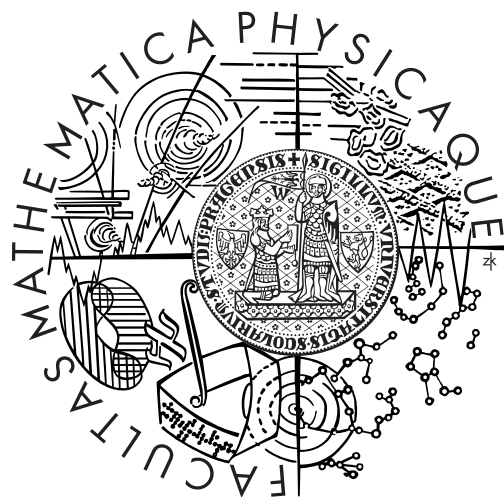


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko–fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Česenek

Nespojitá časoprostorová Galerkinova metoda pro řešení  
nestacionárních konvektivně–difuzních rovnic

Katedra numerické matematiky  
Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.  
Studijní obor: Výpočtová matematika

Rád bych tímto způsobem poděkoval zejména panu prof. RNDr. Miloslavu Feistauerovi, DrSc. za poskytnuté rady a materiály, za cenné připomínky a odborné vedení. Velký dík patří také mým rodičům za neutuchající podporu během studia.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 17. dubna 2006

Jan Česnek

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Formulace spojitého problému</b>	<b>6</b>
2.1	Nelineární problém . . . . .	6
2.2	Lineární problém . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Diskretizace</b>	<b>10</b>
3.1	Nespojitá Galerkinova metoda pro nelineární problém . . . . .	10
3.2	Nespojitá Galerkinova metoda pro lineární problém . . . . .	16
3.3	Nespojitá Galerkinova časoprostorová diskretizace . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Odhad chyby</b>	<b>24</b>
4.1	Odhad chyby semidiskretizace obecného nelineárního problému	24
4.2	Odhad chyby semidiskretizace lineárního problému . . . . .	26
4.3	Odhad chyby úplné diskretizace lineárního problému . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Algoritmizace metody pro lineární problém</b>	<b>28</b>
5.1	Odvození soustav rovnic . . . . .	28
5.2	Numerický výpočet integrálů . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>37</b>
6.1	Popis programu . . . . .	37
6.2	Numerické výsledky . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>44</b>

Název práce: Nespojitá časoprostorová Galerkinova metoda pro řešení nestacionárních konvektivně–difuzních rovnic

Autor: Jan Česenek

Katedra: Katedra numerické matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

e-mail vedoucího: Miloslav.Feistauer@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tato práce se zabývá nespojitou časoprostorovou Galerkinovou diskretizací lineárního nestacionárního konvektivně–difuzního problému. Nespojitá Galerkinova metoda je aplikována zvlášť v prostoru a zvlášť v čase na různých sítích s různými časovými kroky za použití po částech lineárních funkcí jak v prostoru tak i v čase. Tato práce se zaměřuje na numerickou realizaci této metody a pak následně na experimentální ověření teoretického odhadu chyb v  $L^2(L^2)$ -normě. Za použití po částech lineárních funkcí jak v prostoru tak i v čase a za předpokladu, že sítě jsou regulární, je teoretická chyba řádu  $O(h + \tau)$ . Tento řád porovnáme s experimentálním řádem konvergence dosaženým v numerických experimentech.

Klíčová slova: nestacionární konvektivně–difuzní rovnice, nespojitá časoprostorová Galerkinova diskretizace, experimentální řád přesnosti konvergence

Title: Space-time discontinuous Galerkin method for solving nonstationary convection-diffusion problems

Author: Jan Česenek

Department: Department of Numerical Mathematics

Supervisor: Prof. RNDr. Miloslav Feistauer, DrSc.

Supervisor's e-mail address: Miloslav.Feistauer@mff.cuni.cz

Abstract: The paper presents the discontinuous space-time Galerkin finite element discretization of a linear convection-diffusion problem. The discontinuous Galerkin method is applied separately in space and in time using different grids and time steps. The focus of this paper is realizing this method and then verifying by experiments theoretical error estimate in  $L^2(L^2)$ -norm. Using piecewise linear function for the space and on the assumption that grids are regular, we obtain that the error is of order  $O(h + \tau)$ . This order of convergence is compared with experimental order of convergence obtained by numerical experiments.

Keywords: nonstationary convection-diffusion equation, space-time discontinuous Galerkin finite element discretization, experimental order of convergence.

# Kapitola 1

## Úvod

Mnoho problémů z vědy a techniky (např. meteorologie, ochrana prostředí atd.) vyžaduje aplikaci výkonné, robustní, spolehlivé a dostatečně přesné numerické metody. Klasické metody, jako je metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů nebo standartní metoda konečných prvků, neposkytují vždy dostatečně přesnou numerickou realizaci nelineárního singularně perturbovaného systému. Ukazuje se, že vhodná numerická metoda pro zmíněný problém je nespojitá Galerkinova metoda (discontinuous Galerkin finite element method (DGFEM)), která se velmi často používá jako numerický řešič pro řadu takovýchto úloh.

DGFEM používá po částech polynomiální aproximaci hledaného řešení na konečněprvkové síti bez požadavků na spojitost řešení mezi sousedními elementy. Dovoluje nám konstruovat schémata vyšších řádů přesnosti, které jsou vhodné pro aproximaci nespojitých řešení rovnic zákonů zachování nebo pro řešení singularně perturbovaných konvektivně-difuzních problémů, jejichž řešení mají velké gradienty.

Poprvé byla nespojitá Galerkinova metoda uvedena [7] v roce 1973 jako numerická metoda pro neutronovou transportní rovnici. První analýza této metody byla porovedena Le Saintem a Raviartem [6], později byla vylepšena Johnsonem a Pitkärantou [5].

V diskretizaci nestacionárních problémů se často používá tzv. prostorová semidiskretizace. Tzn., že nejprve aplikujeme diskretizaci na prostorové proměnné a čas se zatím nechává spojitý. Tento postup vede na velký systém obyčejných diferenciálních rovnic, který může být numericky řešen pomocí vhodného numerického řešiče (jakým je třeba Runge-Kuttova metoda). Ukazuje se, že pro řešení rovnic mechaniky tekutin je vhodnější aplikovat implicitní nebo semi-implicitní metodu. Bohužel tyto metody mají nízký řád přesnosti v čase.

Často v numerických simulacích problémů, které jsou nestacionární, se

vyžaduje vyšší řád přesnosti nejen v prostoru, ale i v čase. Z tohoto hlediska se zdá být vhodné použít DG (discontinuous Galerkin) diskretizaci jak v prostoru, tak i v čase.

Tato diplomová práce je věnována časoprostorové DG diskretizaci, která je aplikovaná zvláště v prostoru a čase pro numerické řešení nestacionárního konvektivně-difuzního problému. Nejprve se v odstavci 2.1 budeme krátce zabývat obecně nelineárním konvektivně-difuzním problémem (definicí problému a postupem při semidiskretizaci v prostoru). V odstavci 2.2 se omezíme na lineární konvektivně-difuzní problém. Diskretizaci je věnována 3.kapitola. Naším cílem je numerická realizace DG metody v čase a prostoru a její ověření. Tzn., že popisujeme diskretizaci problému, která je základem pro sestavení programu. Ověření metody spočívá v řešení testovacího problému, výpočtu experimentálního řádu konvergence a porovnání s teorií. V kapitole 4 se krátce zmíníme o teoretických výsledcích odhadů chyb. V kapitole 5 popíšeme algoritmizaci metody a v kapitole 6 se zmíníme o experimentálních výsledcích.

# Kapitola 2

## Formulace spojitého problému

V této kapitole se budeme nejprve v první části zabývat formulací obecného nelineárního konvektivně-difuzního problému. V druhé části zformulujeme jako speciální případ lineární problém.

### 2.1 Nelineární problém

Uvažujme následující nestacionární nelineární konvektivně-difuzní problém: Najděte  $u : Q_T = \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  takové, že:

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^d \frac{\partial f_s(u)}{\partial x_s} = \varepsilon \Delta u + g \quad \text{v } Q_T, & (2.1) \\ b) \quad & u|_{\Gamma_D \times (0, T)} = u_D, \\ c) \quad & \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_N \times (0, T)} = g_N, \\ d) \quad & u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , je omezená polygonální (pro  $d = 2$ ) resp. omezená polyhedrální (pro  $d = 3$ ) oblast s lipschitzovsky spojitou hranicí  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  a  $T > 0$ . Difuzní koeficient  $\varepsilon > 0$  je daná konstanta,  $g : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_D : \Gamma_D \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_N : \Gamma_N \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $u^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  jsou dané funkce a  $f_s \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $s = 1, \dots, d$ , jsou dané nevazké toky. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že  $f_s(0) = 0$ ,  $s = 1, \dots, d$ , protože  $\frac{\partial}{\partial x_s} f_s(u) = \frac{\partial}{\partial x_s} (f_s(u) - f_s(0))$ .

V této souvislosti zavádíme standardní značení prostorů funkcí:  $L^2(\omega)$  - Lebesgueův prostor,  $W^{k,p}(\omega)$  - Sobolevův prostor,  $L^p(0, T; X)$  - Bochnerův prostor s funkcemi definovanými na intervalu  $(0, T)$  s hodnotami v Banachově prostoru  $X$ ,  $C^k([0, T]; X)$  - prostor  $k$ -krát spojitě diferencovatelných

zobrazení na intervalu  $[0, T]$  s hodnotami v  $X$  (Zde  $\omega$  je oblast,  $k \geq 0$  je celé číslo,  $p \in [1, \infty]$ ). Skalární součin v  $L^2(\Omega)$  značíme  $(\cdot, \cdot)$ . Symboly  $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$  resp.  $|\cdot|_{H^k(\omega)}$  značí  $L^2(\omega)$ -normu resp.  $H^k(\omega)$ -seminormu definované vztahy

$$\|u\|_{L^2(\omega)} = \left( \int_{\omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

resp.

$$|u|_{H^k(\omega)} = \left( \sum_{|\alpha|=k} \int_{\omega} (D^{\alpha}u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3)$$

kde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ ,  $\alpha_i \in N_0$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  a

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (2.4)$$

Slabá formulace tohoto problému může být zavedena standardním postupem. Rovnici (2.1) a) vynásobíme funkcí

$$\varphi \in V = \{ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma_D} = 0 \}, \quad (2.5)$$

aplikujeme Greenovu větu a použijeme podmínku (2.1) c). Necht

$$u^* \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^{\infty}(Q_T)$$

je funkce, jejíž stopa na  $\partial\Gamma_D \times (0, T)$  je rovna  $u_D$ . Pak můžeme definovat slabé řešení problému (2.1) a)-d) jako funkci splňující podmínky

$$\begin{aligned} a) \quad & u - u^* \in L^2(0, T; V), \quad u \in L^{\infty}(Q_T), \\ b) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{s=1}^d f_s(u) n_s \varphi dS \\ & - \int_{\Omega} \sum_{s=1}^d f_s(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} dx \\ & = \int_{\Omega} g \varphi dx + \int_{\Gamma_N} g_N \varphi dS \quad \forall \varphi \in V, \\ c) \quad & u(0) = u^0 \quad v \Omega. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Identitu b) chápeme ve smyslu distribucí na  $(0, T)$ .

Budeme předpokládat, že existuje řešení problému (2.1) a)-d) splňující následující *podmínky regularity*:



$$u \in L^2(0, T; H^{p+1}(\Omega)), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H^p(\Omega)) \quad (2.7)$$

pro nějaké celé číslo  $p \geq 1$ . Pak  $u \in C([0, T]; H^p(\Omega))$  splňuje (2.1) a)-d) bodově skoro všude.

## 2.2 Lineární problém

Předpokládejme opět, že oblast  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  je omezená polygonální (pro  $d = 2$ ) resp. omezená polyhedrální (pro  $d = 3$ ) oblast, která má lipschitzovsky spojitou hranici  $\partial\Omega$  a  $T > 0$  nebo  $T = \infty$ . Položme  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ . Uvažujme následující problém s počáteční a okrajovou podmínkou: Najděte  $u : Q_T \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u - \varepsilon \Delta u + cu = g \quad \text{v } Q_T, \quad (2.8)$$

$$u = u_D \quad \text{na } \partial\Omega^- \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N \quad \text{na } \partial\Omega^+ \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$u(x, 0) = u^0(x) \quad x \in \Omega. \quad (2.11)$$

Dále budeme předpokládat, že  $\partial\Omega = \partial\Omega^- \cup \partial\Omega^+$  a

$$\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0 \quad \text{na } \partial\Omega^-, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0 \quad \text{na } \partial\Omega^+ \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.13)$$

Symbolem  $\mathbf{n}(x)$  označujeme jednotkovou vnější normálu k  $\partial\Omega$ .

V případě, že  $\varepsilon = 0$  pokládáme  $g_N = 0$  a ignorujeme Neumannovu podmínku.

Dále uvažujeme následující podmínky (A):

- a)  $g \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ ,
- b)  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,
- c)  $u_D$  je stopa  $u^* \in C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q_T)$  na  $\partial\Omega^- \times (0, T)$ ,
- d)  $\mathbf{v} \in C([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega))$ ,  $\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}$  jsou omezeny konstantou  $C_{\mathbf{v}}$ ,
- e)  $c \in C([0, T]; L^\infty(\Omega))$ ,  $|c(x, t)| \leq C_c$  v  $Q_T$ ,
- f)  $c - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{v} \geq \gamma_0 \geq 0$  v  $Q_T$ , kde  $\gamma_0$  je konstanta,
- g)  $g_N \in C([0, T]; L^2(\partial\Omega^+))$ ,
- h)  $\varepsilon \geq 0$ .

Obdobně jako v nelineárním problému zavedeme slabou formulaci pro lineární problém. Rovnici (2.8) vynásobíme funkcí

$$\varphi \in V = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\partial\Omega^-} = 0 \right\}, \quad (2.14)$$

aplikujeme Greenovu větu a použijeme podmínku (2.10). Pak můžeme definovat slabé řešení problému (2.8)-(2.11) jako funkci splňující podmínky

$$\begin{aligned} a) \quad & u - u^* \in L^2(0, T; V), \quad u \in L^\infty(Q_T), \\ b) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \varphi \, dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \, dx + \int_{\Omega} c u \varphi \, dx \\ & = \int_{\Omega} g \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega^+} g_N \varphi \, dS \quad \forall \varphi \in V, \\ c) \quad & u(0) = u^0 \quad \text{v } \Omega. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Identitu b) chápeme ve smyslu distribucí na  $(0, T)$ . Jestliže  $\varepsilon > 0$ , lze ukázat [8], že takovéto řešení  $u$  existuje a je jednoznačné. Dokonce platí, že  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q_T)$ , pokud  $T < +\infty$ . Budeme předpokládat, že slabé řešení  $u$  existuje a je dostatečně regulární:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^1(0, T; H^{p+1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{p+1}(\Omega)), \quad (2.16)$$

kde  $p \geq 1$  je přirozené číslo. Lze ukázat, že toto řešení  $u \in C([0, T]; H^{p+1}(\Omega))$  splňuje rovnici bodově (skoro všude).

# Kapitola 3

## Diskretizace

V této kapitole se budeme nejprve v první části zabývat semidiskretizací v prostoru obecného nelineárního problému, v druhé části semidiskretizací v prostoru lineárního problému a na závěr navážeme na semidiskretizaci z druhé části a provedeme diskretizaci i v čase.

### 3.1 Nespojité Galerkinova metoda pro nelineární problém

Definujme  $\mathcal{T}_h$  ( $h > 0$ ) jako dělení uzavřené oblasti  $\bar{\Omega}$  na konečný počet uzavřených trojúhelníků (pro  $d = 2$ ) resp. čtyřstěnů (pro  $d = 3$ )  $K$  s navzájem disjunktními vnitřky. Pak  $\mathcal{T}_h$  nazýváme triangulací oblasti  $\Omega$  a  $K$  elementy (prvky) triangulace  $\mathcal{T}_h$ .

Označme  $h_K = \text{diam}(K)$  jako průměr množiny  $K$ ,  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ ,  $|K|$  jako Lebesgueovu míru elementu  $K$  a  $\rho_K$  jako poloměr největšího kruhu (koule) vepsaného do  $K$ . Elementy triangulace  $\mathcal{T}_h = \{K_i\}_{i \in I}$  očísľujeme tak, že  $I \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  je vhodná indexová množina. Jestliže dva elementy mají společnou hranu (resp. stěnu), nazýváme tyto dva elementy sousedy. Pak v tomto případě značíme  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \partial K_i \cap \partial K_j$ .

Pro každé  $i \in I$  definujeme množinu  $s(i) = \{j \in I; K_j \text{ je soused } K_i\}$ . Hranice  $\partial\Omega$  je tvořena konečným počtem hran (resp. stěn) elementů  $K_i$  přilehlých k  $\partial\Omega$ . Tyto hrany (resp. stěny) označíme  $S_j$ , kde  $j \in I_b \subset \mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$  a definujeme množinu  $\gamma(i) = \{j \in I_b; S_j \text{ je hrana (resp. stěna) } K_i\}$ ,  $\Gamma_{ij} = S_j$  pro  $K_i \in \mathcal{T}_h$  takové, pro které je  $S_j \subset \partial K_i$ ,  $j \in I_b$ . Pro element  $K_i$ , který není hraničním elementem, pokládáme  $\gamma(i) = \emptyset$ . Zřejmě platí, že  $s(i) \cap \gamma(i) = \emptyset$  pro libovolné  $i \in I$ . Pokud označíme  $S(i) = s(i) \cup \gamma(i)$ , pak můžeme psát

$$\partial K_i = \bigcup_{j \in S(i)} \Gamma_{ij}, \quad \partial K_i \cap \partial \Omega = \bigcup_{j \in \gamma(i)} \Gamma_{ij}. \quad (3.1)$$

Dále definujeme množiny  $\gamma_D(i)$  a  $\gamma_N(i)$  jako podmnožiny množiny  $\gamma(i)$  tvořené takovými indexy  $j$ , pro které je hrana (resp. stěna)  $\Gamma_{ij}$  částí buď  $\Gamma_D$  nebo  $\Gamma_N$  hranice  $\partial \Omega$ . Z toho již můžeme předpokládat, že platí:

$$\gamma(i) = \gamma_D(i) \cup \gamma_N(i), \quad \gamma_D(i) \cap \gamma_N(i) = \emptyset. \quad (3.2)$$

Dále používáme následující značení:  $\mathbf{n}_{ij} = ((n_{ij})_1, \dots, (n_{ij})_d) =$  vnější jednotková normála k  $\partial K_i$  na hraně  $\Gamma_{ij}$  ( $\mathbf{n}_{ij}$  je konstantní vektor na  $\Gamma_{ij}$ ),  $d(\Gamma_{ij}) = \text{diam}(\Gamma_{ij})$ ,  $|\Gamma_{ij}| = (d-1)$ -dimenzionální Lebesgueova míra  $\Gamma_{ij}$ .

Na triangulaci  $\mathcal{T}_h$  definujeme prostor tzv. *broken Sobolev space*:

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_K \in H^k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (3.3)$$

Seminormu na tomto prostoru definujeme vztahem

$$|v|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v|_{H^k(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad v \in H^k(\Omega, \mathcal{T}_h). \quad (3.4)$$

Pro  $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$  zavádíme označení:

$$\begin{aligned} v|_{\Gamma_{ij}} &= \text{stopa } v|_{K_i} \text{ na } \Gamma_{ij} \\ v|_{\Gamma_{ji}} &= \text{stopa } v|_{K_j} \text{ na } \Gamma_{ji} \\ \langle v \rangle_{\Gamma_{ij}} &= \frac{1}{2}(v|_{\Gamma_{ij}} + v|_{\Gamma_{ji}}) \\ [v]_{\Gamma_{ij}} &= v|_{\Gamma_{ij}} - v|_{\Gamma_{ji}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

definující *stopu*, *průměr* a *skok stop* funkce  $v$  na  $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ . Je zřejmé z těchto definic, že

$$\begin{aligned} \langle v \rangle_{\Gamma_{ij}} &= \langle v \rangle_{\Gamma_{ji}}, \\ [v]_{\Gamma_{ij}} &= -[v]_{\Gamma_{ji}}, \\ [v]_{\Gamma_{ij}} \mathbf{n}_{ij} &= [v]_{\Gamma_{ji}} \mathbf{n}_{ji}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Přibližné řešení problému (2.1) a)-d) budeme hledat v prostoru  $S_h$  nespojitých po částech polynomiálních funkcí, který je definován takto:

$$S_h = S^{p,-1}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{v; v|_K \in P^p(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.7)$$

kde  $p$  je kladné celé číslo a  $P^p(K)$  je prostor polynomů na elementu  $K$  stupně  $\leq p$ .

Nyní budeme diskretizovat problém (2.1). Pro tuto diskretizaci budeme předpokládat, že  $u$  je řešení problému (2.1) a)-d) splňující (2.7). Z toho plyne, že jsou splněny následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot, t) \rangle_{\Gamma_{ij}} &= u(\cdot, t)|_{\Gamma_{ij}} & (3.8) \\ [u(\cdot, t)]_{\Gamma_{ij}} &= 0 \\ \langle \nabla u(\cdot, t) \rangle_{\Gamma_{ij}} &= \nabla u(\cdot, t)|_{\Gamma_{ij}} = \nabla u(\cdot, t)|_{\Gamma_{ji}} \quad \text{pro s.v. } t \in (0, T). \end{aligned}$$

Rovnici (2.1) a) vynásobíme funkcí  $\varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , provedeme integraci levé a pravé části rovnice přes elementy  $K_i \in \mathcal{T}_h$ , aplikujeme Greenovu větu a sečteme přes všechny elementy z triangulace  $\mathcal{T}_h$ . Po úpravách obdržíme následující rovnost:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi \, dx + \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^d f_s(u) (n_{ij})_s \varphi|_{\Gamma_{ij}} \, dS & (3.9) \\ & - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^d f_s(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \, dx + \sum_{i \in I} \int_{K_i} \varepsilon(\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dx \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [\varphi] \, dS \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi \, dS \\ & = \int_{\Omega} g \varphi \, dx + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_N(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi \, dS. \end{aligned}$$

K levé straně rovnice (3.9) přidáme výraz

$$\pm \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in S(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [u] \, dS, \quad (3.10)$$

který je roven nule pro přesné řešení  $u$  (viz (3.8)). Dále budeme uvažovat následující dva výrazy

$$\pm \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u \, dS \quad (3.11)$$

resp.

$$\pm \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u_D \, dS, \quad (3.12)$$

kteře jsou identické v důsledku Dirichletovy podmínky (2.1) b). Tyto dva výrazy přičteme k levé resp. pravé straně rovnice (3.9) a to buď se znaménkem + (tím získáme tzv. nesymetrickou DG diskretizaci) nebo se znaménkem – (pak získáme tzv. symetrickou DG diskretizaci).

Díky Neumannově podmínce (2.1) c) můžeme druhý člen pravé strany (3.9) nahradit výrazem

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_N(i)} \int_{\Gamma_{ij}} g_N \varphi \, dS. \quad (3.13)$$

Pro stabilitu této diskretizace zavádíme tzv. *vnitřní penaltu (interior penalty)*

$$\varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma[u][\varphi] \, dS, \quad (3.14)$$

kteřá je rovna nule pro přesné řešení  $u$  a tzv. *hraniční penaltu (boundary penalty)*

$$\varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma u \varphi \, dS = \varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma u_D \varphi \, dS, \quad (3.15)$$

kde  $\sigma$  je *váha* definovaná obvykle vztahem

$$\sigma|_{\Gamma_{ij}} = \frac{C_W}{d(\Gamma_{ij})}. \quad (3.16)$$

Jiná možnost je:

$$\sigma|_{\Gamma_{ij}} = \frac{C_W}{h_{K_i} + h_{K_j}} \quad \text{pro } j \in s(i) \quad (3.17)$$

a

$$\sigma|_{\Gamma_{ij}} = \frac{C_W}{h_{K_i}} \quad \text{pro } j \in \gamma_D(i). \quad (3.18)$$

Zde  $C_W > 0$  je vhodná konstanta. Pro nesymetrickou DG diskretizaci můžeme položit  $C_W = 1$ . Ale pro symetrickou diskretizaci musí být volba  $C_W$  mnohem promyšlenější.

Na základě těchto úvah můžeme zformulovat následující výrazy:

$$\begin{aligned} a_h^N(u, \varphi) &= \sum_{i \in I} \int_{K_i} \varepsilon (\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dx \\ &\quad - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon (\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [\varphi] \, dS \\ &\quad + \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon (\langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [u] \, dS \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{ij} \varepsilon(\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi \, dS \\
& + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u \, dS
\end{aligned}$$

pro nesymetrickou diskretizaci,

$$\begin{aligned}
a_h^S(u, \varphi) & = \sum_{i \in I} \int_{K_i} \varepsilon(\nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dx & (3.20) \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [\varphi] \, dS \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [u] \, dS \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{ij} \varepsilon(\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi \, dS \\
& - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u \, dS
\end{aligned}$$

pro symetrickou diskretizaci,

$$\begin{aligned}
J_h^\sigma(u, \varphi) & = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma[u][\varphi] \, dS & (3.21) \\
& + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma u \varphi \, dS
\end{aligned}$$

vnitřní a hraniční penaly,

$$\begin{aligned}
l_h^N(\varphi)(t) & = \int_{\Omega} g(t) \varphi \, dx + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_N(i)} \int_{\Gamma_{ij}} g_N(t) \varphi \, dS & (3.22) \\
& + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u_D(t) \, dS \\
& + \varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma u_D(t) \varphi \, dS
\end{aligned}$$

pravá strana pro nesymetrickou diskretizaci,

$$l_h^S(\varphi)(t) = \int_{\Omega} g(t) \varphi \, dx + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_N(i)} \int_{\Gamma_{ij}} g_N(t) \varphi \, dS \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \varepsilon (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij}) u_D(t) \, dS \\
& + \varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma u_D(t) \varphi \, dS
\end{aligned}$$

pravá strana pro symetrickou diskretizaci.

Nakonec budeme aproximovat konvektivní člen pomocí tzv. *numerického toku*  $H(u, v, \mathbf{n})$

$$\begin{aligned}
b_h(u, \varphi) &= - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \sum_{s=1}^d f_s(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \, dx \\
&+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} H(u|_{\Gamma_{ij}}, u|_{\Gamma_{ji}}, \mathbf{n}_{ij}) \varphi|_{\Gamma_{ij}} \, dS, \\
&\text{kde } u, \varphi \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad u \in L^\infty(\Omega).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Dále budeme předpokládat, že *numerický tok*  $H(u, v, \mathbf{n})$  splňuje následující podmínky (H):

1.  $H(u, v, \mathbf{n})$  je definován v  $\mathbb{R}^2 \times B_1$ , kde  $B_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d; |\mathbf{n}| = 1\}$ , a je lipschitzovsky spojitý v proměnných  $u, v$ :

$$|H(u, v, \mathbf{n}) - H(u^*, v^*, \mathbf{n})| \leq C_L (|u - u^*| + |v - v^*|) \tag{3.25}$$

$$u, v, u^*, v^* \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} \in B_1.$$

2.  $H(u, v, \mathbf{n})$  je konzistentní:

$$H(u, u, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^d f_s(u) n_s, \quad u \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in B_1. \tag{3.26}$$

3.  $H(u, v, \mathbf{n})$  je konzervativní:

$$H(u, v, \mathbf{n}) = -H(v, u, -\mathbf{n}) \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{n} \in B_1. \tag{3.27}$$

Z předpokladů (3.25) a (3.26) plyne, že funkce  $f_s$ ,  $s = 1, \dots, d$ , jsou lipschitzovsky spojitě s konstantou  $L_f = 2C_L$ .

Za předpokladu, že  $f_s(0) = 0$  pro  $s = 1, \dots, d$ , platí:

$$H(0, 0, \mathbf{n}) = 0 \quad \forall \mathbf{n} \in B_1. \tag{3.28}$$

Nyní již můžeme definovat diskrétní problém pro nelineární konvektivně-difuzní rovnici.



**Definice:** Řekneme, že  $u_h$  je DGFE řešení nelineárního konvektivně-difuzního problému (2.1), jestliže splňuje podmínky

$$\begin{aligned}
a) \quad & u_h \in C^1([0, T]; S_h), \\
b) \quad & \left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, \varphi_h \right) + a_h(u_h(t), \varphi_h) + b_h(u_h(t), \varphi_h) + \varepsilon J_h^\sigma(u_h(t), \varphi_h) \\
& = l_h(\varphi_h)(t) \quad \forall \varphi_h \in S_h, \quad \forall t \in (0, T), \\
c) \quad & u_h(0) = u_h^0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

kde  $a_h = a_h^N$ ,  $l_h = l_h^N$  (pro nesymetrickou diskretizaci)  $a_h = a_h^S$ ,  $l_h = l_h^S$  (pro symetrickou diskretizaci).  $u_h^0$  je definováno jako  $S_h$ -aproximace počáteční podmínky  $u^0$ :  $u_h^0 \in S_h$  je  $L^2$ -projekce, tedy:

$$(u_h^0 - u^0, \varphi_h) = 0 \quad \forall \varphi_h \in S_h. \tag{3.30}$$

## 3.2 Nespojité Galerkinova metoda pro lineární problém

Nechť  $\mathcal{T}_h = \cup_{i \in I} K_i$  ( $I \subset \{0, 1, 2, \dots\}$  je indexová množina) je klasická triangulace uzavřené oblasti  $\Omega$  s konečným počtem elementů (pro  $d = 2$  trojúhelníků nebo pro  $d = 3$  čtyřstěnů). Předpokládáme, že pro libovolné  $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$  je buď  $K_i \cap K_j$  nadrovina, kterou značíme jako  $\Gamma_{ij}$  ( $= \Gamma_{ji}$ ) nebo je to bod (pro  $d=3$  to může také být hrana) anebo  $K_i \cap K_j = \emptyset$ . V případě, kdy  $K_i \cap K_j = \Gamma_{ij}$ , nazýváme  $K_i$  a  $K_j$  *sousedy*. Dále pro  $i \in I$  definujeme

$$s(i) = \{j \in I; K_j \text{ je soused } K_i\}. \tag{3.31}$$

Pro každý element  $K \in \mathcal{T}_h$  definujeme  $h_K$  jako průměr  $K$  a  $\rho_K$  jako poloměr největšího kruhu (koule) vepsané do  $K$ . Označme  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ . Předpokládáme, že triangulace je *regulární* (*shape regular*): Existuje konstanta  $C_{\mathcal{T}}$  nezávislá na  $K \in \mathcal{T}_h$  a  $h$  taková, že

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_{\mathcal{T}} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{3.32}$$

Dále zavádíme prostor tzv. *broken Sobolev space*

$$H^k(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{\varphi; \varphi|_K \in H^k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \tag{3.33}$$

a na tomto prostoru definujeme seminormu

$$|\varphi|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\varphi|_{H^k(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.34)$$

kde  $|\cdot|_{H^k(K)}$  je seminorma v Sobolevově prostoru  $H^k(K)$ . Dále budeme pro  $\varphi \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$ ,  $i \in I$ ,  $j \in s(i)$ , používat shodné značení s (3.5):

$$\varphi|_{\Gamma_{ij}} = \text{stopa } \varphi|_{K_i} \text{ na } \Gamma_{ij}, \quad (3.35)$$

$$\varphi|_{\Gamma_{ji}} = \text{stopa } \varphi|_{K_j} \text{ na } \Gamma_{ji}, \quad (3.36)$$

$$\langle \varphi \rangle_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{2}(\varphi|_{\Gamma_{ij}} + \varphi|_{\Gamma_{ji}}), \quad (3.37)$$

$$[\varphi]_{\Gamma_{ij}} = \varphi|_{\Gamma_{ij}} - \varphi|_{\Gamma_{ji}}. \quad (3.38)$$

$\mathbf{n}_{ij}$  značí jednotkovou vnější normálu k  $\partial K_i$  na hraně  $\Gamma_{ij}$ . Hranici elementu  $K_i \in \mathcal{T}_h$  rozdělíme na dvě disjunktní podmnožiny  $\partial K_i = \partial K_i^- \cup \partial K_i^+$  následujícím způsobem:

$$\partial K_i^-(t) = \{x \in \partial K_i; \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}, \quad (3.39)$$

$$\partial K_i^+(t) = \{x \in \partial K_i; \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \geq 0\}, \quad (3.40)$$

kde  $\mathbf{n}$  je vnější normála k  $\partial K_i$ . Pro jednoduchost nebudeme značit závislost  $\partial K_i^-$  a  $\partial K_i^+$  na čase.

Při diskretizaci lineárního problému budeme postupovat obdobně jako při diskretizaci nelineárního problému. Budeme opět předpokládat, že  $u$  je přesné řešení problému (2.8)-(2.11) splňující (2.16). Takovéto  $u$  zřejmě splňuje (3.8). Rovnici (2.8) vynásobíme funkcí  $\varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ , provedeme integraci přes každý element  $K_i$ , vše sečteme a dostaneme

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi + \sum_{i \in I} \int_{K_i} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \varphi \\ & - \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{K_i} \Delta u \varphi + \sum_{i \in I} \int_{K_i} c u \varphi \\ & = \int_{\Omega} g \varphi. \end{aligned} \quad (3.41)$$

První člen levé strany upravovat nebudeme, upravíme druhý člen levé strany (tzv. konvektivní člen), kde využijeme myšlenky *upwindingu*. To znamená, že na hranici typu  $\partial K_i^- \setminus \partial \Omega$  resp.  $\partial K_i^- \cap \partial \Omega$ , kde řešení jakoby "vtéká" do elementu  $K_i$ , využijeme hodnot z hranice sousedního elementu resp. Dirichletovy podmínky. Proto zavedeme zjednodušené značení  $u^-$  pro hodnoty na

hranici  $\partial K_i$  ze sousedního elementu resp. z Dirichletovy podmínky. Budeme psát

$$\int_{K_i} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int_{\partial K_i^-} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \varphi \, dS + \int_{\partial K_i^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{K_i} u \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \, dx \\ & = - \int_{K_i} u \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \, dx + \int_{\partial K_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS - \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & + \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \varphi \, dS + \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \varphi \, dS \\ & + \int_{\partial K_i^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS - \int_{\partial K_i^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & = \int_{K_i} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \varphi \, dx \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (u^- - u) \varphi \, dS \\ & - \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & + \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u^- \varphi \, dS \\ & = \int_{K_i} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \varphi \, dx \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) [u] \varphi \, dS \\ & - \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & + \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u_D(t) \varphi \, dS. \end{aligned}$$

V (3.42) jsme použili Greenovu větu. V (3.43) jsme přidali výraz:

$$\begin{aligned} 0 & = \int_{\partial K_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS - \int_{\partial K_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & = \int_{\partial K_i} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS - \int_{\partial K_i^+} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS \\ & \quad - \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS - \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi \, dS. \end{aligned}$$

V (3.44) jsme použili opět Greenovu větu na první dva členy v (3.43). V (3.45) jsme použili (3.38) a (2.9). Upravme třetí člen levé strany rovnosti (3.41):

$$\sum_{i \in I} \int_{K_i} \Delta u \varphi \, dx = \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, dS - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (3.46)$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in s(i)} \int_{\Gamma_{ij}} (\nabla u \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi \, dS \quad (3.47)$$

$$+ \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, dS + \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^+ \cap \partial \Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, dS$$

$$- \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$$

$$= - \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (3.48)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi|_{\Gamma_{ij}} + (\nabla u|_{\Gamma_{ji}} \cdot \mathbf{n}_{ji}) \varphi|_{\Gamma_{ji}} \right) dS$$

$$+ \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, dS + \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^+ \cap \partial \Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, dS.$$

Dále pro  $i \in I$  a  $j \in s(i)$  platí:

$$\int_{\Gamma_{ij}} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi|_{\Gamma_{ij}} + (\nabla u|_{\Gamma_{ji}} \cdot \mathbf{n}_{ji}) \varphi|_{\Gamma_{ji}} \right) dS \quad (3.49)$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{2} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi|_{\Gamma_{ij}} + (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \varphi|_{\Gamma_{ij}} \right) dS \quad (3.50)$$

$$+ \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{2} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ji}} \cdot \mathbf{n}_{ji}) \varphi|_{\Gamma_{ji}} + (\nabla u|_{\Gamma_{ji}} \cdot \mathbf{n}_{ji}) \varphi|_{\Gamma_{ji}} \right) dS$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{2} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} + \nabla u|_{\Gamma_{ji}}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \varphi|_{\Gamma_{ij}} \, dS \quad (3.51)$$

$$- \int_{\Gamma_{ij}} \frac{1}{2} \left( (\nabla u|_{\Gamma_{ij}} + \nabla u|_{\Gamma_{ji}}) \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \varphi|_{\Gamma_{ji}} \, dS$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} \left( \langle \nabla u \rangle_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \varphi|_{\Gamma_{ij}} - \left( \langle \nabla u \rangle_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) \varphi|_{\Gamma_{ji}} \right) dS \quad (3.52)$$

$$= \int_{\Gamma_{ij}} \left( \langle \nabla u \rangle_{\Gamma_{ij}} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) [\varphi]_{\Gamma_{ij}} = \int_{\Gamma_{ij}} \left( \langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) [\varphi] \, dS, \quad (3.53)$$

kde jsme využili (3.8) platné pro přesné řešení  $u$  a  $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$ . Navíc použijeme následující tři identity

$$\int_{\Gamma_{ij}} (\langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}) [u] dS = 0, \quad (3.54)$$

$$\int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) u dS = \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) u_D(t) dS$$

resp.

$$\varepsilon \int_{\partial K_i^+ \cap \partial \Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi dS = \int_{\partial K_i^+ \cap \partial \Omega} g_N(t) \varphi dS,$$

které platí díky tomu, že  $[u] = 0$  a díky (2.9) resp. (2.10). Pak celkově dostaneme:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{K_i} \Delta u \varphi dx &= -\varepsilon \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx & (3.55) \\ &+ \varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi] - \langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[u]) dS \\ &+ \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} ((\nabla u \cdot \mathbf{n})\varphi - (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})u) dS \\ &+ \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^+ \cap \partial \Omega} g_N(t)\varphi dS + \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})u_D(t) dS. \end{aligned}$$

Nyní definujme nasledující formy:

$$(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx \quad (3.56)$$

$$a_h(u, \varphi) = \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{K_i} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \quad (3.57)$$

$$- \varepsilon \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} (\langle \nabla u \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[\varphi] - \langle \nabla \varphi \rangle \cdot \mathbf{n}_{ij}[u]) dS$$

$$- \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} ((\nabla u \cdot \mathbf{n})\varphi - (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})u) dS$$

$$b_h(u, \varphi) = \sum_{i \in I} \int_{K_i} (\mathbf{v} \cdot \nabla u) \varphi dx \quad (3.58)$$

$$- \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) u \varphi dS$$

$$- \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \setminus \partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) [u] \varphi dS$$

$$c_h(u, \varphi) = \int_{\Omega} cu\varphi \, dx \quad (3.59)$$

$$J_h^\sigma(u, \varphi) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in s(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma[u][\varphi] \, dS + \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial\Omega} \sigma u \varphi \, dS \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} l_h(\varphi)(t) &= \int_{\Omega} g(t)\varphi \, dx + \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^+ \cap \partial\Omega} g_N(t)\varphi \, dS \\ &+ \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial\Omega} \sigma u_D(t)\varphi \, dS \\ &+ \varepsilon \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial\Omega} (\nabla\varphi \cdot \mathbf{n})u_D(t) \, dS \\ &- \sum_{i \in I} \int_{\partial K_i^- \cap \partial\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})u_D(t)\varphi \, dS, \end{aligned} \quad (3.61)$$

kde volíme  $\sigma|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\text{diam}(\Gamma_{ij})}$ .

Z rovnice (3.41) s ohledem na (3.14), (3.15), (3.45), (3.55) dostaneme rovnost

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial u(t)}{\partial t}, \varphi \right) + a_h(u(t), \varphi) + b_h(u(t), \varphi) + c_h(u(t), \varphi) + \varepsilon J_h^\sigma(u(t), \varphi) \\ &= l_h(\varphi)(t) \quad \forall t \in (0, T), \quad \forall \varphi \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Nyní obdobně jako v nelineárním problému definujme prostor

$$S_h = S^{p,-1}(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in P^p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.63)$$

kde  $p \geq 1$  je celé číslo a  $P^p(K)$  je prostor polynomů stupně nejvýše  $p$ .

**Diskrétní problém** formulujeme následujícím způsobem: *Hledáme přibližné řešení problému (2.1)-(2.2) jako funkci  $u_h$  splňující podmínky*

$$\begin{aligned} a) \quad &u_h \in C^1([0, T]; S_h), \\ b) \quad &\left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, \varphi_h \right) + a_h(u_h(t), \varphi_h) + b_h(u_h(t), \varphi_h) + \varepsilon J_h^\sigma(u_h(t), \varphi_h) \\ &= l_h(\varphi_h)(t) \quad \forall \varphi_h \in S_h, \quad \forall t \in (0, T), \\ c) \quad &(u_h(0), \varphi_h) = (u^0, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in S_h. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Poznamenejme, že ve formulaci diskrétního problému (3.64) jsme použili nesymetrickou formulaci difuzních členů. Snadno můžeme odvodit symetrickou formulaci.

### 3.3 Nespojité Galerkinova časoprostorová diskretizace

Vyjdeme ze semidiskretizace v prostoru problému (2.8)-(2.11) provedené v odstavci 3.2. Abychom mohli provést DG diskretizaci v čase, uvažujme dělení  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$  časového intervalu  $[0, T]$ . Označme  $T_m = (t_{m-1}, t_m)$ ,  $\bar{T}_m = [t_{m-1}, t_m]$ ,  $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ , pro  $m = 1, \dots, M$ ,  $Q_T = \Omega \times (0, T)$ . Oblast  $\Omega \times T_m$  bude tzv. *m-tá časová vrstva*. Z toho již plyne, že

$$[0, T] = \bigcup_{m=1}^M \bar{T}_m, \quad T_m \cap T_n = \emptyset \quad \text{pro } m \neq n. \quad (3.65)$$

Dále zavádíme následující značení:

$$\varphi_m^\pm = \varphi(t_m^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_m^\pm} \varphi(t) \quad (3.66)$$

$$\{\varphi\}_m = \varphi_m^+ - \varphi_m^-. \quad (3.67)$$

Obecně na každé časové vrstvě uvažujeme různé triangulace  $\mathcal{T}_{h,m} = \{K_i\}_{i \in I_{h,m}}$  oblasti  $\Omega$ . Proto také místo  $S_h^p, a_h, b_h, c_h, J_h^\sigma, l_h$  zavádíme prostory  $S_{h,m}^p$  a formy  $a_{h,m}, b_{h,m}, c_{h,m}, J_{h,m}^\sigma, l_{h,m}$ :

$$S_{h,m}^p = \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi|_K \in P^p(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_{h,m}\} \quad (3.68)$$

a formy  $a_{h,m}, b_{h,m}, c_{h,m}, J_{h,m}^\sigma, l_{h,m}$  definujeme obdobně jako v (3.57)-(3.61), pouze místo  $I$  píšeme  $I_{h,m}$ . Dále definujeme formu

$$A_{h,m}(u, \varphi) = a_{h,m}(u, \varphi) + b_{h,m}(u, \varphi) + c_{h,m}(u, \varphi) + \varepsilon J_{h,m}^\sigma(u, \varphi). \quad (3.69)$$

Přibližné řešení problému (2.8)-(2.11) budeme nyní uvažovat jako funkci

$$u_h(x, t) \in S_{h,\tau}^{p,q} = \left\{ \varphi \in L^2(Q_T); \varphi|_{T_m} = \sum_{i=0}^q t^i \varphi_i, \text{ kde } \varphi_i \in S_{h,m}^p \right\}. \quad (3.70)$$

Funkce  $u_h$  může být obecně nespojitá v bodech  $t_m$ . Proto do diskretizace musíme zahrnout počáteční podmínku a návaznost přibližného řešení mezi jednotlivými časovými vrstvami. Počáteční podmínku  $u_0$  zahrneme pomocí  $L^2$ -projekce do prostoru  $S_{h,1}^p$  jako funkci  $u_h(0+) \in S_{h,1}^p$ . Tedy:

$$(u_h(0+), \varphi) = (u_0, \varphi) \quad \forall \varphi \in S_{h,1}^p. \quad (3.71)$$

Obdobně se vypořádáme s návazností přibližného řešení mezi jednotlivými časovými vrstvami, kde místo počáteční podmínky  $u_0$  budeme uvažovat přibližné řešení z předchozí časové vrstvy. Tzn., že máme

$$(u_h(t_{m-1}^-), \varphi) = (u_h(t_{m-1}^+), \varphi) \quad \forall \varphi \in S_{h,m}^p,$$

což je ekvivalentní s

$$0 = (u_h(t_{m-1}^+) - u_h(t_{m-1}^-), \varphi) = (\{u_h\}_{m-1}, \varphi) \quad \forall \varphi \in S_{h,m}^p.$$

Vidíme, že  $u_h(t_{m-1}^+) \in S_{h,m}^p$  je funkce vzniklá  $L^2$ -projekcí přibližného řešení  $u_h(t_{m-1}^-) \in S_{h,m-1}^p$  (z  $(m-1)$ -té časové vrstvy) do prostoru  $S_{h,m}^p$ .

Nyní můžeme definovat přibližné řešení problému (2.8)-(2.11) jako funkci  $u_h$  splňující identitu

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \int_{T_m} \left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, \varphi \right) + A_{h,m}(u_h, \varphi) dt + \sum_{m=2}^M (\{u_h\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ & + (u_h(0+), \varphi_0^+) = \sum_{m=1}^M \int_{T_m} l_{h,m}(\varphi)(t) dt + (u_0, \varphi_0^+) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Pokud označíme

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \sum_{m=1}^M \int_{T_m} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + A_{h,m}(u, v) dt + \sum_{m=2}^M (\{u\}_{m-1}, v_{m-1}^+) \\ &+ (u_0^+, v_0^+), \\ L(v) &= \sum_{m=1}^M \int_{T_m} l_{h,m}(v)(t) dt + (u_0, v_0^+), \end{aligned}$$

pak (3.72) můžeme zkráceně psát ve tvaru

$$B(u_h, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in S_{h,\tau}^{p,q}. \quad (3.73)$$



# Kapitola 4

## Odhad chyby

V této kapitole pouze shrneme hlavní výsledky týkající se odhadů chyb jednotlivých diskretizací.

### 4.1 Odhad chyby semidiskretizace obecného nelineárního problému

Předpokládejme, že triangulace  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$  splňuje následující předpoklady:

(A1) Systém  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$  je regulární: Existuje konstanta  $C_R > 0$  taková, že:

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_R \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall h \in (0, h_0). \quad (4.1)$$

(A2) Existuje konstanta  $C_D > 0$  taková, že:

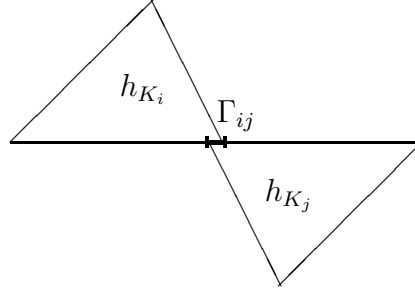
$$h_{K_i} \leq C_D d(\Gamma_{ij}) \quad i \in I, j \in S(i), h \in (0, h_0). \quad (4.2)$$

Podmínka (A2) nám zaručuje, že  $\Gamma_{ij}$  nedegeneruje vzhledem k  $h_{K_i}$  pro  $h \rightarrow 0+$ . Nyní můžeme zformulovat větu o odhadu chyby.

**Věta:** *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady (H), (A1) a (A2). Nechť  $u$  je přesné řešení problému (2.1) splňující (2.7) a nechť  $u_h$  je přibližné řešení definované v (3.29). Pak chyba  $e_h = u_h - u$  splňuje odhad*

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, T]} \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \left( |e_h(\vartheta)|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + J_h^\sigma(e_h(\vartheta), e_h(\vartheta)) \right) d\vartheta \\ & \leq C_1 h^{2p}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

kde  $C_1 > 0$  je konstanta nezávislá na  $h$ .



Obrázek 1

Předpoklad (A2) je ale omezující. V praxi může nastat situace, kdy  $\Gamma_{ij}$  bude degenerovat, tedy  $d(\Gamma_{ij}) \rightarrow 0$  aniž by  $h_{K_i} \rightarrow 0+$  (viz obr.1). Z tohoto důvodu definujeme váhu  $\sigma$  vztahy (3.17) a (3.18). Nyní se zaměříme na část (3.28) v důkazu věty o odhadu chyby (4.3) provedený v článku [2], kde je dokázáno za předpokladu (A2), že

$$J_h^\sigma(\eta, \eta) \leq Ch^{2p} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2, \quad (4.4)$$

kde

$$\eta = \Pi_h u - u \in H^{p+1}(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad (4.5)$$

a  $\Pi_h u$  je  $S_h$ -interpolace  $u \in H^{p+1}(\Omega)$ . Podle článku [2] platí

$$\int_{\partial K_i} \eta^2 dS \leq Ch_{K_i}^{2p+1} |u|_{H^{p+1}(K_i)}^2 \quad i \in I, h \in (0, h_0) \quad (4.6)$$

s konstantou  $C$  nezávislou na  $i$  a  $h$ .

My nyní provedeme následující odhad (4.4) za předpokladu, že váha splňuje (3.17) a (3.18). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že existuje  $C_H > 0$  splňující:

$$h_{K_j} \geq C_H h_{K_i} \quad \forall i \in I, j \in s(i). \quad (4.7)$$

Pak s využitím (3.21) dostaneme

$$J_h^\sigma(\eta, \eta) = \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma[\eta]^2 dS + \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \eta^2 dS. \quad (4.8)$$

Zřejmě

$$\begin{aligned} [\eta]_{\Gamma_{ij}}^2 &= (\eta|_{\Gamma_{ij}} - \eta|_{\Gamma_{ji}})^2 \\ &= (\eta|_{\Gamma_{ij}})^2 - 2\eta|_{\Gamma_{ij}} \eta|_{\Gamma_{ji}} + (\eta|_{\Gamma_{ji}})^2 \\ &\leq 2((\eta|_{\Gamma_{ij}})^2 + (\eta|_{\Gamma_{ji}})^2). \end{aligned}$$

Díky (4.7) máme

$$h_{K_i} + h_{K_j} \geq (1 + C_H)h_{K_i},$$

takže

$$\frac{1}{h_{K_i} + h_{K_j}} \leq \frac{1}{1 + C_H} \frac{1}{h_{K_i}} \leq \frac{1}{h_{K_i}} \quad \forall i \in I, j \in s(i).$$

Pak dostaneme:

$$J_h^\sigma(\eta, \eta) \leq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{j \in s(i) \\ j < i}} \int_{\Gamma_{ij}} 2\sigma \left( (\eta|_{\Gamma_{ij}})^2 + (\eta|_{\Gamma_{ji}})^2 \right) dS \quad (4.9)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma_D(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sigma \eta^2 dS$$

$$\leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in s(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{2C_W}{h_{K_i} + h_{K_j}} (\eta|_{\Gamma_{ij}})^2 dS \quad (4.10)$$

$$+ \sum_{i \in I} \sum_{j \in \gamma(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{C_W}{h_{K_i}} \eta^2 dS$$

$$\leq 2C_W \sum_{i \in I} \frac{1}{h_{K_i}} \int_{\partial K_i} \eta^2 dS \quad (4.11)$$

$$\leq Ch^{2p} |u|_{H^{p+1}(\Omega)}^2.$$

kde  $C > 0$ . Poslední nerovnost plyne z (4.6). Pak již z článku [2] obdržíme odhad chyby (4.3) i pro volbu váhy (3.17) a (3.18).

## 4.2 Odhad chyby semidiskretizace lineárního problému

Pro jednoduchost zavedme následující značení:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{v}, B} = \left\| \sqrt{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|} \varphi \right\|_{L^2(B)}$$

Pak platí následující věta.

**Věta:** Předpokládejme, že  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$  je systém triangulací oblasti  $\Omega$  splňující (A1) a že jsou splněny podmínky (A) a)-h). Nechť přesné řešení u problému (2.8)-(2.11) je regulární ve smyslu (2.16). Nechť  $u_h$  je přibližné řešení definované v (3.64) a)- c). Pak chyba  $e_h = u_h - u$  splňuje odhad

$$\max_{t \in (0, T)} \|e_h(t)\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2\gamma_0} \|e_h\|_{L^2(Q_T)}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\int_0^T |e_h(\vartheta)|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 d\vartheta} + \int_0^T J_h^\sigma(e_h(\vartheta), e_h(\vartheta)) d\vartheta \\
& + \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i \in I} \int_0^T (\|e_h(\vartheta)\|_{\mathbf{v}(\vartheta), \partial K_i \cap \partial \Omega}^2 + \|[e_h(\vartheta)]\|_{\mathbf{v}(\vartheta), \partial K_i^- \setminus \partial \Omega}^2) d\vartheta} \\
& \leq C(T) h^p (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h}), \tag{4.12}
\end{aligned}$$

kde konstanta  $C(T)$  nezávisí na  $\varepsilon$  a  $h$ . Tento odhad platí i pro  $\varepsilon = 0$ .

### 4.3 Odhad chyby úplné diskretizace lineárního problému

Zavedme následující značení:

$$\mathcal{H}_{p,q} = H^{q+1}(0, T; H^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^{p+1}(\Omega)), \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\|v\|_{E,m}^2 &= \varepsilon |v|_{H^1(\Omega, \mathcal{T}_{h,m})}^2 + \gamma_0 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon J_{h,m}(v, v) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i \in i_{h,m}} (\|v\|_{\mathbf{v}, \partial K_i \cap \partial \Omega}^2 + \|[v]\|_{\mathbf{v}, \partial K_i^- \setminus \partial \Omega}^2), \quad v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_{h,m}).
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nechť triangulace  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$  splňuje předpoklady:

(B1)  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \in (0, h_0)}$  je regulární: Existuje konstanta  $C_R > 0$  taková, že

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_R \quad \forall K \in \mathcal{T}_{h,m}, \quad m = 1, \dots, M, \quad h \in (0, h_0). \tag{4.15}$$

(B2) Existují konstanty  $C_D, C_E > 0$  takové, že

$$\frac{1}{C_D} h_K \leq \tau_m \leq C_E h_K, \quad K \in \mathcal{T}_h, \quad m = 1, \dots, M. \tag{4.16}$$

Pak platí následující věta.

**Věta:** *Předpokládejme, že jsou splněny podmínky (A) a)-h), (B1) a (B2). Nechť  $u \in \mathcal{H}_{p,q}$  je přesné řešení problému (2.8)-(2.11) a nechť  $U$  je přibližné řešení splňující (3.73). Pak existuje konstanta  $C$  nezávislá na  $h, \tau$  a  $\varepsilon$  taková, že chyba  $e = U - u$  splňuje odhad*

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M \int_{I_m} \|e\|_{E,m}^2 dt &\leq C h^{2p} \{ |u|_{L^2(0,T;H^{p+1}(\Omega))}^2 + |u|_{C([0,T];H^{p+1}(\Omega))}^2 \} \\
&+ C \tau^{2q} \{ |u|_{H^{q+1}(0,T;L^2(\Omega))}^2 + |u|_{H^{q+1}(0,T;H^1(\Omega))}^2 \}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Tento odhad platí i pro  $\varepsilon = 0$ .

# Kapitola 5

## Algoritmizace metody pro lineární problém

V této kapitole popíšeme algoritmizaci našeho problému, tj. numerickou přípravu pro realizaci a sestavení programu pro řešení. Vyjdeme z úvah provedených v odstavcích 3.2 a 3.3. Výsledkem bude soustava lineárních rovnic vytvořená na každé časové vrstvě.

### 5.1 Odvození soustav rovnic

Obdobně jako v odstavci 3.3 zavedeme dělení  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$  časového intervalu  $[0, T]$ ,  $T_m = (t_{m-1}, t_m)$ ,  $\bar{T}_m = [t_{m-1}, t_m]$  a  $\tau_m = t_m - t_{m-1}$  pro  $m = 1, \dots, M$ . Náš problém diskretizovaný v odstavci 3.3 rozdělíme opět na jednotlivé časové vrstvy  $\Omega \times T_m$  pro  $m = 1, \dots, M$ . Pro jednoduchost budeme na každé časové vrstvě uvažovat stejnou triangulaci  $\mathcal{T}_h$ . Označme  $S_h^p = S^{p,-1}(\Omega, \mathcal{T}_h)$ . Pak rovnici (3.72) přepíšeme ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M \int_{T_m} \left( \frac{\partial u_h(t)}{\partial t}, \varphi(t) \right) + A(u_h(t), \varphi(t)) dt \quad (5.1) \\ & + \sum_{m=2}^M \left( \{u_h(t)\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+ \right) + \left( u_h(t)_0^+, \varphi_0^+ \right) \\ & = \sum_{m=1}^M \int_{T_m} l(\varphi)(t) dt + \left( u_0, \varphi_0^+ \right) \quad \forall \varphi(t) \in S_{h,\tau}^{p,q}, \end{aligned}$$

kde

$$u_h \in S_{h,\tau}^{p,q} = \left\{ \varphi \in L^2(Q_T); \varphi|_{T_m} = \sum_{i=0}^q t^i \psi_i, \psi_i \in S_h^p \right\} \quad (5.2)$$

je hledané přibližné řešení a

$$A(u, v) = a_h(u, v) + b_h(u, v) + c_h(u, v) + \varepsilon J_h^\sigma(u, v). \quad (5.3)$$

Formy  $a_h$ ,  $b_h$ ,  $c_h$ ,  $J_h^\sigma$ ,  $l_h$  jsou definované stejně jako v (3.57)-(3.61). Pro jednoduchost budeme aproximovat přesné řešení lineárně jak v prostoru tak i v čase. Tzn., že uvažujeme  $p=q=1$  a přibližné řešení budeme hledat v prostoru  $S_{h,\tau}^{1,1}$ . Dále budeme uvažovat funkce  $c$  a  $\mathbf{v}$  nezávislé na čase (o tomto více v kapitole 6). Označme

$$S_m = \{ \varphi|_{T_m}; \varphi \in S_{h,\tau}^{1,1} \} \quad (5.4)$$

a položíme  $n := \dim(S_h^1)$ . Je zřejmé, že  $n$  je nezávislé na  $m$ , protože na každé vrstvě máme stejnou triangulaci. Přibližné řešení  $u_h(t) \in S_{h,\tau}^{1,1}$  můžeme rozepsat následujícím způsobem

$$u_h(t) = u_h(t)|_{[t_0,t_1]} + u_h(t)|_{[t_1,t_2]} + \dots + u_h(t)|_{[t_{M-1},t_M]}. \quad (5.5)$$

Označme  $u_h^m(t) = u_h(t)|_{[t_{m-1},t_m]} \in S_m$  jako přibližné řešení na  $m$ -té časové vrstvě. Pak můžeme psát

$$u_h^m(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m \psi_j + t \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m \psi_j, \quad (5.6)$$

kde  $\psi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , jsou báze funkce prostoru  $S_h^1$ . Tato řešení  $u_h^m(t)$  budeme hledat postupně v čase na každé časové vrstvě.

Nyní začneme sestavovat soustavy rovnic na jednotlivých časových vrstvách. Začneme první časovou vrstvou, která se liší od ostatních vrstev díky počáteční podmínce  $u_0$ . Vyjdeme z rovnice (5.1) pro  $t \in [t_0, t_1]$ . To tedy znamená najít funkci  $u_h^1(t)$  splňující

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial u_h^1(t)}{\partial t}, \varphi(t) \right) + A(u_h^1(t), \varphi(t)) dt + (u_h^1(t)_0^+, \varphi_0^+) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} l(\varphi)(t) dt + (u_0, \varphi_0^+) \quad \forall \varphi(t) \in S_1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Protože

$$\frac{\partial u_h^1(t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 \psi_j \quad (5.8)$$

a formy  $(\cdot, \cdot)$ ,  $A(\cdot, \cdot)$ ,  $l(\cdot)(t)$  jsou lineární v argumentech označených "·", pak dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 (\psi_j, \varphi(t)) + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 A(\psi_j, \varphi(t)) + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 A(\psi_j, \varphi(t)) t dt \\ &+ \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 (\psi_j, \varphi_0^+) = \int_{t_0}^{t_1} l(\varphi)(t) dt + (u_0, \varphi_0^+), \quad \forall \varphi(t) \in S_1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nyní pokud položíme  $\varphi(t) := \psi_r$ , kde  $\psi_r \in S_h^1$ , pak dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1(\psi_j, \psi_r) + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) t \, dt \\ & + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1(\psi_j, \psi_r) = \int_{t_0}^{t_1} l(\psi_r)(t) \, dt + (u_0, \psi_r), \quad r = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.10)$$

a po integraci s využitím faktu, že  $(\cdot, \cdot)$  a  $A(\cdot, \cdot)$  jsou nezávislé na čase, dostaneme:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1(\psi_j, \psi_r) t_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) t_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_1^2}{2} \\ & + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1(\psi_j, \psi_r) = \int_{t_0}^{t_1} l(\psi_r)(t) \, dt + (u_0, \psi_r), \quad r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Pokud položíme  $\varphi(t) := t\psi_r$ , kde  $\psi_r \in S_h^1$ , dostaneme:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1(\psi_j, \psi_r) t + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) t + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) t^2 \, dt \\ & + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1(\psi_j, 0) = \int_{t_0}^{t_1} l(t\psi_r) \, dt + (u_0, 0), \quad r = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.12)$$

a po integraci máme:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1(\psi_j, \psi_r) \frac{t_1^2}{2} + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_1^2}{2} + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^1 A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_1^3}{3} \\ & = \int_{t_0}^{t_1} t l(\psi_r) \, dt, \quad r = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Obdobně postupujeme na  $m$ -té časové vrstvě (pro  $m > 1$ ). Hledáme  $u_h^m(t) \in S_m$  splňující

$$\begin{aligned} & \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left( \frac{\partial u_h^m(t)}{\partial t}, \varphi(t) \right) + A(u_h^m(t), \varphi(t)) \, dt + (\{u_h^m(t)\}_{m-1}, \varphi_{m-1}^+) \\ & = \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\varphi)(t) \, dt, \quad \forall \varphi(t) \in S_m. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Jelikož platí

$$\frac{\partial u_h^m}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m \psi_j,$$

$$\begin{aligned}
\{u_h^m(t)\}_{m-1} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m \psi_j + t_{m-1} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m \psi_j \\
&\quad - \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^{m-1} \psi_j - t_{m-1} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^{m-1} \psi_j \\
&= \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) \psi_j + t_{m-1} \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) \psi_j, \quad (5.15)
\end{aligned}$$

potom můžeme po dosažení psát:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{m-1}}^{t_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m (\psi_j, \varphi(t)) + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m A(\psi_j, \varphi(t)) + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m A(\psi_j, \varphi(t)) t \, dt \\
&+ \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) (\psi_j, \varphi_{m-1}^+) + t_{m-1} \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) (\psi_j, \varphi_{m-1}^+) \\
&= \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\varphi)(t) \, dt + (u_0, \varphi_0^+), \quad \forall \varphi(t) \in S_m. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Pokud položíme  $\varphi(t) := \psi_r$ , kde  $\psi_r \in S_h^1$ , dostaneme

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{m-1}}^{t_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m (\psi_j, \psi_r) + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m A(\psi_j, \psi_r) + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m A(\psi_j, \psi_r) t \, dt \\
&+ \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) + \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1} \\
&= \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\psi_r)(t) \, dt, \quad r = 1, \dots, n \quad (5.17)
\end{aligned}$$

a po integraci máme:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m (\psi_j, \psi_r) (t_m - t_{m-1}) + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m A(\psi_j, \psi_r) (t_m - t_{m-1}) \\
&+ \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_m^2 - t_{m-1}^2}{2} + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) \\
&+ \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1} \\
&= \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\psi_r)(t) \, dt, \quad r = 1, \dots, n. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Pokud položíme  $\varphi(t) := t\psi_r$ , kde  $\psi_r \in S_h^1$ , dostaneme:

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m (\psi_j, \psi_r) t + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m A(\psi_j, \psi_r) t + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m A(\psi_j, \psi_r) t^2 \, dt$$



$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1} + \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1}^2 \\
& = \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(t\psi_r)(t) dt, \quad r = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{5.19}$$

a po integraci máme:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m (\psi_j, \psi_r) \frac{t_m^2 - t_{m-1}^2}{2} + \sum_{j=1}^n \alpha_{0,j}^m A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_m^2 - t_{m-1}^2}{2} \\
& + \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j}^m A(\psi_j, \psi_r) \frac{t_m^3 - t_{m-1}^3}{3} + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^m - \alpha_{0,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1} \\
& + \sum_{j=1}^n (\alpha_{1,j}^m - \alpha_{1,j}^{m-1}) (\psi_j, \psi_r) t_{m-1}^2 \\
& = \int_{t_{m-1}}^{t_m} t l(\psi_r)(t) dt, \quad r = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Tedy máme na každé vrstvě  $2n$  rovnic pro  $2n$  neznámých. Tyto soustavy rovnic přepíšeme do maticového tvaru

$$\begin{pmatrix} A_m & B_m \\ C_m & D_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{m,0} \\ \Lambda_{m,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m \\ F_m \end{pmatrix}, \quad m = 1, \dots, M,$$

kde  $A_m, B_m, C_m, D_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a  $E_m, F_m, \Lambda_{m,0}, \Lambda_{m,1} \in \mathbb{R}^n$ . Označme

$$\xi_{m,1} = t_m \quad , \quad \xi_{m,2} = t_{m-1}, \tag{5.21}$$

$$\xi_{m,3} = t_m - t_{m-1} \quad , \quad \xi_{m,4} = \frac{t_m^2 - t_{m-1}^2}{2}, \tag{5.22}$$

$$\xi_{m,5} = \frac{t_m^2 + t_{m-1}^2}{2} \quad , \quad \xi_{m,6} = \frac{t_m^3 - t_{m-1}^3}{3}. \tag{5.23}$$

Pak z rovnic (5.11), (5.13), (5.18) a (5.20) plyne:

$$A_m = \begin{pmatrix} A(\psi_1, \psi_1) \xi_{m,3} + (\psi_1, \psi_1), & A(\psi_2, \psi_1) \xi_{m,3} + (\psi_2, \psi_1), & \dots \\ A(\psi_1, \psi_2) \xi_{m,3} + (\psi_1, \psi_2), & A(\psi_2, \psi_2) \xi_{m,3} + (\psi_2, \psi_2), & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A(\psi_1, \psi_n) \xi_{m,3} + (\psi_1, \psi_n), & A(\psi_2, \psi_n) \xi_{m,3} + (\psi_2, \psi_n), & \dots \end{pmatrix}$$

$$B_m = \begin{pmatrix} A(\psi_1, \psi_1) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_1) \xi_{m,1}, & A(\psi_2, \psi_1) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_1) \xi_{m,1}, & \dots \\ A(\psi_1, \psi_2) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_2) \xi_{m,1}, & A(\psi_2, \psi_2) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_2) \xi_{m,1}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A(\psi_1, \psi_n) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_n) \xi_{m,1}, & A(\psi_2, \psi_n) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_n) \xi_{m,1}, & \dots \end{pmatrix}$$

$$C_m = \begin{pmatrix} A(\psi_1, \psi_1) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_1) \xi_{m,2}, & A(\psi_2, \psi_1) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_1) \xi_{m,2}, & \dots \\ A(\psi_1, \psi_2) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_2) \xi_{m,2}, & A(\psi_2, \psi_2) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_2) \xi_{m,2}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A(\psi_1, \psi_n) \xi_{m,4} + (\psi_1, \psi_n) \xi_{m,2}, & A(\psi_2, \psi_n) \xi_{m,4} + (\psi_2, \psi_n) \xi_{m,2}, & \dots \end{pmatrix}$$

$$D_m = \begin{pmatrix} A(\psi_1, \psi_1) \xi_{m,6} + (\psi_1, \psi_1) \xi_{m,5}, & A(\psi_2, \psi_1) \xi_{m,6} + (\psi_2, \psi_1) \xi_{m,5}, & \dots \\ A(\psi_1, \psi_2) \xi_{m,6} + (\psi_1, \psi_2) \xi_{m,5}, & A(\psi_2, \psi_2) \xi_{m,6} + (\psi_2, \psi_2) \xi_{m,5}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A(\psi_1, \psi_n) \xi_{m,6} + (\psi_1, \psi_n) \xi_{m,5}, & A(\psi_2, \psi_n) \xi_{m,6} + (\psi_2, \psi_n) \xi_{m,5}, & \dots \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{m,0} = \begin{pmatrix} \alpha_{0,1}^m \\ \alpha_{0,2}^m \\ \vdots \\ \alpha_{0,n}^m \end{pmatrix} \quad \Lambda_{m,1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1}^m \\ \alpha_{1,2}^m \\ \vdots \\ \alpha_{1,n}^m \end{pmatrix}$$

pro  $m = 1, \dots, M$ . Pro pravou stranu dostaneme:

$$E_1 = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} l(\psi_1)(t) dt + (u_0, \psi_1) \\ \int_{t_0}^{t_1} l(\psi_2)(t) dt + (u_0, \psi_2) \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} l(\psi_n)(t) dt + (u_0, \psi_n) \end{pmatrix}$$

$$E_m = \begin{pmatrix} \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\psi_1)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} + \alpha_{1,j}^{m-1} \xi_{m,2})(\psi_j, \psi_1) \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\psi_2)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} + \alpha_{1,j}^{m-1} \xi_{m,2})(\psi_j, \psi_2) \\ \vdots \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} l(\psi_n)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} + \alpha_{1,j}^{m-1} \xi_{m,2})(\psi_j, \psi_n) \end{pmatrix}$$

pro  $m = 2, \dots, M$  a

$$F_m = \begin{pmatrix} \int_{t_{m-1}}^{t_m} t l(\psi_1)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} \xi_{m,2} + \alpha_{1,j}^{m-1} (\xi_{m,2})^2)(\psi_j, \psi_1) \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} t l(\psi_2)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} \xi_{m,2} + \alpha_{1,j}^{m-1} (\xi_{m,2})^2)(\psi_j, \psi_2) \\ \vdots \\ \int_{t_{m-1}}^{t_m} t l(\psi_n)(t) dt + \sum_{j=1}^n (\alpha_{0,j}^{m-1} \xi_{m,2} + \alpha_{1,j}^{m-1} (\xi_{m,2})^2)(\psi_j, \psi_n) \end{pmatrix}$$

pro  $m = 1, \dots, M$ .

## 5.2 Numerický výpočet integrálů

Integrály v (3.56) - (3.61) budeme počítat numericky pomocí kvadraturních vzorců. Pro integraci přes každou stranu hranice  $\partial K_i$  a přes časový interval budeme používat dvoubodový Gaussův kvadraturní vzorec, který je definován pro interval  $[-1, 1]$  takto:

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (5.24)$$

Tento vzorec je přesný pro polynomy až do třetího stupně.

Pro integraci přes trojúhelníkovou oblast  $K \in \mathbb{R}^2$  budeme používat tříbodový kvadrurní vzorec:

$$\int_K g(x) dx \approx \frac{1}{3} |K| \sum_{j=1}^3 g(Q_j), \quad (5.25)$$

kde  $Q_1, Q_2$  a  $Q_3$  jsou středy stran trojúhelníka  $K$  a  $|K|$  je jeho plocha. Tento vzorec je přesný pro polynomy až do druhého stupně. Pomocí těchto vzorců nyní odvodíme vzorce pro následující dva typy integrálů.

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma} g(x, t) dx dt \quad \text{a} \quad \int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_K h(x, t) dx dt,$$

kde  $\Gamma$  je úsečka spojující body  $P = [x_1, y_1]$  a  $Q = [x_2, y_2]$ . Položme:

$$\gamma(t) = \int_{\Gamma} g(x, t) dx \quad \text{a} \quad \eta(t) = \int_K h(x, t) dx.$$

Dále označme:

$$t_- = \frac{t_m + t_{m-1}}{2} - \frac{t_m - t_{m-1}}{2\sqrt{3}} \quad (5.26)$$

$$t_+ = \frac{t_m + t_{m-1}}{2} + \frac{t_m - t_{m-1}}{2\sqrt{3}} \quad (5.27)$$

$$x_- = \left[ \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}} \right] \quad (5.28)$$

$$x_+ = \left[ \frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}} \right]. \quad (5.29)$$

Potom při použití substituce  $t = \frac{t_m + t_{m-1}}{2} + \tau \frac{t_m - t_{m-1}}{2}$  pro  $\tau \in [-1, 1]$  a následně užitím (5.24) dostaneme:

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma} g(x, t) \approx \frac{t_m - t_{m-1}}{2} (\gamma(t_-) + \gamma(t_+)), \quad (5.30)$$

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_K h(x, t) \approx \frac{t_m - t_{m-1}}{2} (\eta(t_-) + \eta(t_+)). \quad (5.31)$$

Integrál reprezentující funkci  $\gamma(t)$  pomocí lineární parametrizace

$$[x(\zeta), y(\zeta)] = \left[ \frac{x_2 + x_1}{2} + \zeta \frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2} + \zeta \frac{y_2 - y_1}{2} \right], \quad \zeta \in [-1, 1],$$

transformujeme na interval  $[-1, 1]$  a opět použijeme (5.24). Na výpočet funkce  $\eta(t)$  přímo použijeme (5.25). Dostaneme tedy aproximace:

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_{\Gamma} g(x, t) \approx \frac{t_m - t_{m-1}}{4} |\Gamma| (g(x_-, t_-) + g(x_+, t_-) + g(x_-, t_+) + g(x_+, t_+)), \quad (5.32)$$

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \int_K h(x, t) \approx \frac{t_m - t_{m-1}}{6} |K| \left( \sum_{j=1}^3 h(Q_j, t_-) + h(Q_j, t_+) \right). \quad (5.33)$$

# Kapitola 6

## Numerické experimenty

V této kapitole se věnujeme nejprve krátce popisu programu, kterým byly provedeny numerické experimenty, a pak shrneme výsledky, které byly tímto programem dosaženy.

### 6.1 Popis programu

Jak jsme se již zmínili v odstavci 5.1, budeme pro jednoduchost na každé časové vrstvě uvažovat stejnou triangulaci oblasti  $\Omega$ . Dále v rovnici (2.8) budeme uvažovat vektor  $\mathbf{v}$  konstantní a funkci  $c$  nezávislou na čase. Pokud bychom  $\mathbf{v}$  neuvažovali konstantní, ale závislé na prostorových proměnných, ztížilo by to pouze výpočet křivkových integrálů přes úsečky  $\Gamma_{ij}$ , kde by se muselo zjišťovat dělení  $\Gamma_{ij}$  na  $\Gamma_{ij}^+$  a  $\Gamma_{ij}^-$ . Pokud by funkce  $\mathbf{v}$  a  $c$  závisely na čase, musela by se na každé časové vrstvě počítat matice soustavy mnohem pracněji. Tato zjednodušení nám umožní vypočítat formy  $A(\psi_i, \psi_j)$  a  $(\psi_i, \psi_j)$  předem a to pouze jednou. Pak již soustavy lineárních rovnic se vytváří kombinací prvků  $A(\psi_i, \psi_j)$  a  $(\psi_i, \psi_j)$ , které se násobí koeficienty  $\xi_{m,l}$  (viz odst. 5.1). Objemové resp. křivkové integrály byly počítány pomocí kvadratických vzorců (5.32) resp. (5.33). Poněvadž matice jednotlivých soustav jsou zřejmě nesymetrické a řídké, byly proto řešeny iterační metodou GMRES (Generalized Minimal Residual). Iterační proces byl zastaven, když residuum bylo menší než  $10^{-12}$ . Celý program je naprogramován v jazyce C.

### 6.2 Numerické výsledky

Abychom mohli otestovat numerickou metodu, zvolíme opačný postup než je v praxi. Tedy nejprve si zvolíme přesné řešení. Toto řešení dosadíme do rovnic (2.8) - (2.11) a z nich dopočítáme pravou stranu  $g$ , okrajové podmínky  $u_D, g_N$

a počáteční podmínku  $u^0(x)$ . Toto dosadíme jako parametry do programu, který vypočítá přibližné řešení a to budeme srovnávat s přesným řešením.

Nyní se krátce zmíníme o řádu konvergence metody a o způsobu, jak budeme počítat experimentální řád konvergence. Řekneme, že  $p$  je *řád konvergence* v prostoru, jestliže pro chybu metody

$$e_h = \|u_h - u\|_{L^2([0,T],\Omega)}$$

existuje konstanta  $C > 0$  nezávislá na  $h$  tak, že

$$e_h \leq Ch^p,$$

kde  $h$  je parametr metody, vzhledem ke kterému řád metody zkoumáme. Pro výpočet *experimentálního řádu konvergence* budeme předpokládat, že chyba metody se bude chovat dle vzorce

$$e_h \approx Ch^p.$$

Máme-li  $e_{h_1}$  a  $e_{h_2}$  pro  $h_1 \neq h_2$ , potom  $p$  vypočteme následujícím postupem. Máme

$$e_{h_1} \approx Ch_1^p \quad \text{a} \quad e_{h_2} \approx Ch_2^p.$$

Pak

$$\frac{e_{h_1}}{e_{h_2}} \approx \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^p$$

a tedy

$$p \approx \frac{\log(e_{h_1}) - \log(e_{h_2})}{\log(h_1) - \log(h_2)}, \quad (6.1)$$

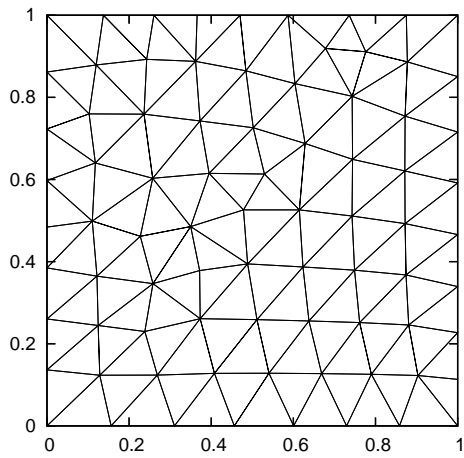
kde  $p$  bude hledaný experimentální řád konvergence. Z těchto úvah můžeme definovat lokální experimentální řád konvergence

$$p_l \approx \frac{\log(e_{h_{l-1}}) - \log(e_{h_l})}{\log(h_{l-1}) - \log(h_l)}, \quad l = 2, \dots, k, \quad (6.2)$$

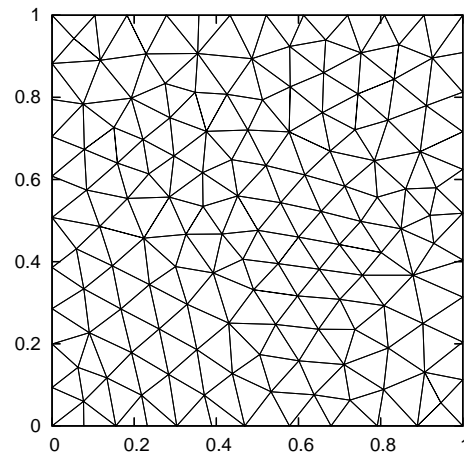
kde  $k$  je počet numerických experimentů. Tzv. globální experimentální řád konvergence  $p$  vypočteme jako aritmetický průměr  $p_l$ ,  $l = 2, \dots, k$ . To bude hledaný odhad experimentálního řádu konvergence. Obdobně budeme počítat experimentální řád konvergence  $q$  v čase.

Numerické experimenty byly provedeny pro vektor  $\mathbf{v} = (1, 1)$ , pro funkci  $c = (xy + 0.1)$ , pro  $\varepsilon = 1.0$  a  $\varepsilon = 0.1$  na oblasti  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  a v časovém

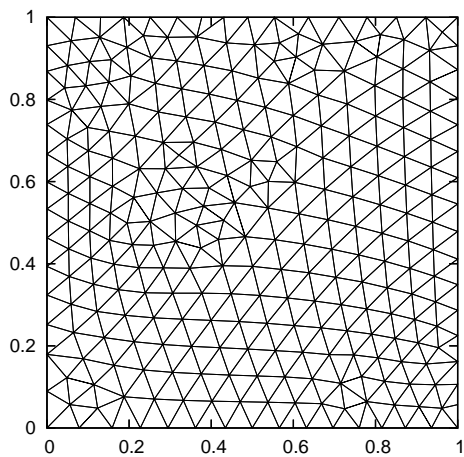
intervalu  $(0,1)$ . Dále bylo pomocí programu ANGENER [1] vygenerováno následujících sedm nestrukturovaných triangulací  $\mathcal{T}_{h_l}, l = 1, \dots, 7$ , na kterých byly experimenty provedeny.



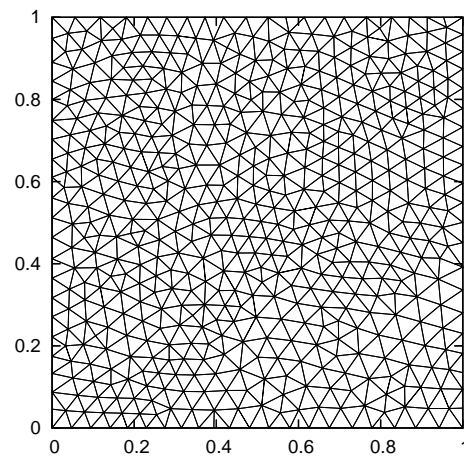
$\mathcal{T}_{h_1}$



$\mathcal{T}_{h_2}$

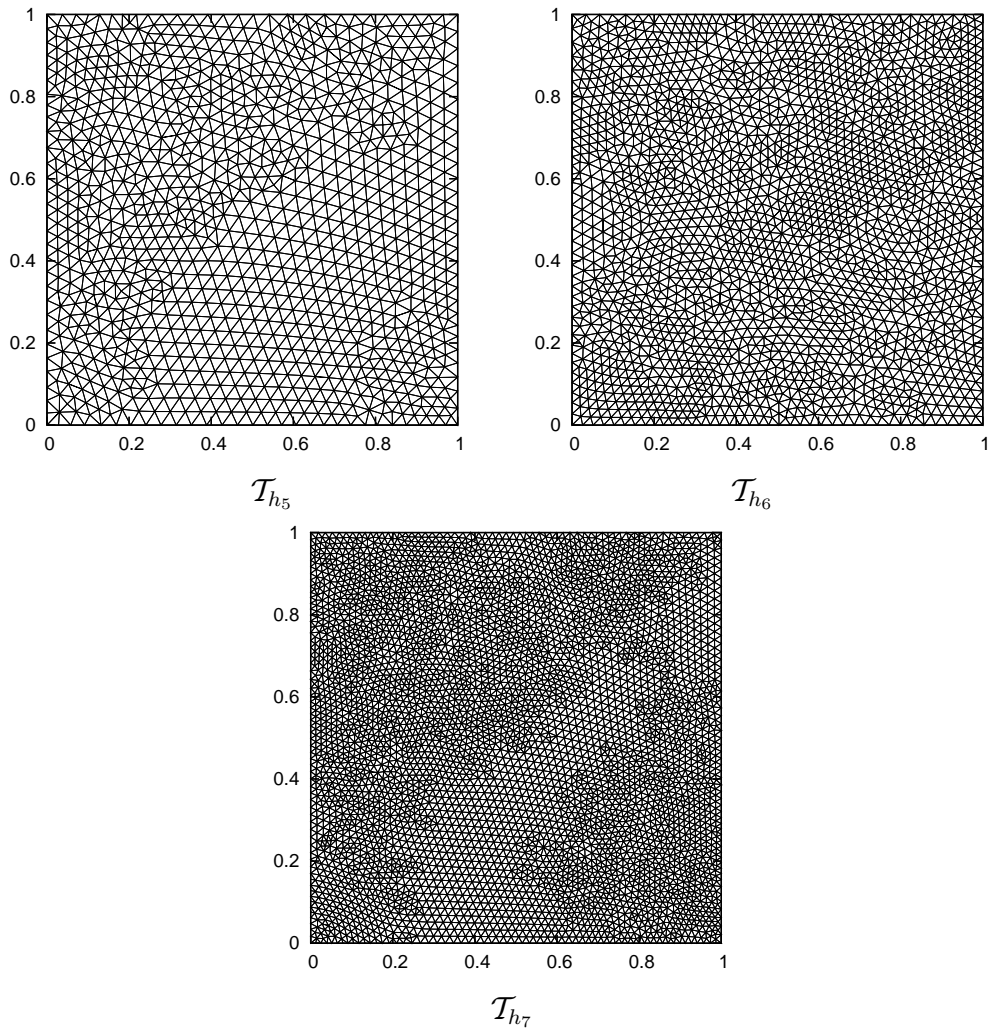


$\mathcal{T}_{h_3}$



$\mathcal{T}_{h_4}$





Parametry těchto triangulací jsou uvedeny v tabulce 1.  $\#\mathcal{T}_{h_l}$  značí počet elementů a  $h_l$  je parametr  $\mathcal{T}_{h_l}$ .

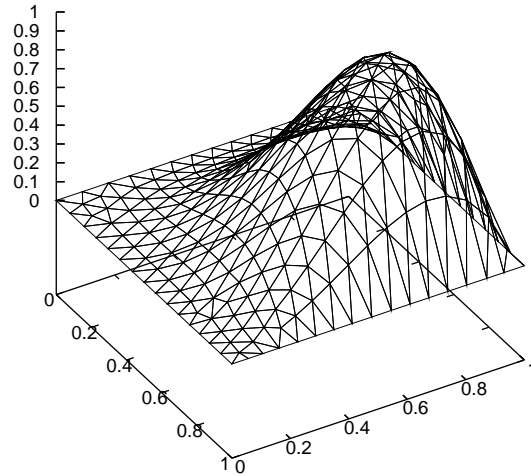
l	$\#\mathcal{T}_{h_l}$	$h_l$
1	127	0,1823
2	254	0,1325
3	504	0,0907
4	1009	0,0680
5	2043	0,0464
6	4014	0,0347
7	8997	0,0220

Tabulka 1

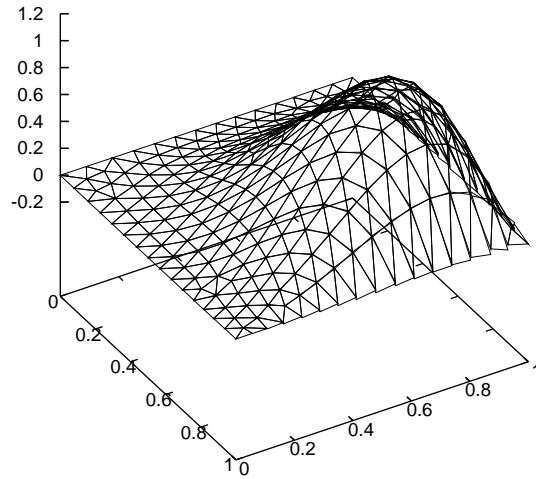
Pro výpočet experimentálního řádu přesnosti  $p$  v prostoru bylo zvoleno přesné řešení  $u = 16x^2(1-x^2)y^2(1-y^2)t$  (komplikované v prostoru, jednoduché v čase) a krok v čase  $\tau = 0.001$ . Výsledky ukazuje tabulka 2. Graf přesného resp. vypočteného přibližného řešení v čase  $t = 1.0$  na triangulaci  $\mathcal{T}_{h_3}$  pro  $\varepsilon = 1.0$  ukazuje obrázek 2. resp. obrázek 3.

l	$h_l$	$\varepsilon = 1.0$		$\varepsilon = 0.1$	
		$e_{h_l}$	$p_l$	$e_{h_l}$	$p_l$
1	0,1823	7.886E-03	-	6.300E-03	-
2	0,1325	3.305E-03	2.726	3.026E-03	2.298
3	0,0907	1.879E-03	1.490	1.674E-03	1.562
4	0,0680	1.099E-03	1.862	9.402E-04	2.003
5	0,0464	4.647E-04	2.252	4.390E-04	1.993
6	0,0347	2.767E-04	1.784	2.489E-04	1.953
7	0,0220	1.121E-04	1.983	1.062E-04	1.869
řád $p$		2.016		1.946	

Tabulka 2



Obrázek 2



Obrázek 3

Pro výpočet experimentálního řádu konvergence  $q$  v čase bylo zvoleno přesné řešení  $u = \frac{1-e^{5t}}{1-e^5}(x+y)$  (komplikované v čase, jednoduché v prostoru), které bylo počítáno na triangulaci  $\mathcal{T}_{h_3}$ . Výsledky ukazuje tabulka 3.

$\tau$	$\varepsilon = 1.0$		$\varepsilon = 0.1$	
	$\tau_l$	$q_l$	$\tau_l$	$q_l$
0.100	3.753E-03	-	4.134E-03	-
0.050	9.815E-04	1.935	1.037E-03	1.995
0.020	1.611E-04	1.972	1.658E-04	2.001
0.010	4.070E-05	1.985	4.141E-05	2.001
0.005	1.024E-05	1.991	1.035E-05	2.000
0.002	1.646E-06	1.995	1.656E-06	2.000
0.001	4.124E-07	1.997	4.133E-07	2.002
řád $q$		1.979		2.000

Tabulka 3

Jak vidíme, experimentální řád konvergence v čase i v prostoru v  $L^2$ -normě je roven dvěma pro lineární elementy. Odtud vidíme, že odhad (4.17), zahrnující i chování chyby v  $L^2$ -normě, je v této normě suboptimální. Získání optimálních odhadů chyby v  $L^2$ -normě je obtížný problém. Pro úlohy a metody uvažované v této práci se jedná o otevřený problém.

# Kapitola 7

## Závěr

V této diplomové práci jsme se zabývali použitím nespojité Galerkinovy metody na řešení konvektivně-difuzních problémů. Uvažovali jsme několik případů: prostorová semidiskretizace pro řešení lineárních a nelineárních problémů a kompletní časoprostorová nespojitá Galerkinova diskretizace pro řešení lineárního problému. V prvním případě jsme provedli důkaz odhadu chyby v případě modifikace váhy v penalizačních členech, která umožňuje odstranit příliš silný předpoklad na nekonformitu sítě. Pro časoprostorovou nespojitou Galerkinovu metodu byly vypracovány její algoritmizace a program v jazyce C. Pomocí tohoto programu bylo provedeno testování vypracované metody.

# Literatura

- [1] V. Dolejší: *ANGENER V3.0*,  
<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~dolejsi/angen/angen.htm>,  
Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy.
- [2] V.Dolejší and M.Feistauer, *Error estimates of the discontinuous Galerkin method for nonlinear nonstationary convection-diffusion problems*, preprint No. MATH-knm-2004/5, Charles University Prague, Faculty of Mathematics and Physics, School of Mathematics.
- [3] M.Feistauer and K.Švadlenka, *Space-time discontinuous Galerkin method for solving nonstationary convection-diffusion-reaction problems*, preprint No. MATH-knm-2005/2, Charles University Prague, Faculty of Mathematics and Physics, School of Mathematics.
- [4] M.Feistauer and K.Švadlenka, *Discontinuous Galerkin method of lines for solving nonstationary singularly perturbed linear problems*, J. Numer. Math., 2 (2004), pp. 97-117.
- [5] C. Johnson and J. Pitkäranta, *An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation*, Math. Comp., 46 (1986), pp. 1-26.
- [6] P. Le Saint and P.-A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, in Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (Ed. C. deBoor), Academic Press, 1974, pp. 89-145.
- [7] Reed, W.H.; Hill, T.R. *Triangular mesh method for the neutron transport equation*. Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [8] K.Rektorys, *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*, Reidel, Dodrecht, 1982.