedy ve tvaru:

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \boldsymbol{a}_i \middle| \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{P}_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_i \in \mathbb{R}^{L_i}, |\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{i}}| \leq 1 \right\},$$

kde $\boldsymbol{p}_i \in \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times L_i}, i \in \mathcal{I}$. Robustifikovaná úloha je pak ve tvaru:

$$\begin{aligned} &\min_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \boldsymbol{p}_i^T \boldsymbol{x} \geq \| \boldsymbol{P}_i^T \boldsymbol{x} \|, \quad i \in \mathcal{I} \\ &\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

3.2.2 Kvadratické programování

Pod tuto skupinu se dají zařadit dva typy úloh: kvadraticky omezené kvadratické programování (orig. *quadratically constrained quadratic programming* - dále již jen QCQP) a kuželovité kvadratické programování (orig. *conic quadratic programming* - dále jen CQP).

Definice 3. *Podmínky úloh jsou v následujícím tvaru:*

$$\begin{aligned} \textit{(QCQP)} \quad & -\boldsymbol{x}^T \left[\boldsymbol{A}^i\right]^T \boldsymbol{A}^i \boldsymbol{x} + 2\left[\boldsymbol{b}^i\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^i \geq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & \left(\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i, \gamma^i\right) \in \mathcal{U}_i \quad i \in \mathcal{I} \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} \textit{(CQP)} \quad & \|\boldsymbol{A}^i x + \boldsymbol{b}^i\| \leq \left[\boldsymbol{d}^i\right]^T x + \gamma^i \quad i \in \mathcal{I} \\ & \left(\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i, \gamma^i, \boldsymbol{d}^i\right) \in \mathcal{U}_i \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Jak již bylo dříve řečeno, řešitelnost robustifikovaných úloh u obou případů záleží na struktuře neurčité množiny. Dle [2, str. 787-788] například pro obecnou eliptickou (či polyedrickou) neurčitost není taková úloha řešitelná ani pro (3.23), ani pro (3.24). Pro jednodušší struktury lze robustifikovanou úlohu transformovat na problém semidefinitního programování.

Nadále budeme euklidovskou normu značit $\| \centerdot \|$ a předpokládáme neurčitost po složkách, tedy $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \ldots \mathcal{U}_m$, kde jednotlivé $\mathcal{U}_i$ jsou jednoduché elipsoidy (viz (3.5)).

Pro QCQP se jedná o omezený elipsoid kolem pomyslného středu $\left(\boldsymbol{A}^{i0}, \boldsymbol{b}^{i0}, \gamma^{i0}\right)$, tedy (pro $i \in \mathcal{I}$):

$$\mathcal{U}_i = \left\{ \left(\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i, \gamma^i\right) \middle| \left(\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i, \gamma^i\right) = \left(\boldsymbol{A}^{i0}, \boldsymbol{b}^{i0}, \gamma^{i0}\right) + \sum_{j=1}^{k} u_j \left(\boldsymbol{A}^{ij}, \boldsymbol{b}^{ij}, \gamma^{ij}\right),\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1 \right\}. \tag{3.25}$$

Pro QCQP platí následující věta ([2, str. 785]):

Věta 7. *Robustifikovaná úloha s podmínkami* (3.23) *podléhající neurčitosti* (3.25) *je ekvivalentní úloze:*

$$\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}} \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

za podmínky, že matice (3.26) *je pozitivně semidefinitní pro všechna* $i \in \mathcal{I}, \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \gamma^{i0} + 2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}^{i0} - \lambda_i & \frac{\gamma^{i1}}{2} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}^{i1} & \dots & \frac{\gamma^{ik}}{2} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}^{ik} & \left[\boldsymbol{A}^{i0}\boldsymbol{x}\right]^T \\ \frac{\gamma^{i1}}{2} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}^{i1} & \lambda_i & & & \left[\boldsymbol{A}^{i1}\boldsymbol{x}\right]^T \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \frac{\gamma^{ik}}{2} + \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{b}^{ik} & & & \lambda_i & \left[\boldsymbol{A}^{ik}\boldsymbol{x}\right]^T \\ \hline \boldsymbol{A}^{i0}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{A}^{i1}\boldsymbol{x} & \dots & \boldsymbol{A}^{ik}\boldsymbol{x} & \boldsymbol{I}_{l_i} \end{array}\right). \tag{3.26}$$

K důkazu využijeme následující dvě lemmata:

Lemma 8. *(převzato z [2, str. 786])*
Pokud pro dvě symetrické matice $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ *existuje reálný vektor odpovídající dimenze* $\boldsymbol{z}_0$ *takový, že platí:* $\boldsymbol{z}_0^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_0 > 0$, *pak implikace:*

$$\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} \geq 0 \Rightarrow \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z} \geq 0,$$

platí právě tehdy, když existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ *takové, že platí:* $\boldsymbol{Q} \geq \lambda\boldsymbol{P}$.

Lemma 9. *(Schurův doplněk) (převzato z [14])*
Symetrická matice $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{F}^T & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$, *kde* $\boldsymbol{G}$ *je invertibilní matice, je pozitivně semidefinitní právě tehdy, když* $\boldsymbol{G}$ *i* $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{F}$ *jsou pozitivně semidefinitní.*

Nyní přejdeme k důkazu věty 7 (dle [2, str. 786].

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Pro dokázání tvrzení stačí prokázat ekvivalenci podmínky (3.23) a existenci $\lambda_i \in \mathbb{R}$ takového, že $(\boldsymbol{x}, \lambda_i)$ splňují podmínku (3.26).

Z definice $\mathcal{U}_i$ (viz (3.25)) pro pevné i máme:

$$-\boldsymbol{x}^T\left[\boldsymbol{A}^{i0} + \sum_{j=1}^{k} u_j\boldsymbol{A}^{ij}\right]^T\left[\boldsymbol{A}^{i0} + \sum_{j=1}^{k} u_j\boldsymbol{A}^{ij}\right]\boldsymbol{x} + 2\left[\boldsymbol{b}^{i0} + \sum_{j=1}^{k} u_j\boldsymbol{b}^{ij}\right]^T\boldsymbol{x} + \\ + \left[\gamma^{i0} + \sum_{j=1}^{k} u_j\gamma^{ij}\right] \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| \leq 1. \tag{3.27}$$

Obě strany (3.27) vynásobíme členem $\tau \geq 0$, označíme $v_j = \tau u_j$ a získáme:

$$-\boldsymbol{x}^T \left[\boldsymbol{A}^{i0}\tau + \sum_{j=1}^{k} v_j \boldsymbol{A}^{ij}\right]^T \left[\boldsymbol{A}^{i0}\tau + \sum_{j=1}^{k} v_j \boldsymbol{A}^{ij}\right] \boldsymbol{x} + 2\tau \left[\boldsymbol{b}^{i0}\tau + \sum_{j=1}^{k} v_j \boldsymbol{b}^{ij}\right]^T \boldsymbol{x} +$$
$$+\tau \left[\gamma^{i0}\tau + \sum_{j=1}^{k} v_j \gamma^{ij}\right] \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{v} : \|\boldsymbol{v}\| \leq \tau. \tag{3.28}$$

Výraz $\|\boldsymbol{v}\| \leq \tau$ lze ekvivalentně vyjádřit jako $\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq \tau^2$ a následně i $\tau^2 - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} \geq 0$. Levou stranu posledního výrazu si označíme jako $P(\tau, \boldsymbol{v})$ a levou stranu nerovnosti (3.28) jako $Q_i^{\boldsymbol{x}}(\tau, \boldsymbol{v})$. Z důkazu platnosti podmínky (3.27) se stane důkaz implikace:

$$P(\tau, \boldsymbol{v}) \geq 0 \;\Rightarrow\; Q_i^{\boldsymbol{x}}(\tau, \boldsymbol{v}) \geq 0. \tag{3.29}$$

Z lemmatu 8 plyne, že podmínka (3.29) je ekvivalentní existenci takového $\lambda^i \geq 0$, že následující kvadratická forma je pozitivně semidefinitní:

$$Q_i^{\boldsymbol{x}}(\tau, \boldsymbol{v}) - \lambda^i \left(\tau^2 - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}\right). \tag{3.30}$$

Označíme si bloky matice v podmínce (3.26) (ve shodě s lemmatem 9) jako:

$$\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} -\lambda^i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \lambda^i \boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} & \left[\boldsymbol{F}^i\right]^T(\boldsymbol{x}) \\ \hline \boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{I}_{l_i} \end{array}\right]. \tag{3.31}$$

Díky tomuto označení lze přeformulovat podmínku (3.30) na tvar:

$$\left(\tau; \boldsymbol{v}^T\right) \left[\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x}) - \left[\boldsymbol{F}^i\right]^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x})\right] \begin{pmatrix} \tau \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} - \lambda^i \left(\tau^2 - \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}\right) =$$
$$= \left(\tau; \boldsymbol{v}^T\right) \left[\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} -\lambda^i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \lambda^i \boldsymbol{I}_k \end{pmatrix} - \left[\boldsymbol{F}^i\right]^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x})\right] \begin{pmatrix} \tau \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

A z předpokladu pozitivní semidefinitnosti matice (3.26) již z lemmatu 9 plyne tvrzení. □

Pro CQP požadujeme, aby každá ze složek $\mathcal{U}_i$ byla kartézským součinem dvou jednoduchých elipsoidů $\mathcal{V}_i$ a $\mathcal{W}_i$, z nichž každý "obstarává"jinou stranu nerovnosti v podmínce (3.24). Tyto jsou definovány následovně:

$$\mathcal{V}_i = \left\{ \left[\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i\right] \middle| \left[\boldsymbol{A}^i, \boldsymbol{b}^i\right] = \left[\boldsymbol{A}^{i0}, \boldsymbol{b}^{i0}\right] + \sum_{j=1}^{k_i} u_j \left[\boldsymbol{A}^{ij}, \boldsymbol{b}^{ij}\right] + \sum_{p=1}^{q_i} v_p \left[\boldsymbol{E}^{ip}, \boldsymbol{f}^{ip}\right],\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1 \right\}$$
$$\mathcal{W}_i = \left\{ \left(\boldsymbol{d}^i, \gamma^i\right) \middle| \left(\boldsymbol{d}^i, \gamma^i\right) = \left(\boldsymbol{d}^{i0}, \gamma^{i0}\right) + \sum_{j=1}^{m_i} u_j \left(\boldsymbol{d}^{ij}, \gamma^{ij}\right) + \sum_{p=1}^{r_i} v_p \left(\boldsymbol{g}^{ip}, h^{ip}\right),\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1 \right\}. \tag{3.33}$$

Pro CQP pak platí věta (viz [2, str. 788]):

Věta 10. *Robustifikovaná úloha s podmínkami* (3.24) *podléhající neurčitostí* (3.33) *je ekvivalentní úloze:*

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} \ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
&s.t.\ \boldsymbol{E}^{ip}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}^{ip} = 0 \quad i \in \mathcal{I},\ p = 1,\dots,q_i && (3.34)\\
&\quad \left[\boldsymbol{g}^{ip}\right]^T \boldsymbol{x} + h^{ip} = 0 \quad i \in \mathcal{I},\ p = 1,\dots,r_i && (3.35)\\
&\quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}
\end{aligned}$$

A zároveň jsou matice (3.36) *a* (3.37) *pozitivně semidefinitní pro všechna* $i \in \mathcal{I}$

$$\begin{pmatrix}
\left[\boldsymbol{d}^{i0}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{i0} - \lambda_i & \left[\boldsymbol{d}^{i1}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{i1} & \dots & \left[\boldsymbol{d}^{im_i}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{im_i} \\
\left[\boldsymbol{d}^{i1}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{i1} & \left[\boldsymbol{d}^{i0}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{i0} - \lambda_i & & \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
\left[\boldsymbol{d}^{im_i}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{im_i} & & & \left[\boldsymbol{d}^{i0}\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^{i0} - \lambda_i
\end{pmatrix} \tag{3.36}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c}
\lambda_i - \mu_i & & \dots & & \left[\boldsymbol{A}^{i0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{i0}\right]^T \\
\hline
 & \mu_i & & & \left[\boldsymbol{A}^{i1}x + \boldsymbol{b}^{i1}\right]^T \\
\vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \mu_i & \left[\boldsymbol{A}^{ik_i}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{ik_i}\right]^T \\
\hline
\boldsymbol{A}^{i0}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{i0} & \boldsymbol{A}^{i1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{i1} & \dots & \boldsymbol{A}^{ik_i}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^{ik_i} & \lambda_i \boldsymbol{I}_{l_i}
\end{array}\right). \tag{3.37}$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$. Věta se dokazuje obdobným způsobem jako věta 7, proto zde uvedeme pouze odlišné úvahy. Podrobný důkaz lze najít v [2, str. 788]. Rovněž pro přehlednost vypustíme index i.

V souvislosti s definicí množiny neurčitosti (viz (3.33)) si nejprve označíme:

$$\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &= \left[\boldsymbol{d}^0\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^0 \\
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} \left[\boldsymbol{d}^1\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^1 \\ \dots \\ \left[\boldsymbol{d}^m\right]^T \boldsymbol{x} + \gamma^m \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}^0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^0 \\
\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) &= \left[\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^1,\ \dots\ ,\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^k\right].
\end{aligned}$$

Díky takto definovaným zobrazením lze podmínky (3.24) spolu s neurčitostí (3.33) přeformulovat na soustavu podmínek (*Span* značí lineární obal):

$$\begin{aligned}
&\phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \left[\boldsymbol{g}^T\boldsymbol{x} + h\right] \geq \|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w} + [\boldsymbol{E}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}]\| && (3.38)\\
&\forall\,(\boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| \leq 1, \boldsymbol{w} : \|\boldsymbol{w}\| \leq 1) \\
&\forall\,[(\boldsymbol{g}, h) \in Span\,\{(\boldsymbol{g}^p, h^p), 1 \leq p \leq r\}] \\
&\forall\,[(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{f}) \in Span\,\{(\boldsymbol{E}^p, \boldsymbol{f}^p), 1 \leq p \leq q\}].
\end{aligned}$$

Soustava podmínek (3.38) je ekvivalentní podmínkám (3.34), (3.35) spolu s existencí λ takového, že platí:

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Phi}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} \geq \lambda \qquad & \forall \boldsymbol{u} : \|\boldsymbol{u}\| \leq 1 \\ \|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\| \leq \lambda \qquad & \forall \boldsymbol{w} : \|\boldsymbol{w}\| \leq 1. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Dvojice $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ splňuje (3.39) právě tehdy, když splňuje (3.36), $\lambda \geq 0$ a následující podmínku:

$$\|\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\|^2 \leq \lambda^2 \qquad \forall \boldsymbol{w} : |\boldsymbol{w}| \leq 1. \tag{3.40}$$

Pro ověření této podmínky je potřeba obdobným způsobem jako ve Větě 7 dokázat pozitivní semidefinitnosti vhodně zvolených kvadratických forem přes Schurův doplněk využitím lemmat 8 a 9. □

3.2.3 Semidefinitní programování

V této sekci budeme jako množinu $\mathcal{X}$ uvažovat celý prostor $\mathbb{R}^n$. Podmínky řešitelnosti úlohy lze v případě semidefinitní optimalizace vyjádřit ve tvaru (dle [2]):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^0 + \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{A}^i \in S_+^l \\ &\boldsymbol{A}^0, \ldots, \boldsymbol{A}^n \in \mathcal{U},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

kde S_+^l je kužel tvořený pozitivně semidefinitními maticemi, $\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{A}^1, \ldots, \boldsymbol{A}^n$ jsou prvkem prostoru symetrických čtvercových matic S^l.

Pro konstrukci řešitelné robustifikované úlohy vyjdeme z určitého semidefinitního programování:

$$\min \left\{ \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) \in S_+^l,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \right\}, \tag{3.41}$$

kde $\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})$ je čtvercová matice řádu l, která je afinní funkcí $\boldsymbol{x}$.

Dále nechť $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^l$ je pevný nenulový vektor a pomocí něj definujeme následující zobrazení, které nazveme *dvojrozšíření* $\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{.})$ *pomocí* $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) \longmapsto \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}^T + \boldsymbol{d}f(\boldsymbol{x})^T, \tag{3.42}$$

kde $f(\boldsymbol{x})$ je afinní funkce x.

Pomocí dvojrozšíření (3.42) úlohy (3.41) za pomoci $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ definujeme neurčitou množinu jako omezený elipsoid:

$$\mathcal{U} = \left\{ \boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{l \times l} \middle| \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{d}^T + \boldsymbol{d}\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{M}^T \geq 0,\ \|\boldsymbol{u}\| \leq 1,\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k \right\}. \tag{3.43}$$

Nyní přistoupíme k samotné formulaci úlohy neurčitého semidefinitního programování. Takto dostaneme úlohu (3.44), kde je veškerá neurčitost vyjádřena pomocí matice $\boldsymbol{B}(\cdot) = \left[\boldsymbol{b}^1(\cdot), \ldots, \boldsymbol{b}^k(\cdot)\right]$.

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) + \left[\sum_{j=1}^{k} u_j \boldsymbol{b}^j(\boldsymbol{x})\right]\boldsymbol{d}^T + \boldsymbol{d}\left[\sum_{j=1}^{k} u_j \boldsymbol{b}^j(\boldsymbol{x})\right]^T \succeq 0 \\ &\qquad \|\boldsymbol{u}\| \le 1, \quad \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Věta 11. *([2, str. 793]) Robustifikovaná úloha* (3.44) *je ekvivalentní úloze:*

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \boldsymbol{M} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \boldsymbol{I}_k & \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T \\ \hline \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) - \lambda \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T \end{array}\right) \succeq 0 \\ &\qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \left[\boldsymbol{b}^1(\boldsymbol{x}); \ldots; \boldsymbol{b}^k(\boldsymbol{x})\right]^T, \quad \boldsymbol{b}^i(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}_i \\ &\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Důkaz. Podmínku (3.44) lze upravit na tvar:

$$\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}^T + \boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\right)^T = \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) + 2\boldsymbol{d}\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\right)^T. \tag{3.45}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$ je přípustným řešením robustifikované úlohy právě tehdy, když je podmínka (3.45) (pro toto $\boldsymbol{x}$) pozitivně semidefinitní, tedy:

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^l\ \forall \left(\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^k, \|\boldsymbol{u}\| \le 1\right):\ \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} + 2\left(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\xi}\right)\left(\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\right)^T\boldsymbol{\xi} \ge 0.$$

Využijeme-li vlastnost $\boldsymbol{u}$, dostaneme další ekvivalentní podmínku:

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^l:\ \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} + 2\left|\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\xi}\right|\left\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\xi}\right\| \ge 0. \tag{3.46}$$

Rozšíříme-li tuto podmínku následujícím způsobem:

$$\boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} + 2\left|\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\xi}\right|\left\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\xi}\right\| \ge \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} + 2\left|\boldsymbol{\eta}\right|\left\|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\xi}\right\| \ge 0, \tag{3.47}$$

pak podmínka (3.47) (pro $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^k$) platí právě tehdy, když platí následující implikace:

$$\forall\left(\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^l, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^k\right):\ \left(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{\xi}\right)^2 - \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta} \ge 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{\xi} \ge 0. \tag{3.48}$$

Pokud si označíme:

$$P(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \left(\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{\xi}\right)^2 - \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta}$$
$$Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\xi} \ ,$$

pak dle lemmatu 8 je platnost (3.48) ekvivalentní existenci takového $\lambda \geq 0$, pro které je následující kvadratická forma pozitivně semidefinitní:

$$Q(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) - \lambda P(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \geq 0.$$

Když tuto formu rozepíšeme, dostaneme:

$$\lambda \boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\xi} - \lambda \left(\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{\xi}\right)^2 + 2\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{\xi},$$

což je totéž jako:

$$\left(\boldsymbol{\eta}^T, \boldsymbol{\xi}^T\right) \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}.$$

Tvrzení plyne z pozitivní semidefinitnosti matice $\boldsymbol{M}$. □

V převážné většině obecných případů nelze pro tento typ úloh získat řešitelné robustifikované varianty a to ani pro polyedrické neurčité množiny. Existuje však značné množství aproximací neurčitých množin, díky nimž lze takovou variantu získat (alespoň přibližně) řešitelnou (viz např. [2]). Při hledání vhodné aproximace bývá často její kvalita měřena pomocí následující míry:

$$\rho(AR : R) = \inf \left\{ \rho \geq 1 \mid X(AR) \supseteq X\left(\mathcal{U}(\rho)\right) \right\},$$

kde $X(AR)$ je množina přípustných řešení aproximované robustifikované úlohy a množina $X(\mathcal{U}(\rho))$ obsahuje přípustná řešení původní úlohy zvětšená faktorem ρ.

3.2.4 Geometrické programování

Podmínky řešitelnosti jsou u geometrického programování (dle [9]) ve tvaru:

$$\begin{aligned} & g\left(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}_i\right) \leq 0 \quad i=1,\ldots,m \\ & \boldsymbol{G}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}=\boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

kde $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce typu $g(\boldsymbol{x}) = \log\left(\sum_{i=1}^k e^{x_i}\right)$. Při aplikaci robustní optimalizace bývá často uvažována eliptická či polyedrická neurčitost a argument funkce g je vyjádřen jako afinní funkce neurčitosti ve tvaru:

$$g\left(\tilde{\boldsymbol{A}}_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{b}}_i(\boldsymbol{u})\right) \leq 0 \quad \forall \boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$$

Zásadní potíží při práci s geometrickými robustními úlohami je skutečnost, že složitost jejích robustifikovaných variant není známa. Na druhou stranu existuje celá řada aproximačních postupů, které se s tímto problémem snaží vypořádat, kupříkladu [9] užívají po částech lineární aproximaci pro získání horní a dolní meze pro úlohu (3.49).

3.2.5 Diskrétní programování

Aplikací robustních postupů na úlohy diskrétní optimalizace je v dnešní době již značné množství, avšak problémem je (opět) skutečnost, že i pro polynomicky řešitelné úlohy bývají jejich robustifikované verze NP-složité, a tedy za dnešních podmínek neřešitelné. V této sekci se budeme zabývat jedním ze speciálních příkladů, který uvedli Bertsimas a Sim (viz [5]).

Pracují s úlohou lineárního programování s neurčitostí omezenou mohutností (viz sekce 3.1.3). V tomto případě podléhá neurčitosti jak matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tak vektor v účelové funkci $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, a to následujícím způsobem:

- pro jednotlivé prvky a_{ij} matice $\boldsymbol{A}$ předpokládáme, že jsou řízené pomocí symetrických náhodných veličin $\tilde{a}_{ij}$, které nabývají hodnot z intervalu

  $$[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$$

- obdobně modelované předpokládáme složky vektoru $\boldsymbol{c}$ - tedy za pomoci náhodných veličin $\tilde{c_j}$ nabývajících hodnot z intervalu $[c_j, c_j + \hat{c}_j]$. Všechny složky $c_j, \hat{c}_j$ jsou rovněž celočíselné.

Prvky $\hat{a}_{ij}$ a $\hat{c}_j$ jsou pevně zvolené a nabývají nezáporných hodnot. Dále definujeme:

$$\begin{array}{ll} J_0 = \{j \in \mathcal{J} | \hat{c}_j > 0\} & \Gamma_0 \in [0, |J_0||] \\ J_i = \{j \in \mathcal{J} | \hat{a}_{ij} > 0\} & \Gamma_i \in [0, |J_i|] \quad i \in \mathcal{I} \end{array}.$$

Neurčitá množina $\mathcal{U}$ je tedy v následujícím tvaru:

$$\mathcal{U}_1 = \{(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c})|\ \tilde{a}_{ij} \in [a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]\,;\ \tilde{c}_j \in [c_j, c_j + \hat{c}_j] \quad \forall i \in \mathcal{I},\ \forall j \in J_i\}$$

Množinu $\mathcal{X}$ máme (pro pevně zvolená $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$) ve tvaru:

$$\mathcal{X}_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n|\ v_j \in [d_j, h_j]\,, v_j \in \mathcal{Z} \quad \forall j \in \mathcal{J}\}$$

Nyní můžeme definovat úlohu diskrétní robustní optimalizace pro neurčitost omezenou mohutností. Vyjdeme z varianty (3.2):

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}, E}\ & E \\ s.t.\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq E \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_1,\ \forall\,(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{c}) \in \mathcal{U}_1 \\ & a_{ij} \in \mathbb{R},\ c_j \in \mathcal{Z} \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall j \in \mathcal{J}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Robustifikovaná verze (3.50) je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{x}, E}\ & E \\ s.t.\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \alpha\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_0) \leq E \\ & \sum_j a_{ij}x_j + \beta_i\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_i) \leq b_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}_1, \end{aligned} \tag{3.51}$$

kde $\alpha\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_0)$ a $\beta_i\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_i)$ zastupují následující úlohy:

$$\alpha\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_0) = \max_{\{S_0|S_0 \subseteq J_0, |S_0| \leq \Gamma_0\}} \left\{ \sum_{j \in S_0} \hat{c}_j |x_j| \right\} \tag{3.52}$$

$$\beta_i\,(\boldsymbol{x}, \Gamma_i) = \max_{\{S_i \cup \{t_i\}|S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}|x_j| + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\, \hat{a}_{it_i}|x_{t_i}| \right\}. \tag{3.53}$$

Obory čísel, do nichž spadají koeficienty $a_{ij}, c_j, \hat{c}_j$ (spolu s celočíselností $\boldsymbol{x}$), zásadní měrou ovlivňují stavbu podmínek obsažených v robustifikované variantě úlohy (3.50). Rozdíl je patrný při srovnání podmínek (3.52) a (3.53). V prvním případě jsou totiž veškeré prvky v rovnici celými čísly, což z mohutnosti J_0 (a v důsledku i z Γ_0) dělá číslo přirozené, a tedy není nutné počítat s rozdílnými hodnotami Γ_0 a $\lfloor \Gamma_0 \rfloor$, a množina, přes níž maximalizujeme, tomu odpovídá.

Autoři [5] dále s touto úlohu pracují dle zákonitostí neurčitosti omezené mohutností (viz sekce 3.1.3) a rozvíjejí ji pro aplikaci v aproximačních algoritmech u kombinatorických úloh. V rozvinuté podobě tato úloha vypadá následovně:

$$\begin{aligned} & \min\ E \\ & s.t.\ \Lambda_0\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) \leq E \\ & \qquad \Lambda_i\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) \leq b_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \\ & \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{3.54}$$

kde $\Lambda_i, i = 0, \ldots, m$ zastupují:

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) = \min\ & \left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \Gamma_0\theta_0 + \sum_{j\in J_0} p_j\right] \\ & s.t.\theta_0 + p_j \geq \hat{c}_j x_j, \quad j \in J_0 \\ & \theta_0, p_j \geq 0, \quad j \in J_0 \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} \Lambda_i\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) = \min\ & \left[\sum_{j\in\mathcal{J}} a_{ij}x_j + \Gamma_i\theta_i + \sum_{j\in J_i} q_{ij}\right] \\ & s.t.\theta_i + q_{ij} \geq \hat{a}_{ij} x_j, \quad j \in J_i \\ & \theta_i, q_{ij} \geq 0, \quad j \in J_i. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Vezmeme-li v potaz postup uvedený v [5, str. 56], pak lze (3.55) a (3.56) upravit na tvar:

$$\begin{aligned} \Lambda_0\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) &= \min_{\theta_0\geq 0} \left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \Gamma_0\theta_0 + \sum_{j\in J_0} \max\left\{\hat{c}_j x_j - \theta_0, 0\right\}\right] \\ \Lambda_i\left(\boldsymbol{x},\mathcal{U}\right) &= \min_{\theta_i\geq 0} \left[\sum_{j\in\mathcal{J}} a_{ij}x_j + \Gamma_i\theta_i + \sum_{j\in J_i} \max\left\{\hat{a}_{ij} x_j - \theta_i, 0\right\}\right]. \end{aligned}$$

3.2.6 Anticipativní robustifikovaná úloha

Tato varianta postupu pro robustní optimalizaci je uvedena v [1] a je vystavěna na rozlišování proměnných na pevné a přizpůsobitelné, tedy takové, které se mění až v závislosti na realizaci neurčitosti a pevných proměnných. Původ tohoto rozšíření je značně intuitivní, neboť v reálném světě často některé proměnné mění své hodnoty v závislosti na jiných. Cílem je dosáhnout vhodnější formulace úlohy, která je pružnější v případech, kdy jsou běžné robustifikované varianty úloh často značně konzervativní.

Vyjdeme z úlohy běžného robustního lineárního programování (dle (3.2), opět pro obecně definovanou $\mathcal{X}$):

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{x},E}\ & E \\
s.t.\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq E \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \in \mathcal{X}, \forall \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

Vektor proměnných $\boldsymbol{x}$ se v metodologii anticipativní robustifikace dělí na podvektory pevných ($\boldsymbol{u}$) a přizpůsobitelných ($\boldsymbol{v}$) proměnných, tedy $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Tímto rozdělením však neměníme nosič vektoru $\boldsymbol{x}$, a tedy musí stále platit $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{X}$.

S tímto dělením také souvisí rozdělení matice $\boldsymbol{A}$ na dvě podmatice $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}$ (resp. vektoru $\boldsymbol{c}$ na podvektory $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}$), které těmto zmíněným podvektorům odpovídají. Tímto rozdělením dostaneme z úlohy (3.57):

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},E}\ & E \\
s.t.\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{v} \leq E \\
& \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{b} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{X} \\
& \forall \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}] \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Z této úlohy již dostaneme tzv. anticipativní robustifikovanou variantu (orig. *adjustable robust counterpart* - dále již jen AR):

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{u},E}\ & E \\
s.t.\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{v} \leq E \\
& \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{b} \\
& (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{X} \\
& \forall \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}] \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

Hlavním rozdílem oproti běžné robustifikované úloze (orig. *robust counterpart* - R) je skutečnost, že u AR je ponechán prostor pro závislost $\boldsymbol{v}$ na realizaci $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{\omega}$ (minimalizace probíhá pouze přes pevné proměnné), a tedy máme k dispozici větší množinu přípustných řešení. Toto je patrné z následujícího srovnání:

$$
\text{(R)} \quad \forall \boldsymbol{u}\ \exists \boldsymbol{v}\ \forall \omega \in \mathcal{U} : \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{v} \leq E\ \&\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{b}
$$

$$
\text{(AR)} \quad \forall \boldsymbol{u}\ \forall \omega \in \mathcal{U}\ \exists \boldsymbol{v} : \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}^T\boldsymbol{v} \leq E\ \&\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \leq \boldsymbol{b}.
$$

Zásadní nevýhodou je však skutečnost, že i pro jednoduché struktury $\mathcal{U}$ je AR často NP-složitá. Takto vyvstává potřeba pátrat po vhodnějším rozšíření a dostáváme se tak k tzv. afinně anticipativní robustifikované variantě (viz následující oddíl).

3.2.7 Afinně anticipativní robustifikovaná úloha

Toto rozšíření metodologie z předchozího oddílu staví na principu, že v mnoha případech lze pro dané $\boldsymbol{u}$ vyjádřit $\boldsymbol{v}$ jako afinní funkci dat (a neurčitosti) a zapadá "někam mezi" klasickou robustifikovanou a AR variantu. Klade si za cíl nalézt řešitelnou alternativu k robustifikované úloze pro případy, kdy samotná AR úloha není řešitelná.

Tzv. afinně anticipativní robustifikovanou úlohu (orig. *affinely adjustable robust counterpart* - dále již jen AAR) dostaneme vyjádřením $\boldsymbol{v}$ z (3.59) jako nějaké funkce $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\omega}$. Tímto sice poněkud omezíme realizaci $\boldsymbol{v}$, ale stejně jako v oddíle 3.2.6 nosič $\mathcal{X}$ zůstává nezměněn. Touto úpravou získáme následující úlohu:

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{W},E}\ & E \\ s.t.\ & \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{u} + \boldsymbol{r}^T(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\omega}) \le E \\ & \boldsymbol{P}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{w} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\omega}) \le b \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{\omega}) \in \mathcal{X} \\ & \forall \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}] \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Často bývá místo (3.60) využívána forma, v níž je neurčitá množina formulována podobně jako v případě jednoduchého elipsoidu (viz (3.5)). Jedná se o ekvivalentní úlohu, která je založena na afinní parametrizaci neurčitosti pomocí "řídícího" vektoru $\boldsymbol{\xi} \in \Xi$, kde Ξ je neprázdná, konvexní a kompaktní podmnožina R^L. $\mathcal{U}$ máme tedy ve tvaru:

$$\mathcal{U} = \left\{ [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}] = \left[\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{b}^0\right] + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \left[\boldsymbol{p}^l, \boldsymbol{r}^l, \boldsymbol{P}^l, \boldsymbol{R}^l, \boldsymbol{b}^l\right],\ \boldsymbol{\xi} \in \Xi \right\}. \tag{3.61}$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že zobrazení:

$$\boldsymbol{\xi} \longmapsto \left[\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{b}^0\right] + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \left[\boldsymbol{p}^l, \boldsymbol{r}^l, \boldsymbol{P}^l, \boldsymbol{R}^l, \boldsymbol{b}^l\right], \tag{3.62}$$

je vlastně vnoření a díky této skutečnosti lze přizpůsobitelné proměnné místo afinní závislosti na $\boldsymbol{\omega}$ ekvivalentně vyjádřit jako afinní funkce $\boldsymbol{\xi}$ pro nějaké nové nepřizpůsobitelné proměnné $\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{m}^1, \ldots, \boldsymbol{m}^L$, tedy:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{m}^0 + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \boldsymbol{m}^l. \tag{3.63}$$

a proto můžeme ekvivalentní úlohu k (3.60) vyjádřit úpravou (3.59) na tvar:

$$\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{m},E}\ E \\
&s.t.\ \left[\boldsymbol{p}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{p}^l\right]\boldsymbol{u}+\left[\boldsymbol{r}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{r}^l\right]\left[\boldsymbol{m}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{m}^l\right]\le E \\
&\quad\left[\boldsymbol{P}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{P}^l\right]\boldsymbol{u}+\left[\boldsymbol{R}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{R}^l\right]\left[\boldsymbol{m}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{m}^l\right]\le\left[\boldsymbol{b}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{b}^l\right] \\
&\quad\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{m}^0+\sum_{l=1}^{L}\xi_l\boldsymbol{m}^l\right)\in\mathcal{X} \\
&\quad\forall\boldsymbol{\omega}=[\boldsymbol{p},\boldsymbol{r},\boldsymbol{P},\boldsymbol{R},\boldsymbol{b}]\in\mathcal{U},\forall\boldsymbol{\xi}\in\Xi.
\end{aligned}\tag{3.64}$$

3.2.8 Spojitost se stochastickým programováním

V návaznosti na definici neurčitosti (3.61) se pro aplikaci přímo nabízí metoda optimalizace pomocí scénářů. Vyjdeme-li ze základních poznatků uvedených v [10]), můžeme prvky množiny $\mathcal{U}$, tedy jednotlivé scénáře, označit jako ω_s a pravděpodobnosti takových scénářů jako q_s (pro $s=1,\ldots,S$).

Ačkoliv je možné využít pro konstrukci neurčitosti všech scénářů, není to příliš praktický přístup, neboť uvažování všech znamená zahrnutí i těch s velmi nízkou pravděpodobností, což může v důsledku působit značné ztráty. V souladu se zobrazením $\boldsymbol{\xi}$ lze každý ze scénářů v množině $\mathcal{U}$ vyjádřit jako kombinaci $L+1$ daných prvků $\mathcal{U}$ s koeficienty ξ_l. Tyto dané prvky lze zvolit například tak, že stanovíme minimální hodnotu pravděpodobnosti "přijatelných"scénářů (označíme si ji jako α) a jako jejich koeficienty pak dosadit tyto pravděpodobnosti.

Takto bychom dostali následující podobu zobrazení (3.62):

$$\boldsymbol{\xi}\longmapsto\left[\boldsymbol{p}^0,\boldsymbol{r}^0,\boldsymbol{P}^0,\boldsymbol{R}^0,\boldsymbol{b}^0\right]+\sum_{l=1}^{L}q_l\left[\boldsymbol{p}^l,\boldsymbol{r}^l,\boldsymbol{P}^l,\boldsymbol{R}^l,\boldsymbol{b}^l\right],\tag{3.65}$$

Pokud označíme $\hat{\xi}_l = \frac{q_l}{\sum_{k=1}^{L} q_k}$, $l = 1, \ldots, L$, pak lze tyto prvky považovat za pravděpodobnosti našich zvolených scénářů, a tedy lze množinu $\mathcal{U}$ vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \Big\{ [\boldsymbol{p}_s, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{R}_s, \boldsymbol{b}_s] = \big[\boldsymbol{p}^0, \boldsymbol{r}^0, \boldsymbol{P}^0, \boldsymbol{R}^0, \boldsymbol{b}^0\big] + \\ + \sum_{l=1}^{L} \hat{\xi}_l \, [\boldsymbol{p}_l, \boldsymbol{r}_l, \boldsymbol{P}_l, \boldsymbol{R}_l, \boldsymbol{b}_l] \quad \hat{\xi}_l \geq 0, \sum_{l=1}^{L} \hat{\xi}_l = 1 \quad \forall s = 1, \ldots, S \Big\} = \\ = \{ [\boldsymbol{p}_s, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{P}_s, \boldsymbol{R}_s, \boldsymbol{b}_s] = \mathbb{E}^{\alpha} [\mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{b}] \quad \forall s = 1, \ldots, S \}, \end{aligned} \tag{3.66}$$

kde $\mathbb{E}^{\alpha}$ značí střední hodnotu (s upravenými pravděpodobnostmi) přes prvky $\mathcal{U}$ s minimální pravděpodobností α a $\mathfrak{p}, \mathfrak{r}, \mathfrak{P}, \mathfrak{R}, \mathfrak{b}$ náhodné vektory s hodnotami $\left[\frac{1}{\hat{\xi}_l}\boldsymbol{p}^0 + \boldsymbol{p}_l, \frac{1}{\hat{\xi}_l}\boldsymbol{r}^0 + \boldsymbol{r}_l, \frac{1}{\hat{\xi}_l}\boldsymbol{P}^0 + \boldsymbol{P}_l, \frac{1}{\hat{\xi}_l}\boldsymbol{R}^0 + \boldsymbol{R}_l, \frac{1}{\hat{\xi}_l}\boldsymbol{b}^0 + \boldsymbol{b}_l\right]$ o pravděpodobnostech $\hat{\xi}_l$.

Díky (3.66) jsou veškeré prvky neurčitosti totožné a označíme si je $\mathbb{E}_{\mathfrak{p}}$ (resp. $\mathfrak{r}$ apod.) a takto z (3.64) můžeme získat následující úlohu:

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}, F} F \\ & s.t. \left(\mathbb{E}_{\mathfrak{p}}^{\alpha}\right)^T \boldsymbol{u} + \left(\mathbb{E}_{\mathfrak{r}}^{\alpha}\right)^T \left[\boldsymbol{m}^0 + \sum_{l=1}^{L} \hat{\xi}_l \boldsymbol{m}^l\right] \leq F \\ & \mathbb{E}_{\mathfrak{P}}^{\alpha} \boldsymbol{u} + \mathbb{E}_{\mathfrak{R}}^{\alpha} \left[\boldsymbol{m}^0 + \sum_{l=1}^{L} \xi_l \boldsymbol{m}^l\right] \leq \mathbb{E}_{\mathfrak{b}}^{\alpha} \\ & \left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{m}^0 + \sum_{l=1}^{L} \hat{\xi}_l \boldsymbol{m}^l\right) \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Kapitola 4

Problém květinářky

Tento problém patří mezi známé úlohy obecně nazývané jako problémy dodavatele a maloobchodníka (orig. *Supplier-retailer problems*). Základním principem těchto úloh je neznámá (a neurčitá) poptávka od zákazníků a protichůdné snahy obou stran přenést maximum zodpovědnosti za uspokojení této poptávky na tu druhou ([12, str. 2]). Maloobchodník se snaží o co nejmenší přebytky a objednávat v každém časovém úseku podle momentální poptávky, naopak dodavatel usiluje o prodání co největšího množství najednou. Nejrůznější poplatky za nákup či penalizace za neprodané zboží a rizika spojená s důsledky nesplnění požadavků pak z úlohy dělají složitý problém, který v konkrétních případech může nabývat nejrůznějších podob.

Problém květinářky je velmi známá optimalizační úloha a patří mezi jednodušší varianty úloh maloobchodníka a dodavatele. Hlavním cílem je maximalizace zisku při neznámé poptávce. Květinářka nakupuje květiny za určitou cenu p a prodává za cenu c. Vše, co neprodá daný den, může uschovat do dne následujícího, ale neprodá-li tento zbytek onen následující den, pak ho musí vyhodit. Pro potřeby této kapitoly budeme uvažovat variantu prodeje přes víkend.

Tedy v pátek prodavačka objedná určité množství květin, kterými se snaží uspokojit neurčitou poptávku během sobotního dne. Na konci prodeje v sobotu ke květinám, které jí zbyly, může doobjednat další pro prodej a novou poptávku (podléhající jiným vlivům) v neděli. Po skončení prodeje v neděli konstatuje ztráty způsobené (případnými) neprodanými květinami.

V této kapitole nejprve definujeme úlohu květinářky pomocí metodologie robustní optimalizace a následně na tuto formulaci aplikujeme postupy řešení uvedené v kapitole 3.

4.1 Základní formulace

Nejprve formulujeme úlohu ve tvaru určeném původně pro stochastické programování:

c ... cena, za kterou jsou květiny prodávány

p ... cena, za níž květinářka květiny nakupuje

ω_1 ... sobotní poptávka

ω_2 ... nedělní poptávka

x_1 ... květiny objednané v pátek

$x_2(\omega_1)$ ... květiny objednané v sobotu (v závislosti na sobotní poptávce)

$s(\omega_1)$ ... neprodané květiny po sobotě (závislé na realizaci sobotní poptávky)

$z(\omega_1, \omega_2)$ ... zbylé květiny po víkendu (po učinění obou rozhodnutí a realizaci obou poptávek)

Obě poptávky podléhají nějakému sdruženému pravděpodobnostnímu rozdělení a proměnné x_2, s, z jsou na nich závislé[1]. Úloha květinářky pro známé realizace poptávky je pak v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} \max\ & \{(c-p)(x_1 + x_2(\omega_1)) - cz(\omega_1, \omega_2)\} \\ s.t.\ & x_1 - s(\omega_1) \leq \omega_1 \\ & x_2(\omega_1) + s(\omega_1) - z(\omega_1, \omega_2) \leq \omega_2 \\ & (x_1, x_2, s, z) \in \mathcal{X}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pro vyjádření robustifikované varianty úlohy (4.1) můžeme uvažovat nezápornost všech členů a množinu neurčitých parametrů $\mathcal{U} = \{(\omega_1, \omega_2)\}$ lze celkem přirozeně považovat za určitou podmnožinu kladného kvadrantu $\mathbb{R}^2$. Rovněž množina $\mathcal{X}$ je zastoupena nezápornými prvky prostoru $\mathbb{R}^4$.

[1]Obecně vzato mohou být závislé i jednotlivé poptávky.

4.2 Vícestupňová robustní formulace

Chronologicky lze problém květinářky popsat následovně:

1. První stupeň:

   rozhodnutí x_1

2. Druhý stupeň

   realizace ω_1

   výpočet $s(\omega_1) = (x_1 - \omega_1)^+$

   rozhodnutí $x_2(\omega_1)$

3. Třetí stupeň:

   realizace ω_2

   výpočet $z(\omega_1, \omega_2) = x_2(\omega_1) + s(\omega_1) - \omega_2 = x_1 + x_2(\omega_1) - \omega_1 - \omega_2$.

Pro korektní formulaci úlohy v robustním tvaru vyjdeme z vícestupňové optimalizační úlohy v obecném tvaru:

$$\begin{aligned} \min\ & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{y} \\ s.t. & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{p} - \boldsymbol{R}\boldsymbol{x} \\ & (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ jsou rozhodovací proměnné v různých stupních úlohy. Nejprve je třeba učinit rozhodnutí $\boldsymbol{x}$ a podle jeho podoby pak rozhodovat o $\boldsymbol{y}$ podle matice $\boldsymbol{P}$ (proměnná $\boldsymbol{x}$ je ve druhém stupni již brána jako parametr), což v praxi znamená hledání minima (resp. maxima) v každém stupni pro každou rozhodovací proměnnou. V našem případě máme hned 3 optimalizační úrovně.

Pro zjednodušení zápisu budeme dále vynechávat závislost na poptávce či předchozích rozhodnutích. Rovněž budeme při psaní argumentů funkcí oddělovat proměnné a parametry (v tomto pořadí). Tedy, dle [7, str. 116] a výše uvedené chronologizace, lze úlohu květinářky zapsat v následujícím vícestupňovém tvaru, který uvedeme v postupně rozvíjené podobě a pro známé hodnoty poptávky.

1. Prvním stupněm je maximalizace sobotního zisku přes rozhodnutí x_1:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1} \; [(c-p)x_1 + \mathcal{Q}(x_1)] \\ &s.t. \; x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

2. Funkce $\mathcal{Q}$ označuje optimální hodnotu následující úlohy, do níž jako parametr již vstupuje sobotní poptávka (ω_1):

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x_1) = &\max_{s,x_2} [(c-p)x_2 + \mathcal{G}(x_1, s, x_2|\omega_1)] \\ &s.t. \; s \geq x_1 - \omega_1 \\ &\quad\; x_2, s \geq 0. \end{aligned}$$

3. Poslední funkce $\mathcal{G}$ (již s parametrem ω_2) je ve své podstatě minimalizací ztráty způsobené neprodanými květinami:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x_2, x_1, s|\omega_1, \omega_2) = &\max_{z} \; [-cz] \\ &s.t. \; z \geq x_2 + s - \omega_2 \\ &\quad\; z \geq 0. \end{aligned}$$

Pro známé hodnoty poptávky se jedná o vcelku standartní vícestupňovou optimalizační úlohu, avšak v případě neurčitého programování obtížnost velmi vzroste, neboť mezi všemi úrovněmi je nutné zohlednit maximalizaci přes neurčité poptávky ω_1, ω_2. Samotná řešitelnost je pak v ohrožení, ale vhodnou formulací množiny neurčitosti a typu úlohy (viz kapitola 3) je možné při robustifikaci získat úlohy vcelku rozumných parametrů. Těmito úvahami se budeme zabývat v následujících oddílech.

4.3 Množina neurčitosti

V této úloze není žádná struktura množiny $\mathcal{U}$ předem specifikována (vyjma toho, že se jedná o nějakou podmnožinu kladného kvadrantu - $\mathbb{R}^2_+$), tedy je volba zcela na nás. Lze předpokládat, že se bude jednat o nějaký diskrétní dvourozměrný interval, neboť části květin půjdou na odbyt jen těžko, a šance, že by mezi maximální a minimální hodnotou poptávky existovala hodnota s nulovou pravděpodobností, je rovněž velmi malá.

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat znalost jakési průměrné poptávky $\bar{\omega}$, například může prodavačka při nástupu dostat od předchozí majitelky údaje za nějaké dřívejší prodejní období. Tímto získáme jakýsi střed množiny $\mathcal{U}$, kolem nějž můžeme konstruovat. Nyní vstupuje do hry otázka, o jaký interval nám jde.

Předpokládáme tedy množinu $\mathcal{U}_0$ sestrojenou kolem $\bar{\omega}$ (pro nějaká kladná D_i, H_i pro $i = 1, 2$) v tvaru:

$$\mathcal{U}_0 = (\bar{\omega}_1 - D_1, \bar{\omega}_1 + H_1) \times (\bar{\omega}_2 - D_2, \bar{\omega}_2 + H_2) . \tag{4.3}$$

Volba mezí intervalu je čistě na nás. Stačí pouze brát ohled na to, že levá mez intervalu nesmí být menší než 0. Symetrickou verzi lze získat dodáním podmínek: $D_i = H_i$ pro $i = 1, 2$.

Nyní předpokládejme, že spolu s informací o průměrné poptávce dostala prodavačka rovněž hodnoty minimální a maximální napozorované poptávky ($\hat{\omega}_i$, resp. $\tilde{\omega}_i$ pro $i = 1, 2$). Pak lze předpokládat, že $D_i = \bar{\omega}_i - \hat{\omega}_i$, $H_i = \tilde{\omega}_i - \bar{\omega}_i$ pro $i = 1, 2$. Tímto bychom pokryli prakticky všechny předpokládané hodnoty neurčitosti a získáme tak pojištění proti takřka všem dosud známým alternativám. Nezávislost jednotlivých složek $\boldsymbol{\omega}$ rovněž umožňuje vcelku snadnou aplikaci.

V tuto chvíli je třeba si položit otázku, zdali se vůbec chceme pojišťovat proti všem alternativám. Výhoda plošného pokrytí je sice nesporná, ale pokud by se například většina napozorovaných poptávek soustředila kolem průměru, a minima/maxima by tvořilo pouze několik značně vzdálených hodnot, pak bychom mohli přílišnou konzervativností způsobit značně nižší zisk při prodeji.

Jinými slovy se jedná o otázku, jakým způsobem a jak moc se chceme pojistit, tedy jakou úroveň konzervativismu zvolíme. Na tuto otázku lze odpovědět využitím neurčitosti omezené mohutností (viz oddíl 3.1.3), resp. varianty uvedené v [13].

Volba této možnosti znamená využití tzv. úrovně zajištění neurčitosti[2] (orig. *Budget of uncertainty* - Γ). Základní myšlenkou je zavedení prvků $z_{ij} \in [0,1]$, jejichž součet je omezen daným Γ. Takto z (4.3) získáme následující množinu:

$$\mathcal{U}_1 = \{(\omega_1, \omega_2)|\omega_i \in (\bar{\omega}_i - D_i * z_{i1}, \bar{\omega}_i + H_i * z_{i2}) \quad i = 1,2 \quad \boldsymbol{z} \in \Omega\}\,, \tag{4.4}$$

kde množina Ω vypadá takto:

$$\Omega = \left\{ (z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}) \middle| \sum_{i,j=1}^{2} z_{ij} \leq \Gamma, z_{ij} \in [0,1] \quad i,j = 1,2 \right\}. \tag{4.5}$$

Tato množina má pro tento typ neurčitosti rozhodující tvar, neboť volbou Γ ovládáme míru "odchýlení" úlohy od určitého programování (tedy úlohy, kde jsou všechna z_{ij} rovna 0). [13] sice pro použití Γ vychází ze symetrické varianty (4.3), avšak ve výše uvedeném obecném případě je toto rovněž aplikovatelné. Řešení robustifikované varianty úlohy květinářky nyní stojí a padá na tom, jak velké Γ zvolíme.

4.4 Závislé prvky neurčitosti

Při konstrukci množin neurčitosti je zapotřebí si být vědom toho, že jednotlivé prvky jsou z definice na sobě závislé a až různými přístupy k neurčitosti z nich činíme nezávislé (např. řádkovou neurčitostí), a tedy i snadněji aplikovatelné. V našem problému květinářky sice máme neurčitost již od počátku nezávislou, ale i tak neškodí si ilustrovat, jak by se změnil přístup k řešení v případě, kdy by bylo nezávislost zapotřebí zajistit.

Kupříkladu můžeme uvažovat, že pro náš problém květinářky máme neurčitou množinu ve tvaru:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{(\omega_1, \omega_2)||\omega_1 - \omega_2| \leq 1, \quad \omega_i \in \langle \underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i \rangle\} = \\ &= \{(\omega_1, \omega_2)|-1 \leq \omega_1 - \omega_2 \leq 1, \quad \omega_i \in \langle \underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i \rangle\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

Na první pohled je patrné, že se stuktura množiny $\mathcal{U}$ nějakým způsobem promítne do podmínek řešitelnosti. Otázka zní jak.

[2]Název byl převzat z [13]. Označení Γ navazuje na tento zdroj a pochází z [6] - blíže viz oddíl 3.1.3.

První alternativa by mohla znamenat zahrnutí všech funkčních závislostí z množiny $\mathcal{U}$ do podmínek řešitelnosti tak, jak jsou přesně definovány. Nadále bychom s nimi mohli pracovat stejným způsobem jako například při převodu neurčitosti z jedné strany nerovností do druhé. Takto bychom předpokládali následující modifikovanou úlohu s nezávislými prvky neurčitosti:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \boldsymbol{m}^{*T}\boldsymbol{y} \\
s.t.\ & \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{b}^* \\
& \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \mathbf{1})^T \\
& \boldsymbol{x} = (x_1, s, x_2, z) \geq \mathbf{0} \\
& \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{U}_1,
\end{aligned}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}^* &= (c-p, c-p, 0, -c, 0, 0)^T \\
\boldsymbol{b}^* &= (0, 0, 1, 1)^T \\
\boldsymbol{A}^* &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & -\omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \\
\mathcal{U}_1 &= \left\{(\omega_1, \omega_2) | \omega_i \in \langle \underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i \rangle \quad i = 1, 2\right\}.
\end{aligned}
$$

Zásadním problémem tohoto přístupu je skutečnost, že takto není možné garantovat splnění podmínek pro všechny varianty neurčitosti. Například (za předpokladu, že $\overline{\omega}_2 \geq \overline{\omega}_1 + 2$), je možné vzít hodnoty $\omega_1 = \overline{\omega}_1$ a $\omega_2 = \overline{\omega}_1 + 2$, čímž dostaneme v podmínce definované ve třetím řádku matice A^* nesmysl.

Je tedy zapotřebí hledat jiný způsob a tím může být parametrizace jedné složky neurčitosti a pomocí této pak následně vyjádřit ostatní. Tato varianta má oporu v samotném principu přizpůsobitelné úlohy, neboť např. podoba sobotní poptávky může mít přímý vliv na realizaci té nedělní.[3]

Toto v důsledku znamená následující úpravu množiny (4.6):

$$
\mathcal{U}_2 = \left\{(\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in \langle \underline{\omega}_1, \overline{\omega}_1 \rangle,\ \max\left\{\omega_1 - 1, \underline{\omega}_2\right\} \leq \omega_2 \leq \min\left\{\omega_1 + 1, \overline{\omega}_2\right\}\right\},
$$

což nám z robustifikované varianty květinářky tvoří následující úlohu:

$$
\begin{aligned}
\max\ & \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x} \\
s.t.\ & x_1 - s \leq \omega_1 \\
& x_2 + s - z \leq \max\left\{\omega_1 - 1, \underline{\omega}_2\right\} \\
& \boldsymbol{x} = (x_1, s, x_2, z) \geq \mathbf{0} \\
& \forall \omega_1 \in \langle \underline{\omega}_1, \overline{\omega}_1 \rangle,
\end{aligned}
$$

[3] Podobný přístup byl rovněž využit při řešení ilustračního příkladu v oddíle 2.1.

Takto se nám podařilo zbavit se závislosti jednotlivých prvků množiny neurčitosti, ale zároveň máme stále zachovanou strukturu. Tento postup je navíc rozšiřitelný i na složitější typy závislostí.

4.5 Rovnoměrné rozdělení poptávky

Co by se stalo, kdybychom měli neurčité prvky specifikované pomocí nějakého pravděpodobnostního rozdělení? Řešení takové úlohy je vesměs pouze otázkou hledání vhodného způsobu parafráze úlohy v závislosti na zadaném rozdělení. Vcelku logicky se nabízí využití metod stochastického programování (pravděpodobnostní omezení apod.), kde lze porušování tvrdých podmínek předejít tím, že je zahrneme do nosiče $\mathcal{X}$. V našem problému květinářky se však lze stochastickému programování vyhnout, a to pomocí následujících úvah.

Jelikož úlohy s neomezenou neurčitostí nedávají valný smysl, stačí uvažovat pouze omezená rozdělení, a tedy jediné, které přichází v úvahu, je rovnoměrné (ať již diskrétní, či spojité na nějakém intervalu). Budeme tedy předpokládat, že neurčitost je reprezentována dvourozměrným náhodným vektorem $\boldsymbol{b}$, jehož rozdělení je rovnoměrné na obdélníku $[d_1, h_1] \times [d_2, h_2]$.

Protože v našem problému květinářky máme neurčitost zastoupenu pouze v jednoduché formě a to jen v pravé straně (tedy c a A jsou konstantní), navíc každý z prvků neurčitosti se vyskytuje v samostatné podmínce, dostaneme tak pro $i = 1, 2$ tři možnosti:

1. $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} > h_i$
2. $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} = \xi, \; d_i < \xi \leq h_i$
3. $\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \leq d_i$

První možnost je očividně nepřijatelná, neboť jde proti samotné definici náhodné veličiny b_i. Druhá varianta pak působí potíže při samotném plnění tvrdých podmínek. Veličina b_i může totiž nabýt hodnoty v rámci intervalu (d_i, ξ), jinými slovy s nenulovou pravděpodobností může dojít k porušení tvrdé podmínky.

Jedinou akceptovatelnou variantou je tedy třetí možnost, což úlohu:

$$
\begin{aligned}
\max \;\; & (c - p)\,(x1 + x_2) - cz \\
s.t. \;\; & x_1 - s \leq \omega_1 \\
& x_2 + s - z \leq \omega_2 \\
& x_1, x_2, s, z \geq 0,
\end{aligned}
$$

přetváří do podoby:

$$\begin{aligned} \max\ & (c-p)(x1+x_2)-cz \\ s.t.\ & x_1 - s \le d_1 \\ & x_2 + s - z \le d_2 \\ & x_1, x_2, s, z \ge 0, \end{aligned}$$

Za jiné situace sice nelze garantovat splnění tvrdých podmínek, avšak pokud bychom uvolnili požadavky (a stačilo by nám splnit jen některé realizace neurčitosti), pak by bylo možné využít metod neurčitosti omezené mohutností a uvažovat neurčitou množinu například ve tvaru:

$$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) | \omega_i \in (\mathbb{E}_{b_i} - \theta\sigma_{b_i}, \mathbb{E}_{b_i} + \theta\sigma_{b_i}) \quad i = 1, 2\},$$

pro nějaké $\theta \ge 0$. Za těchto podmínek by již bylo možné diskutovat i nad aplikacemi jiných rozdělení poptávek.

4.6 Aplikace diskrétní optimalizace

Nejprve si uvedeme úlohu květinářky (dle 4.1) s mírnou úpravou:

$$\begin{aligned} \max\ & (c-p)(x_1+x_2)-cz \\ s.t.\ & x_1 - s - \omega_1 \le 0 \\ & x_2 + s - z - \omega_2 \le 0 \\ & x_1, s, x_2, z \ge 0 \\ & \forall \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2)^T \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

V takto definované úloze jsou jak proměnné, tak i prvky neurčitosti přirozená čísla. Jelikož chceme úlohu řešit v souladu s postupem uvedeným v oddíle 3.2.5, bude ve tvaru:

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{y} \\ s.t.\ & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{0} \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathcal{U} \\ & y_j \in \mathcal{Z}, y_j \ge 0 \quad j = 1, \ldots, 4, \end{aligned} \tag{4.8}$$

což v našem případě znamená:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y} = (x_1, x_2, s, z, 1, 1)^T \\ & \boldsymbol{q} = (c-p, c-p, 0, -p, 0, 0)^T \\ & \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -\omega_2 \end{pmatrix} \\ & J_1 = \{5\} \qquad J_2 = \{6\}. \end{aligned}$$

Neurčitou množinu $\mathcal{U}$ budeme uvažovat ve tvaru (4.4) (viz oddíl 4.3):

$$\mathcal{U} = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathcal{Z}_2 |\ \omega_i \in (\bar{\omega}_i - \hat{\omega}_i, \bar{\omega}_i + \hat{\omega}_i), \omega_i \ge 0 \quad i = 1, 2\}. \tag{4.9}$$

Nyní přistoupíme k samotné formulaci úlohy pro diskrétní robustní optimalizaci a to nejprve na tvar (3.8) dle postupu, který použil Soyster (viz [11] - oddíl 3.1.3). Množiny $J_k,\ k=1,2$ máme jednoprvkové, a tedy jednotlivá $\Gamma_k,\ k=1,2$ jsou z intervalu $[0,1]$. Neurčitost máme pouze v matici Q, v jiných částech úlohy se nevyskytuje a rovněž veškeré proměnné včetně ω_i jsou nezáporná celá čísla.

Po převedení úlohy (4.8) na tvar (3.8) (dle Soysterova přístupu) dostáváme:

$$\begin{aligned} \max\ & (c-p)(x_1+x_2) - pz \\ s.t.\ & x_1 - s \le \bar{\omega}_1 + \hat{\omega}_1 \\ & x_2 + s - z \le \bar{\omega}_2 + \hat{\omega}_2 \\ & x_1, s, x_2, z \ge 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Neurčitost v pravé straně byla nahrazena horní mezí intervalů, což v důsledku znamená pojištění proti všem uvažovaným alternativám. Toto je značně konzervativní přístup, neboť vůbec nezohledňuje strukturu množiny neurčitosti. Lepší variantou se jeví využití úrovně zajištění neurčitosti a to pomocí metodologie, kterou uvedli Bertsimas a Sim (viz [5],[6] - oddíly 3.1.3 a 3.2.5).

Nyní budeme úlohu (4.8) převádět na na tvar (3.54), tedy na tvar, který uvažovali Bertsimas a Sim. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \max\ & \boldsymbol{m}^T \boldsymbol{x} \\ s.t.\ & \max_{\boldsymbol{\theta} \ge 0} \left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \Lambda(\bar{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\theta}) \right] \le 0 \\ & \boldsymbol{x} = (x_1, s, x_2, z) \ge \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} &= (c-p, c-p, 0, -p)^T \\ \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \Lambda(\bar{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\theta}) &= \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_1\theta_1 \\ \Gamma_2\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max\{\hat{\omega}_1 - \theta_1, 0\} \\ \max\{\hat{\omega}_2 - \theta_2, 0\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vhodnou volbou parametrů $\boldsymbol{\Gamma}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \hat{\boldsymbol{\omega}}$ nyní můžeme volit míru zajištění úlohy proti neurčitosti a již se jedná pouze o úlohu určitého programování. Avšak co se jednotlivých Γ_i týče, máme na výběr pouze hodnoty v rámci intervalu $[0,1]$, neboť všechny množiny J_i jsou jednoprvkové.

4.7 Anticipativní robustifikovaná varianta

Jedním ze způsobů, jakým dosáhnout lepší řešitelnosti, je využití metodologie anticipativní robustifikace (viz oddíl 3.2.6). V této úloze však nestačí rozlišit pouze přizpůsobitelné a nepřizpůsobitelné proměnné, neboť máme celkem tři úrovně, a tedy některé proměnné jsou vůči x_1 přizpůsobitelné, ale vůči z již ne, v našem případě se jedná o s a x_2. Toto si nazveme *druhosledová anticipativnost* (dále již jen DSA).

Vyjdeme-li z úlohy AR (viz (3.59)) a vezmeme-li v potaz DSA, máme úlohu:

$$\begin{aligned} &\max_{u,E} E \\ &s.t.\ pu + \Lambda(\boldsymbol{\omega}) \geq E \\ &\quad \forall \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{b}] \in \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

kde výraz $\Lambda(\boldsymbol{\omega})$ je označením pro:

$$\begin{aligned} \Lambda(\boldsymbol{\omega}) = \max_{\boldsymbol{v},G}\ & G \\ s.t.\ & \boldsymbol{q}^T \boldsymbol{v} + rw \geq G \\ & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{R}w \geq \boldsymbol{b} - Pu \\ & \forall \omega = [\boldsymbol{b}] \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Pro náš problém květinářky pak máme:

$$\begin{aligned} & u = x_1, \quad \boldsymbol{v} = (s, x_2)^T \quad w = z \\ & \boldsymbol{b} = (\omega_1 - x_1, \omega_2)^T \\ & p = (c - p), \quad \boldsymbol{q} = (0, c - p)^T, \quad r = (-p) \\ & P = 0, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = (0, -1)^T. \end{aligned}$$

Důsledkem DSA je skutečnost, že se proměnné, jež jsou pevné v určité úrovni úlohy, promítnou do pravé strany při optimalizaci těch přizpůsobitelných v jiné úrovni. V případě problému květinářky pak lze díky DSA učinit ještě jeden závěr a to, že proměnná z již (ve "své" úrovni) nabývá hodnoty podle předchozích realizací ostatních proměnných, a tedy ji lze počítat jako $z = x_2 + s - \omega_2$ (viz začátek kapitoly 4).

4.8 Affinně anticipativní robustifikovaná varianta

Postup uvedený v předchozím oddílu je spíše jakýmsi návodem či myšlenkou, jak s neurčitostí nakládat. Pro samotnou aplikaci je pak vhodnější využít přístup přes afinně anticipativní robustifikovanou variantu (viz 3.2.7). Zvolíme postup v souladu s příkladem uvedeným v [1, str. 367]. Ten pracuje s úlohou v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}
&\min_{p_i(t),v(t),F} F \\
&s.t. \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I} c_i(t)p_i(t) \leq F \\
&\qquad v(t+1) = v(t) + \sum_{i=1}^{I} p_i(t) - d_t \quad t = 1,\dots,T \\
&\qquad 0 \leq p_i(t) \leq P_i(t) \quad i = 1,\dots,I \; t = 1,\dots,T \\
&\qquad \sum_{t=1}^{T} p_i(t) \leq Q_i \quad i = 1,\dots,I \\
&\qquad V_{min} \leq v(t) \leq V_{max} \quad t = 2,\dots,T+1,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

kde T je celkový počet časových úseků, I celkový počet výroben jednoho konkrétního výrobku, je zde počítán sklad, kam výrobny dodávají svou produkci a odkud je uspokojována poptávka a dále jsou:

- d_t ... jednotlivé poptávky, které je nutné uspokojit
- $v(t)$ ... objem zboží ve skladu na začátku úseku t ($v(1)$ je dáno předem)
- $p_i(t)$ ... množství produktu vyrobeného výrobnou i během úseku t
- $P_i(t)$ ... maximální produkční kapacita výrobny i
- $c_i(t)$ ... cena výroby jednoho produktu ve výrobně i během úseku t
- V_{min}, V_{max} ... omezení kapacity skladu
- Q_i ... celková maximální produkce výrobny i (celkem přes všechny časové úseky)
- $\mathcal{U}$ ... množina neurčitosti, kam spadají poptávky $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{\omega}$

V úloze květinářky sice P_i, Q_i a V_{max} nejsou implicitně uvažovány, ale z důvodu potřeby dodatečného omezení proměnných zachováme prvek ${Q_i}$[4]. Dále se jedná o maximalizační úlohu, platí: $V_{min} = 0, T = 2, I = 1$ a abychom předešli problémům ve značení, označíme cenu nákupu květin jako n a cenu prodeje jako m, takže po úpravě (4.13) získáme:

$$
\begin{aligned}
\max_{p(t),v(t),G} \; & G \\
s.t. \; & \sum_{t=1}^{2} c(t)p(t) - nv(3) \geq G \\
& v(t+1) = v(t) + p(t) - d_t \quad t = 1,2 \\
& \sum_{t=1}^{2} p(t) \leq Q \\
& v(t), p(t) \geq 0 \quad t = 1,2 \\
& \boldsymbol{d} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Hodnoty jednotlivých parametrů jsou uvedeny v tabulce 4.1, ale zatím je dosazovat nebudeme.

t	**1**	**2**	**3**
d_t	ω_1	ω_2	0
$v(t)$	0	s	z
$p(t)$	x_1	x_2	0
$c(t)$	(n-m)	(n-m)	0

Tabulka 4.1: Parametry květinářky

Nyní postupně úlohu (4.14) rozvineme a upravíme na tvar AAR. Nejprve si lépe vyjádříme rekurentní předpis $v(t)$:

$$
\begin{aligned}
\max_{p(t),G} \; & G \\
s.t. \; & \sum_{t=1}^{2} c(t)p(t) - n\left(v(1) + \sum_{t=1}^{2} p(t) - \sum_{t=1}^{2} d_t\right) \geq G \\
& v(1) + \sum_{s=1}^{t} p(s) - \sum_{s=1}^{t} d_s \geq 0 \quad t = 1,2 \\
& \sum_{t=1}^{2} p(t) \leq Q \\
& p(t) \geq 0 \quad t = 1,2 \\
& \boldsymbol{d} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

[4]Tato potřeba vyplynula během aplikace uvedené v kapitole 5, neboť bez ní neměla úloha řešení.

V tuto chvíli přichází na scénu affinní rozšíření proměnných $p(t)$ ve tvaru: $a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r$. Předpokladem je, že rozhodnutí $p(t)$ nastává vždy na začátku úseku t a je založeno na základě již známých d_r pro r z nějaké podmnožiny $I_t \subset \{1,\ldots,t\}$ (bez újmy na obecnosti lze předpokládat závislost na všech $r \in I_t$).

Autoři v [1] uvažují hned několik různých podob množiny I_t a vše závisí na úrovni, jakou část předchozích dat hodláme v problému uvažovat. Možnosti jsou od úplné ($\{1,\ldots,t\}$), kdy pracujeme dokonce i se současnými hodnotami, až po různě zpožděné. V našem příkladu využijeme nejintuitivnější z těchto variant a to $\{1,\ldots,t-1\}$ (využití všech informací až do předchozího časového úseku). Dále rovněž pro zjednodušení dosadíme $v(1) = 0$ a získáme tedy:

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{a},G} G \\
&s.t. \sum_{t=1}^{2} c(t)\left(a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r\right) - n\left[\sum_{t=1}^{2}\left(a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r\right) - \sum_{t=1}^{2} d_t\right] \geq G \\
&\sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0 + \sum_{r\in I_s} a_s^r d_r\right) - \sum_{s=1}^{t} d_s \geq 0 \quad t = 1,2 \\
&a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r \geq 0 \quad t = 1,2 \\
&\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + \sum_{t=1}^{2}\sum_{r\in I_t} a_t^r d_r \leq Q \\
&\boldsymbol{d} \in \mathcal{U}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Protože výraz $\sum_{t=1}^{2}\sum_{r\in I_t} a_t^r d_r$ je tvořen pouze členem $a_2^1 d_1$, lze (4.16) upravit následovně:

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{a},G} G \\
&s.t. \sum_{t=1}^{2}(c(t)-n)\,a_t^0 + \sum_{t=1}^{2}\left[(c(t)-n)\sum_{r\in I_t}(a_t^r d_r) - \frac{n}{c(t)-n} d_t\right] \geq G \\
&\sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0\right) + \sum_{s=1}^{t} d_s\left[\sum_{s\leq t, r\in I_s}(a_s^r) - 1\right] \geq 0 \quad t = 1,2 \\
&a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r \geq 0 \quad t = 1,2 \\
&\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + a_2^1 d_1 \leq Q \\
&\boldsymbol{d} \in \mathcal{U}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Pro další zjednodušení si stačí uvědomit, že $c(t) = m - n$, tj.

$$c(t) - n = m - 2n \quad t = 1, 2.$$

Za pomoci tohoto dosazení zjednodušíme (4.17) na:

$$\begin{aligned}
&\max_{\boldsymbol{a},G} G && (4.18)\\
&s.t.\, (m-2n)\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + (m-2n)\sum_{t=1}^{2} d_t \left[\sum_{t<s\leq 2}\left(a_s^t\right) + \frac{n}{m-2n}\right] \geq G\\
&\quad \sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0\right) + \sum_{s=1}^{t} d_s \left[\sum_{s<r\leq 2}\left(a_r^s\right) - 1\right] \geq 0 \quad t = 1, 2\\
&\quad a_t^0 + \sum_{r\in I_t} a_t^r d_r \geq 0 \quad t = 1, 2\\
&\quad \sum_{t=1}^{2} a_t^0 + a_2^1 d_1 \leq Q\\
&\quad \boldsymbol{d} \in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Nyní si definujeme dodatečné proměnné:

$$\alpha_t = \sum_{t<s\leq 2}\left(a_s^t\right) + \frac{n}{m-2n} \qquad \beta_t = \sum_{s<r\leq 2}\left(a_r^s\right) - 1 \quad t = 1, 2.$$

Jelikož naším hlavním cílem je převedení na úlohu lineárního programování, využíváme pro omezení všech výše uvedených proměnných tři další, jež volíme následovně:

$$|\alpha_t| \leq \delta_t \quad |\beta_t| \leq \eta_t \quad |a_t^s| \leq \rho_t^s \quad t = 1, 2\ s \in I_t.$$

Tímto z úlohy (4.18) získáme:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{a},G} G \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
s.t.\,(m-2n)\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + (m-2n)\sum_{t=1}^{2} d_t\alpha_t &\geq G\\
\sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0\right) + \sum_{s=1}^{t} d_s\beta_t \geq 0 \quad t &= 1,2\\
a_t^0 + \sum_{s\in I_t} a_t^s d_s \geq 0 \quad t &= 1,2\\
\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + a_2^1 d_1 &\leq Q\\
\alpha_t = \sum_{t<s\leq 2}\left(a_s^t\right) + \frac{n}{m-2n} \quad -\delta_t \leq \alpha_t \leq \delta_t \quad t &= 1,2\\
\beta_t = \sum_{s<r\leq 2}\left(a_r^s\right) - 1 \quad -\eta_t \leq \beta_t \leq \eta_t \quad t &= 1,2\\
-\rho_t^s \leq a_t^s \leq \rho_t^s \quad t = 1,2 \; s &\in I_t\\
\boldsymbol{d} &\in \mathcal{U}.
\end{aligned}$$

Pro další postup budeme uvažovat symetrickou variantu množiny $\mathcal{U}$ (viz (4.3)):

$$\mathcal{U} = \times_{i=1}^{2}\left(\bar{\omega}_i - D_i * z_i, \bar{\omega}_1 + D_i * z_i\right)\ \text{, kde}\ \ |z_i| \leq 1 \quad i = 1,2$$

Jednoduchou úpravou si tuto množinu můžeme vyjádřit v následujícím tvaru:

$$\mathcal{U} = \times_{i=1}^{2}\left(\bar{\omega}_i(1-\theta), \bar{\omega}_i(1+\theta)\right)\ \text{, kde}\ \ \theta \in [0,1] \tag{4.20}$$

Toto nám umožní, spolu s již uvedenými úvahami pro neurčitost omezenou mohutností (viz oddíl 3.1.3), aplikovat následující lemma (viz [1, str.369]):

Lemma 12. *Následující výrazy jsou ekvivalentní:*

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T} d_t x_t \leq y, \quad \forall d_t \in \left[d_t^*\left(1-\theta\right), d_t^*\left(1+\theta\right)\right]\\
&\sum_{t:x_t<0} d_t^*\left(1-\theta\right)x_t + \sum_{t:x_t>0} d_t^*\left(1+\theta\right)x_t \leq y\\
&\sum_{t=1}^{T} d_t^* x_t + \theta\sum_{t=1}^{T} d_t^*\left|x_t\right| \leq y
\end{aligned}$$

A obdobně:

$$\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{T} d_t x_t \geq y, \quad \forall d_t \in \left[d_t^*\left(1-\theta\right), d_t^*\left(1+\theta\right)\right]\\
&\sum_{t=1}^{T} d_t^* x_t - \theta\sum_{t=1}^{T} d_t^*\left|x_t\right| \geq y
\end{aligned}$$

Takto tedy získáme výslednou úlohu:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{a},G} G \tag{4.21}$$
$$\begin{aligned}
s.t.\, (m-2n)\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + (m-2n)\sum_{t=1}^{2}\bar{\omega}_t\alpha_t - (m-2n)\,\theta\sum_{t=1}^{2}\bar{\omega}_t\delta_t &\geq G\\
\sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0\right) + \sum_{s=1}^{t}\bar{\omega}_s\beta_t - \theta\sum_{s=1}^{t}\bar{\omega}_s\eta_t \geq 0 \quad t = 1,2&\\
a_t^0 + \sum_{s\in I_t} a_t^s\bar{\omega}_s - \theta\sum_{s\in I_t}\bar{\omega}_s\rho_t^s \geq 0&\\
\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + a_2^1 d_1^* + \theta\rho_2^1 d_1^* \leq Q&\\
\alpha_t = \sum_{t<s\leq 2}\left(a_s^t\right) - \frac{n}{m-2n} \quad -\delta_t \leq \alpha_t \leq \delta_t \quad t = 1,2&\\
\beta_t = \sum_{s<r\leq 2}\left(a_r^s\right) - 1 \quad -\eta_t \leq \beta_t \leq \eta_t \quad t = 1,2&\\
-\rho_2^1 \leq a_2^1 \leq \rho_2^1.&
\end{aligned}$$

Úloha (4.21) je ekvivalentní úlohou lineárního programování k affinně anticipativní robustifikované úloze (4.19). Jejím největším přínosem je absence neurčitosti, z níž zbylo pouze θ, které lze volit dle toho, jak moc chceme úlohu pojistit proti neurčitosti (což v jistém smyslu odpovídá úrovni zajištění neurčitosti Γ - viz oddíl 4.3).

Kapitola 5

Výpočetní aplikace

V této kapitole srovnáme kvality tří různých aplikací problému květinářky z předchozí kapitoly spolu s původní robustifikovanou úlohou. Výpočty provedeme v softwaru Matlab a výsledky graficky srovnáme.

Ačkoliv princip neurčitosti je neměnný, byly pro jednotlivé úlohy neurčité množiny vyjadřovány v různých podobách, a tedy je zapotřebí definici sjednotit. Podobné úsilí je rovněž zapotřebí v rámci značení proměnných a jiných prvků rovnic[1] a pouze pak bude možné tyto úlohy srovnávat.

Pro potřeby snazší programovatelnosti zvolíme neurčitou množinu ve tvaru (4.20):

$$\mathcal{U} = \times_{i=1}^{2} \left[\bar{\omega}_i(1-\theta), \bar{\omega}_i(1+\theta)\right] \text{ , kde } \theta \in [0,1] \tag{5.1}$$

Rovněž označíme:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= (x_1, s, x_2, z) \\ \boldsymbol{m} &= (c-p, c-p, 0, -c)^T \\ \boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

a jako nosič vektoru $\mathcal{X}$ stále uvažujeme nezáporné prvky prostoru $\mathbb{R}^4$.

[1] Mírné odchylky vznikly snahou předejít konfliktům ve značení v rámci jednotlivých odvození.

5.1 Uvažované úlohy

Níže jsou uvedeny srovnávané úlohy již ve sjednoceném tvaru.

1. Původní robustifikovaná úloha (viz(4.1), resp. (4.7)):

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{\omega} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathcal{U}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

2. Soysterova varianta (viz (4.10)):

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t.\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq (1+\theta)\,\bar{\boldsymbol{\omega}} \\ &\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

3. Bertsimasova-Simova varianta (viz (4.11))

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{m}^T\boldsymbol{x} \\ &s.t. \max_{\boldsymbol{\xi}\geq 0} \left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \Lambda\left(\bar{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\xi}\right)\right] \leq 0 \\ &\quad \Lambda\left(\bar{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\xi}\right) = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_1\xi_1 \\ \Gamma_2\xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \max\left\{\theta\bar{\omega}_1 - \xi_1, 0\right\} \\ \max\left\{\theta\bar{\omega}_2 - \xi_2, 0\right\} \end{pmatrix} \\ &\quad \Gamma_i \in [0,1]\ \ i = 1,2 \\ &\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

4. Afinně anticipativní robustifikovaná varianta (viz (4.21)):

$$\begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{a},G} G \\ &s.t.\ (c-2p)\sum_{t=1}^{2} a_t^0 + (c-2p)\sum_{t=1}^{2} \bar{\omega}_t\alpha_t - (c-2p)\,\theta\sum_{t=1}^{2}\bar{\omega}_t\delta_t \geq G \\ &\quad \sum_{s=1}^{t}\left(a_s^0\right) + \sum_{s=1}^{t}\bar{\omega}_s\beta_t - \theta\sum_{s=1}^{t}\bar{\omega}_s\eta_t \geq 0 \quad t = 1,2 \\ &\quad a_t^0 + \sum_{s\in I_t} a_t^s\bar{\omega}_s - \theta\sum_{s\in I_t}\bar{\omega}_s\rho_t^s \geq 0 \\ &\quad \sum_{t=1}^{2} a_t^0 + a_2^1 d_1^* + \theta\rho_2^1 d_1^* \leq Q \\ &\quad \alpha_t = \sum_{t<s\leq 2}\left(a_s^t\right) - \frac{p}{c-2p} \qquad -\delta_t \leq \alpha_t \leq \delta_t \quad t = 1,2 \\ &\quad \beta_t = \sum_{s<r\leq 2}\left(a_r^s\right) - 1 \qquad -\eta_t \leq \beta_t \leq \eta_t \quad t = 1,2 \\ &\quad -\rho_2^1 \leq a_2^1 \leq \rho_2^1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

5.2 Vstupní parametry

Pro srovnání výsledků jednotlivých úloh si zavedeme:

$$
\begin{aligned}
&Q = (\omega_1 + \omega_2)\,(1 + \theta) \\
&c = 95 \qquad p = 40 \\
&\boldsymbol{\omega} = (250, 215)\,.
\end{aligned}
$$

Ve všech grafech v této sekci je čerchovanou čarou vyznačena hodnota zisku při nulové neurčitosti, tedy pro $\boldsymbol{\theta} = \bar{\boldsymbol{\theta}} = (250, 215)$ s cenou $m - n = 95 - 40 = 55$.

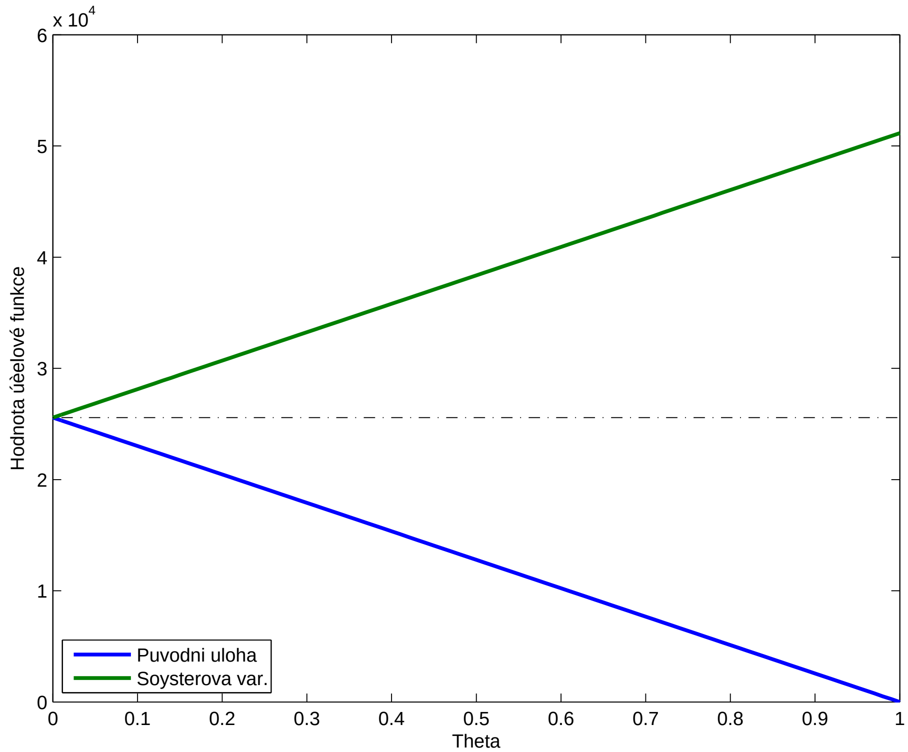
Pro další srovnávání je zapotřebí zdůraznit, že úloha (5.5) je z definice jiným typem problému než zbývající tři. Vychází totiž z poněkud odlišných principů, což je patrné například na skutečnosti, že pro jinou hodnotu penalizace neprodaných květin než $p < \frac{c}{2}$ není úloha řešitelná, kdežto zbylé tři úlohy nemají řešení naopak pro jinou penalizaci nežli c.

V následujících sekcích uvedeme srovnání základní úlohy vždy s jednou z tří aplikací, ale srovnávání mezi těmito aplikacemi uvažováno nebude. V případě úloh (5.3) a (5.4) není srovnání ani zapotřebí, neboť je z grafů na první pohled patrné.

Každý z níže uvedených grafů bude zobrazovat hodnoty účelové funkce pro různé hodnoty parametru θ ve tvaru $\frac{j}{100}$ pro $j = 0, 1, \ldots, 100$ a v případě (5.4) pak budeme uvažovat i různé hodnoty parametru Γ_k $(k = 1, 2)$ a to $\frac{j}{5}$ pro $j = 0, 1, \ldots, 5$.

5.3 Srovnání se Soysterovou variantou

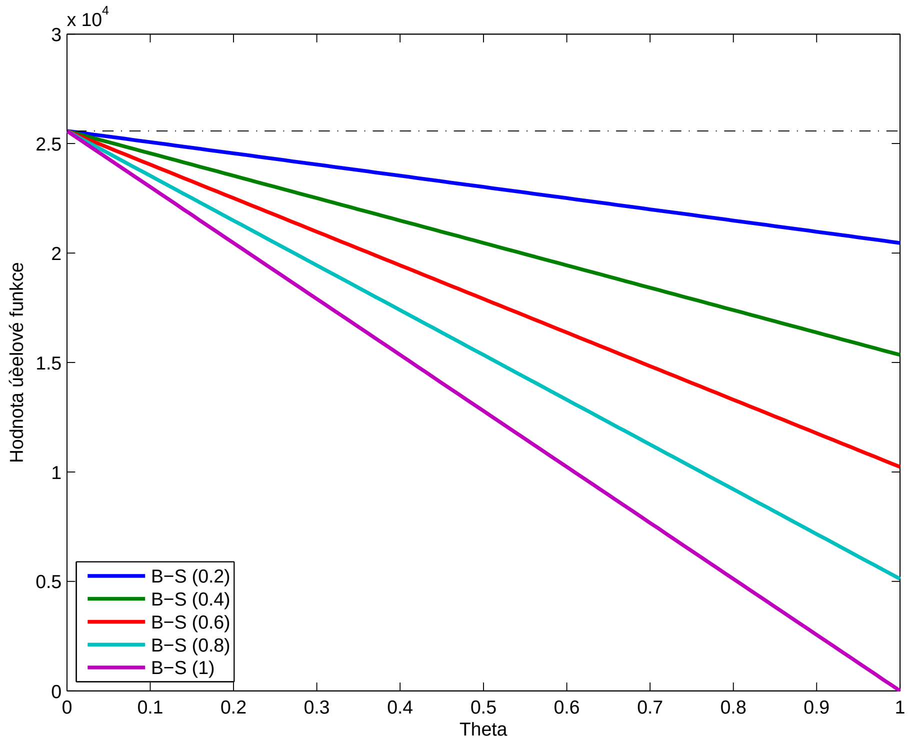
Z grafu na obr. 5.1 je patrné, že se hodnota účelové funkce Soysterovy varianty pohybuje opačným směrem než hodnota původní robustifikované úlohy. Toto je způsobeno tím, že každá z úloh uvažuje jinou mez intervalu neurčitosti $\mathcal{U}$.



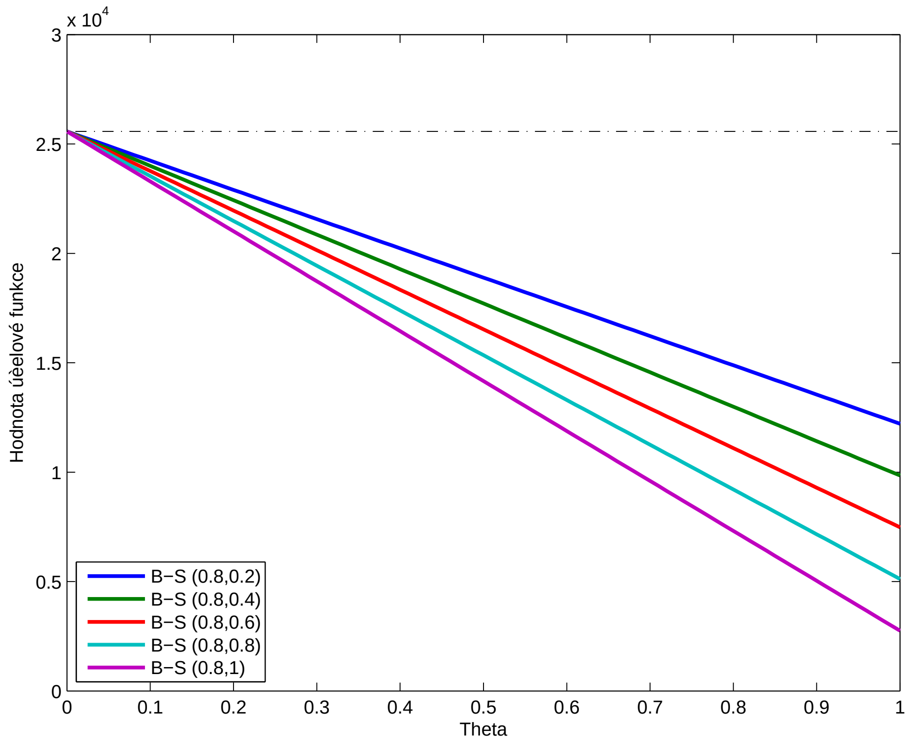
Obrázek 5.1: Srovnání původní robustifikované úlohy a Soysterovy varianty

5.4 Srovnání s Bertsimasovou-Simovou variantou

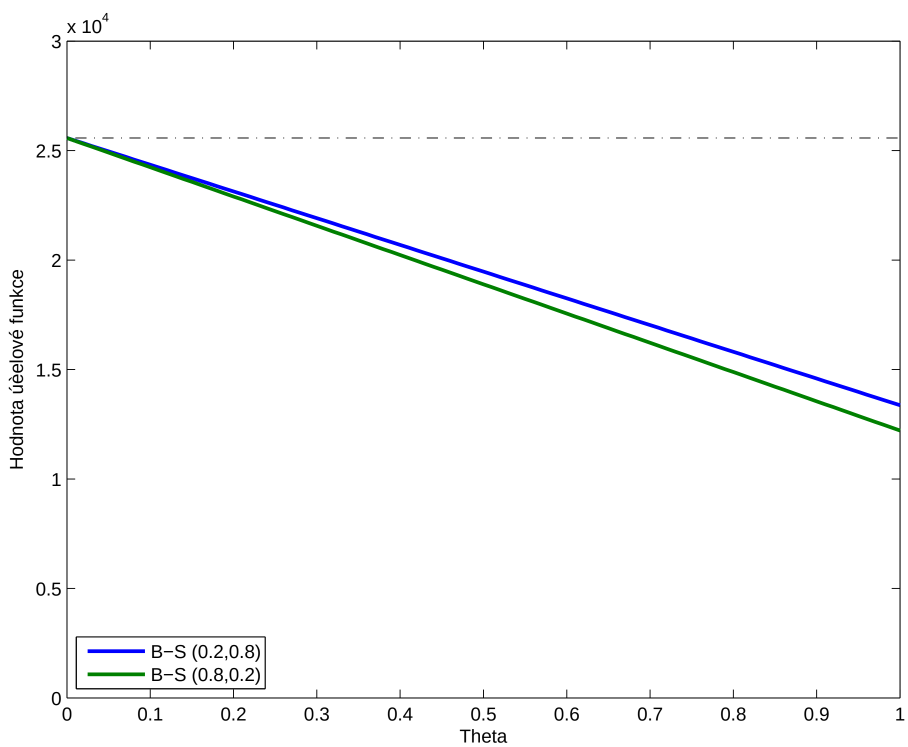
Výsledný zisk při použití této metody značně závisí na volbě úrovně zajištění neurčitosti ve formě parametrů Γ_1, Γ_2, což si ilustrujeme na několika příkladech, které jsou uvedeny níže:



Obrázek 5.2: Srovnání B-S variant pro $\Gamma_1 = \Gamma_2$

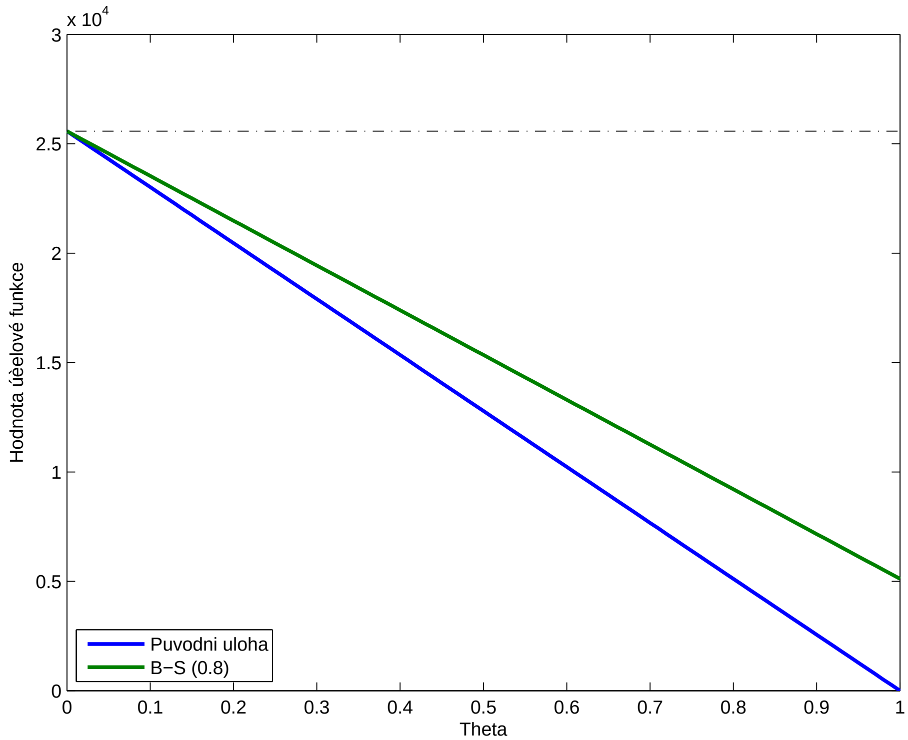


Obrázek 5.3: Srovnání B-S variant pro jeden pevný parametr



Obrázek 5.4: Srovnání B-S variant pro opačné kombinace parametrů

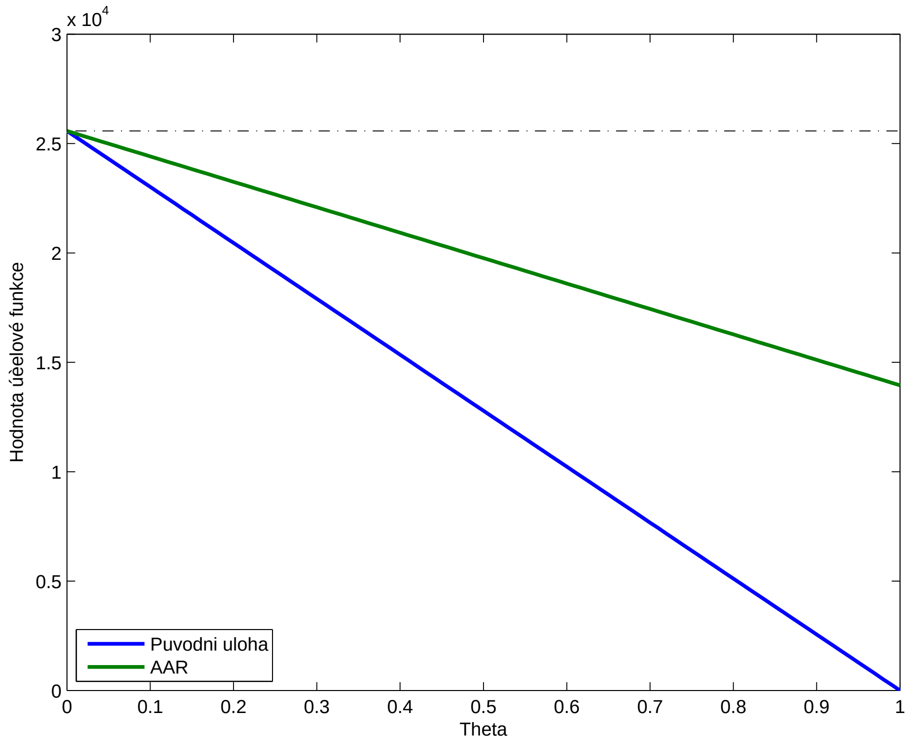
Z grafů na obrázcích 5.2, 5.3 a 5.4 je patrné, že čím vyšší úroveň zajištění neurčitosti zvolíme, tím více se naše řešení blíží původní robustifikované úloze. Pokud však nezvolíme $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, stále budeme dosahovat hodnot vyšších. Toto je ilustrováno na obr. 5.5, který je uveden níže.



Obrázek 5.5: Srovnání původní robustifikované úlohy a B-S varianty

5.5 Srovnání s affinně anticipativní variantou

Na obrázku níže je patrné, že úloha (5.5) dosahuje ve všech ohledech lepších výsledků než původní robustifikovaná úloha.



Obrázek 5.6: Srovnání původní robustifikované úlohy a AAR varianty

5.6 Shrnutí

Experimentální výsledky potvrdily to, co bylo již dříve v práci mnohokrát zmíněno, tj. samotný kámen úrazu všech robustifikačních postupů, a tedy skutečnost, že struktura neurčité množiny $\mathcal{U}$ má zásadní vliv na podobu (dokonce i existenci) řešení.

Aplikace v této kapitole pracuje s polyedrickou neurčitostí ve formě intervalů o různých délkách (v závislosti na θ) od vysloveně bodových až po $[0, 2\bar{\omega}_i]$. Čím jsme uvažovali interval delší, tím byl pokles hodnot účelových funkcí (a tedy zisku) výraznější. Pro největší variantu jsme dokonce dostali i nulový zisk (úloha (5.4) pro stejné parametry $\Gamma_i = 1$).

Závěrem z těchto pozorování je ve své podstatě důrazné varování k opatrnosti při konstrukci neurčitých množin, neboť i malé nesrovnalosti ve struktuře mohou vést k velkým ztrátám či problémům při řešení, a tedy důslednou volbou lze předejít mnoha problémům, které by jinak mohly být těžko překonatelné.

Závěr

Robustní optimalizace zahrnuje širokou škálu metod a je cennou alternativou ke stochastickému programování. Její podstatou je studium tzv. tvrdých podmínek, což je označení pro ty, které musí být splněny bez ohledu na podobu řešení daného problému. Robustní metodologie staví na práci se strukturou tzv. množiny neurčitosti, tedy množiny, která nahrazuje veškerá pravděpodobnostní rozdělení sloužící jako základ pro řešení úloh pomocí metod stochastické optimalizace.

Základní snahou v rámci robustní metodologie je hledání vhodného způsobu, kterým je možné úlohy robustní optimalizace pro určité množiny neurčitosti převést na vhodnější tvar s ohledem na jejich řešitelnost. Mnohdy však takový přímočarý postup možný není, a tedy je dalším aspektem hledání vhodných aproximací tak, aby dotyčné úlohy byly řešitelné alespoň přibližně.

Velkou výhodou této metodologie je skutečnost, že na rozdíl od stochastického programování nedochází k porušování podmínek, což je velmi praktické pro aplikace, kde není žádoucí mít (byť i velmi nízkou) pravděpodobnost porušení. Velmi praktickým aspektem je možnost vyjádření robustifikovaných úloh ve tvaru nezávislém na neurčitosti, což je cílem mnohých postupů.

Značným problémem je neřešitelnost úloh se složitější strukturou, neboť mnohdy existují pouze (hrubé) aproximační postupy. Dalším problémem bývá i samotné plnění tvrdých podmínek a tkví v mnohdy přílišné konzervativnosti. Snaha o co nejlepší pokrytí neurčité množiny totiž často působí značné ztráty v hodnotě účelové funkce.

Cílem této práce je proskytnout čtenáři co nejlepší přehled základní terminologie a podkladové teorie robustní optimalizace. Jelikož struktura hraje při řešení klíčovou roli, byla podstatná část této práce věnována výčtu různých typů úloh a neurčitých množin. Základní postupy byly v dalších částech práce pro ilustraci aplikovány na obecně známém problému květinářky, aby bylo co nejvíce usnadněno pochopení problematiky.

Práce je určena čtenářům již zběhlým v optimalizaci, kteří by si rádi rozšířili obzory, a bere si za cíl usnadnit pronikání do oblasti robustní optimalizace. Považoval bych za úspěch, kdyby tato práce posloužila jako odrazový můstek těm, kteří by rádi prohloubili své chápání v oboru optimalizace.

Literatura

[1] A. Ben-Tal, A. Goryashko, E. Guslitzer a A. Nemirovski. Adjustable robust solutions of uncertain linear programs. *Mathematical Programming*, 99(2):351–376, 2004-3-1.

[2] A. Ben-Tal a A. Nemirovski. Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4):769–805, 1998-11-01.

[3] A. Ben-Tal a A. Nemirovski. Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1):1–13, 1999.

[4] D. Bertsimas, D. Pachamanova a M. Sim. Robust linear optimization under general norms. *Operations Research Letters*, 32(6):510–516, 2004.

[5] D. Bertsimas a M. Sim. Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98(1-3):49–71, 2003-9-1.

[6] D. Bertsimas a M. Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53, 2004.

[7] J. Dupačová. Applications of stochastic programming under incomplete information. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 56(1-2):113–125, 1994.

[8] J. Dupačová a P. Lachout. *Úvod do optimalizace*. Matfyzpress, první vydání, 2011.

[9] K.-L. Hsiung, S.-J. Kim a S. Boyd. Tractable approximate robust geometric programming. *Optimization and Engineering*, 9(2):95–118, 2008.

[10] J. M. Mulvey, R. J. Vanderbei a S. A. Zenios. Robust optimization of large-scale systems. *Operations Research*, 43(2):264–281, 1995-03-01.

[11] A. L. Soyster. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5):1154–1157, 1973-09-01.

[12] A. B. Tal, B. Golany, A. Nemirovski, J.-P. Vial, a kol. Supplier-retailer flexible commitments contracts: A robust optimization approach. 2003.

[13] A. Thiele, T. Terry a M. Epelman. Robust linear optimization with recourse. *Rapport technique*, 4–37, 2009.

[14] Berkeley University of California. Eecs instructional and electronics support.

`https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee127a/book/login/thm_schur_compl.html`

.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

zkratka	význam	umístění (případné)
$\mathcal{U}$	neurčitá množina	
$\mathcal{X}$	nosič vektoru proměnných $\boldsymbol{x}$	
$\mathcal{I}$	množina řádkových indexů matice	
$\mathcal{J}$	množina sloupcových indexů matice	
$\mathcal{P}$	rodina úloh neurčitého lineárního programování	kapitola 2
(P)	konkrétní úloha z $\mathcal{P}$	kapitola 2
$(P_{\mathcal{U}})$	robustifikovaná varianta úlohy	kapitola 2
CQP	kónické kvadratické programování	oddíl 3.2.2
$QCQP$	kvadraticky omezené kvadratické programování	oddíl 3.2.2
$Span$	lineární obal	oddíl 3.2.2
R	robustifikovaná úloha	
AR	anticipativní robustifikovaná úloha	
AAR	affinně anticipativní robustifikovaná úloha	
DSA	druhosledová anticipativnost	oddíl 4.7
max	maximum (funkce)	
min	minimum (funkce)	
sup	supremum (funkce)	
$\mathbb{E}_{\mathfrak{p}}^{\alpha}$	střední hodnota náhodného vektoru $\mathfrak{p}$	
	při minimální pravděpodobnosti α	oddíl 3.2.8

Tabulka 5.1: Zkratky a značení použité v práci

Příloha A

Kód programu Matlab

V této kapitole je uveden zdrojový kód, který byl v softwaru Matlab využit pro aplikaci poznatků z této práce. Sekce A.1 obsahuje hlavní tělo programu s deklaracemi všech potřebných proměnných. Sekce A.2, A.3 a A.4 pak uvádějí kódy podsouborů, které hlavní program volá. Jediné části, které byly vynechány, jsou příkazy sloužící k výpisu grafů do souborů (konec kódu v sekci A.1).

A.1 Hlavní soubor

```
mez = -1000000;
om = [250, 215];
ceny = [95, 40];
options = optimset('LargeScale','off');

upper = 100;
Ain = dlmread('mat_1.txt');

for k=0:upper
  theta=k/upper;

  x0 = [mez 0 0 0 0];
  lb = [mez 0 0 0 0];


% Původní robustifikovaná úloha
%==============================
fb = [(-ceny(1)+ceny(2)) 0 (-ceny(1)+ceny(2)) ceny(1)];
Ab = [1 -1 0 0;
      0 1 1 -1];

bb = [(om(1) * (1 - theta)) (om(2) * (1 - theta))];
[~, vysl(1)] = linprog(fb,Ab,bb,[],[],lb,[]);

% Soyster
```

```
%=============================
bs = [(om(1) * (1 + theta)) (om(2) * (1 + theta))];
[~, vysl(2)] = linprog(fb,Ab,bs,[],[],lb,[]);

% Bertsimas a Sim
%=============================
for l = 1:5
    gam = [l/5 l/5];
    [~, out(l)] = fmincon('obj',x0,[],[],[],[],lb,[], ...
                          ,'BS', options, theta, om, ceny, gam);
end;

for i = 1:5
    gam = [0.8 i/5];
    [~, out(i+5)] = fmincon('obj',x0,[],[],[],[],lb,[], ...
                          ,'BS', options, theta, om, ceny, gam);
end;

    gam = [0.2 0.8];
    [~, out(11)] = fmincon('obj',x0,[],[],[],[],lb,[], ...
                          ,'BS', options, theta, om, ceny, gam);

    gam = [0.8 0.2];
    [~, out(12)] = fmincon('obj',x0,[],[],[],[],lb,[], ...
                          ,'BS', options, theta, om, ceny, gam);

    %AAR
    %====================
    Q = (om(1) + om(2))*(1 + theta);
    [Ain, Aeq, b] = matice_v2(ceny, om, theta, Q, Ain);
    f = b(3,1:9);
    i = b(1,:);
    j = b(2,1:2);

    [~,vysl(3)] = linprog(f,Ain,i,Aeq,j,lb,[]);

%Uprava vysledku
%=============================
vysl = - round(vysl);
out = - round(out);

V1(k+1,:) = vysl; %base, soyster, AAR
V2(k+1,:) = out; %B-S (stejne), B-S(fix), B-S (prohozene)

end;
```

A.2 Soubor obj.m

```
function f = obj(x, ~, ~, ~, ~)
f = x(1);
```

A.3 Soubor BS.m

```
function [c, ceq] = BS(x, theta, om, ceny, gam)
A = [-1 -1];
ylb = [0 0];

%maximalizační podmínky - první
f1 = [gam(1) 1];
b1 = - theta * om(1);
[~, val1] = linprog(f1,A,b1,[],[],ylb,[]);

%maximalizační podmínky - druhá
f2 = [gam(2) 1];
b2 = - theta * om(2);
[~,val2] = linprog(f2,A,b2,[],[],ylb,[]);

% nonlinear inequality constraints
 c = [ceny(1) * x(5) - (ceny(1)-ceny(2)) * x(2) -
               - (ceny(1)-ceny(2)) * x(4) - x(1);
     x(2) - x(3) - om(1)  + val1;
     x(3) + x(4) - x(5) - om(2) + val2];

ceq = [];
```

A.4 Soubor matice.m

```
function [N1, N2, N3] = matice(ceny, om, theta,Q,Nin)
A = ceny(1) - (2*ceny(2));

% inequalities
%========================
M = Nin;

M(1,2) = -A;
M(1,3) = -A;
M(1,6) = - om(1) * A;
M(1,7) = theta * om(1) * A;

M(2,8) = -om(1);
M(2,9) = theta * om(1);

M(3,8) = -om(1);
```

```
M(3,9) = theta * om(1);

M(4,4) = -om(1);
M(4,5) = theta * om(1);

M(5,4) = om(1);
M(5,5) = theta * om(1);

% equalities
%=========================
N(1:2, 1:9) = 0;

N(1,4) = -1;
N(1,6) = 1;
N(2,4) = 1;
N(2,8) = -1;

% other
%=========================
P(1, 1:12) = 0;
P(2, 1:2) = 0;
P(3, 1:9) = 0;

P(1,1) = ceny(2) * om(2) * (1 - theta);
P(1,3) = - (1 + theta) * om(2);
P(1,5) = Q;

P(2,1) = ceny(2)/A;
P(2,2) = 1;

P(3,1) = 1;

N1 = M;
N2 = N;
N3 = P;
```