Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jindřich Lechner

Jamesova věta a problém hranice

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce:	doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Matematická analýza

Praha 2012

Děkuji vedoucímu práce doc. RNDr. Jiřímu Spurnému, Ph.D. za odborné vedení a za poskytnutí a zapůjčení potřebné literatury.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 28. 11. 2012 Podpis autora

Název práce: Jamesova věta a problém hranice

Autor: Jindřich Lechner

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: Nechť G je podmnožinou duálu reálného Banachova prostoru X a $F \subset G$. Pak F je Jamesovou hranicí G, jestliže každý w^*-spojitý lineární funkcionál na X nabývá v nějakém bodě množiny F svého suprema na G. Ptáme se, zda normově omezená množina v X, která je spočetně kompaktní v topologii generované F, je nutně sekvenciálně kompaktní v topologii generované G. Pozitivní řešení tohoto problému je hlavním obsahem této práce. Jako důsledek je pak získán Jamesův popis slabě kompaktních množin v reálném Banachově prostoru. Díky Eberleinově-Šmuljanově větě vyplyne kladné řešení tzv. problému hranice jako speciální případ pozitivní odpovědi na výše nastolenou otázku. Ta je dále diskutována v situaci Banachových prostorů nad tělesem komplexních čísel. V takovém případě nemůžeme použít starou definici Jamesovy hranice. Ukazuje se však, že je možné „přirozeným“ způsobem redefinovat pojem Jamesovy hranice, a že za této nové definice dokážeme též na naši otázku odpovědět pozitivně.

Klíčová slova: Banachovy prostory, Jamesova hranice, kompaktnost v projektivně generovaných topologiích, problém hranice, slabá kompaktnost, Jamesova věta

Title: The James theorem and the boundary problem

Author: Jindřich Lechner

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Spurný, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: Let G be a subset of the dual of a real Banach space X and $F \subset G$. Then F is a James boundary of G if each w^*-continuous linear functional on X attains its supremum over G on an element of the set F. We ask whether a norm bounded subset of X which is countably compact for the topology generated by F is necessary sequentially compact for the topology generated by G. The main content of our work is a positive solution to this problem. As a corollary we obtain James characterization of weakly compact subsets of a real Banach space. Due to the Eberlein-Šmuljan theorem a positive solution to the so called boundary problem is shown as a special case of the affirmative answer to the question raised above. The question is further discussed for a case of Banach spaces defined over the complex field. In this case we cannot use the old definition of the James boundary but by a "natural" way it is possible to redefine the term James boundary and then we are able to answer our question positively again.

Keywords: Banach spaces, James boundary, compactness in projectively generated topologies, boundary problem, weak compactness, James theorem

Obsah

Značení

Nejprve několik slov ke značení. V celé této práci označujeme důležité číselné množiny takto

ω	:	množina všech přirozených čísel včetně 0,
$\mathbb{R}$	:	množina všech reálných čísel,
$\mathbb{R}_0^+$	:	množina všech nezáporných reálných čísel,
$\mathbb{C}$	:	množina všech komplexních čísel.

Píšeme-li $x \subset y$, pak x je vlastní, nebo nevlastní podmnožinou množiny y. Je-li f funkce definovaná na množině G, pak symbolem $f[G]$ označujeme obraz množiny G při zobrazení f.

Je-li X normovaným lineárním prostorem nad tělesem reálných, nebo komplexních čísel, pak obrázkem $||\cdot||$ značíme příslušnou normu na X, znakem X^* rozumíme duál prostoru X opatřený duální normou, kterou opět zapisujeme takto $||\cdot||$, a symbolem B_X rozumíme uzavřenou kouli v X o středu 0 a poloměru 1. Místo $(X^*)^*$ píšeme X^{**}. Pokud hovoříme o omezené množině v normovaném lineárním prostoru, pak máme na mysli normově omezenou množinu.

Je-li X vektorovým prostorem a F je podmnožinou algebraického duálu prostoru X, pak $\sigma(X, F)$ označuje topologii na X projektivně generovanou množinou F. Tato topologie nemusí být Hausdorffova. Pokud však F odděluje body X, pak $\sigma(X, F)$ je lokálně konvexní topologií. Je-li X normovaným lineárním prostorem a A je podmnožinou prostoru X^*, pak $\overline{A}^*$ značí w^*-uzávěr množiny A.

Je-li $p \in \omega$ a f zobrazením s definičním oborem p, pak f nazýváme p-konečnou posloupností a $(\alpha_n)_{n<p}$, kde pro každé $n \in p$ platí $\alpha_n = f(n)$, je jiným označením pro zobrazení f. Je-li f zobrazením s definičním oborem ω, pak f nazýváme (nekonečnou) posloupností a $(\alpha_n)_{n\in\omega}$, kde pro každé $n \in \omega$ platí $\alpha_n = f(n)$, je jiným označením pro zobrazení f. Je-li f zobrazením s definičním oborem $\omega \setminus \{0\}$, pak f nazýváme (nekonečnou) posloupností a $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$, kde pro každé $n \in \omega \setminus \{0\}$ platí $\alpha_n = f(n)$, je jiným označením pro zobrazení f.

Úvod

Cílem této práce je ukázat pozitivní řešení tzv. problému hranice. Dříve, než přistoupíme k popisu problému, si však řekněme, co máme aktuálně pod pojmem hranice na mysli.

Definice 1 (Jamesova hranice). Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ a $F \subset G$. Řekneme, že F *je Jamesovou hranicí* G, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $f \in F$ takové, že

$$f(x) = \sup_{g \in G} g(x).$$

Jestliže $B \subset S_{X^*}$ je Jamesovou hranicí B_{X^*}, pak B nazýváme *Jamesovou hranicí pro* X. V tomto speciálním případě má s ohledem na Hahnovu-Banachovu větu definice Jamesovy hranice následující tvar

$$(\forall x)\,(\; x \in X \Rightarrow [\,(\exists\, b)\,(\, b \in B \;\&\; b(x) = ||x||\,)\,]\;)\,.$$

Otázka, jež proslula pod názvem problém hranice, byla v roce 1987 položena v ([5], otázka V.2) G. Godefroyem. Godefroy zhruba napsal: „Nechť E je reálným Banachovým prostorem, B je Jamesovou hranicí pro E a K je normově omezenou a $\sigma(E, B)$[1]-kompaktní podmnožinou prostoru E. Je K slabě kompaktní?“ V roce 1987 byla již známa pozitivní odpověď na tuto otázku v případě jistých speciálních hranic, konkrétně například pokud množina K v otázce V.2 byla konvexní [3] nebo $K = \mathrm{ext} B_{E^*}$ [2]. Poznamenejme, že každá slabě kompaktní množina je $\sigma(E, B)$-kompaktní, neboť topologie $\sigma(E, B)$ je hrubší než slabá topologie. Gilles Godefroy se tedy ptá, zda v Banachově prostoru E mají tyto dvě topologie – slabá a topologie projektivně generovaná Jamesovou hranicí pro E – stejné normově omezené kompaktní množiny. V roce 2010 Godefroyovi pozitivně odpověděl H. Pfitzner v článku [6]. Pfitzner ve skutečnosti dokázal trochu něco jiného, totiž, že pokud X je reálným Banachovým prostorem a F je Jamesovou hranicí G, pak každá normově omezená $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množina je $\sigma(X, \overline{G}^*)$-sekvenciálně kompaktní. Díky Eberleinově-Šmuljanově větě o ekvivalenci slabé sekvenciální kompaktnosti a slabé kompaktnosti v Banachových prostorech pak dostaneme pozitivní řešení problému hranice jako speciální případ Pfitznerova výsledku.

Tato práce se při řešení problému hranice opírá o postup realizovaný Pfitznerem v [6]. Našimi základními stavebními kameny jsou:

- $\left.\begin{array}{l}\text{kombinatorická Ramseyova věta (věta 2)}\\ \text{Banachova-Alaogluova věta}\end{array}\right\}$ Behrendsova věta (věta 17),
- Simonova nerovnost (věta 21).

[1] Každá Jamesova hranice pro E odděluje body E, neboť kdykoli si vezmeme dva různé body $x \in E$ a $y \in E$, pak existuje funkcionál $b \in B$ takový, že $b(x-y) = \sup_{g \in B_{E^*}} g(x-y) = ||x-y|| > 0$, z čehož okamžitě vidíme, že $b(x) \neq b(y)$. To znamená, že topologie $\sigma(E, B)$ je Hausdorffova. Avšak obecně nemůžeme říci, že by Jamesova hranice nějaké množiny projektivně generovala Hausdorffovu topologii.

Konkrétním projevem Ramseyovy věty je Behrendsův výsledek (věta 17), v jehož pozadí stojí kromě kombinatorického argumentu důležitá věta z funkcionální analýzy – Banachova-Alaogluova věta. Behrendsův výsledek tvoří v trochu slabším vydání (bez použití Banachovy-Alaogluovy věty) jádro důkazu kvantitativní verze Rosenthalovy ℓ^1-věty ([1], věta 3.2).

Hlavní část řešení našeho úkolu spočívá v důkazu tvrzení 37 (Pfitzner): Pokud X je reálným Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ je omezenou množinou a $F \subset G$ je Jamesovou hranicí G, pak každá posloupnost v omezené $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množině obsahuje $\sigma(X, \overline{G}^*)$-cauchyovskou podposloupnost. V důkazu se významně používá modifikovaná Haglerova-Johnsonova konstrukce (tvrzení 36), jejímž jádrem je právě věta 17 (Behrends) a věta 21 (Simonova nerovnost), které se však v důkazu neobjevují přímo, nýbrž prostřednictvím tvrzení 23 (O (absolutně) konvexních blocích) a důsledku 30 (δ-Simonova rovnost), jež proto nazýváme mizejícími prostředníky. Hovoříme také o syntéze mizejících prostředníků v modifikovanou Haglerovu-Johnsonovu konstrukci. Ze spojení tvrzení 37 (Pfitzner) s důsledkem 28 (Simonova rovnost) snadno dostaneme kýžený výsledek, větu 38: Pokud X je reálným Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ omezenou množinou a $F \subset G$, pak každá posloupnost v omezené $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množině obsahuje $\sigma(X, \overline{G}^*)$-konvergentní podposloupnost.

Po uvedení některých důsledků věty 38, například Jamesovy charakterizace slabě kompaktních množin v reálných Banachových prostorech, se naše pozornost obrátí ke komplexnímu případu. Co by se stalo, kdybychom místo v reálném Banachově prostoru pracovali v komplexním Banachově prostoru? První otázkou je, jak nově definovat pojem Jamesovy hranice. To nebude příliš velký problém. Dále se ptáme, zda můžeme postupovat stejně jako v reálné verzi, tedy zda projde komplexní verze Behrendsovy věty, mizejících prostředníků, Haglerovy-Johnsonovy konstrukce, Pfitznerova tvrzení. Odpověď je v principu kladná. Až na několik odlišností budeme moci postupovat stejně.

1. Přípravné práce

V této kapitole uvádíme dva základní stavební kameny – Behrendsovu větu stojící na Ramseyově větě a Banachově-Alaogluově větě a Simonovu nerovnost.

1.1 Kombinatorická ingredience, Behrends

Nyní obraťme naši pozornost k Behrendsovi. V první podsekci se budeme věnovat kombinatorické ingredienci (Ramseyova věta) Behrendsovy věty a v druhé podsekci vlastnímu Behrendsově výsledku.

1.1.1 Ramseyova věta

V této podsekci věnované Ramseyově větě se budeme držet následujícího značení. Znakem $<$ budeme rozumět relaci $\in$, jež je dobrým ostrým uspořádáním na množině ω. Symbolem $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ budeme rozumět posloupnost takovou, že pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ bude T_r množinou rostoucích r-konečných posloupností přirozených čísel; prvky množiny T_r budeme také chápat jako uspořádané r-tice přirozených čísel $(i_0, \ldots, i_{r-1})$, pro které platí

$$(\forall m)\,(\forall n)\,((m < n \;\&\; n < r) \Rightarrow i_m < i_n)\,. \tag{*}$$

Poznamenejme, že v dalším (i mimo tuto podsekci) nebudeme rozlišovat mezi rostoucími r-konečnými posloupnostmi přirozených čísel a uspořádanými r-ticemi přirozených čísel splňujícími (*). Znakem M budeme označovat nekonečnou množinu přirozených čísel a znakem K konečnou množinu přirozených čísel.

Nyní budeme směřovat k důkazu Ramseyovy věty, jejíž formulace v ([1], věta 2.1) je následující.

Věta 2 (Ramsey). *Nechť $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. Nechť pro každou nekonečnou množinu $L \subset \omega$ existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(\zeta_j)_{j\in\omega}$ taková, že pro každé $j \in \omega$ je $\zeta_j \in M$, a pro každé $r \in \omega$ platí $(\zeta_j)_{j<r+1} \in T_{r+1}$. Pak existuje nekonečná množina $N \subset \omega$ taková, že pro každé $r \in \omega$ a každou rostoucí posloupnost $(\beta_i)_{i<r+1}$ takovou, že pro každé $i < r + 1$ je $\beta_i \in N$, platí $(\beta_i)_{i<r+1} \in T_{r+1}$.*

Než přistoupíme k vlastnímu důkazu věty 2, představíme jisté pojmy, které se ukáží jako velmi užitečné při konstrukci množiny N, a dokážeme za účasti těchto pojmů tři pomocná tvrzení. Nejprve však vyslovíme lemma, jehož důkaz uvádět nebudeme, neboť je snadný.

Lemma 3 (Očíslování přirozených čísel podle velikosti). *Nechť $N \subset \omega$ je množinou mohutnosti $k \in \omega + 1$. Pak existuje právě jedna rostoucí posloupnost přirozených čísel α definovaná na k taková, že $\alpha[k] = N$.*

Definice 4 (Špatné, dobré a totálně dobré množiny). Nechť K, M a $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. Nechť dále α je rostoucí k-konečnou posloupností přirozených čísel takovou, že $\alpha[k] = K$, kde k je mohutností množiny K.[1]

[1] V případě, že K je prázdnou množinou, pak $k = 0$, a tedy α je prázdnou posloupností.

Řekneme, že K *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *špatnou množinou vzhledem k* M, jestliže pro každou rostoucí posloupnost přirozených čísel $(m_j)_{j\in\omega}$ takovou, že pro každé $j \in \omega$ je $m_j \in M$, existuje $r \in \omega$ takové, že pokud $k = 0$, pak $(m_0, \ldots, m_r) \in T_{r+1}$, a pokud $k > 0$, pak buď $r < k$ a $(\alpha(0), \ldots, \alpha(r)) \notin T_{r+1}$, nebo $r \geq k$ a $(\alpha(0), \ldots, \alpha(k-1), m_0, \ldots, m_{r-k}) \notin T_{r+1}$.

Řekneme, že K *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *dobrou množinou vzhledem k* M, jestliže K není vůči souboru $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatnou množinou vzhledem k M.

Řekneme, že K *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrou množinou vzhledem k* M, jestliže K je vůči souboru $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ dobrou množinou vzhledem ke každé nekonečné podmnožině množiny M.

Definice 5 (Špatné, dobré a totálně dobré body). Nechť K, M, $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ a $n \in \omega$.

Řekneme, že n *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *špatným bodem pro množinu* K *vzhledem k množině* M, jestliže množina $K \cup \{n\}$ je vůči souboru $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatnou množinou vzhledem k množině M.

Řekneme, že n *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *dobrým bodem pro množinu* K *vzhledem k množině* M, jestliže množina $K \cup \{n\}$ je vůči souboru $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ dobrou množinou vzhledem k množině M.

Řekneme, že n *je vůči souboru* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrým bodem pro množinu* K *vzhledem k množině* M, jestliže množina $K \cup \{n\}$ je vůči souboru $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k množině M.

Poznámka 6 (Myšlenka důkazu Ramseyho věty). S ohledem na definici 4 předpoklad Ramseyho věty říká, že prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ dobrou množinou vzhledem ke každé podmnožině množiny ω. Tedy Ramseyho věta předpokládá, že prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω. Množinu N zkonstruujeme induktivně postupným přidáváním bodů, které budou vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrými body pro každou podmnožinu množiny již zkonstruovaných bodů vzhledem k nějaké nekonečné množině. Taková množina N bude mít požadované vlastnosti. Otázkou je však existence právě toho totálně dobrého bodu, jehož bychom chtěli přidat k již ustavené konečné množině. Odpověď na tuto otázku je pozitivní, dokonce existuje nekonečná množina takových bodů vzhledem k níž jsou tyto body totálně dobré vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ pro každou podmnožinu množiny již ustavených bodů.

Poznámka 7. Naše definice špatné a totálně dobré množiny odpovídá symbolům $\downarrow$ a $\uparrow$ používaných v ([1], definice 2.2).

Fakt 8. *Nechť* K, M *a* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. *Nechť* K *je vůči* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrou množinou vzhledem k* M. *Pak zřejmě pro každou množinu* $N \subset M$ *je* K *vůči* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrou množinou vzhledem k* N.

Lemma 9. *Nechť* K, M *a* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. *Nechť* K *je vůči* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrou množinou vzhledem k* M. *Pak existují bod* $m \in M \subset K$ *a nekonečná množina* $N \subset M$ *takové, že* m *je vůči* $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ *totálně dobrým bodem pro množinu* K *vzhledem k* N. *Pokud je* K *neprázdnou množinou, pak navíc* $m > \max K$.

Důkaz. Podle lemmatu 3 existuje rostoucí k-konečná posloupnost přirozených čísel α, kde k je mohutností množiny K, taková, že $\alpha[k] = K$. Dále budeme postupovat sporem. Pokud $K \neq \emptyset$, předpokládejme, že pro každý bod $m \in M$

takový, že $m > \max K$, a každou nekonečnou množinu $N \subset M$ nebude m vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k N. Pokud $K = \emptyset$, pak předpokládejme totéž, avšak tentokrát pro libovolný bod $m \in M$. Rekurzí definujeme posloupnost uspořádaných dvojic $((\beta_s, N_s))_{s \in \omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$

$(1)_s$ $\quad (\forall j)(j < s \Rightarrow (\beta_j < \beta_s \;\&\; \beta_s \in N_j)) \;\&\; \beta_s \in M$,

$(2)_s$ $\quad (\forall j)(j < s \Rightarrow N_s \subset N_j) \;\&\; N_s \subset M$,

$(3)_s$ $\quad \beta_s$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatným bodem pro K vzhledem k N_s.

Pokud $K \neq \emptyset$, položme $\beta_0 := \min\{i : i \in M \;\&\; i > \max K\}$. Pokud však $K = \emptyset$, pak položme jednoduše $\beta_0 := \min M$. Vzhledem k tomu, že $\beta_0 \in M$, existuje podle předpokladu nekonečná množina $N_0 \subset M$ taková, že β_0 je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatným bodem pro K vzhledem k N_0. Tedy dvojice (β_0, N_0) splňuje podmínky $(1)_0$, $(2)_0$ a $(3)_0$. Pokud již pro $s \in \omega \setminus \{0\}$ máme s-konečnou posloupnost dvojic $((\beta_j, N_j))_{j<s}$ splňující $(1)_{s-1}$, $(2)_{s-1}$ a $(3)_{s-1}$, pak položíme

$$\beta_s := \min\{i : i \in N_{s-1} \;\&\; i > \beta_{s-1}\}$$

a protože je splněna podmínka $(2)_{s-1}$, je $\beta_s \in M$, a tedy i s ohledem na $(1)_{s-1}$ dostáváme $(1)_s$. Podle předpokladu a s přihlédnutím k faktu 8 a podmínce $(2)_{s-1}$ není β_s vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k N_{s-1}. To znamená, že existuje nekonečná množina $N_s \subset N_{s-1}$ taková, že β_s je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatným bodem pro K vzhledem k N_s. Pak s ohledem na podmínku $(2)_{s-1}$, je splněna podmínka $(2)_s$. Zřejmě $(s+1)$-konečná posloupnost uspořádaných dvojic $((\beta_j, N_j))_{j<s+1}$ splňuje podmínky $(1)_s$, $(2)_s$ a $(3)_s$. Pak z principu indukce plyne existence posloupnosti $((\beta_s, N_s))_{s \in \omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$ podmínky $(1)_s$, $(2)_s$ a $(3)_s$.

Položme $L := \{x : (\exists i)\,(i \in \omega \;\&\; x = \beta_i)\}$. V tuto chvíli použijeme předpoklad lemmatu. Podle něj je K vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ dobrou množinou vzhledem k L, neboť $L \subset M$. Z definice dobroty plyne existence rostoucí posloupnosti $(\beta_{s_j})_{j \in \omega}$ vybrané z posloupnosti $(\beta_s)_{s \in \omega}$ takové, že platí

$$\begin{aligned}(\forall r)(r \in \omega \Rightarrow ((k = 0 \Rightarrow (\beta_{s_0}, \ldots, \beta_{s_r}) \in T_{r+1}) \;\&\; \\ ((k > 0 \;\&\; r \geq k) \Rightarrow (\alpha(0), \ldots, \alpha(k-1), \beta_{s_0}, \ldots, \beta_{s_{r-k}}) \in T_{r+1}))).\end{aligned} \tag{1}$$

Podle podmínky $(3)_{s_0}$ je však β_{s_0} vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ špatným bodem pro K vzhledem k N_{s_0}. A protože pro každé $j > 0$ je $\beta_{s_j} \in N_{s_0}$, pak špatnost bodu β_{s_0} a současně dobrota množiny K implikuje

$$\begin{aligned}(\exists \tilde{r})(\tilde{r} \in \omega \;\&\; ((k = 0 \;\&\; (\beta_{s_0}, \ldots, \beta_{s_{\tilde{r}}}) \notin T_{\tilde{r}+1}) \vee \\ (k > 0 \;\&\; \tilde{r} \geq k \;\&\; (\alpha(0), \ldots, \alpha(k-1), \beta_{s_0}, \ldots, \beta_{s_{\tilde{r}-k}}) \notin T_{\tilde{r}+1}))).\end{aligned} \tag{2}$$

Zřejmě je (1) ve sporu s (2). $\square$

Lemma 10. *Nechť K, M a $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. Nechť K je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k M. Pak existuje nekonečná množina $D \subset M$ taková, že každé $d \in D$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k D.*

Důkaz. Rekurzí definujeme posloupnost uspořádaných dvojic $((d_s, N_s))_{s \in \omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$

$(1)_s$ $\quad (\forall j)(j < s \Rightarrow d_s \in N_j)$ & $d_s \in M$,

$(2)_s$ $\quad (\forall j)(j \leq s \Rightarrow (d_j < \min N_s)$ & $N_s \subset N_j)$ & $N_s \subset M$,

$(3)_s$ $\quad d_s$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k N_s.

Protože K je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k M, podle lemmatu 9 existují bod $d_0 \in M$ a nekonečná množina $\widetilde{N_0} \subset M$ takové, že d_0 je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k $\widetilde{N_0}$. Položme $N_0 := \widetilde{N_0} \setminus \{i : i \leq d_0\}$. Dvojice (d_0, N_0) splňuje podmínky $(1)_0$, $(2)_0$ a $(3)_0$. Pokud již pro $s \in \omega \setminus \{0\}$ máme s-konečnou posloupnost $((d_j, N_j))_{j<s}$ splňující podmínky $(1)_{s-1}$, $(2)_{s-1}$ a $(3)_{s-1}$, pak vzhledem k tomu, že $N_{s-1} \subset M$, je K vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k N_{s-1}, a podle lemmatu 9 existují bod $d_s \in N_{s-1}$ a nekonečná množina $\widetilde{N_s} \subset N_{s-1}$ takové, že d_s je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k $\widetilde{N_s}$. Pak položíme

$$N_s := \widetilde{N_s} \setminus \{i : i \leq d_s\}.$$

Podmínka $(1)_s$ je splněna, protože platí $(2)_{s-1}$, a $(2)_s$ je splněna s ohledem na definici množiny N_s a na podmínku $(2)_{s-1}$. Zřejmě $(s+1)$-konečná posloupnost $((d_j, N_j))_{j<s+1}$ splňuje $(1)_s$, $(2)_s$ a $(3)_s$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $((d_s, N_s))_{s\in\omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$ podmínky $(1)_s$, $(2)_s$ a $(3)_s$.

Položme $D := \{d : (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; d = d_j)\}$. Pak D je nekonečnou množinou, neboť vzhledem k tomu, že pro každé $s \in \omega$ je splněna první část podmínky $(1)_s$ a současně první část podmínky $(2)_s$, je posloupnost $(d_s)_{s\in\omega}$ rostoucí. Zřejmě je též $D \subset M$, neboť pro každé $s \in \omega$ je splněna druhá část podmínky $(1)_s$. Zvolme libovolný prvek $d \in D$. Pak existuje $j \in \omega$ takové, že $d = d_j$, tedy podle podmínky $(3)_j$ je d vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k N_j. Protože je pro každé $p \in \omega$ takové, že $p > j$, splněna podmínka $(1)_p$, dostáváme inkluzi

$$N_j \supset \{x : (\exists i)\,(i \in \omega \;\&\; i > j \;\&\; x = d_i)\} =: L.$$

Z toho plyne, že d je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro K vzhledem k L, a tedy i vzhledem k D, neboť D se liší od L jen o konečnou množinu. Tím je důkaz hotov. $\square$

Lemma 11. *Nechť M, $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ a $p \in \omega$. Nechť Δ je konečnou množinou přirozených čísel mohutnosti p. Nechť každá množina $\Psi \subset \Delta$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k M. Pak existuje nekonečná množina $D \subset M$ taková, že pro každé $d \in D$ a pro každou $\Psi \subset \Delta$ je d vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro Ψ vzhledem k D.*

Důkaz. Označme postupně všechny podmnožiny množiny Δ takto $\Psi_0, \ldots, \Psi_{2^p-1}$. Rekurzí definujeme 2^p-konečnou posloupnost množin $(D_s)_{s<2^p}$ splňující pro každé $s < 2^p$

$(1)_s$ $\quad (\forall j)(j < s \Rightarrow D_s \subset D_j)$ & $D_s \subset M$,

$(2)_s$ $\quad$ pro každé $d \in D_s$ a každé $i \leq s$ je d vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro Ψ_i vzhledem k D_s.

Lemma 10 dává existenci nekonečné množiny $D_0 \subset M$ takové, že každé $d \in D_0$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro Ψ_0 vzhledem k D_0. Tedy množina D_0 splňuje podmínky $(1)_0$ a $(2)_0$. Nechť již pro $s \in \omega \setminus \{0\}$ máme s-konečnou posloupnost množin $(D_j)_{j<s}$ splňující podmínky $(1)_{s-1}$ a $(2)_{s-1}$. Množina Ψ_s je podle předpokladu vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k M a $D_{s-1} \subset M$, tedy Ψ_s je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou i vzhledem k D_{s-1}, a podle lemmatu 10 existuje nekonečná množina $D_s \subset D_{s-1}$ taková, že každé $d \in D_s$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro Ψ_s vzhledem k D_s. Podmínka $(2)_s$ je splněna, neboť platí $(1)_{s-1}$. Posloupnost $(D_j)_{j<s+1}$ zřejmě splňuje podmínky $(1)_s$ a $(2)_s$.

Princip indukce implikuje existenci 2^p-konečné posloupnosti množin $(D_s)_{s<2^p}$ splňující pro každé $s < 2^p$ podmínky $(1)_s$ a $(2)_s$. Nyní stačí položit $D := D_{2^p-1}$. Množina D má zřejmě požadovanou vlastnost. □

Důkaz věty 2 (Ramsey). Rekurzí definujeme posloupnost dvojic $((\gamma(s), N_s))_{s\in\omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$

$(1)_s$ $\quad (\forall j)(j < s \Rightarrow \gamma(s) > \gamma(j))\ \&\ \gamma(s) \in N_s$,

$(2)_s$ $\quad \gamma(s)$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro každou podmnožinu množiny $\gamma[s]$ vzhledem k N_s.

Podle předpokladu je prázdná množina vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω. Podle lemmatu 11, respektive lemmatu 10, existuje nekonečná množina $N_0 \subset \omega$ taková, že každé $n_0 \in N_0$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro prázdnou množinu vzhledem k N_0. Položme $\gamma(0) := \min N_0$. Zřejmě jsou pro dvojici $(\gamma(0), N_0)$ splněny podmínky $(1)_0$ a $(2)_0$. Pokud již pro $s \in \omega \setminus \{0\}$ máme s-konečnou posloupnost $((\gamma(j), N_j))_{j<s}$ splňující podmínky $(1)_{s-1}$ a $(2)_{s-1}$, pak podle lemmatu 11 existuje nekonečná množina $N_s \subset N_{s-1}$ taková, že pro každé $n_s \in N_s$ a každou $\Psi \subset \gamma[s]$ je n_s vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem pro Ψ vzhledem k N_s. Pak položíme $\gamma(s) := \min\{i : i \in N_s\ \&\ i > \gamma(s-1)\}$. Prvek $\gamma(s)$ je korektně definován, neboť N_s je nekonečnou množinou. Zřejmě posloupnost $((\gamma(j), N_j))_{j<s+1}$ splňuje podmínky $(1)_s$ a $(2)_s$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $((\gamma(s), N_s))_{s\in\omega}$ splňující pro každé $s \in \omega$ podmínky $(1)_s$ a $(2)_s$.

Položme $N := \{n : (\exists p)(p \in \omega\ \&\ n = \gamma(p))\} = \gamma[\omega]$. Množina N je nekonečná, neboť posloupnost $(\gamma(s))_{s\in\omega}$ je rostoucí. Nyní zvolme $\tilde{r} \in \omega$ a rostoucí $(\tilde{r}+1)$-konečnou posloupnost $(\beta_i)_{i<\tilde{r}+1}$ takovou, že pro každé $i < \tilde{r}+1$ je $\beta_i \in N$. Posloupnost $(\beta_i)_{i<\tilde{r}+1}$ je zřejmě podposloupností posloupnosti $(\gamma(s))_{s\in\omega}$, tedy existuje rostoucí $(\tilde{r}+1)$-konečná posloupnost přirozených čísel $(s_i)_{i<\tilde{r}+1}$ taková, že pro každé $i < \tilde{r}+1$ platí $\gamma(s_i) = \beta_i$. Speciálně je splněna podmínka $(2)_{s_{\tilde{r}}}$, tedy pokud $\tilde{r} = 0$, je $\gamma(s_{\tilde{r}})$ vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem speciálně pro prázdnou množinu vzhledem k $N_{s_{\tilde{r}}}$, a pokud $\tilde{r} > 0$, pak $\gamma(s_{\tilde{r}})$ je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrým bodem speciálně pro $\{\gamma(s_0), \ldots, \gamma(s_{\tilde{r}-1})\}$ vzhledem k $N_{s_{\tilde{r}}}$. V obou případech dostáváme

$$(\beta_0, \ldots, \beta_{\tilde{r}}) = (\gamma(s_0), \ldots, \gamma(s_{\tilde{r}})) \in T_{\tilde{r}+1}.$$

□

1.1.2 Výsledek Ehrharda Behrendse

Od této chvíle bude symbol $<$ označovat obvyklé ostré lineární uspořádání na množině $\overline{\mathbb{R}}$, kde $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Definice 12. Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností reálných funkcí definovaných na D takovou, že pro každé $d \in D$ je $(x_n(d))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností v $\mathbb{R}$. Pak definujeme modul $\delta_D(x_n)$ takto

$$\delta_D(x_n) := \sup_{d\in D} \left(\limsup_{n\to\infty} x_n(d) - \liminf_{n\to\infty} x_n(d) \right) \in [0; \infty].$$

Dále definujeme $\tilde{\delta}_D(x_n)$ takto

$$\tilde{\delta}_D(x_n) := \inf\{w :\ (\exists\alpha)\,(\alpha \text{ je podposloupností } (x_n)_{n\in\omega} \ \&\ w = \delta_D\alpha)\}.$$

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ *je δ_D-stabilní*, jestliže $\tilde{\delta}_D(x_n) \geq \delta_D(x_n)$.[2] Podposloupnost δ_D-stabilní posloupnosti je zřejmě též δ_D-stabilní.

Lemma 13. *Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností reálných funkcí definovaných na D takovou, že pro každé $d \in D$ je $(x_n(d))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností v $\mathbb{R}$. Nechť dále $\delta_D(x_n) < \infty$. Pak pro každé $\eta > 0$ existují číslo $\lambda \in \mathbb{R}$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ a bod $d \in D$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a $v \in \omega$ liché platí*

$$\lambda + \frac{1}{2}\delta_D(x_n) + \frac{1}{2}\eta > x_{n_u}(d) > \lambda + \frac{1}{2}\delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta,$$

$$\lambda - \frac{1}{2}\delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta < x_{n_v}(d) < \lambda - \frac{1}{2}\delta_D(x_n) + \frac{1}{2}\eta,$$

z čehož snadno plyne

$$\delta_D(x_n) + \eta > x_{n_u}(d) - x_{n_v}(d) > \delta_D(x_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. Vzhledem k definici $\delta_D(x_n)$ a k faktu, že $\delta_D(x_n) < \infty$, existuje $d \in D$ takové, že

$$\delta_D(x_n) + \eta > \limsup_{n\to\infty} x_n(d) - \liminf_{n\to\infty} x_n(d) > \delta_D(x_n) - \eta. \tag{1}$$

Položme $\varepsilon := \delta_D(x_n) - \eta$, $\varkappa := \delta_D(x_n) + \eta$, $s := \limsup_n x_n(d)$ a $i := \liminf_n x_n(d)$. Pak nerovnosti (1) implikují

$$\frac{s+i+\varepsilon}{2} < s, \qquad \frac{s+i-\varepsilon}{2} > i, \tag{2}$$

$$\frac{s+i+\varkappa}{2} > s, \qquad \frac{s+i-\varkappa}{2} < i. \tag{3}$$

Nyní rekurzí definujeme posloupnost přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky

[2] Zřejmě $\tilde{\delta}_D(x_n) \leq \delta_D(x_n)$ platí vždy, tedy δ_D-stabilita říká, že $\tilde{\delta}_D(x_n) = \delta_D(x_n)$.

$(1)_k$ $\quad$ k je sudé $\Rightarrow (s+i+\varkappa)/2 > x_{n_k}(d) > (s+i+\varepsilon)/2$,

$(2)_k$ $\quad$ k je liché $\Rightarrow (s+i-\varkappa)/2 < x_{n_k}(d) < (s+i-\varepsilon)/2$,

$(3)_k$ $\quad$ $(\forall p)\,((p \in \omega \;\&\; p < k) \Rightarrow n_p < n_k)$.

Definujme množiny $\mathcal{H}$ a $\mathcal{K}$ takto

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{j : \ j \in \omega \;\&\; x_j \geq (s+i+\varkappa)/2\} \quad \text{a} \\ \mathcal{K} &:= \{j : \ j \in \omega \;\&\; x_j \leq (s+i-\varkappa)/2\} \end{aligned}$$

Vzhledem k (3) jsou množiny $\mathcal{H}$ a $\mathcal{K}$ konečné. Položme nyní

$$n_0 := \min\{j : \ j \in \mathcal{S} \;\&\; j > \max \mathcal{H}\},$$

kde $\mathcal{S}$ je množinou těch prvků $n \in \omega$, že

$$x_n(d) > \frac{s+i+\varepsilon}{2}.$$

Objekt n_0 je korektně definován, neboť $\mathcal{S}$ je vzhledem k (2) nekonečnou množinou. Prvek n_0 splňuje podmínky $(1)_0$, $(2)_0$ a $(3)_0$. Nechť pro $k \in \omega \setminus \{0\}$ již máme k-konečnou posloupnost $(n_p)_{p<k}$ splňující podmínky $(1)_{k-1}$, $(2)_{k-1}$ a $(3)_{k-1}$. Pokud k je liché, pak položíme

$$n_k := \min\{j : \ j \in \mathcal{I} \;\&\; j > n_{k-1} \;\&\; j > \max \mathcal{K}\},$$

kde $\mathcal{I}$ je množinou těch prvků $n \in \omega$, že

$$x_n(d) < \frac{s+i-\varepsilon}{2}.$$

Objekt n_k je korektně definován, neboť vzhledem k (2) je $\mathcal{I}$ nekonečnou množinou. A pokud k je sudé, položíme

$$n_k := \min\{j : \ j \in \mathcal{S} \;\&\; j > n_{k-1}\}.$$

Posloupnost $(n_p)_{p<k+1}$ zřejmě splňuje podmínky $(1)_k$, $(2)_k$ a $(3)_k$. Princip indukce implikuje existenci posloupnosti $(n_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky $(1)_k$, $(2)_k$ a $(3)_k$.

Posloupnost $(n_k)_{k\in\omega}$ je zřejmě rostoucí. Položme $\lambda := (s+i)/2$. Pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché dostáváme

$$\lambda + \frac{1}{2}\delta_D(x_n) + \frac{1}{2}\eta = \lambda + \frac{1}{2}\varkappa > x_{n_u}(d) > \lambda + \frac{1}{2}\varepsilon = \lambda + \frac{1}{2}\delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta,$$

$$\lambda - \frac{1}{2}\delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta = \lambda - \frac{1}{2}\varkappa < x_{n_v}(d) < \lambda - \frac{1}{2}\varepsilon = \lambda - \frac{1}{2}\delta_D(x_n) + \frac{1}{2}\eta.$$

□

Lemma 14. *Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností reálných funkcí definovaných na D takovou, že pro každé $d \in D$ je $(x_n(d))_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v $\mathbb{R}$. Pak existuje δ_D-stabilní podposloupnost posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\tilde{\delta}_D(x_n) < \infty$, neboť jinak je posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ δ_D-stabilní. Rekurzí definujeme posloupnost posloupností $((y_n^{(j)})_{n\in\omega})_{j\in\omega}$ splňující pro každé $j \in \omega$

$(1)_j$ pro každé $l \in \omega$ takové, že $l < j$, je $(y_n^{(j)})_{n\in\omega}$ podposloupností posloupnosti $(y_n^{(l)})_{n\in\omega}$ a $(y_n^{(j)})_{n\in\omega}$ je podposloupností posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$,

$(2)_j$ $j \in \omega \setminus \{0\} \Rightarrow \delta_D(y_n^{(j)})_{n\in\omega} < \tilde{\delta}_D(y_n^{(j-1)})_{n\in\omega} + 2^{-j}$.

Položme $(y_n^{(0)})_{n\in\omega} := (x_n)_{n\in\omega}$. Pak jsou zřejmě pro $(y_n^{(0)})_{n\in\omega}$ splněny podmínky $(1)_0$ a $(2)_0$. Nechť již pro $j \in \omega \setminus \{0\}$ máme j-konečnou posloupnost $((y_n^{(p)})_{n\in\omega})_{p<j}$ splňující podmínky $(1)_{j-1}$ a $(2)_{j-1}$. Pak vzhledem k definici veličiny $\tilde{\delta}_D(y_n^{(j-1)})_{n\in\omega}$ existuje posloupnost $(y_n^{(j)})_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(y_n^{(j-1)})_{n\in\omega}$ taková, že

$$\delta_D(y_n^{(j)})_{n\in\omega} < \tilde{\delta}_D(y_n^{(j-1)})_{n\in\omega} + \frac{1}{2^j}.$$

Tedy platí $(2)_j$ a s ohledem na podmínku $(1)_{j-1}$ platí i $(1)_j$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $((y_n^{(j)})_{n\in\omega})_{j\in\omega}$ splňující pro každé $j \in \omega$ podmínky $(1)_j$ a $(2)_j$.

Nyní pro každé $n \in \omega$ položme $z_n := y_n^{(n)}$. Tedy pro každé $k \in \omega$ je posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ počínaje k-tým členem podposloupností posloupnosti $(y_n^{(k)})_{n\in\omega}$. Pro každé $k \in \omega$ dostáváme

$$\tilde{\delta}_D(z_n) \leq \delta_D(z_n) \leq \delta_D(y_n^{(k+1)})_{n\in\omega} < \tilde{\delta}_D(y_n^{(k)})_{n\in\omega} + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \tilde{\delta}_D(z_n) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Provedeme limitní přechod pro $k \to \infty$ a dostaneme rovnost $\tilde{\delta}_D(z_n) = \delta_D(z_n)$. A tedy posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ je hledanou δ_D-stabilní podposloupností posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. $\square$

Lemma 15. *Nechť $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ jsou dvě disjunktní množiny. Pak existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(j_m)_{m\in\omega}$ taková, že pro každé $c \in C$ existuje $u \in \omega$ sudé takové, že $j_u = 2c + 1$, a pro každé $d \in D$ existuje $v \in \omega$ liché takové, že $j_v = 2d + 1$.*

Důkaz. Rekurzí definujeme posloupnost $((j_m, C_m, D_m))_{m\in\omega}$, kde pro každé $m \in \omega$ je $j_m \in \omega$, $C_m \subset \omega$, $D_m \subset \omega$, takto: pokud $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ a $\min C < \min D$, pak položíme $j_0 := 2\min C + 1$ a $C_0 := C \setminus \{\min C\}$; pokud $C \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ a $\min C > \min D$, pak položíme $j_0 := 2\min D$ a $C_0 := C$; pokud $C = \emptyset$ a $D \neq \emptyset$, pak položíme $j_0 := 2\min D$ a $C_0 := C$; pokud $C \neq \emptyset$ a $D = \emptyset$, pak položíme $j_0 := 2\min C + 1$ a $C_0 := C \setminus \{\min C\}$; pokud $C = \emptyset$ a $D = \emptyset$, pak položíme $j_0 := 0$ a $C_0 := C$; ve všech případech definujeme $D_0 := D$; a pokud již pro $s \in \omega$ máme $C_s \subset \omega$, $D_s \subset \omega$ a $j_s \in \omega$, pak definujeme j_{s+1}, C_{s+1} a D_{s+1} takto

Alternativy	s je liché	s je sudé
$C_s \neq \emptyset$, $D_s \neq \emptyset$ a $\min C_s < \min D_s$	$j_{s+1} := 2\min C_s + 1$, $C_{s+1} := C_s \setminus \{\min C_s\}$ a $D_{s+1} := D_s$	$j_{s+1} := 2\min C_s$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$
$C_s \neq \emptyset$, $D_s \neq \emptyset$ a $\min C_s > \min D_s$	$j_{s+1} := 2\min D_s$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$	$j_{s+1} := 2\min D_s + 1$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s \setminus \{\min D_s\}$
$C_s = \emptyset$ a $D_s \neq \emptyset$	$j_{s+1} := 2\min D_s$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$	$j_{s+1} := 2\min D_s + 1$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s \setminus \{\min D_s\}$
$C_s \neq \emptyset$ a $D_s = \emptyset$	$j_{s+1} := 2\min C_s + 1$, $C_{s+1} := C_s \setminus \{\min C_s\}$ a $D_{s+1} := D_s$	$j_{s+1} := 2\min C_s$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$
$C_s = \emptyset$ a $D_s = \emptyset$	$j_{s+1} := j_s + 1$, $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$	$j_{s+1} := j_s + 1$ $C_{s+1} := C_s$ a $D_{s+1} := D_s$

Indukcí ověřme, že posloupnost $(j_m)_{m\in\omega}$ splňuje pro každé $m \in \omega$ podmínku

$$(\star)_m \qquad (\forall l)\,((l \in \omega \;\&\; l < m) \Rightarrow j_l < j_m).$$

Podmínka $(\star)_0$ je zřejmě splněna. Nechť pro $s \in \omega$ je splněna podmínka $(\star)_s$. Ukážeme, že platí i $(\star)_{s+1}$.

Nejprve předpokládejme, že s je liché. Pak $C_{s-1} = C_s$ a $D_s \subset D_{s-1}$. Pokud $C_{s-1} \neq \emptyset$, $D_{s-1} \neq \emptyset$, $\min C_{s-1} > \min D_{s-1}$ a $j_{s+1} = 2\min C_s + 1$, pak

$$j_s = 2\min D_{s-1} + 1 < 2\min C_s + 1 = j_{s+1}.$$

Pokud $C_{s-1} \neq \emptyset$, $D_{s-1} \neq \emptyset$, $\min C_{s-1} < \min D_{s-1}$ a $j_{s+1} = 2\min C_s + 1$, pak

$$j_s = 2\min C_s < j_{s+1}.$$

Pokud $C_{s-1} \neq \emptyset$ a $D_{s-1} = \emptyset$, pak

$$j_s = 2\min C_s < 2\min C_s + 1 = j_{s+1}.$$

Pokud $C_s = \emptyset$ a $D_s \neq \emptyset$, pak $\min D_{s-1} < \min D_s$ a

$$j_s = 2\min D_{s-1} + 1 < 2\min D_s = j_{s+1}.$$

Pokud $C_s \neq \emptyset$, $D_s \neq \emptyset$ a $j_{s+1} = 2\min D_s$, pak $\min C_{s-1} > \min D_s > \min D_{s-1}$ a

$$j_s = 2\min D_{s-1} + 1 < 2\min D_s = j_{s+1}.$$

Případ $C_s = \emptyset$ a $D_s = \emptyset$ je jasný.

Nechť nyní s je sudé. Pak $D_s = D_{s-1}$ a $C_s \subset C_{s-1}$. Pokud $C_{s-1} \neq \emptyset$, $D_{s-1} \neq \emptyset$, $\min C_{s-1} < \min D_{s-1}$ a $j_{s+1} = 2 \min D_s + 1$, pak

$$j_s = 2 \min C_{s-1} + 1 < 2 \min D_s + 1 = j_{s+1}.$$

Pokud $C_{s-1} \neq \emptyset$, $D_{s-1} \neq \emptyset$, $\min C_{s-1} > \min D_{s-1}$ a $j_{s+1} = 2 \min D_s + 1$, pak

$$j_s = 2 \min D_s < 2 \min D_s + 1 < j_{s+1}.$$

Pokud $C_{s-1} = \emptyset$ a $D_{s-1} \neq \emptyset$, pak

$$j_s = 2 \min D_s < 2 \min D_s + 1.$$

Pokud $C_s \neq \emptyset$ a $D_s = \emptyset$, pak $\min C_{s-1} < \min C_s$ a

$$j_s = 2 \min C_{s-1} + 1 < 2 \min C_s.$$

Pokud $C_s \neq \emptyset$, $D_s \neq \emptyset$ a $j_{s+1} = 2 \min C_s$, pak $\min C_{s-1} < \min C_s < \min D_{s-1}$ a

$$j_s = 2 \min C_{s-1} + 1 < 2 \min C_s.$$

Případ $C_s = \emptyset$ a $D_s = \emptyset$ je jasný. Pokud $s = 0$, pak všude v tomto odstavci, kde jsme psali C_{s-1}, budeme psát C, a všude v tomto odstavci, kde jsme psali D_{s-1}, budeme psát D.

Zřejmě posloupnost $(j_m)_{m\in\omega}$ splňuje $(\star)_{s+1}$. Tedy pro každé $m \in \omega$ platí $(\star)_m$, což znamená, že $(j_m)_{m\in\omega}$ je rostoucí. Dále ukážeme, že $(j_m)_{m\in\omega}$ má následující vlastnosti

$$(\forall c)\,(c \in C \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m} = 2c + 1)))\,, \tag{1}$$
$$(\forall d)\,(d \in D \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m+1} = 2d + 1)))\,. \tag{2}$$

Podle lemmatu 3 existuje rostoucí (konečná, nebo nekonečná) posloupnost γ taková, že $\gamma[k] = C \cup D$, kde $k \in \omega + 1$ je definiční obor posloupnosti γ. Pokud $k \in \omega$, pak pro každé $n \in \omega$, $n \geq k$, položíme například $\gamma(n) := 0$. Nyní je γ nekonečnou posloupností a $\gamma[\omega] \supset C \cup D$. Předpokládejme, že $C \cup D \neq \emptyset$, jinak není co dokazovat. Abychom ukázali platnost (1) a (2), stačí dokázat následující formuli

$$\begin{aligned}
&(\forall n)(n \in \omega \Rightarrow \\
&\quad ((\gamma(n) \in C \Rightarrow ((\exists m)(m \in \omega \;\&\; j_{2m} = 2\gamma(n) + 1 \;\&\; \gamma(n) = \min C_{2m-1} \;\&\\
&\qquad\qquad (D_{2m-1} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(n) < \min D_{2m-1})))) \;\&\\
&\quad (\gamma(n) \in D \Rightarrow ((\exists m)(m \in \omega \;\&\; j_{2m+1} = 2\gamma(n) + 1 \;\&\; \gamma(n) = \min D_{2m} \;\&\\
&\qquad\qquad (C_{2m} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma(n) < \min C_{2m}))))))
\end{aligned}$$ [3]

Důkaz proběhne indukcí dle n. Pokud $D \neq \emptyset$ a $\gamma(0) < \min D$ nebo pokud $D = \emptyset$, pak $\gamma(0) = \min C$ a platí $j_0 = 2\gamma(0) + 1$, $C_0 = C \setminus \{\gamma(0)\}$ a $D_0 = D$. Pokud $C \neq \emptyset$ a $\gamma(0) < \min C$ nebo pokud $C = \emptyset$, pak $\gamma_0 = \min D$, $j_0 = 0$, $C_0 = C$, $D_0 = D$, $j_1 = 2\gamma(0) + 1$, $C_1 = C_0$ a $D_1 = D_0 \setminus \{\gamma(0)\}$.

Nyní následuje indukční krok. Nechť pro $s \in \omega$ je $\gamma(s) \in C$. Pak podle indukčního předpokladu existuje $u \in \omega$ sudé takové, že $j_u = 2\gamma(s) + 1$, $\gamma(s) = \min C_{u-1}$

[3] Pokud $m = 0$, pak místo C_{2m-1} uvažujeme C a místo D_{2m-1} uvažujeme D.

a pokud $D_{u-1} \neq \emptyset$, pak $\min D_{u-1} > \gamma(s)$. Pak platí $C_u = C_{u-1} \setminus \{\gamma(s)\}$ a $D_u = D_{u-1}$.

Nechť $\gamma(s+1) \in C$. Pak máme $\gamma(s+1) = \min C_u$. Dále pokud $D_u \neq \emptyset$, pak $\gamma(s+1) < \min D_u$ a $j_{u+1} = 2\gamma(s+1)$, a pokud $D_u = \emptyset$, pak též $j_{u+1} = 2\gamma(s+1)$. V obou případech platí $C_{u+1} = C_u$, $D_{u+1} = D_u$, $j_{u+2} = 2\gamma(s+1)+1$, $\gamma(s+1) = \min C_{u+1}$ a $\gamma(s+1) < \min D_{u+1}$.

Nechť $\gamma(s+1) \in D$. Pak máme $\gamma(s+1) = \min D_u$. Dále pokud $C_u \neq \emptyset$, pak $\gamma(s+1) < \min C_u$ a $j_{u+1} = 2\gamma(s+1)+1$, a pokud $C_u = \emptyset$, pak též $j_{u+1} = 2\gamma(s+1)+1$.

Nechť nyní pro $s \in \omega$ je $\gamma(s) \in D$. Pak podle indukčního předpokladu existuje $v \in \omega$ liché takové, že $j_v = 2\gamma(s)+1$, $\gamma(s) = \min D_{v-1}$ a pokud $C_{v-1} \neq \emptyset$, pak $\gamma(s) < \min C_{v-1}$. Pak platí $C_v = C_{v-1}$ a $D_v = D_{v-1} \setminus \{\gamma(s)\}$.

Nechť $\gamma(s+1) \in C$. Pak máme $\gamma(s+1) = \min C_v$. Dále pokud $D_v \neq \emptyset$, pak $\gamma(s+1) < \min D_v$ a $j_{v+1} = 2\gamma(s+1)+1$, a pokud $D_v = \emptyset$, pak také $j_{v+1} = 2\gamma(s+1)+1$.

Nechť $\gamma(s+1) \in D$. Pak máme $\gamma(s+1) \in D_v$, tedy $\gamma(s+1) = \min D_v$. Pokud $C_v \neq \emptyset$, pak $\gamma(s+1) < \min C_v$ a $j_{v+1} = 2\gamma(s+1)$, a pokud $C_v = \emptyset$, pak též $j_{v+1} = 2\gamma(s+1)$. A v obou případech platí $C_{v+1} = C_v$, $D_{v+1} = D_v$, $j_{v+2} = 2\gamma(s+1)+1$, $\gamma(s+1) = \min D_{v+1}$ a $\gamma(s+1) < \min C_{v+1}$. $\square$

Definice 16. Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Nechť dále ε_X je kanonickým vnořením prostoru X do jeho druhého duálu X^{**}. Pak $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ je posloupností reálných funkcí definovaných na G takovou, že pro každé $g \in G$ je posloupnost $(\varepsilon_X(x_n)(g))_{n\in\omega} = (g(x_n))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností v $\mathbb{R}$. Modul $\delta_G(x_n)$ definujeme takto

$$\delta_G(x_n) := \delta_G(\varepsilon_X(x_n)).$$

Analogicky definujeme $\tilde{\delta}_G(x_n)$

$$\tilde{\delta}_G(x_n) := \tilde{\delta}_G(\varepsilon_X(x_n)).$$

Zřejmým způsobem je definována δ_G-stabilní posloupnost.
Pokud je G omezenou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ omezenou posloupností, pak zřejmě $\delta_G(x_n) < \infty$.

Věta 17 (**Behrends**). *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak pro každé $\eta > 0$ existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro libovolné dvě disjunktní množiny $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ existují číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí*

$$x^*(y_c) > \lambda + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \frac{\eta}{2} \qquad a \qquad x^*(y_d) < \lambda - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) + \frac{\eta}{2},$$

tedy

$$x^*(y_c) - x^*(y_d) > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. Podle lemmatu 14 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. Pak pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ definujme $\Xi_r(\gamma)$ takto

$$\Xi_r(\gamma) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (\exists\alpha)\,(\exists x^*)\,(\exists\lambda)\,\varphi_r(\gamma, \alpha, x^*, \lambda),$$

kde relace $\varphi_r(\gamma, \alpha, x^*, \lambda)$ je definována takto

$$\begin{aligned}
&\varphi_r(\gamma, \alpha, x^*, \lambda) \qquad :\Longleftrightarrow \\
&\quad (\alpha \text{ je rostoucí } r\text{-konečnou posloupností přirozených čísel}) \qquad \& \\
&\quad (\gamma = \alpha) \qquad \& \qquad \left(x^* \in \overline{G}^*\right) \qquad \& \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \& \\
&\quad \Big((\forall\rho)\Big((\rho \in \omega \;\&\; 2\rho < r) \Rightarrow x^*\left(z_{\alpha(2\rho)}\right) > \lambda + \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)/2 - \eta/4\Big)\Big) \qquad \& \\
&\quad \Big((\forall\sigma)\Big((\sigma \in \omega \;\&\; 2\sigma + 1 < r) \Rightarrow x^*\left(z_{\alpha(2\sigma+1)}\right) < \lambda - \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)/2 + \eta/4\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Pak definujme pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ množinu T_r následovně

$$T_r := \{\gamma : \Xi_r(\gamma)\}.$$

Pro všechna $r \in \omega \subset \{0\}$ je T_r množinou jistých rostoucích r-konečných posloupností přirozených čísel. Má tedy smysl se ptát, zda jsou splněny předpoklady Ramseyho věty pro soubor $(T_r)_{r=1}^{\infty}$. Ověřme, že prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω. Zvolme libovolnou nekonečnou množinu $M \subset \omega$. Pak podle lemmatu 3 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel β taková, že $\beta[\omega] = M$. Posloupnost $(z_{\beta(j)})_{j\in\omega}$ je podposloupností $(z_n)_{n\in\omega}$ a $(z_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní, tedy $\delta_{\overline{G}^*}(z_{\beta(j)}) = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)$. S přihlédnutím k definici 16 existují podle lemmatu 13 číslo $\lambda \in \mathbb{R}$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $(j_m)_{m\in\omega}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$x^*\left(z_{\beta(j_u)}\right) > \lambda + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4} \quad \text{a} \quad x^*\left(z_{\beta(j_v)}\right) < \lambda - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) + \frac{\eta}{4}.$$

Nyní pro každé $m \in \omega$ položme $\mu_m := \beta(j_m)$. Pak pro každé $r \in \omega$ zřejmě $(\mu_0, \ldots, \mu_r) \in T_{r+1}$, a tedy prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω.

Podle věty 2 (Ramsey) existuje nekonečná množina $N \subset \omega$ taková, že pro každé $r \in \omega$ a každou ν rostoucí $(r+1)$-konečnou posloupnost v N platí $\nu \in T_{r+1}$. Podle lemmatu 3 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel ψ taková, že $N = \psi[\omega]$. Nyní pro každé $n \in \omega$ položme $y_n := z_{\psi(2n+1)}$. Nechť $C \subset \omega$, $D \subset \omega$ jsou dvě disjunktní množiny. Pak podle lemmatu 15 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(j_m)_{m\in\omega}$ taková, že

$$(\forall c)\,(c \in C \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m} = 2c + 1))), \tag{1}$$
$$(\forall d)\,(d \in D \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m+1} = 2d + 1))). \tag{2}$$

Pro každé $m \in \omega$ položme $\alpha(m) := \psi(j_m)$. Pak posloupnost α je rostoucí a $\alpha[\omega] \subset N$. Pro každé $r \in \omega$ dostáváme $(\alpha(0), \ldots, \alpha(r)) \in T_{r+1}$. To znamená, že ke každému $r \in \omega$ existují číslo $\lambda_r \in \mathbb{R}$ a funkcionál $x_r^* \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé takové, že $u < r + 1$, a každé $v \in \omega$ liché takové, že $v < r + 1$, platí

$$x_r^*\left(z_{\alpha(u)}\right) > \lambda_r + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4} \quad \text{a} \quad x_r^*\left(z_{\alpha(v)}\right) < \lambda_r - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) + \frac{\eta}{4}. \tag{3}$$

Z (3) pro všechna $r \in \omega \setminus \{0\}$ plyne toto

$$x_r^*\left(z_{\alpha(1)}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4} < \lambda_r < x_r^*\left(z_{\alpha(0)}\right) - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) + \frac{\eta}{4}. \tag{4}$$

Protože $(x_r^*)_{r\in\omega}$ je omezenou posloupností, z (4) plyne, že též $(\lambda_r)_{r\in\omega}$ je omezenou posloupností, a podle Bolzanovy-Weierstrassovy věty existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ hromadný bod posloupnosti $(\lambda_r)_{r\in\omega}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lim_{r\to\infty} \lambda_r = \lambda$. Snadno z Banachovy-Alaogluovy věty dostaneme, že $\overline{G}^*$ je w^*-kompaktní, neboť je omezenou a w^*-uzavřenou množinou. Nechť funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ je w^*-hromadným bodem posloupnosti $(x_r^*)_{r\in\omega}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $C \neq \emptyset$ a $D \neq \emptyset$. Zvolme libovolně $c \in C$ a $d \in D$. Pak podle (1) existuje $u \in \omega$ sudé takové, že $j_u = 2c+1$, a podle (2) existuje $v \in \omega$ liché takové, že $j_v = 2d+1$. Položme $q_0 := \max\{u, v\}$. Pak (3) říká, že pro každé $q \in \omega$ takové, že $q > q_0$, platí

$$x_q^*\left(z_{\psi(2c+1)}\right) > \lambda_q + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4} \quad \text{a} \quad x_q^*\left(z_{\psi(2d+1)}\right) < \lambda_q - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) + \frac{\eta}{4}. \tag{5}$$

Protože x^* je w^*-hromadným bodem posloupnosti $(x_r^*)_{r\in\omega}$, λ je limitou posloupnosti $(\lambda_r)_{r\in\omega}$, pro každé $q \in \omega$ takové, že $q > q_0$, platí (5), pak s přihlédnutím k tomu, že pro každé $n \in \omega$ je $y_n = z_{\beta(2n+1)}$, dostáváme

$$x^*(y_c) > \lambda + \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{2} \quad \text{a} \quad x^*(y_d) < \lambda - \frac{1}{2}\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) + \frac{\eta}{2}. \tag{6}$$

Z nerovností (6) okamžitě plyne

$$x^*(y_c - y_d) > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \eta.$$

$\square$

Poznamenejme, že pokud v předpokladech věty 17 budou množiny C a D konečné, pak je možné funkcionál x^* najít v množině G.

1.2 Simonova nerovnost

V tuto chvíli již před námi stojí druhý stavební kámen, a tím je Simonova nerovnost. Začněme nejprve potřebnými definicemi.

Definice 18 (Nekonečný (absolutně) konvexní obal). Nechť X je Banachovým prostorem nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nebo $\mathbb{T} = \mathbb{C}$. Nechť $A \subset X$ je omezenou množinou. Pak definujeme nekonečný konvexní obal množiny A a nekonečný absolutně konvexní obal množiny A takto

$$\mathrm{co}_\infty A := \Bigg\{x :\ (\exists\lambda)\,(\exists a)\,\Bigg(\lambda : \omega \to \mathbb{R}_0^+ \quad \& \quad a : \omega \to A \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n) = 1 \quad \& \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, a(n)\Bigg)\Bigg\},$$

$$\mathrm{aco}_\infty A := \Bigg\{x :\ (\exists\lambda)\,(\exists a)\,\Bigg(\lambda : \omega \to \mathbb{T} \quad \& \quad a : \omega \to A \quad \& \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda(n)|_2 = 1 \quad \& \quad x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, a(n)\Bigg)\Bigg\}.$$

V definici $\mathrm{co}_\infty A$ a $\mathrm{aco}_\infty A$ je konvergence příslušné řady vektorů chápána v topologii vytvořené příslušnou normou prostoru X. Poznamenejme, že vzhledem k omezenosti množiny A, diskutovaná řada konverguje absolutně, a tedy konverguje. Symbol $|\cdot|_2$ značí obvyklou eukleidovskou absolutní hodnotu na $\mathbb{R}$, respektive na $\mathbb{C}$.

Pokud $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X, pak $\mathrm{co}_\infty(x_n)$ a $\mathrm{aco}_\infty(x_n)$ jsou definovány zřejmě takto

$$\mathrm{co}_\infty(x_n) := \left\{x : (\exists\lambda)\left(\lambda : \omega \to \mathbb{R}_0^+ \ \&\ \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(n) = 1 \ \&\ x = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(n)\,x_n\right)\right\},$$

$$\mathrm{aco}_\infty(x_n) := \left\{x : (\exists\lambda)\left(\lambda : \omega \to \mathbb{T} \ \&\ \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda(n)|_2 = 1 \ \&\ x = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda(n)\,x_n\right)\right\}.$$

Definice 19 (Simonovská a absolutně simonovská posloupnost v $\ell^\infty(G)$). Nechť G je neprázdnou množinou a $F \subset G$. Nechť $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v reálném Banachově prostoru $\ell^\infty(G)$, tedy posloupností stejně omezených reálných funkcí definovaných na G.

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ *splňuje Simonovu podmínku pro* (F, G), jestliže pro každé $x \in \mathrm{co}_\infty(x_n)$ existuje $f \in F$ takové, že

$$x(f) = \sup_{g\in G} x(g).$$

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ *splňuje absolutní Simonovu podmínku pro* (F, G), jestliže pro každé $x \in \mathrm{aco}_\infty(x_n)$ existuje $f \in F$ takové, že

$$x(f) = \sup_{g\in G} x(g).$$

Místo „$(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje Simonovu podmínku pro (F, G)“ budeme občas krátce říkat, že $(x_n)_{n\in\omega}$ *je simonovskou posloupností pro* (F, G) a místo „$(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G)“ budeme občas říkat, že $(x_n)_{n\in\omega}$ *je absolutně simonovskou posloupností pro* (F, G).

Poznámka 20. Každá absolutně simonovská posloupnost pro (F, G), je také simonovskou posloupností pro (F, G), neboť $\mathrm{co}_\infty \subset \mathrm{aco}_\infty$.

Podposloupnost (absolutně) simonovské posloupnosti, je (absolutně) simonovskou posloupností.

Pokud $(x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností, pak i $(-x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností.

Nyní již následuje slibovaná Simonova nerovnost. Pěkný důkaz, který zde uvádíme, je čerpán z [4].

Věta 21 (Simonova nerovnost). *Nechť G je neprázdnou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených reálných funkcí definovaných na G, tedy $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v reálném Banachově prostoru $\ell^\infty(G)$. Jestliže $(x_n)_{n\in\omega}$ je simonovskou posloupností pro (F, G), pak platí*

$$\inf_{x\in\mathrm{co}_\infty(x_n)} \sup_{g\in G} x(g) \le \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} x_n(f). \tag{1.1}$$

Důkaz. Pro každé $k \in \omega$ definujme množinu C_k takto

$$C_k := \left\{ x :\ (\exists \lambda) \left(\lambda : \omega \to \mathbb{R}_0^+ \ \&\ \sum_{n=k}^{\infty} \lambda(n) = 1 \ \&\ x = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda(n)\, x_n \right) \right\}.$$

Zřejmě $C_0 = \mathrm{co}_\infty(x_n)$ a též pro všechna $k \in \omega$ platí $C_{k+1} \subset C_k$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Rekurzí definujeme posloupnost $(z_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky

$(1)_k \quad z_k \in C_k,$

$(2)_k \quad \sup_{f\in F} \big(2^k v_k(f) + z_k(f)\big) \le \inf_{z\in C_k} \sup_{f\in F} \big(2^k v_k(f) + z(f)\big) + 2^{-(k+1)}\varepsilon,$

kde $v_0 := 0$ a pokud $k \in \omega \setminus \{0\}$, pak $v_k := \sum_{n=0}^{k-1} 2^{-(n+1)} z_n$.

Z principu indukce plyne existence posloupnosti $(z_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky $(1)_k$ a $(2)_k$. Definujme funkci v jakožto součet nekonečné řady funkcí takto

$$v := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}}.$$

Poznamenejme, že $v \in C_0$, neboť $\mathrm{co}_\infty C_0 = C_0$. Zvolme pevně $k \in \omega$. Zřejmě platí $z_k = 2^{k+1} v_{k+1} - 2^{k+1} v_k$, z čehož dostáváme

$$2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k = 2^k v_k + z_k. \tag{1}$$

Dále platí

$$2^k v - 2^k v_k = 2^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{z_n}{2^{n+1}} \in C_k, \tag{2}$$

neboť $\mathrm{co}_\infty C_k = C_k$. Použitím (1), $(2)_k$ a (2) dostáváme

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in F} \big(2^{k+1} v_{k+1}(f) - 2^k v_k(f)\big) &\overset{(1)}{=} \sup_{f\in F} \big(2^k v_k(f) + z_k(f)\big) \\
&\overset{(2)_k,(2)}{\le} \sup_{f\in F} \big(2^k v_k(f) + \big[2^k v(f) - 2^k v_k(f)\big]\big) \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\
&= \sup_{f\in F} \big(2^k v(f)\big) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Tedy pro každé $k \in \omega$ platí

$$\sup_{f\in F} \big(2^{k+1} v_{k+1}(f) - 2^k v_k(f)\big) \le 2^k \sup_{g\in G} (v(g)) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{3}$$

Protože $v \in C_0$, existuje podle předpokladu bod $f_0 \in F$ takový, že

$$v(f_0) = \sup_{g\in G} v(g). \tag{4}$$

Protože pro každé $m \in \omega$ platí $\sum_{k=0}^{m} 2^k = 2^{m+1} - 1$, použitím nástrojů (3) a (4) dostáváme pro všechna $m \in \omega$ následující

$$\begin{aligned} 2^{m+1} v_{m+1}(f_0) &= \sum_{k=0}^{m} \left(2^{k+1} v_{k+1}(f_0) - 2^k v_k(f_0)\right) \\ &\overset{(3)}{\leq} (2^{m+1} - 1) \sup_{g \in G} v(g) + \varepsilon \\ &\overset{(4)}{=} 2^{m+1} v(f_0) + \varepsilon - \sup_{g \in G} v(g), \end{aligned}$$

z čehož okamžitě pro každé $m \in \omega$ plyne

$$\sup_{g \in G} v(g) \leq 2^{m+1} v(f_0) - 2^{m+1} v_{m+1}(f_0) + \varepsilon. \tag{5}$$

Aplikací nerovnosti (5) dostaneme

$$\begin{aligned} \inf_{x \in C_0} \sup_{g \in G} x(g) &\leq \sup_{g \in G} v(g) \overset{(5)}{\leq} \limsup_{m \to \infty} \left(2^{m+1} v(f_0) - 2^{m+1} v_{m+1}(f_0)\right) + \varepsilon \\ &\leq \limsup_{m \to \infty} x_m(f_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Okomentujme, proč platí poslední nerovnost. Zřejmě pro každé $m \in \omega$ je $2^{m+1} v - 2^{m+1} v_{m+1} \in C_{m+1}$. Pro každé $m \in \omega$ položme $y_m := 2^{m+1} v - 2^{m+1} v_{m+1}$. Kdyby existovalo číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\limsup_{m \to \infty} x_m(f_0) < \alpha < \limsup_{m \to \infty} y_m(f_0),$$

pak by existovalo $m_0 \in \omega$ takové, že pro všechna $m \in \omega$ splňující $m \geq m_0$ by platilo $x_m(f_0) < \alpha$, tedy i $y_m(f_0) \leq \alpha$, což je ve sporu s $\alpha < \limsup_{m \to \infty} y_m(f_0)$.

Dostáváme tedy

$$\inf_{x \in C_0} \sup_{g \in G} x(g) \leq \sup_{f \in F} \limsup_{m \to \infty} x_m(f) + \varepsilon$$

a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí nerovnost (1.1). $\square$

2. Mizející prostředníci

Tato kapitola je věnovaná tzv. mizejícím prostředníkům. Těmi jsou tvrzení 23, jež je prostředníkem Behrendsova výsledku a je obsahem první sekce této kapitoly, a důsledek 30, jenž je prostředníkem Simonovy nerovnosti a je obsahem druhé sekce této kapitoly.

2.1 Prostředník Behrendsova výsledku

Začněme definicí.

Definice 22. Nechť X je vektorovým prostorem nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nebo $\mathbb{T} = \mathbb{C}$, a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností v X.

Řekneme, že $(z_n)_{n\in\omega}$ *je blokovou posloupností pro* $(x_n)_{n\in\omega}$, jestliže existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných neprázdných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{T}$ takové, že pro každé $n \in \omega$ platí

$$z_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\, x_k.$$

Řekneme, že $(z_n)_{n\in\omega}$ *je konvexní blokovou posloupností pro* $(x_n)_{n\in\omega}$, jestliže existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných neprázdných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro každé $n \in \omega$ platí

$$z_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\, x_k \quad \text{a} \quad \sum_{k\in A_n} \lambda(k) = 1.$$

Řekneme, že $(z_n)_{n\in\omega}$ je *absolutně konvexní blokovou posloupností pro* $(x_n)_{n\in\omega}$, jestliže existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných neprázdných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{T}$ takové, že pro každé $n \in \omega$ platí

$$z_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\, x_k \quad \text{a} \quad \sum_{k\in A_n} |\lambda(k)|_2 = 1.$$

Symbol $|\cdot|_2$ značí eukleidovskou absolutní hodnotu.

Řekneme, že $(z_n)_{n\in\omega}$ *je speciální absolutně konvexní blokovou posloupností pro* $(x_n)_{n\in\omega}$, jestliže je absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(x_n)_{n\in\omega}$ se značením jako výše a navíc platí

$$\sum_{k\in A_n} \lambda(k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

V tuto chvíli již směřujeme k prvnímu mizejícímu prostředníkovi, kterým je tvrzení 23, jehož důkaz je vystavěn na větě 17. Toto tvrzení nejprve jen zformulujme.

Tvrzení 23 (O (absolutně) konvexních blocích). *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a*

$(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro každou $(u_n)_{n\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupnost pro $(y_n)_{n\in\omega}$ platí

$$\delta_{\overline{G}^*}(y_n) \leq \delta_{\overline{G}^*}(u_n) \qquad a \qquad \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) \leq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(u_n).$$

Pro naše budoucí účely by stačilo dokázat tvrzení 23 jen pro konvexní bloky. A my také takový důkaz uvedeme. Uvidíme, že konvexní verze tvrzení 23 je poměrně snadným důsledkem věty 17. Absolutně konvexní verze tvrzení 23 je o něco složitější; právě zde budeme potřebovat pojem speciálního absolutně konvexního bloku.

Protože v dalším budeme potřebovat jisté rovnosti a nerovnosti týkající se lim sup a lim inf, pro pohodlí uvádíme některé z těchto vztahů v následujícím faktu. Vztahy (2.1) a (2.2) dokonce dokážeme.

Fakt 24. *Nechť $(a_n)_{n\in\omega}$ a $(c_n)_{n\in\omega}$ jsou posloupnostmi reálných čísel a $\lim_n c_n = c$, kde c je nezáporné reálné číslo. Nechť $c \limsup_n a_n$ má smysl. Nechť $(A_n)_{n\in\omega}$ je posloupnost po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω. Pak platí*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n c_n = c \limsup_{n\to\infty} a_n \tag{2.1}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{k\in A_n} a_k \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \tag{2.2}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n \tag{2.3}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \min_{k\in A_n} a_k \geq \liminf_{n\to\infty} a_n \tag{2.4}$$

Důkaz. Pojďme okomentovat vztah (2.1). Nejprve dokažme nerovnost „$\geq$“. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c \limsup_n a_n > -\infty$. Důkaz provedeme sporem, tedy předpokládejme, že existuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\limsup_{n\to\infty} a_n c_n < \alpha < c \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

To znamená, že existuje index $n_0 \in \omega$ takový, že pro každé $n \in \omega$ splňující $n \geq n_0$ platí $a_n c_n < \alpha$. Ovšem na druhou stranu existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(m_k)_{k\in\omega}$ taková, že

$$a_{m_k} c_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} c \limsup_{n\to\infty} a_n,$$

a tedy pro nekonečně mnoho $m \in \omega$ platí $a_m c_m > \alpha$, a to dává spor. Podívejme se na nerovnost „$\leq$“. Bez újmy na obecnosti tentokrát předpokládejme, že $c \limsup_n a_n < \infty$. Pro spor dále předpokládejme, že existuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\limsup_{n\to\infty} a_n c_n > \alpha > c \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Tedy existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ taková, že pro každé $k \in \omega$ platí $a_{n_k} c_{n_k} > \alpha$. Předpokládejme, že $(a_{n_k})_{k\in\omega}$ konverguje k $a \in \mathbb{R}$, tedy $(a_{n_k} c_{n_k})_{k\in\omega}$ konverguje k ac. Protože c je nezáporné, platí $c \limsup_n a_n \geq ca$. Tedy nutně existuje index $k_0 \in \omega$ takový, že pro všechna $k \in \omega$ splňující $k \geq k_0$ platí $a_{n_k} c_{n_k} < \alpha$, což je spor.

Nyní naši pozornost obraťme k nerovnosti (2.2). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\limsup_n a_n < \infty$. Důkaz opět proběhne sporem, a tedy předpokládejme, že existuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{k\in A_n} a_k > \alpha > \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Pak existuje index $n_0 \in \omega$ takový, že pro každé $n \in \omega$ takové, že $n \geq n_0$, platí $a_n < \alpha$. Pak existuje index $m_0 \in \omega$ takový, že pro každé $m \in \omega$ splňující $m \geq m_0$ platí

$$A_m \subset \{i : i \in \omega \;\&\; i \geq n_0\},$$

neboť členy posloupnosti $(A_m)_{m\in\omega}$ jsou po dvou disjunktními podmnožinami množiny ω a $\{i : i \in \omega \;\&\; i < n_0\}$ je konečnou množinou. Pak ovšem pro každé $m \in \omega$ takové, že $m \geq m_0$, platí $\max_{k\in A_m} a_k < \alpha$, což je spor s nerovností $\limsup_n \max_{k\in A_n} a_k > \alpha$.

Vztah (2.4) je snadným důsledkem (2.2) a (2.3). $\square$

Nyní dokážeme dvě lemmata, která jsou klíčem k absolutně konvexní verzi tvrzení 23.

Lemma 25. *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou množinou, $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X a $(z_n)_{n\in\omega}$ je speciální absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(x_n)_{n\in\omega}$. Pak platí*

$$\delta_G(z_n) \leq \delta_G(x_n).$$

Pokud navíc $(x_n)_{n\in\omega}$ je δ_G-stabilní, pak platí

$$\tilde{\delta}_G(z_n) \leq \tilde{\delta}_G(x_n).$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\delta_G(x_n) < \infty$, jinak jsme hned hotovi. Nechť $(A_n)_{n\in\omega}$ je posloupností po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω, $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{R}$ je zobrazení a pro všechna $n \in \omega$ platí

$$z_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\, x_k \quad \text{a} \quad \sum_{k\in A_n} |\lambda(k)| = 1,$$

a dále též platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\in A_n} \lambda(k) = 0.$$

Pro reálné číslo μ označíme μ^+ kladnou část čísla μ a μ^- zápornou část čísla μ. Pro každé $n \in \omega$ položme $\alpha_n := \sum_{k\in A_n} (\lambda(k))^+$ a $\beta_n := \sum_{k\in A_n} (\lambda(k))^-$. Pak $\lim_n (\alpha_n - \beta_n) = 0$ a pro každé $n \in \omega$ platí $\alpha_n + \beta_n = 1$. Z toho dostáváme $\lim_n \alpha_n = 1/2$ a $\lim_n \beta_n = 1/2$. Pro libovolný lineární funkcionál x^* a pro každé

$n \in \omega$ platí

$$\begin{aligned} x^*(z_n) &= \sum_{k \in A_n} \lambda(k)\, x^*(x_k) = \sum_{k \in A_n} (\lambda(k))^+ \; x^*(x_k) - \sum_{k \in A_n} (\lambda(k))^- \; x^*(x_k) \\ &\leq \max_{k \in A_n} x^*(x_k) \sum_{k \in A_n} (\lambda(k))^+ - \min_{k \in A_n} x^*(x_k) \sum_{k \in A_n} (\lambda(k))^- \\ &= \alpha_n \max_{k \in A_n} x^*(x_k) - \beta_n \min_{k \in A_n} x^*(x_k). \end{aligned}$$

Analogicky dostaneme

$$x^*(z_n) \geq \alpha_n \min_{k \in A_n} x^*(x_k) - \beta_n \max_{k \in A_n} x^*(x_k).$$

Nyní zvolme $x^* \in G$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} x^*(z_n) &\leq \limsup_{n \to \infty} \left(\alpha_n \max_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\quad + \limsup_{n \to \infty} \left(-\beta_n \min_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\overset{(2.1),(2.3)}{=} \frac{1}{2} \limsup_{n \to \infty} \max_{k \in A_n} x^*(x_k) - \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \min_{k \in A_n} x^*(x_k) \\ &\overset{(2.2),(2.4)}{\leq} \frac{1}{2} \limsup_{n \to \infty} x^*(x_n) - \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} x^*(x_n) \leq \frac{1}{2} \delta_G(x_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \to \infty} x^*(z_n) &\geq \liminf_{n \to \infty} \left(\alpha_n \min_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\quad + \liminf_{n \to \infty} \left(-\beta_n \max_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\overset{(2.3)}{=} - \limsup_{n \to \infty} \left(-\alpha_n \min_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\quad - \limsup_{n \to \infty} \left(\beta_n \max_{k \in A_n} x^*(x_k) \right) \\ &\overset{(2.1),(2.3)}{=} \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} \min_{k \in A_n} x^*(x_k) - \frac{1}{2} \limsup_{n \to \infty} \max_{k \in A_n} x^*(x_k) \\ &\overset{(2.4),(2.2)}{\geq} \frac{1}{2} \liminf_{n \to \infty} x^*(x_n) - \frac{1}{2} \limsup_{n \to \infty} x^*(x_n) \geq -\frac{1}{2} \delta_G(x_n). \end{aligned}$$

Okamžitě máme

$$\limsup_{n \to \infty} x^*(z_n) - \liminf_{n \to \infty} x^*(z_n) \leq \delta_G(x_n). \tag{1}$$

Protože nerovnost (1) platí pro všechna $x^* \in G$, dostáváme $\delta_G(z_n) \leq \delta_G(x_n)$. Zřejmě platí $\tilde{\delta}_G(z_n) \leq \delta_G(z_n) \leq \delta_G(x_n)$ a pokud $(x_n)_{n \in \omega}$ je δ_G-stabilní, dostáváme $\tilde{\delta}_G(z_n) \leq \delta_G(x_n) = \tilde{\delta}_G(x_n)$. □

Lemma 26. *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a $(x_n)_{n \in \omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak* *pro každé $\eta > 0$ existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro každou $(w_n)_{n\in\omega}$ absolutně konvexní blokovou posloupnost pro $(v_n)_{n\in\omega}$ platí*

$$\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. Podle věty 17 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti (x_n) taková, že pro libovolné dvě disjunktní množiny $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ existují číslo $\nu \in \mathbb{R}$ a funkcionál $g \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí

$$g(v_c) > \nu + \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \quad \text{a} \tag{1}$$

$$g(v_d) < \nu - \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta. \tag{2}$$

Nechť $(w_m)_{m\in\omega}$ je absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(v_n)_{n\in\omega}$. Tedy existují posloupnost $(B_m)_{m\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω a zobrazení $\mu : \bigcup_{m\in\omega} B_m \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $m \in \omega$ platí

$$w_m = \sum_{j\in B_m} \mu(j)\ v_j \quad \text{a} \quad \sum_{j\in B_m} |\mu(j)| = 1.$$

Posloupnost $\left(\sum_{j\in B_m} \mu(j)\right)_{m\in\omega}$ je zřejmě omezená, a tedy Bolzano s Weierstrassem řeknou, že existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(m_n)_{n\in\omega}$ taková, že posloupnost $\left(\sum_{j\in B_{m_n}} \mu(j)\right)_{n\in\omega}$ konverguje. Pro každé $n \in \omega$ položme

$$z_n := \frac{1}{2}\, w_{m_{2n}} - \frac{1}{2}\, w_{m_{2n+1}}.$$

Zřejmě je posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ speciální absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(v_n)_{n\in\omega}$. Tedy existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $n \in \omega$ platí

$$z_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\ v_k \quad \text{a} \quad \sum_{k\in A_n} |\lambda(k)| = 1,$$

a dále též

$$\sum_{k\in A_n} \lambda(k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pro každé $n \in \omega$ definujme množiny A_n^+ a A_n^- takto

$$A_n^+ := \{k :\ k \in A_n \,\&\, \lambda_k > 0\} \quad \text{a} \quad A_n^- := \{k :\ k \in A_n \,\&\, \lambda_k \leq 0\},$$

a položme $\alpha_n := \sum_{k\in A_n^+} \lambda(k)$ a $\beta_n := \sum_{k\in A_n^-} |\lambda(k)|$. Zřejmě $\lim_n(\alpha_n - \beta_n) = 0$ a pro každé $n \in \omega$ platí $\alpha_n + \beta_n = 1$. Z toho dostáváme $\lim_n \alpha_n = 1/2$ a $\lim_n \beta_n = 1/2$. Položme $C := \bigcup_{l\in\omega} \left(A_{2l}^+ \cup A_{2l+1}^-\right)$ a $D := \bigcup_{l\in\omega} \left(A_{2l}^- \cup A_{2l+1}^+\right)$. Množiny C a D jsou disjunktní. Tedy existují číslo $\nu \in \mathbb{R}$ a funkcionál $g \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí (1) a (2). Pak pro každé $l \in \omega$ dostáváme

$$\begin{aligned}
g(z_{2l}) &\geq \sum_{k \in A^+_{2l}} \lambda(k) \min_{k \in A^+_{2l}} g(v_k) - \sum_{k \in A^-_{2l}} |\lambda(k)| \max_{k \in A^-_{2l}} g(v_k) \\
&= \alpha_{2l} \min_{k \in A^+_{2l}} g(v_k) - \beta_{2l} \max_{k \in A^-_{2l}} g(v_k) \\
&> \alpha_{2l} \left(\nu + \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \right) + \beta_{2l} \left(-\nu + \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \right) \\
&= (\alpha_{2l} - \beta_{2l})\, \nu + (\alpha_{2l} + \beta_{2l}) \left(\frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \right) \quad \text{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(z_{2l+1}) &\leq \sum_{k \in A^+_{2l+1}} \lambda(k) \max_{k \in A^+_{2l+1}} g(v_k) - \sum_{k \in A^-_{2l+1}} |\lambda(k)| \min_{k \in A^-_{2l+1}} g(v_k) \\
&= \alpha_{2l+1} \max_{k \in A^+_{2l+1}} g(v_k) - \beta_{2l+1} \min_{k \in A^-_{2l+1}} g(v_k) \\
&< \alpha_{2l+1} \left(\nu - \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta \right) + \beta_{2l+1} \left(-\nu - \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta \right) \\
&= (\alpha_{2l+1} - \beta_{2l+1})\, \nu + (\alpha_{2l+1} + \beta_{2l+1}) \left(-\frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta \right).
\end{aligned}$$

Pak platí $\limsup_l g(z_{2l}) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n)/2 - \eta/2$ a $\liminf_l g(z_{2l+1}) < -\delta_{\overline{G}^*}(v_n)/2 + \eta/2$. Z toho dostáváme

$$\limsup_{n \to \infty} g(z_n) - \liminf_{n \to \infty} g(z_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta,$$

tedy $\delta_{\overline{G}^*}(z_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta$. Avšak posloupnost $(z_n)_{n \in \omega}$ je speciální absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(w_m)_{m \in \omega}$, a podle lemmatu 26 tedy platí $\delta_{\overline{G}^*}(z_n) \leq \delta_{\overline{G}^*}(w_m)$. Tím je důkaz hotov. □

Nyní následuje analogie lemmatu 26 pro konvexní bloky, tedy klíč pro konvexní verzi tvrzení 23.

Lemma 27. *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a $(x_n)_{n \in \omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak pro každé $\eta > 0$ existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n \in \omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n \in \omega}$ taková, že pro každou $(w_n)_{n \in \omega}$ konvexní blokovou posloupnost pro $(v_n)_{n \in \omega}$ platí*

$$\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. Podle věty 17 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n \in \omega}$ vybraná z posloupnosti (x_n) taková, že pro libovolné dvě disjunktní množiny $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ existují číslo $\nu \in \mathbb{R}$ a funkcionál $g \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí

$$g(v_c) > \nu + \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \quad \text{a} \tag{1}$$

$$g(v_d) < \nu - \frac{1}{2} \delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta. \tag{2}$$

Nechť $(w_n)_{n\in\omega}$ je konvexní blokovou posloupností pro $(v_n)_{n\in\omega}$. Tedy existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro každé $n\in\omega$ platí

$$w_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\; v_k \quad \text{a} \quad \sum_{k\in A_n} \lambda(k) = 1.$$

Položme $C := \bigcup_{n\in\omega} A_{2n}$ a $D := \bigcup_{n\in\omega} A_{2n+1}$. Množiny C a D jsou disjunktní. Tedy existují číslo $\nu\in\mathbb{R}$ a funkcionál $g\in\overline{G}^*$ takové, že pro každé $c\in C$ a každé $d\in D$ platí (1) a (2). Pak pro každé $n\in\omega$ dostáváme

$$\begin{aligned} g(w_{2n}) &= \sum_{k\in A_{2n}} \lambda(k)\, g(v_k) > \nu + \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{4}\eta \quad \text{a} \\ g(w_{2n+1}) &= \sum_{k\in A_{2n+1}} \lambda(k)\, g(v_k) < \nu - \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{4}\eta, \end{aligned}$$

z čehož plyne

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} g(w_{2n}) > \nu + \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{1}{2}\eta \quad \text{a} \\ &\liminf_{n\to\infty} g(w_{2n+1}) < \nu - \frac{1}{2}\delta_{\overline{G}^*}(v_n) + \frac{1}{2}\eta. \end{aligned}$$

Okamžitě dostáváme

$$\limsup_{n\to\infty} g(w_n) - \liminf_{n\to\infty} g(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta,$$

což implikuje $\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta$. □

Důkaz tvrzení 23. Rekurzí definujeme posloupnost posloupností $((v_p(n))_{n\in\omega})_{p\in\omega}$ splňující pro každé $p\in\omega$ podmínky

$(1)_p$ pro každé $s\in\omega$ takové, že $s<p$, je $(v_p(n))_{n\in\omega}$ $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupností vybranou z posloupnosti $(v_s(n))_{n\in\omega}$ a zároveň z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$,

$(2)_p$ pro každou $(w_n)_{n\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupnost pro $(v_p(n))_{n\in\omega}$ platí $\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_p(n))_{n\in\omega} - 2^{-p}$.

Podle lemmatu 27 (26) existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_0(n))_{n\in\omega}$, jež je podposloupností $(x_n)_{n\in\omega}$ a pro každou $(w_n)_{n\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupnost pro $(v_0(n))_{n\in\omega}$ platí

$$\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_0(n))_{n\in\omega} - \frac{1}{2^0}.$$

Tedy $(v_0(n))_{n\in\omega}$ splňuje podmínky $(1)_0$ a $(2)_0$. Nechť již pro $p\in\omega\setminus\{0\}$ máme $((v_s(n))_{n\in\omega})_{s<p}$ splňující podmínky $(1)_{p-1}$ a $(2)_{p-1}$. Podle lemmatu 27 (26) existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_p(n))_{n\in\omega}$, jež je podposloupností $(v_{p-1}(n))_{n\in\omega}$ a pro každou $(w_n)_{n\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupnost pro $(v_p(n))_{n\in\omega}$ platí

$$\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}\left(v_p(n)\right)_{n\in\omega} - \frac{1}{2^p}.$$

Zřejmě $(p+1)$-konečná posloupnost $((v_s(n))_{n\in\omega})_{s<p}$ splňuje podmínky $(1)_p$ a $(2)_p$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $((v_p(n))_{n\in\omega})_{p\in\omega}$ splňující pro každé $p \in \omega$ podmínky $(1)_p$ a $(2)_p$.

Nyní pro každé $n \in \omega$ položme $y_n := v_n(n)$. Posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ je zřejmě podposloupností posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ a též je pro každé $p \in \omega$ od jistého indexu podposloupností $(v_p(n))_{n\in\omega}$. Nechť $(u_n)_{n\in\omega}$ je (absolutně) konvexní blokovou posloupností pro $(y_n)_{n\in\omega}$. Zvolme libovolné $p \in \omega$. Pak $(u_n)_{n\in\omega}$ je od jistého indexu (absolutně) konvexní blokovou posloupností pro $(v_p(n))_{n\in\omega}$, a tedy podle podmínky $(2)_p$ je

$$\delta_{\overline{G}^*}(u_n) > \delta_{\overline{G}^*}\left(v_p(n)\right)_{n\in\omega} - \frac{1}{2^p} = \delta_{\overline{G}^*}(y_n) - \frac{1}{2^p}.$$

Provedeme limitní přechod pro $p \to \infty$ a dostaneme nerovnost

$$\delta_{\overline{G}^*}(u_n) \geq \delta_{\overline{G}^*}(y_n). \tag{$\star$}$$

Zvolme libovolnou posloupnost $(q_n)_{n\in\omega}$ vybranou z posloupnosti $(u_n)_{n\in\omega}$. Pak je zřejmě posloupnost $(q_n)_{n\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupností pro $(y_n)_{n\in\omega}$, tedy nerovnost ($\star$) platí s $(q_n)_{n\in\omega}$ na místě $(u_n)_{n\in\omega}$. Z toho okamžitě dostáváme

$$\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(u_n) \geq \delta_{\overline{G}^*}(y_n) = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n).$$

$\square$

2.2 Simonova rovnost, δ-Simonova rovnost

Důsledek 28 (**Simonova rovnost**). *Nechť G je neprázdnou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených reálných funkcí definovaných na G. Jestliže $(x_n)_{n\in\omega}$ je simonovskou posloupností pro (F, G), pak platí*

$$\sup_{f\in F}\limsup_{n\to\infty} x_n(f) = \sup_{g\in G}\limsup_{n\to\infty} x_n(g).$$

Důkaz. Platnost nerovnosti „$\leq$“ je zřejmá. Dokážeme jen obrácenou nerovnost. Pro spor předpokládejme, že existují čísla $c \in \mathbb{R}$ a $d \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\sup_{f\in F}\limsup_{n\to\infty} x_n(f) < c < d < \sup_{g\in G}\limsup_{n\to\infty} x_n(g).$$

Tedy existuje $g_0 \in G$ takové, že $\limsup_n x_n(g_0) > d$. Pak existuje posloupnost $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ vybraná z posloupnosti (x_n) taková, že pro každé $k \in \omega$ platí

$$x_{n_k}(g_0) > d. \tag{*}$$

Posloupnost $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ splňuje podle poznámky 20 Simonovu podmínku pro (F, G), tedy podle věty 21 (Simonova nerovnost) platí

$$\inf_{x\in \mathrm{co}_\infty(x_{n_k})}\sup_{g\in G} x(g) \leq \sup_{f\in F}\limsup_{k\to\infty} x_{n_k}(f) < c.$$

Pak existuje funkce $y \in \mathrm{co}_\infty(x_{n_k})$ taková, že $\sup\limits_{g\in G} y(g) < c$. Speciálně $y(g_0) < c$. Prvek y je tvaru

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \, x_{n_k},$$

kde pro každé $k \in \omega$ je $\mu_k \geq 0$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mu_k = 1$. Dostáváme

$$c > y(g_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \, x_{n_k}(g_0) \overset{(*)}{\geq} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k \, d = d > c,$$

což je zřejmě spor. □

Poznámka 29. Pokud $(x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F,G), pak každá $(u_n)_{n\in\omega}$ absolutně konvexní bloková posloupnost pro $(x_n)_{n\in\omega}$ je také absolutně simonovskou posloupností pro (F,G), neboť součet nekonečné řady, která konverguje absolutně, nezávisí na uspořádání jejích členů, a tedy $\mathrm{aco}_\infty(u_n) \subset \mathrm{aco}_\infty(x_n)$.

Důsledek 30 (**δ-Simonova rovnost**). *Nechť F a G jsou neprázdnými množinami takovými, že $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených reálných funkcí definovaných na G. Jestliže $(x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F,G), pak platí*

$$\delta_F(x_n) = \delta_G(x_n) \qquad a \qquad \tilde{\delta}_F(x_n) = \tilde{\delta}_G(x_n).$$

Důkaz. Zřejmě platí $\delta_F(x_n) \leq \delta_G(x_n)$. Dokážeme obrácenou nerovnost. Zvolme libovolné $g_0 \in G$. Pokud $\limsup_n x_n(g_0) = \liminf_n x_n(g_0)$, pak pro každé $k \in \omega$ položme $y_k := x_{2k}$ a $z_k := x_{2k+1}$. Pokud $\limsup_n x_n(g_0) > c > \liminf_n x_n(g_0)$, pak nechť $(y_k)_{k\in\omega}$ je podposloupnost posloupnosti $(x_n)_{n\omega}$ taková, že $(y_k(g_0))_{k\in\omega}$ konverguje k $\limsup_n x_n(g_0)$ a pro každé $k \in \omega$ platí $y_k(g_0) > c$ a nechť $(z_k)_{k\in\omega}$ je podposloupnost posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že $(z_k(g_0))_{k\in\omega}$ pro změnu konverguje k $\liminf_n x_n(g_0)$ a pro každé $k \in \omega$ platí $z_k(g_0) < c$. V obou případech pro každé $k \in \omega$ položme $u_k := 1/2\, y_k - 1/2\, z_k$. Pak je posloupnost $(u_k)_{k\in\omega}$ absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(x_n)_{n\in\omega}$, tedy podle poznámky 29 je $(u_k)_{k\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro (F,G). Důsledek 28 (Simonova rovnost) dává

$$\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} u_k(f) = \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} u_k(g). \tag{*}$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} x_n(g_0) - \liminf_{n\to\infty} x_n(g_0) &= \lim_{k\to\infty} \left(y_k(g_0) - z_k(g_0)\right) = 2 \lim_{k\to\infty} u_k(g_0) \\
&\leq 2 \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} u_k(g) \\
&\overset{(*)}{=} 2 \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} u_k(f) \\
&= \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} \left(y_k - z_k\right)(f) \\
&\leq \sup_{f\in F} \left(\limsup_{k\to\infty} y_k(f) - \liminf_{k\to\infty} z_k(f) \right) \\
&\leq \sup_{f\in F} \left(\limsup_{n\to\infty} x_n(f) - \liminf_{n\to\infty} x_n(f) \right) \\
&= \delta_F(x_n).
\end{aligned}$$

Tedy pro libovolné $g \in G$ platí $\limsup_n x_n(g) - \liminf_n x_n(g) \leq \delta_F(x_n)$, a tudíž dostáváme $\delta_G(x_n) \leq \delta_F(x_n)$.

Zvolme libovolnou posloupnost $(x_{n_k})_{k\in\omega}$ vybranou z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. Tato podposloupnost podle poznámky 20 splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G), tedy podle předchozího platí $\delta_F(x_{n_k}) = \delta_G(x_{n_k})$, z čehož okamžitě dostáváme $\tilde{\delta}_F(x_n) = \tilde{\delta}_G(x_n)$. □

Definice 31. Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Nechť ε_X je kanonické vnoření prostoru X do X^{**}. Pak pro všechna $n \in \omega$ jsou funkcionály $\varepsilon_X(x_n)$ reálnými stejně omezenými funkcemi na G (respektive na $\overline{G}^*$). Má tedy smysl hovořit o simonovskosti (absolutní simonovskosti) posloupnosti $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ pro (F, G) nebo pro $(F, \overline{G}^*)$.

Řekneme, že $(x_n)_{n\in\omega}$ je (absolutně) simonovskou posloupností pro (F, G) (pro $(F, \overline{G}^*)$), jestliže $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ je (absolutně) simonovskou posloupností pro (F, G) (pro $(F, \overline{G}^*)$).

Poznámka 32. Nechť X je reálným Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a ε_X je kanonickým vnořením X do X^{**}. Pak $\varepsilon_X[X]$ je uzavřeným podprostorem X^{**}. Pro každou posloupnost $(u_n)_{n\in\omega}$ omezenou v X a každou posloupnost $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ v $\mathbb{R}$ takovou, že $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| = 1$, posloupnost částečných součtů $\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varepsilon_X(u_k)\right)_{n\in\omega}$ konverguje absolutně stejnoměrně na omezených podmnožinách množiny X^*, tedy konverguje v duální normě prostoru X^{**}. Posloupnost $\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varepsilon_X(u_k)\right)_{n\in\omega}$ však nevykonverguje z $\varepsilon_X[X]$, tedy existuje bod $x \in X$ takový, že $\varepsilon_X(x)$ je speciálně stejnoměrnou limitou posloupnosti funkcí $\left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \varepsilon_X(u_k)\right)_{n\in\omega}$ na G. Dostáváme tato tvrzení

- ⋆ pokud F je Jamesovou hranicí G, pak každá omezená posloupnost v X splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G),
- ⋆ pokud $(u_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X splňující (absolutní) Simonovu podmínku pro (F, G), pak $(u_n)_{n\in\omega}$ splňuje (absolutní) Simonovu podmínku i pro $(F, \overline{G}^*)$, neboť každý prvek y z množiny $\mathrm{co}_\infty(\varepsilon_X(u_n))$ $(\mathrm{aco}_\infty(\varepsilon_X(u_n)))$ je w^*-spojitý, a tedy $\sup_{g\in G} y(g) = \sup_{g\in\overline{G}^*} y(g)$.

3. Syntéza mizejících prostředníků

V této kapitole nastane syntéza mizejících prostředníků, prostředníka Simonovy nerovnosti a prostředníka Behrendsova výsledku, v modifikovanou Haglerovu-Johnsonovu konstrukci.

3.1 Haglerova-Johnsonova konstrukce

Definice 33. Nechť $p \in \omega$. Množinu všech p-konečných posloupností 0 a 1 označme $\mathbf{2}^p$. Tedy $\mathbf{2}^p = \{0,1\}^p$. Prvky množiny $\mathbf{2}^p$ budeme ztotožňovat s uspořádanými p-ticemi 0 a 1. Množinu všech konečných posloupností 0 a 1 označme $\mathbf{2}^{<\omega}$. Tedy $\mathbf{2}^{<\omega} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathbf{2}^n$.

Definice 34. Nechť $p \in \omega \setminus \{0\}$. Řekneme, že $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}) \in \mathbf{2}^p$ je

liché, jestliže $\sigma_{p-1} = 1$;

sudé, jestliže $\sigma_{p-1} = 0$.

Pro $\sigma \in \mathbf{2}^p$ a $i \in \{0,1\}$ definujme $\sigma\_i := (\sigma_0, \dots, \sigma_{p-1}, i)$.
Dále definujme $\emptyset\_i := (i)$. Obvykle místo (i) píšeme jen i.

Definice 35. Řekneme, že soubor $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ je *stromem*, jestliže platí

1. $(\forall\sigma)\,(\sigma \in \mathbf{2}^{<\omega} \Rightarrow \Psi_\sigma \subset \omega \;\&\; \Psi_\sigma \neq \emptyset)$,
2. $(\forall\sigma)\,(\sigma \in \mathbf{2}^{<\omega} \Rightarrow \Psi_{\sigma\_0} \subset \Psi_\sigma \;\&\; \Psi_{\sigma\_1} \subset \Psi_\sigma \;\&\; \Psi_{\sigma\_0} \cap \Psi_{\sigma\_1} = \emptyset)$.

Tvrzení 36 (Modifikovaná Haglerova-Johnsonova konstrukce). *Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X splňující $\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(x_n) > 0$. Nechť dále $(\eta_p)_{p=1}^\infty$ je klesající posloupností kladných čísel. Pak existují číslo $\gamma \geq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(x_n)$, posloupnost funkcionálů $(g_p)_{p=1}^\infty$ v $\overline{G}^*$ a strom $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ takové, že pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí*

$$(1-\eta_p)\,\gamma < g_p\,(x_m - x_n) < (1+\eta_p)\,\gamma. \tag{3.1}$$

Jestliže je navíc $(x_n)_{n\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, pak pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$ můžeme funkcionál g_p nalézt v množině F.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\eta_1 < 1$. Podle tvrzení 23 o (absolutně) konvexních blocích existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(\psi_\emptyset(i))_{i\in\omega}$ taková, že posloupnost $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní a pro každou $(u_i)_{i\in\omega}$ (absolutně) konvexní blokovou posloupnost pro $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$ platí $\delta_{\overline{G}^*}\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right) \leq \delta_{\overline{G}^*}(u_i)$. Nyní položme $\gamma := \delta_{\overline{G}^*}\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)$. Definujme množinu $\Psi_\emptyset$ takto

$$\Psi_\emptyset := \{n :\ (\exists i)\,(i \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i))\}.$$

Rekurzí definujeme posloupnost $\left((g_p, (\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^p})\right)_{p=1}^\infty$ splňující pro každé $p \in \omega\setminus\{0\}$ podmínky

$(1)_p \quad (\forall \beth)\,(\beth \in \mathbf{2}^{p-1} \Rightarrow (\Psi_{\beth\frown 0} \subset \Psi_\beth \;\&\; \Psi_{\beth\frown 1} \subset \Psi_\beth)),$

$(2)_p \quad (\forall \beth)\,(\forall \daleth)\,((\beth \in \mathbf{2}^p \;\&\; \daleth \in \mathbf{2}^p \;\&\; \beth \neq \daleth) \Rightarrow \Psi_\beth \cap \Psi_\daleth = \emptyset),$

$(3)_p$ pro každé $\beth \in \mathbf{2}^p$ je množina $\Psi_\beth$ nekonečná a $\Psi_\beth \subset \Psi_\emptyset$,

$(4)_p$ funkcionál g_p je prvkem množiny $\overline{G}^*$; pokud $(x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, pak g_p je prvkem množiny F,

$$(5)_p \quad (\forall \beth)\,(\forall \daleth)\,((\beth \in \mathbf{2}^{p-1} \;\&\; \daleth \in \mathbf{2}^{p-1}) \Rightarrow ((\forall m)\,(\forall n)\,((m \in \Psi_{\beth\frown 0} \;\&\; n \in \Psi_{\daleth\frown 1}) \Rightarrow (1-\eta_p)\,\gamma < g_p\,(x_m - x_n) < (1+\eta_p)\,\gamma\,))).$$

Podle lemmatu 13 existují rostoucí posloupnost přirozených čísel $(i_k)_{k\in\omega}$ a funkcionál $g_1 \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$(1-\eta_1)\,\gamma < g_1\left(x_{\psi_\emptyset(i_u)} - x_{\psi_\emptyset(i_v)}\right) < (1+\eta_1)\,\gamma.$$

Avšak pokud je navíc $(x_n)_{n\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, pak podle důsledku 30 (δ-Simonova rovnost) platí $\delta_F(x_{\psi_\emptyset(i)}) = \gamma$, tedy lemma 13 najde funkcionál g_1 v množině F. Nyní definujme množiny Ψ_0 a Ψ_1 takto

$$\Psi_0 := \{n : \; (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i_{2j}))\},$$
$$\Psi_1 := \{n : \; (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i_{2j+1}))\}.$$

Množiny Ψ_0 a Ψ_1 jsou disjunktní, neboť posloupnost $(\psi_\emptyset(i_k))_{k\in\omega}$ je rostoucí. Z tohoto důvodu jsou též množiny Ψ_0 a Ψ_1 nekonečné a zřejmě platí $\Psi_0 \subset \Psi_\emptyset$ a $\Psi_1 \subset \Psi_\emptyset$. Tedy $\left(g_1, (\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^1}\right)$ splňuje podmínky $(1)_1$ až $(5)_1$. Nechť nyní pro $p \in \omega \setminus \{0\}$ máme funkcionál g_p a soubor $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^p}$ splňující podmínky $(2)_p$ až $(5)_p$. Nechť pro každé $\beth \in \mathbf{2}^p$ je $(\psi_\beth(i))_{i\in\omega}$ rostoucí posloupností přirozených čísel takovou, že $\psi_\beth[\omega] = \Psi_\sigma$. Pro každé $i \in \omega$ definujme prvek z_i takto

$$z_i := 2^{-p} \sum_{\sigma\in\mathbf{2}^p} x_{\psi_\sigma(i)}.$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $\beth \in \mathbf{2}^p$ je posloupnost $(\psi_\sigma(i))_{i\in\omega}$ rostoucí a zároveň jsou splněny podmínky $(2)_p$ a $(3)_p$, je $(z_i)_{i\in\omega}$ konvexní blokovou posloupností pro $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$. Podle lemmatu 13 existují rostoucí posloupnost přirozených čísel $(i_k)_{k\in\omega}$ a funkcionál $g_{p+1} \in \overline{G}^*$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$g_{p+1}\,(z_{i_u} - z_{i_v}) > \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right) \delta_{\overline{G}^*}(z_i) \geq \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right) \gamma \tag{1}$$

a s lehkou újmou na obecnosti můžeme předpokládat, že navíc pro každé $\beth \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$ platí

$$g_{p+1}\left(x_{\psi_\beth(i_u)} - x_{\psi_\daleth(i_v)}\right) < \left(1 + \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right) \gamma < (1+\eta_{p+1})\,\gamma. \tag{2}$$

I když je téměř zřejmé, že nerovnost (2) můžeme předpokládat, nedokážeme se zdržet jistého komentáře.

Z podmínky $(3)_p$ plyne, že pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a každé $\daleth \in \mathbf{2}^p$ platí

$$\limsup_{i\to\infty} g_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(i)}\right) - \liminf_{i\to\infty} g_{p+1}\left(x_{\psi_\daleth(i)}\right) < \left(1+\frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma.$$

Položme $\varkappa := \left(1+\eta_{p+1}/2^{p+1}\right)\gamma$. Na chvíli zvolme pevně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$. Položme

$$\begin{aligned} h &:= \limsup_{i\to\infty} g_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(i)}\right), \\ d &:= \liminf_{i\to\infty} g_{p+1}\left(x_{\psi_\daleth(i)}\right). \end{aligned}$$

Pak zřejmě platí

$$\frac{h+d-\varkappa}{2} < d \quad \text{a} \quad \frac{h+d+\varkappa}{2} > h.$$

Proto existuje index $j \in \omega$ takový, že pro libovolné $n \in \omega$ splňující $n \geq j$ a libovolné $k \in \omega$ splňující $k \geq j$ platí

$$\begin{aligned} g_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(n)}\right) &< \frac{h+d+\varkappa}{2} \quad \text{a} \\ g_{p+1}\left(x_{\psi_\daleth(k)}\right) &> \frac{h+d-\varkappa}{2}, \end{aligned}$$

tedy dostáváme

$$g_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(n)} - x_{\psi_\daleth(k)}\right) < \varkappa. \tag{$\star$}$$

Vzhledem k tomu, že máme jen konečně mnoho dvojic $(\gimel, \daleth) \in \mathbf{2}^p \times \mathbf{2}^p$, existuje index $r \in \omega$ takový, že pro každé $n \in \omega$ splňující $n \geq r$, každé $k \in \omega$ splňující $k \geq r$, každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a každé $\daleth \in \mathbf{2}^p$ platí $(\star)$. Ať $b \in \omega$ je nejmenší sudé číslo takové, že $i_b \geq r$. Pro každé $k \in \omega$ položme $\tilde{\imath}_k := i_{b+k}$. Nyní je zřejmé, že (1) a (2) platí, pokud místo písmena i píšeme $\tilde{\imath}$.

Pokud je navíc $(x_n)_{n\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, pak je podle poznámky 29 i $(z_i)_{i\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, neboť je $(z_i)_{i\in\omega}$ konvexní blokovou posloupností pro $(x_n)_{n\in\omega}$. Podle důsledku 30 (δ-Simonova rovnost) platí $\delta_F(z_i) = \delta_{\overline{G}^*}(z_i)$, tedy lemma 13 najde funkcionál g_{p+1} v množině F. Zřejmě je tedy splněna podmínka $(4)_{p+1}$. Zvolme na chvíli pevně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a definujme množiny $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_1}$ takto

$$\begin{aligned} \Psi_{\gimel\_0} &:= \{n :\ (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\gimel(i_{2j}))\}, \\ \Psi_{\gimel\_1} &:= \{n :\ (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\gimel(i_{2j+1}))\} \end{aligned}$$

a pro každé $j \in \omega$ položme $\psi_{\gimel\_0}(j) := \psi_\gimel(i_{2j})$ a $\psi_{\gimel\_1}(j) := \psi_\gimel(i_{2j+1})$. Pak zřejmě jsou posloupnosti $\left(\psi_{\gimel\_0}(j)\right)_{j\in\omega}$ a $\left(\psi_{\gimel\_1}(j)\right)_{j\in\omega}$ rostoucí a platí $\psi_{\gimel\_0}[\omega] = \Psi_{\gimel\_0}$ a $\psi_{\gimel\_1}[\omega] = \Psi_{\gimel\_1}$. Tedy pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ jsou množiny $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_1}$ nekonečné a zřejmě $\Psi_{\gimel\_0} \subset \Psi_{\gimel}$ a $\Psi_{\gimel\_1} \subset \Psi_{\gimel}$. To znamená, že je splněna podmínka $(1)_{p+1}$ a vzhledem k $(3)_p$ i podmínka $(3)_{p+1}$. Zřejmě jsou též pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ množiny $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_1}$ disjunktní a protože je splněna podmínka $(2)_p$ a již víme, že i $(1)_{p+1}$, pak pro každé $m \in \{0,1\}$ a každé $k \in \{0,1\}$ a všechna $\gimel \in 2^p$ a $\daleth \in 2^p$ taková, že $\gimel \neq \daleth$, jsou množiny $\Psi_{\gimel\_m}$ a $\Psi_{\daleth\_k}$ disjunktní. Tedy je splněna i podmínka $(2)_{p+1}$. Pro každé $j \in \omega$ a $l \in \omega$ dostáváme

$$z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}} = 2^{-p} \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p} \left(x_{\psi_\sigma(i_{2j})} - x_{\psi_\sigma(i_{2l+1})} \right) = 2^{-p} \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p} \left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)} \right).$$

Z toho okamžitě plynou pro každá dvě různá $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$ a každé $j \in \omega$ a $l \in \omega$ následující rovnosti

$$x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\gimel\_1}(l)} = 2^p \left(z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}} \right) - \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p,\, \sigma \neq \gimel} \left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)} \right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)} &= 2^p \left(z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}} \right) \\ &\quad - \left[\left(x_{\psi_{\daleth\_0}(j)} - x_{\psi_{\gimel\_1}(l)} \right) + \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p,\, \sigma \neq \gimel,\, \sigma \neq \daleth} \left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Zvolme libovolně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$, $j \in \omega$ a $l \in \omega$. Nyní nepožadujeme, aby $\gimel$ a $\daleth$ byly různé prvky. Aplikujeme funkcionál g_{p+1} na prvek $\left(x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)} \right)$, využijeme přitom rovnosti (3), respektive (4), a v obou případech vzhledem k nerovnostem (1) a (2) dostáváme tentýž následující výsledek

$$\begin{aligned} g_{p+1} \left(x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)} \right) &> 2^p \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}} \right) \gamma - (2^p - 1) \left(1 + \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}} \right) \gamma \\ &= \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}} \left[2^{p+1} - 1 \right] \right) \gamma \\ &> (1 - \eta_{p+1})\, \gamma. \end{aligned}$$

Zřejmě je tedy splněna podmínka $(5)_{p+1}$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $\left(\left(g_p, (\Psi_\sigma)_{\sigma \in \mathbf{2}^p} \right) \right)_{p \in \omega}$ splňující pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$ podmínky $(1)_p$ až $(5)_p$.

Podmínky $(1)_p$ až $(3)_p$ ($p \in \omega \setminus \{0\}$) říkají, že soubor $(\Psi_\sigma)_{\sigma \in \mathbf{2}^{<\omega}}$ je stromem, a podmínky $(5)_p$ ($p \in \omega \setminus \{0\}$) říkají, že pro všechna $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí (3.1). Tím je důkaz hotov. $\square$

4. Pozitivní řešení problému hranice a jeho důsledky

4.1 Hlavní výsledek

Tvrzení 37 (**Pfitzner**). *Nechť X je reálným Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ je omezenou množinou a $F \subset X^*$ je Jamesovou hranicí G. Nechť dále $A \subset X$ je omezenou $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností v A. Pak existuje posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že $\delta_{\overline{G}^*}(y_n) = 0$. Jinými slovy, každá posloupnost v A obsahuje $\sigma(X, \overline{G}^*)$-cauchyovskou podposloupnost.*

Důkaz. Postupujme sporem. Nechť závěr tvrzení neplatí. Pak podle lemmatu 14 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ splňující $\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) > 0$. Podle poznámky 32 je $(z_n)_{n\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, a tedy podle tvrzení 36 (Modifikovaná Haglerova-Johnsonova konstrukce) existují číslo $\gamma \geq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)$, posloupnost funkcionálů $(f_p)_{p=1}^{\infty}$ v F a strom $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ takové, že pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí

$$f_p\left(z_m - z_n\right) > \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma$$

Nejprve definujeme jistou posloupnost $(v_m)_{m\in\omega}$, jíž bude sestávat ze $\sigma(X, F)$-hromadných bodů posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$. Zvolme pevně $m \in \omega$. Definujme posloupnost $(e_m(k))_{k\in\omega}$ takto

$$e_m(k) := \begin{cases} \emptyset & : \quad k = 0, \\ (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}) & : \quad 1 \leq k \leq m, \\ (\underbrace{1, \ldots, 1}_{m}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-m}) & : \quad k > m. \end{cases}$$

Pro každé $k \in \omega$ položme $n_m(k) := \psi_{e_m(k)}(k)$, kde $\left(\psi_{e_m(k)}(i)\right)_{i\in\omega}$ je rostoucí posloupností přirozených čísel takovou, že $\psi_{e_m(k)}[\omega] = \Psi_{e_m(k)}$. Protože $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ je strom, dostáváme, že posloupnost $(n_m(k))_{k\in\omega}$ je rostoucí. Nechť v_m označuje $\sigma(X, F)$-hromadný bod posloupnosti $\left(z_{n_m(k)}\right)_{k\in\omega}$, jehož existenci máme zaručenou $\sigma(X, F)$-spočetnou kompaktností množiny A. V tuto chvíli máme k dispozici posloupnost $(v_m)_{m\in\omega}$.

Nechť nyní $s \in \omega$ je pevné. Též pevně zvolme $p \in \omega$ takové, že $p > s$, a $i \in \omega$ takové, že $i \geq p$. Pak pro všechna $k \in \omega$ a $l \in \omega$ taková, že $k > p$ a $l > p$, platí

$$f_p\left(z_{n_s(k)} - z_{n_i(l)}\right) > \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma.$$

Z toho snadno plyne

$$f_p\left(v_s - v_i\right) \geq \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma. \tag{1}$$

Nechť v je $\sigma(X,F)$-hromadný bod posloupnosti $(v_m)_{m\in\omega}$. Vzhledem k tomu, že nerovnost (1) platí pro každé $i \in \omega$ takové, že $i \geq p$, dostáváme

$$f_p\left(v_s - v\right) \geq \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma. \tag{2}$$

Tedy pro každé $s \in \omega$ a každé $p \in \omega$ takové, že $p > s$, platí nerovnost (2).

Nyní definujme prvek x takto

$$x := \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(m+1)}\left(v_m - v\right). \tag{3}$$

Poznamenejme, že součet nekonečné řady napravo v (3) je brán v topologii vytvořené normou, a že bod x je definován korektně. Množina A je totiž omezená, tedy řada napravo v (3) konverguje absolutně, a protože X je úplný, řada konverguje. Zopakujme si, že pro každé $m \in \omega$ je v_m $\sigma(X,F)$-hromadným bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$. Stejně tak i bod v je $\sigma(X,F)$-hromadným bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$. To spolu s tím, že $(z_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupností, dává pro každé $f \in F$ a každé $m \in \omega$ následující

$$f(v_m) - f(v) \leq \delta_F(z_n) \leq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) \leq \gamma.$$

Tedy máme $\sup_{f\in F} f(x) \leq \gamma$. Nyní zvolme libovolné $\eta > 0$. Nechť $s \in \omega$ je takové, že $\sum_{m=s+1}^{\infty} 2^{-(m+1)} < \eta/\gamma$. Pak pro každé $f \in F$ platí

$$\left| f\left(\sum_{m=s+1}^{\infty} 2^{-(m+1)}\left(v_m - v\right)\right)\right| \leq \sum_{m=s+1}^{\infty} 2^{-(m+1)}\left|f\left(v_m - v\right)\right| < \eta.$$

Pro každé $p > s$ dostáváme

$$\begin{aligned}
f_p(x) &\geq \left(\sum_{m=0}^{s} 2^{-(m+1)} f_p\left(v_m - v\right)\right) - \eta \\
&\overset{(2)}{\geq} \left(\sum_{m=0}^{s} 2^{-(m+1)}\left(1 - 2^{-p}\right)\gamma\right) - \eta \\
&= \left(1 - 2^{-p}\right)\left(1 - 2^{-(s+1)}\right)\gamma - \eta \\
&\geq \left(1 - 2^{-(s+1)}\right)\left(1 - 2^{-(s+1)}\right)\gamma - \eta
\end{aligned}$$

Z toho ovšem plyne $\sup_p f_p(x) \geq \gamma$, tedy platí

$$\sup_{f\in F} f(x) = \gamma.$$

Protože F je Jamesovou hranicí G, existuje $h \in F$ takové, že

$$h(x) = \sup_{g\in\overline{G}^*} g(x) = \sup_{f\in F} f(x) = \gamma > 0.$$

To implikuje, že pro každé $m \in \omega$ platí $h(v_m) - h(v) = \gamma$, tedy $h(v_m) = \gamma + h(v)$. Protože v je $\sigma(X,F)$-hromadným bodem posloupnosti $(v_m)_{m\in\omega}$, platí $h(v) = \gamma + h(v)$, což je spor, neboť jsme předpokládali, že $\gamma > 0$. $\square$

Věta 38. *Nechť X je reálným Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ je omezenou množinou a $F \subset X^*$ je Jamesovou hranicí G. Nechť dále $A \subset X$ je omezenou $\sigma(X,F)$-spočetně kompaktní množinou. Pak A je $\sigma(X,\overline{G}^*)$-sekvenciálně kompaktní.*

Speciálně, pokud $B \subset X^*$ je Jamesovou hranicí pro X, pak každá omezená $\sigma(X,B)$-kompaktní množina je slabě kompaktní.

Důkaz. Zvolme posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ v množině A. Pak podle tvrzení 37 (Pfitzner) existuje posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že $\delta_{\overline{G}^*}(y_n) = 0$. To tedy znamená, že pro každé $g \in \overline{G}^*$ posloupnost $(g(y_n))_{n\in\omega}$ konverguje. Nechť $y \in A$ je $\sigma(X,F)$-hromadným bodem posloupnosti $(y_n)_{n\in\omega}$. Z toho plyne, že pro každé $f \in F$ platí

$$f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(y). \tag{*}$$

Protože F je Jamesovou hranicí G a X je Banachův, podle poznámky 32 každá omezená posloupnost v X splňuje absolutní Simonovu podmínku pro $(F,\overline{G}^*)$, tedy speciálně $(y_n - y)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro $(F,\overline{G}^*)$. Podle důsledku 28 (Simonova rovnost) a (*) platí

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} g(y_n - y) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} f(y_n - y) \overset{(*)}{=} 0,$$

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} g(y - y_n) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} f(y - y_n) \overset{(*)}{=} 0.$$

Z toho dostáváme, že pro každé $g \in \overline{G}^*$ platí

$$\lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(y).$$

Tedy posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ konverguje k y v topologii $\sigma(X,\overline{G}^*)$.

Ve speciálním případě podle právě dokázaného dostaneme, že daná omezená $\sigma(X,B)$-kompaktní množina je slabě sekvenciálně kompaktní, a tedy podle Eberleinovy-Šmuljanovy věty je slabě kompaktní. Tím je důkaz hotov. □

4.2 Jamesova věta a další důsledky

V této sekci si podržíme následující značení. Jestliže Y je normovaným lineárním prostorem, pak symbolem ε_Y budeme rozumět kanonické vnoření prostoru Y do jeho druhého duálu Y^{**}.

Grothendieckova charakterizace relativní slabé kompaktnosti nám bude nápomocna při důkazu Jamesovy charakterizace slabé kompaktnosti. Pro úplnost Grothendieckovo kritérium zformulujme.

Lemma 39 (Grothendieckovo kritérium). *Nechť X je reálným Banachovým prostorem a $F \subset X$ je omezenou množinou. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Pro každé dvě posloupnosti $(f_m)_{m\in\omega}$ v F a $(x_n^*)_{n\in\omega}$ v B_{X^*} takové, že existují tyto limity*

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_n^*(f_m) \qquad a \qquad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_n^*(f_m),$$

platí rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_n^*(f_m) = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_n^*(f_m).$$

2. F je relativně slabě kompaktní.

Nyní se již podívejme, jak James charakterizuje slabě kompaktní množiny v reálném Banachově prostoru.

Věta 40 (James). *Nechť X je reálným Banachovým prostorem a $F \subset X$ je slabě uzavřenou omezenou množinou takovou, že každý funkcionál $x^* \in X^*$ nabývá v nějakém bodě množiny F svého suprema na F. Pak F je slabě kompaktní.*

Důkaz. Využijeme Grothendieckovu charakterizaci relativní slabé kompaktnosti. Zvolme posloupnosti $(f_m)_{m\in\omega}$ v F a $(x_n^*)_{n\in\omega}$ v B_{X^*} takové, že existují tyto limity

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_n^*(f_m) \qquad \text{a} \qquad \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_n^*(f_m).$$

Nyní musíme dokázat rovnost těchto dvou limit. Obraz $\varepsilon_X[F]$ je omezenou množinou, tedy existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $K > 0$, a $\varepsilon_X[F] \subset KB_{X^{**}}$. Z Banachovy-Alaogluovy věty dostáváme, že $\overline{\varepsilon_X[F]}^*$ je w^*-kompaktní. Nechť tedy $g \in \overline{\varepsilon_X[F]}^*$ je w^*-hromadným bodem posloupnosti $(\varepsilon_X(f_m))_{m\in\omega}$. Tedy pro každé $y^* \in X^*$ existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(m_k)_{k\in\omega}$ taková, že

$$\varepsilon_X(f_{m_k})(y^*) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} g(y^*). \tag{1}$$

Z předpokladu o nabývání suprema snadno dostaneme, že $\varepsilon_X[F]$ je Jamesovou hranicí $\overline{\varepsilon_X[F]}^*$. Podívejme se na to podrobněji. Zvolme libovolně $y^* \in X^*$. Podle předpokladu existuje $\varphi \in F$ takové, že $y^*(\varphi) = \sup_{f\in F} y^*(f)$, což znamená

$$\varepsilon_X(\varphi)(y^*) = \sup_{\varepsilon_X(f)\in\varepsilon_X[F]} \varepsilon_X(f)(y^*) = \sup_{g\in\overline{\varepsilon_X[F]}^*} g(y^*).$$

Druhá rovnost plyne z faktu, že $\varepsilon_{X^*}(y^*)$ je spojitý funkcionál na (X^{**}, w^*).

Množina B_{X^*} je podle Banachovy-Alaogluovy věty w^*-kompaktní, tím spíše je $\sigma(X^*, \varepsilon_X[F])$-kompaktní, neboť topologie $\sigma(X^*, \varepsilon_X[F])$ je slabší než w^*.[1] Věta 38 říká, že koule B_{X^*} je $\sigma(X^*, \overline{\varepsilon_X[F]}^*)$-sekvenciálně kompaktní. Tedy existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(n_l)_{l\in\omega}$ taková, že $(x_{n_l}^*)_{l\in\omega}$ konverguje k nějakému prvku koule B_{X^*} v topologii $\sigma(X^*, \overline{\varepsilon_X[F]}^*)$. Nechť bod $x^* \in B_{X^*}$ je $\sigma(X^*, \overline{\varepsilon_X[F]}^*)$-limitou posloupnosti $(x_{n_l}^*)_{l\in\omega}$. To znamená, že pro každé $h \in \overline{\varepsilon_X[F]}^*$ platí

$$h(x_{n_l}^*) \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} h(x^*). \tag{2}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} x_n^*(f_m) &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_X(f_m)(x_n^*) \\
&\overset{(2)}{=} \lim_{m\to\infty} \varepsilon_X(f_m)(x^*) \overset{(1)}{=} g(x^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} x_n^*(f_m) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \varepsilon_X(f_m)(x_n^*) \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} g(x_n^*) \overset{(2)}{=} g(x^*).
\end{aligned}$$

[1] Obecně však nemůžeme říci, že by množina B_{X^*} byla $\sigma(X^*, \varepsilon_X[F])$-uzavřená. Topologie $\sigma(X^*, \varepsilon_X[F])$ není totiž obecně Hausdorffova.

Podle lemmatu 39 (Grothendieckovo kritérium) je množina F relativně slabě kompaktní. Protože je však F podle předpokladu slabě uzavřená, je přímo F slabě kompaktní. $\square$

Jakožto důsledek Jamesovy charakterizace slabé kompaktnosti vyplyne Jamesova charakterizace reflexivity.

Důsledek 41 (James). *Nechť X je reálným Banachovým prostorem. Nechť každý funkcionál $x^* \in X^*$ nabývá v nějakém bodě množiny B_X své normy. Pak X je reflexivní.*

Důkaz. Koule B_X je zřejmě slabě uzavřená a omezená a každý spojitý lineární funkcionál nabývá na B_X svého suprema na B_X. Podle věty 40 (James) je B_X slabě kompaktní, z čehož vyplývá, že $\varepsilon_X[B_X]$ je w^*-kompaktní. Podle Goldstineovy věty[2] platí

$$\overline{\varepsilon_X[B_X]}^* = B_{X^{**}},$$

tedy zřejmě $\varepsilon_X[B_X] = B_{X^{**}}$, což znamená, že X je reflexivní. $\square$

Z reflexivity prostoru X plyne slabá kompaktnost B_{X^*}. Pak podle Eberleinovy-Šmuljanovy věty je B_{X^*} slabě sekvenciálně kompaktní, a tedy w^*-sekvenciálně kompaktní.[3] Důsledek 42 ukazuje w^*-sekvenciální kompaktnost koule B_{X^*} za předpokladu reflexivity prostoru X bez použití Eberleinovy-Šmuljanovy věty.

Důsledek 42. *Nechť X je reálným Banachovým prostorem. Nechť každý funkcionál $x^* \in X^*$ nabývá v nějakém bodě množiny B_X své normy. Pak duální koule B_{X^*} je w^*-sekvenciálně kompaktní.*

Důkaz. Duální koule B_{X^*} je podle Banachovy-Alaogluovy věty w^*-kompaktní. Z předpokladu vyplývá, že $\varepsilon_X[B_X]$ je Jamesovou hranicí $\overline{\varepsilon_X[B_X]}^*$. Tedy podle věty 38 je B_{X^*} $\sigma(X^*, \overline{\varepsilon_X[B_X]}^*)$-sekvenciálně kompaktní. Tedy je w^*-sekvenciálně kompaktní. $\square$

[2]Goldstineova věta: Jestliže Y je normovaným lineárním prostorem, pak $\overline{\varepsilon_Y[B_Y]}^* = B_{Y^{**}}$.

[3]Z důsledku 41 víme, že $\varepsilon_X[B_X] = \overline{\varepsilon_X[B_X]}^* = B_{X^{**}}$, tedy slabá topologie a w^*-topologie jsou na X^* totožné. Pak B_{X^*} je w^*-sekvenciálně kompaktní, právě když je slabě sekvenciálně kompaktní.

5. Komplexní verze

Naším cílem bude nyní ukázat pozitivní řešení problému hranice v případě komplexních Banachových prostorů. Za tím účelem představíme novou definici Jamesovy hranice, která se v případě Jamesovy hranice pro reálný normovaný lineární prostor bude shodovat se starou definicí a v případě Jamesovy hranice nějaké množiny bude obecně nová definice silnější. Shoda staré a nové definice ve skutečnosti nastává vždy, když uvažujeme Jamesovu hranici nějaké symetrické množiny. Přesněji o vztahu nové a staré definice hovoří poznámka 46.

Definice 43. Nechť $z \in \mathbb{C}$. Nechť $\Re z$ značí reálnou část komplexního čísla z a $\Im z$ značí imaginární část komplexního čísla z. Definujme absolutní hodnotu komplexního čísla z takto

$$|z| := \max\{\max\{\Re z, -\Re z\}, \max\{\Im z, -\Im z\}\}.$$

Obvyklou eukleidovskou absolutní hodnotu komplexního čísla z budeme značit takto $|z|_2$.

Definice 44. Nechť f je komplexní funkcí definovanou na nějaké množině G. Pak symbolem $\Re f$ budeme označovat reálnou funkci definovanou na G splňující pro každé $x \in G$ rovnost

$$(\Re f)(x) = \Re(f(x))$$

a symbolem $\Im f$ budeme označovat reálnou funkci definovanou na G splňující pro každé $x \in G$ rovnost

$$(\Im f)(x) = \Im(f(x)).$$

Definice 45 (Jamesova hranice). Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ a $F \subset G$. Řekneme, že F *je Jamesovou hranicí* G, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $f \in F$ takové, že

$$f(x) = \sup_{g \in G} |g(x)|_2 .$$

Poznámka 46. Nechť X je reálným normovaným lineárním prostorem a F je Jamesovou hranicí G podle definice 45. Pak je vidět, že F je Jamesovou hranicí G podle definice 1.

Pokud je F Jamesovou hranicí G podle definice 1 a G je symetrická, pak F je Jamesovou hranicí G podle definice 45. Speciálně, B je Jamesovou hranicí pro X podle definice 45, právě když B je Jamesovou hranicí pro X podle definice 1.

Příklad 47. Položme $X := \mathbb{R}$. Pak X je reálným Banachovým prostorem. Definujme množinu $G \subset X^*$ takto

$$g \in G \quad :\Longleftrightarrow \quad (\exists r)(r \in [1,2] \ \&\ (\forall x)(x \in X \Rightarrow g(x) = rx)).$$

Nechť množina F sestává z funkcionálu reprezentovaného 1 a funkcionálu reprezentovaného 2. Pak zřejmě F je Jamesovou hranicí G podle definice 1, avšak F není Jamesovou hranicí G podle definice 45. Pokud zvolíme nějaké $x \in \mathbb{R}$ takové, že $x < 0$, pak všechny funkcionály z G budou v x nabývat záporné hodnoty, tedy nikde nemůže dojít k nabytí hodnoty $\sup_{g \in G} |g(x)|$. Vidíme, že množina G, ač kompaktní, nemá dokonce žádnou Jamesovu hranici podle definice 45.

5.1 Komplexní verze Behrendsova výsledku

Nyní přistupme k definici veličiny δ. Poznamenejme, že úmyslně v definici používáme maximovou vzdálenost hromadných bodů, neboť pro takový modul δ jsme pak schopni dokázat δ-Simonovu rovnost. Není jasné, zda δ-Simonova rovnost platí i v případě, že modul δ je odvozen od obvyklé eukleidovské vzdálenosti.

Definice 48. Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na D. Nechť pro každé $d \in D$ je $\mathbb{H}(x_n(d))$ množinou všech hromadných bodů posloupnosti $(x_n(d))_{n\in\omega}$. Pro každé $d \in D$ definujeme průměr množiny $\mathbb{H}(x_n(d))$ takto

$$\operatorname{diam} \mathbb{H}(x_n(d)) := \sup\{q : (\exists u)(\exists v)(u \in \mathbb{H}(x_n(d)) \,\&\, v \in \mathbb{H}(x_n(d)) \,\&\, q = |u - v|\}.$$

Definujeme veličinu $\delta_D(x_n)$ takto

$$\delta_D(x_n) := \sup_{d\in D} \operatorname{diam} \mathbb{H}(x_n(d)).$$

Veličinou $\tilde{\delta}_D(x_n)$ rozumíme číslo

$$\inf\{w : (\exists\alpha)\,(\alpha \text{ je podposloupností posloupnosti } (x_n)_{n\in\omega} \,\&\, w = \delta_D\alpha)\}.$$

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ je δ_D-stabilní, jestliže $\tilde{\delta}_D(x_n) = \delta_D(x_n)$.

Poznámka 49. Pokud D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na D takovou, že existuje alespoň jedno $d \in D$ takové, že posloupnost $(x_n(d))_{n\in\omega}$ má hromadný bod, pak $\delta_D(x_n) \in [0; \infty]$. V opačném případě $\delta_D(x_n) = -\infty$.

Pokud D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností reálných funkcí definovaných na D takovou, že pro každé $d \in D$ je $(x_n(d))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností v $\mathbb{R}$, pak $\delta_D^{\mathrm{st}}(x_n) = \delta_D^{\mathrm{nv}}(x_n)$, kde $\delta_D^{\mathrm{st}}(x_n)$ označuje veličinu $\delta_D(x_n)$ podle definice 12 a $\delta_D^{\mathrm{nv}}(x_n)$ označuje veličinu $\delta_D(x_n)$ podle definice 48.

Lemma 50. *Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na D takovou, že existuje alespoň jedno $c \in D$ takové, že $(x_n(c))_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v $\mathbb{C}$. Nechť dále $\delta_D(x_n) < \infty$. Pak pro každé $\eta > 0$ existují čísla $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ a bod $d \in D$ takové, že*

$$|\theta - \vartheta| > \delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta \tag{5.1}$$

a pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$|x_{n_u}(d) - x_{n_v}(d)| < \delta_D(x_n) + \eta, \tag{5.2}$$

$$|x_{n_u}(d) - \theta| < \frac{1}{4}\eta, \tag{5.3}$$

$$|x_{n_v}(d) - \vartheta| < \frac{1}{4}\eta. \tag{5.4}$$

Z nerovností (5.1), (5.2), (5.3) *a* (5.4) *snadno plyne*

$$\delta_D(x_n) + \eta > |x_{n_u}(d) - x_{n_v}(d)| > \delta_D(x_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. Protože existuje alespoň jeden bod $c \in D$ takový, že posloupnost $(x_n(c))_{n\in\omega}$ je omezená, má $(x_n(c))_{n\in\omega}$ hromadný bod, a tedy

$$\operatorname{diam} \mathbb{H}(x_n(c)) \geq 0,$$

z čehož plyne $\delta_D(x_n) \geq 0$. Vzhledem k definici $\delta_D(x_n)$ a k faktu, že $\delta_D(x_n) < \infty$, existuje $d \in D$ takové, že

$$\delta_D(x_n) + \eta > \operatorname{diam} \mathbb{H}(x_n(d)) > \delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta.$$

Pak existují $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ hromadné body posloupnosti $(x_n(d))_{n\in\omega}$ takové, že

$$\delta_D(x_n) + \eta > |\theta - \vartheta| > \delta_D(x_n) - \frac{1}{2}\eta.$$

Snadno se ukáže, že existuje $\sigma \in \omega$ takové, že pro všechna $m \in \omega$ a $n \in \omega$ splňující nerovnosti $m \geq \sigma$ a $n \geq \sigma$ platí

$$|x_m(d) - x_n(d)| < \delta_D(x_n) + \eta,$$

neboť v opačném případě existují posloupnosti $(x_{m_j})_{j\in\omega}$ a $(x_{n_j})_{j\in\omega}$ vybrané z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ takové, že pro každé $j \in \omega$ platí

$$\left|x_{m_j}(d) - x_{n_j}(d)\right| \geq \delta_D(x_n) + \eta. \tag{1}$$

Podle předpokladu jsou však posloupnosti $(x_{m_j}(d))_{j\in\omega}$ a $(x_{n_j}(d))_{j\in\omega}$ omezené a vzhledem k (1) existují v_1 hromadný bod posloupnosti $(x_{m_j}(d))_{j\in\omega}$ a v_2 hromadný bod posloupnosti $(x_{n_j})_{j\in\omega}$ takové, že $|v_1 - v_2| \geq \delta_D(x_n) + \eta$, což je spor s definicí $\delta_D(x_n)$.

Nyní rekurzí definujeme posloupnost přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky

$(1)_k$ k je sudé $\Rightarrow |x_{n_k}(d) - \theta| < \eta/4$,

$(2)_k$ k je liché $\Rightarrow |x_{n_k}(d) - \vartheta| < \eta/4$,

$(3)_k$ $(\forall l)\,((l \in \omega \;\&\; l < k) \Rightarrow n_l < n_k)$.

Položme

$$n_0 := \min\{j : j \in \mathcal{S} \;\&\; j \geq \sigma\},$$

kde $\mathcal{S}$ je množinou těch prvků $n \in \omega$, že

$$|x_n(d) - \theta| < \frac{\eta}{4}.$$

Objekt n_0 je korektně definován, neboť θ je hromadným bodem posloupnosti $(x_n(d))_{n\in\omega}$, a tedy množina $\mathcal{S}$ je nekonečná. Prvek n_0 splňuje podmínky $(1)_0$, $(2)_0$ a $(3)_0$. Nechť pro $k \in \omega \setminus \{0\}$ již máme k-konečnou posloupnost $(n_p)_{p<k}$ splňující podmínky $(1)_{k-1}$, $(2)_{k-1}$ a $(3)_{k-1}$. Pak pokud k je liché, položíme

$$n_k := \min\{j : j \in \mathcal{I} \;\&\; j > n_{k-1}\},$$

kde $\mathcal{I}$ je množinou těch prvků $n \in \omega$, že

$$|x_n(d) - \vartheta| < \frac{\eta}{4}.$$

Objekt n_k je korektně definován, neboť ϑ je hromadným bodem posloupnosti $(x_n(d))_{n\in\omega}$, a tedy množina $\mathcal{I}$ je nekonečná. A pokud k je sudé, položíme

$$n_k := \min\{j : j \in \mathcal{S} \ \&\ j > n_{k-1}\}.$$

Posloupnost $(n_p)_{p<k+1}$ zřejmě splňuje podmínky $(1)_k$, $(2)_k$ a $(3)_k$. Princip indukce implikuje existenci posloupnosti $(n_k)_{k\in\omega}$ splňující pro každé $k \in \omega$ podmínky $(1)_k$, $(2)_k$ a $(3)_k$.

Zřejmě je tedy posloupnost $(n_k)_{k\in\omega}$ rostoucí a jsou splněny podmínky (5.1), (5.2), (5.3) a (5.4). Opakovaným použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché toto

$$\begin{aligned} |x_{n_u}(d) - x_{n_v}(d)| &\geq |\theta - \vartheta| - |x_{n_u} - \theta + \vartheta - x_{n_v}| \\ &\geq |\theta - \vartheta| - |x_{n_u} - \theta| - |\vartheta - x_{n_v}| \\ &> \delta_D(x_n) - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{4} = \delta_D(x_n) - \eta. \end{aligned}$$

□

Lemma 51. *Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na D. Pak $(x_n)_{n\in\omega}$ obsahuje δ_D-stabilní podposloupnost.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $-\infty < \tilde{\delta}_D(x_n) < \infty$. Rekurzí definujeme posloupnost $(y_j)_{j\in\omega}$ splňující pro každé $j \in \omega$

$(1)_j$ pro každé $l \in \omega$ takové, že $l < j$, je y_j podposloupností posloupnosti y_l a y_j je podposloupností posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$,

$(2)_j$ $j \in \omega \setminus \{0\} \Rightarrow \delta_D y_j < \tilde{\delta}_D y_{j-1} + 2^{-j}$.

Položme $y_0 := (x_n)_{n\in\omega}$. Pak jsou zřejmě splněny podmínky $(1)_0$ a $(2)_0$. Nechť již pro $j \in \omega \setminus \{0\}$ máme j-konečnou posloupnost $(y_p)_{p<j}$ splňující podmínky $(1)_{j-1}$ a $(2)_{j-1}$. Pak vzhledem k definici veličiny $\tilde{\delta}_D y_{j-1}$ existuje posloupnost y_j vybraná z posloupnosti y_{j-1} taková, že

$$\delta_D y_j < \tilde{\delta}_D y_{j-1} + \frac{1}{2^j}.$$

Tedy platí $(2)_j$ a s ohledem na podmínku $(1)_{j-1}$ platí i $(1)_j$. Z principu indukce plyne existence posloupnosti $(y_j)_{j\in\omega}$ splňující pro každé $j \in \omega$ podmínky $(1)_j$ a $(2)_j$.

Nyní pro každé $n \in \omega$ položme $z_n := y_n(n)$. Tedy pro každé $k \in \omega$ je posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ počínaje k-tým členem podposloupností posloupnosti y_k. Pro každé $k \in \omega$ dostáváme

$$\tilde{\delta}_D(z_n) \leq \delta_D(z_n) \leq \delta_D y_{k+1} < \tilde{\delta}_D y_k + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \tilde{\delta}_D(z_n) + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Provedeme limitní přechod pro $k \to \infty$ a dostaneme rovnost $\tilde{\delta}_D(z_n) = \delta_D(z_n)$. A tedy posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ je hledanou δ_D-stabilní podposloupností posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. □

Poznámka 52. Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, G je neprázdnou podmnožinou množiny X^* a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností v X. Pak $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na G, kde ε_X je kanonickým vnořením X do jeho druhého duálu X^{**}. Stejně jako v reálném případě budeme $\delta_G(x_n)$ definovat takto $\delta_G(x_n) := \delta_G(\varepsilon_X(x_n))$. Analogicky položíme $\tilde{\delta}_G(x_n) := \tilde{\delta}_G(\varepsilon_X(x_n))$. Zřejmým způsobem definujeme δ_G-stabilitu posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$.

Pokud je G omezenou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností, pak zřejmě $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených funkcí na G, a tedy speciálně pro každé $g \in G$ je $(g(x_n))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností a též $\delta_G(x_n) < \infty$.

Věta 53. *Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, G je omezenou neprázdnou podmnožinou množiny X^* a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak pro každé $\eta > 0$ existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro libovolné dvě disjunktní množiny $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ existují čísla $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že*

$$|\theta - \vartheta| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \frac{\eta}{2} \tag{5.5}$$

a pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí

$$|x^*(y_c) - \theta| < \frac{\eta}{4} \qquad a \qquad |x^*(y_d) - \vartheta| < \frac{\eta}{4}, \tag{5.6}$$

z čehož snadno plyne

$$|x^*(y_c) - x^*(y_d)| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \eta.$$

Důkaz. Zvolme $\eta > 0$. S přihlédnutím k poznámce 52 existuje podle lemmatu 51 $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. Pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ definujme $\Xi_r(\gamma)$ takto

$$\Xi_r(\gamma) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad (\exists\alpha)\,(\exists x^*)\,(\exists\theta)\,(\exists\vartheta)\,\varphi_r(\gamma,\alpha,x^*,\theta,\vartheta)\,,$$

kde relace $\varphi_r(\gamma,\alpha,x^*,\theta,\vartheta)$ je definována takto

$$\begin{aligned}
&\varphi_r(\gamma,\alpha,x^*,\theta,\vartheta) \qquad :\Longleftrightarrow\\
&\quad (\alpha \text{ je rostoucí } r\text{-konečnou posloupností přirozených čísel}) \quad \&\\
&\quad (\gamma = \alpha) \quad \& \quad \left(x^* \in \overline{G}^*\right) \quad \& \quad (\theta \in \mathbb{C}) \quad \& \quad (\vartheta \in \mathbb{C}) \quad \&\\
&\quad \left(|\theta - \vartheta| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \eta/4\right) \quad \&\\
&\quad \left((\forall\rho)\left((\rho \in \omega \;\&\; 2\rho < r) \Rightarrow \left|x^*\left(z_{\alpha(2\rho)}\right) - \theta\right| < \eta/8\right)\right) \quad \&\\
&\quad \left((\forall\sigma)\left((\sigma \in \omega \;\&\; 2\sigma+1 < r) \Rightarrow \left|x^*\left(z_{\alpha(2\sigma+1)}\right) - \vartheta\right| < \eta/8\right)\right).
\end{aligned}$$

Pak definujme pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ množinu T_r následovně

$$T_r := \{\gamma :\; \Xi_r(\gamma)\}.$$

Nyní ověřme, že prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω. Zvolme libovolnou nekonečnou množinu $M \subset \omega$. Pak podle lemmatu 3 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel β taková, že $\beta[\omega] = M$.

Posloupnost $(z_{\beta(j)})_{j\in\omega}$ je podposloupností $(z_n)_{n\in\omega}$ a $(z_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní, tedy $\delta_{\overline{G}^*}(z_{\beta(j)}) = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)$. S ohledem na poznámku 52 existují podle lemmatu 50 čísla $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$, rostoucí posloupnost přirozených čísel $(j_m)_{m\in\omega}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že

$$|\theta - \vartheta| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4}$$

a pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$\left|x^*\left(z_{\beta(j_u)}\right) - \theta\right| < \frac{\eta}{8} \quad \text{a} \quad \left|x^*\left(z_{\beta(j_v)}\right) - \vartheta\right| < \frac{\eta}{8}.$$

Nyní pro každé $m \in \omega$ položme $\mu_m := \beta(j_m)$. Pak pro každé $r \in \omega$ zřejmě $(\mu_0, \ldots, \mu_r) \in T_{r+1}$, a tedy prázdná množina je vůči $(T_r)_{r=1}^{\infty}$ totálně dobrou množinou vzhledem k ω.

Podle věty 2 (Ramsey) existuje nekonečná množina $N \subset \omega$ taková, že pro každé $r \in \omega$ a každou ν rostoucí $(r+1)$-konečnou posloupnost v N platí $\nu \in T_{r+1}$. Podle lemmatu 3 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel β taková, že $N = \beta[\omega]$. Nyní pro každé $n \in \omega$ položme $y_n := z_{\beta(2n+1)}$. Posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ je zřejmě podposloupností posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$, jíž je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní, a tedy $\delta_{\overline{G}^*}(y_n) = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)$. Nechť $C \subset \omega$, $D \subset \omega$ jsou dvě disjunktní množiny. Pak podle lemmatu 15 existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(j_m)_{m\in\omega}$ taková, že

$$(\forall c)\,(c \in C \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m} = 2c + 1)))\,, \tag{1}$$
$$(\forall d)\,(d \in D \Rightarrow ((\exists m)\,(m \in \omega \;\&\; j_{2m+1} = 2d + 1)))\,. \tag{2}$$

Pro každé $m \in \omega$ položme $\alpha_m := \beta(j_m)$. Pak posloupnost $(\alpha_m)_{m\in\omega}$ je rostoucí a pro každé $m \in \omega$ platí $\alpha_m \in N$. Podle věty 2 (Ramsey) platí pro všechna $r \in \omega$ vztah $(\alpha_0, \ldots, \alpha_r) \in T_{r+1}$. To znamená, že pro každé $r \in \omega$ existují čísla $\theta_r \in \mathbb{C}$ a $\vartheta_r \in \mathbb{C}$ a funkcionál $x_r^* \in \overline{G}^*$ takové, že

$$|\theta_r - \vartheta_r| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{4} \tag{3}$$

a pro každé $u \in \omega$ sudé takové, že $u < r + 1$, a každé $v \in \omega$ liché takové, že $v < r + 1$, platí

$$|x_r^*(z_{\alpha_u}) - \theta_r| < \frac{\eta}{8} \quad \text{a} \tag{4}$$
$$|x_r^*(z_{\alpha_v}) - \vartheta_r| < \frac{\eta}{8}. \tag{5}$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme z (4), že pro každé $r \in \omega$ platí

$$|\theta_r| < \frac{\eta}{8} + \|x_r^*\|\,\|z_{\alpha_0}\|\,. \tag{6}$$

Stejně tak z (5) dostáváme, že pro každé $r \in \omega \setminus \{0\}$ platí

$$|\vartheta_r| < \frac{\eta}{8} + \|x_r^*\|\,\|z_{\alpha_1}\|\,. \tag{7}$$

Protože $(x_r^*)_{r\in\omega}$ je omezenou posloupností, plyne z (6) a (7), že též $(\theta_r)_{r\in\omega}$ a $(\vartheta_r)_{r\in\omega}$ jsou omezenými posloupnostmi, a tedy z Bolzanovy-Weierstrassovy věty plyne existence $\theta \in \mathbb{C}$ hromadného bodu posloupnosti $(\theta_r)_{r\in\omega}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ hromadného bodu posloupnosti $(\vartheta_r)_{r\in\omega}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lim_{r\to\infty}\theta_r = \theta$ a $\lim_{r\to\infty}\vartheta_r = \vartheta$. Vzhledem k tomu, že pro všechna $r \in \omega$ platí (3), dostáváme

$$|\theta - \vartheta| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) - \frac{\eta}{2} = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \frac{\eta}{2}. \tag{8}$$

Banachova-Alaogluova věta implikuje, že množina $\overline{G}^*$ je w^*-kompaktní, neboť je omezená a w^*-uzavřená. Existuje tedy funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$, jenž je w^*-hromadným bodem posloupnosti $(x_r^*)_{r\in\omega}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $C \neq \emptyset$ a $D \neq \emptyset$. Zvolme libovolně $c \in C$ a $d \in D$. Pak podle (1) existuje $u \in \omega$ sudé takové, že $j_u = 2c+1$, a podle (2) existuje $v \in \omega$ liché takové, že $j_v = 2d+1$. Položme $q_0 := \max\{u, v\}$. Pak z (4) a (5) dostáváme, že pro každé $q \in \omega$ takové, že $q > q_0$, platí

$$\left|x_q^*\left(z_{\beta(2c+1)}\right) - \theta_q\right| < \frac{\eta}{8} \quad \text{a} \quad \left|x_q^*\left(z_{\beta(2d+1)}\right) - \vartheta_q\right| < \frac{\eta}{8}. \tag{9}$$

Protože x^* je w^*-hromadným bodem posloupnosti $(x_r^*)_{r\in\omega}$, θ je limitou posloupnosti $(\theta_r)_{r\in\omega}$, ϑ je limitou posloupnosti $(\vartheta_r)_{r\in\omega}$ a pro každé $q \in \omega$ takové, že $q > q_0$, platí (9), pak vzhledem k tomu, že $y_c = z_{\beta(2c+1)}$ a $y_d = z_{\beta(2d+1)}$, dostáváme

$$|x^*(y_c) - \theta| < \frac{\eta}{4} \qquad \text{a} \qquad |x^*(y_d) - \vartheta| < \frac{\eta}{4}. \tag{10}$$

Opakovaným použitím trojúhelníkové nerovnosti dostaneme z (8) a (10) toto

$$\begin{aligned} |x^*(y_c - y_d)| &\geq |\theta - \vartheta| - |x^*(y_c) - \theta + \vartheta - x^*(y_d)| \\ &\geq |\theta - \vartheta| - |x^*(y_c) - \theta| - |\vartheta - x^*(y_d)| \\ &> \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{4} - \frac{\eta}{4} = \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) - \eta. \end{aligned}$$

□

Lemma 54. *Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak pro každé $\eta > 0$ existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro každou $(w_n)_{n\in\omega}$ konvexní blokovou posloupnost pro $(v_n)_{n\in\omega}$ platí*

$$\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - 2\eta.$$

Důkaz. Nechť $\eta > 0$. Podle věty 53 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(v_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro každé dvě disjunktní množiny $C \subset \omega$ a $D \subset \omega$ existují čísla $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že platí (5.5) a pro každé $c \in C$ a každé $d \in D$ platí (5.6).

Nechť $(w_n)_{n\in\omega}$ je konvexní blokovou posloupností pro $(v_n)_{n\in\omega}$. To tedy znamená, že existují posloupnost $(A_n)_{n\in\omega}$ po dvou disjunktních konečných podmnožin množiny ω a zobrazení $\lambda : \bigcup_{n\in\omega} A_n \to \mathbb{R}_0^+$ takové, že pro každé $n \in \omega$ platí

$$w_n = \sum_{k\in A_n} \lambda(k)\, v_k \qquad \text{a} \qquad \sum_{k\in A_n} \lambda(k) = 1.$$

Položme $C := \bigcup_{n\in\omega} A_{2n}$ a $D := \bigcup_{n\in\omega} A_{2n+1}$. Množiny C a D jsou zřejmě disjunktní. Pak existují čísla $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ a funkcionál $x^* \in \overline{G}^*$ takové, že platí

$$|\theta - \vartheta| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(v_n) - \frac{\eta}{2}, \tag{1}$$

pro každé $c \in C$ platí

$$|x^*(v_c) - \theta| < \frac{\eta}{4} \tag{2}$$

a každé $d \in D$ platí

$$|x^*(v_d) - \vartheta| < \frac{\eta}{4}. \tag{3}$$

Použitím (2) a (3) dostáváme pro každé $n \in \omega$ následující

$$\begin{aligned}
|x^*(w_{2n}) - \theta| &= \left| \sum_{k \in A_{2n}} \lambda(k)\, x^*(v_k) - \sum_{k \in A_{2n}} \lambda(k)\, \theta \right| \\
&\leq \sum_{k \in A_{2n}} \lambda(k)\, |x^*(v_k) - \theta| \overset{(2)}{<} \frac{\eta}{4} \\
|x^*(w_{2n+1}) - \vartheta| &= \left| \sum_{k \in A_{2n+1}} \lambda(k)\, x^*(v_k) - \sum_{k \in A_{2n+1}} \lambda(k)\, \vartheta \right| \\
&\leq \sum_{k \in A_{2n+1}} \lambda(k)\, |x^*(v_k) - \vartheta| \overset{(3)}{<} \frac{\eta}{4}
\end{aligned}$$

Opakovaně použijeme trojúhelníkovou nerovnost a z předchozího a z (1) dostaneme pro každé $n \in \omega$ toto

$$|x^*(w_{2n}) - x^*(w_{2n+1})| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(v_n) - \eta.$$

Posloupnosti $(x^*(w_{2n}))_{n\in\omega}$ a $(x^*(w_{2n+1}))_{n\in\omega}$ jsou omezené, a tedy existují $\chi \in \mathbb{C}$ a $\varsigma \in \mathbb{C}$ hromadné body posloupností $(x^*(w_{2n}))_{n\in\omega}$ a $(x^*(w_{2n+1}))_{n\in\omega}$ takové, že

$$|\chi - \varsigma| > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(v_n) - 2\eta.$$

Z toho okamžitě dostáváme $\delta_{\overline{G}^*}(w_n) > \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(v_n) - 2\eta = \delta_{\overline{G}^*}(v_n) - 2\eta$. □

Důsledek 55 (O konvexních blocích)**.** *Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Pak existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(y_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že pro každou $(u_n)_{n\in\omega}$ konvexní blokovou posloupnost pro $(y_n)_{n\in\omega}$ platí*

$$\delta_{\overline{G}^*}(y_n) \leq \delta_{\overline{G}^*}(u_n) \qquad a \qquad \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(y_n) \leq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(u_n).$$

Důkaz. Důkaz proběhne stejně jako důkaz tvrzení 23 (O (absolutně) konvexních blocích) ve verzi jen pro konvexní bloky. □

5.2 Komplexní δ-Simonova rovnost

Nyní uvedeme novou definice simonovské a absolutně simonovské posloupnosti v $\ell^\infty(G)$. Tato nová definice bude mít smysl i v prostorech $\ell^\infty(G)$ nad tělesem komplexních čísel. V případě reálných prostorů $\ell^\infty(G)$ bude nová definice silnější.

Definice 56 (Simonovská a absolutně simonovská posloupnost). Nechť G je neprázdnou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v Banachově prostoru $(\ell^\infty(G), ||\cdot||_\infty)$ nad tělesem $\mathbb{T}$, kde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, nebo $\mathbb{T} = \mathbb{C}$.

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ *splňuje Simonovu podmínku pro* (F, G), jestliže pro každé $x \in \mathrm{co}_\infty(x_n)$ existuje $f \in F$ takové, že

$$x(f) = \sup_{g\in G} |x(g)|_2 = ||x||_\infty.$$

Řekneme, že posloupnost $(x_n)_{n\in\omega}$ *splňuje absolutní Simonovu podmínku pro* (F, G), jestliže pro každé $x \in \mathrm{aco}_\infty(x_n)$ existuje $f \in F$ takové, že

$$x(f) = \sup_{g\in G} |x(g)|_2 = ||x||_\infty.$$

Místo „$(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje Simonovu podmínku pro (F, G)“ budeme občas říkat, že $(x_n)_{n\in\omega}$ *je simonovskou posloupností pro* (F, G) a místo „$(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G)“ budeme říkat, že $(x_n)_{n\in\omega}$ *je absolutně simonovskou posloupností pro* (F, G).

Poznámka 57. Pojem absolutní simonovskosti je závislý na tělese, nad kterým definujeme Banachův prostor $\ell^\infty(G)$. Proto v dalším: pokud uvažujeme posloupnost stejně omezených reálných funkcí na G, chápeme členy takové posloupnosti jako prvky reálného $\ell^\infty(G)$.

Poznámka 58. Nechť G je neprázdnou množinou a $F \subset G$. Uvažujme $\ell^\infty(G)$ nad tělesem reálných čísel. Nechť $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v $\ell^\infty(G)$. Pokud $(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje (absolutní) Simonovu podmínku pro (F, G) podle definice 56, pak splňuje (absolutní) Simonovu podmínku pro (F, G) podle definice 19.

Poznámka 59. Poznamenejme, že poznámka 29 je stejně relevantní i pro komplexní $\ell^\infty(G)$, tedy absolutně konvexní bloková posloupnost pro nějakou absolutně simonovskou posloupnost pro (F, G) v komplexním $\ell^\infty(G)$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G) v komplexním $\ell^\infty(G)$.

Lemma 60. *Nechť D je neprázdnou množinou a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností komplexních funkcí definovaných na D takovou, že pro každé $d \in D$ je $(x_n(d))_{n\in\omega}$ omezenou posloupností v $\mathbb{C}$. Pak platí*

$$\delta_D(\Re x_n) \leq \delta_D(x_n) \quad a \quad \delta_D(\Im x_n) \leq \delta_D(x_n).$$

Důkaz. Dokažme jen první nerovnost. Druhá nerovnost se dokazuje analogicky. Zvolme $d \in D$. Nechť $u_1 \in \mathbb{R}$ a $v_1 \in \mathbb{R}$ jsou hromadnými body posloupnosti $(\Re x_n)_{n\in\omega}$. Tedy existují rostoucí posloupnosti přirozených čísel $(n_k)_{k\in\omega}$ a $(m_k)_{k\in\omega}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} \Re x_{n_k}(d) = u_1 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \Re x_{m_k}(d) = v_1.$$

Nechť $u_2 \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $(\Im x_{n_k})_{k\in\omega}$ a $v_2 \in \mathbb{R}$ je hromadným bodem posloupnosti $(\Im x_{m_k})_{k\in\omega}$. Tedy $u_1 + iu_2$ a $v_1 + iv_2$ jsou hromadnými body posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$. Dostáváme

$$|u_1 - v_1| \leq |(u_1 - v_1) + i(u_2 - v_2)| = |(u_1 + iu_2) - (v_1 + iv_2)| \leq \delta_D(x_n).$$

Z toho okamžitě plyne $\delta_D(\Re x_n) \leq \delta_D(x_n)$. □

Lemma 61. *Nechť G je neprázdnou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených komplexních funkcí definovaných na G. Jestliže $(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G) v komplexním $\ell^\infty(G)$, pak $(\Re x_n)_{n\in\omega}$ a $(\Im x_n)_{n\in\omega}$ splňují absolutní Simonovu podmínku pro (F, G) v reálném $\ell^\infty(G)$ podle nové definice 56 (tedy i podle staré definice 19).*

Důkaz. Posloupnosti $(\Re x_n)_{n\in\omega}$ a $(\Im x_n)_{n\in\omega}$ chápeme jako posloupnosti v reálném Banachově prostoru $\ell^\infty(G)$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ chápeme jako posloupnost v komplexním Banachově prostoru $\ell^\infty(G)$.

Dokažme, že $(\Re x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G) podle nové definice. Zvolme $y \in \mathrm{aco}_\infty(\Re x_n)$. Pak existuje $x \in \mathrm{aco}_\infty(x_n)$ takové, že $\Re x = y$. Protože $(x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G), existuje bod $f \in F$ takový, že

$$x(f) = \sup_{g\in G} |x(g)|_2 .$$

Tedy dostáváme

$$y(f) = \Re x(f) = x(f) = \sup_{g\in G} |x(g)|_2 . \qquad (*)$$

Současně $y(f) \leq \sup_{g\in G} y(g)$. Z $(*)$ a předchozí nerovnosti dostáváme

$$\sup_{g\in G} |x(g)|_2 \leq \sup_{g\in G} y(g) \leq \sup_{g\in G} |y(g)|_2 .$$

Vzhledem k tomu, že $y = \Re x$, je obrácená nerovnost zřejmá, a tedy máme

$$y(f) = \sup_{g\in G} |y(g)|_2 ,$$

což přesně znamená, že $(\Re x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G) podle nové definice (tedy i podle staré definice).

Nyní dokažme, že $(\Im x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G) podle nové definice. Zvolme $z \in \mathrm{aco}_\infty(\Im x_n)$. Pak existuje $x \in \mathrm{aco}_\infty(x_n)$ takové, že $\Im x = z$. Z toho plyne, že $\Re(-ix) = z$. Zřejmě $-ix \in \mathrm{aco}_\infty(x_n)$. Podle první části důkazu existuje $f \in F$ takové, že

$$z(f) = \sup_{g\in G} |z(g)|_2 ,$$

což znamená, že $(\Im x_n)_{n\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro (F, G) podle nové definice (tedy i podle staré definice). □

Důsledek 62 (komplexní δ-Simonova rovnost). *Nechť G je neprázdnou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností stejně omezených komplexních funkcí definovaných na G. Jestliže $(x_n)_{n\in\omega}$ splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G), pak platí*

$$\delta_G(x_n) = \delta_F(x_n).$$

Důkaz. Nerovnost $\delta_F(x_n) \leq \delta_G(x_n)$ zřejmě platí. Dokážeme obrácenou nerovnost. Zvolme bod $g_0 \in G$. Nechť $u \in \mathbb{C}$ a $v \in \mathbb{C}$ jsou hromadné body posloupnosti $(x_n(g_0))_{n\in\omega}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $u \neq v$. Pak existují posloupnosti $(y_k)_{k\in\omega}$ a $(z_k)_{k\in\omega}$ vybrané z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} y_k(g_0) = u \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} z_k(g_0) = v$$

a pro každé $k \in \omega$ a každé $l \in \omega$ platí $y_k \neq z_l$. Pro každé $k \in \omega$ položme $u_k := 1/2\, y_k - 1/2\, z_k$. Posloupnost $(u_k)_{k\in\omega}$ je zřejmě absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(x_n)_{n\in\omega}$, tedy podle poznámky 59 je $(u_k)_{k\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro (F,G). Podle lemmatu 61 jsou posloupnosti $(\Re\, u_k)_{k\in\omega}$ a $(\Im\, u_k)_{k\in\omega}$ též absolutně simonovské pro (F,G), a tedy i $(-\Re\, u_k)_{k\in\omega}$ a $(-\Im\, u_k)_{k\in\omega}$ jsou absolutně simonovské pro (F,G). Podle důsledku 28 (Simonova rovnost) platí

$$\begin{aligned}
&\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, u_k(f)) = \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, u_k(g))\,, \\
&\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (-\Re\, u_k(f)) = \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (-\Re\, u_k(g)) \quad \text{a} \\
&\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, u_k(f)) = \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, u_k(g))\,, \\
&\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (-\Im\, u_k(f)) = \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (-\Im\, u_k(g))\,.
\end{aligned} \tag{*}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}
|u - v| &= \left|\lim_{k\to\infty} (y_k(g_0) - z_k(g_0))\right| \\
&= \max\left\{\left|\lim_{k\to\infty} (\Re\, y_k(g_0) - \Re\, z_k(g_0))\right|,\ \left|\lim_{k\to\infty} (\Im\, y_k(g_0) - \Im\, z_k(g_0))\right|\right\} \\
&= 2\max\Big\{\lim_{k\to\infty} (\Re\, u_k(g_0))\,,\ \lim_{k\to\infty} (-\Re\, u_k(g_0))\,, \\
&\qquad \lim_{k\to\infty} (\Im\, u_k(g_0))\,,\ \lim_{k\to\infty} (-\Im\, u_k(g_0))\Big\} \\
&\leq 2\max\Big\{\sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, u_k(g))\,,\ \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (-\Re\, u_k(g))\,, \\
&\qquad \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, u_k(g))\,,\ \sup_{g\in G} \limsup_{k\to\infty} (-\Im\, u_k(g))\Big\} \\
&\overset{(*)}{=} 2\max\Big\{\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, u_k(f))\,,\ \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (-\Re\, u_k(f))\,, \\
&\qquad \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, u_k(f))\,,\ \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (-\Im\, u_k(f))\Big\} \\
&= \max\Big\{\sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, y_k(f) - \Re\, z_k(f))\,,\ \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Re\, z_k(f) - \Re\, y_k(f))\,, \\
&\qquad \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, y_k(f) - \Im\, z_k(f))\,,\ \sup_{f\in F} \limsup_{k\to\infty} (\Im\, z_k(f) - \Im\, y_k(f))\Big\} \\
&\leq \max\left\{\delta_F(\Re\, x_n),\ \delta_F(\Im\, x_n)\right\} \leq \delta_F(x_n).
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost je okomentována v lemmatu 60. Z právě dokázané nerovnosti okamžitě plyne $\delta_G(x_n) \leq \delta_F(x_n)$. $\square$

5.3 Haglerova-Johnsonova konstrukce

Definice 63. Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X. Řekneme, že $(x_n)_{n\in\omega}$ je (absolutně) simonovskou posloupností pro (F, G), jestliže $(\varepsilon_X(x_n))_{n\in\omega}$ je (absolutně) simonovskou posloupností pro (F, G) v komplexním $\ell^\infty(G)$, kde ε_X je kanonickým vnořením X do X^{**}.

Definice je analogií definice 31.

Tvrzení 64 (Hagler-Johnson – komplexní verze)**.** *Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je neprázdnou omezenou množinou, $F \subset G$ a $(x_n)_{n\in\omega}$ je omezenou posloupností v X splňující absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$ a $\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(x_n) > 0$. Nechť dále $(\eta_p)_{p=1}^\infty$ je klesající posloupností kladných čísel. Pak existují číslo $\gamma \geq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(x_n)$, posloupnost funkcionálů $(f_p)_{p=1}^\infty$ v F a strom $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ takové, že pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí*

$$(1 - \eta_p)\,\gamma < |f_p\,(x_m - x_n)| < (1 + \eta_p)\,\gamma. \tag{5.7}$$

Důkaz. Důkaz bude probíhat stejně jako u tvrzení 36 jen s několika málo rozdíly. Místo tvrzení 23 použijeme důsledek 55, místo lemmatu 13 použijeme lemma 50 a místo důsledku 30 použijeme důsledek 62. Z toho plyne, že na těch místech v důkazu tvrzení 36, kde vyhodnocujeme některý z funkcionálů g_p $(p \in \omega)$ v prvku $(x_m - x_n)$, respektive v prvku $(z_m - z_n)$, kde $m, n \in \omega$, budeme navíc psát absolutní hodnotu. Pro pohodlí však celý důkaz zopakujeme.

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\eta_1 < 1$. Podle důsledku 55 (O konvexních blocích) existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $(\psi_\emptyset(i))_{i\in\omega}$ taková, že posloupnost $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní a pro každou $(u_i)_{i\in\omega}$ konvexní blokovou posloupnost pro $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$ platí

$$\delta_{\overline{G}^*}\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right) \leq \delta_{\overline{G}^*}(u_i).$$

Nyní položme $\gamma := \delta_{\overline{G}^*}\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)$, což znamená, že $\gamma \geq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(x_n) > 0$. Definujme množinu $\Psi_\emptyset$ takto

$$\Psi_\emptyset := \{n : \ (\exists i)\,(i \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i))\}.$$

Rekurzí definujeme posloupnost $\left(\left(f_p, (\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^p}\right)\right)_{p=1}^\infty$ splňující pro každé $p \in \omega\setminus\{0\}$ podmínky

$(1)_p$ $\quad (\forall \beth)\,(\beth \in \mathbf{2}^{p-1} \Rightarrow (\Psi_{\beth^\frown 0} \subset \Psi_\beth \;\&\; \Psi_{\beth^\frown 1} \subset \Psi_\beth))$,

$(2)_p$ $\quad (\forall \beth)\,(\forall \daleth)\,((\beth \in \mathbf{2}^p \;\&\; \daleth \in \mathbf{2}^p \;\&\; \beth \neq \daleth) \Rightarrow \Psi_\beth \cap \Psi_\daleth = \emptyset)$,

$(3)_p$ $\quad$ pro každé $\beth \in \mathbf{2}^p$ je množina $\Psi_\beth$ nekonečná a $\Psi_\beth \subset \Psi_\emptyset$,

$(4)_p$ $\quad$ funkcionál f_p je prvkem množiny F,

$$
\begin{aligned}
(5)_p \qquad & (\forall \gimel)\,(\forall \daleth)\,((\gimel \in \mathbf{2}^{p-1} \;\&\; \daleth \in \mathbf{2}^{p-1}) \Rightarrow \\
& \qquad ((\forall m)\,(\forall n)\,((m \in \Psi_{\gimel\frown 0} \;\&\; n \in \Psi_{\daleth\frown 1}) \Rightarrow \\
& \qquad\qquad (1-\eta_p)\,\gamma < |f_p\,(x_m - x_n)| < (1+\eta_p)\,\gamma\,))).
\end{aligned}
$$

Podle důsledku 62 (komplexní δ-Simonova rovnost) a lemmatu 50 existují rostoucí posloupnost přirozených čísel $(i_k)_{k\in\omega}$ a funkcionál $f_1 \in F$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$(1-\eta_1)\,\gamma = (1-\eta_1)\,\delta_F\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right) < \left|f_1\left(x_{\psi_\emptyset(i_u)} - x_{\psi_\emptyset(i_v)}\right)\right| < (1+\eta_1)\,\gamma.$$

Nyní definujme množiny Ψ_0 a Ψ_1 takto

$$
\begin{aligned}
\Psi_0 &:= \{n :\ (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i_{2j}))\},\\
\Psi_1 &:= \{n :\ (\exists j)\,(j \in \omega \;\&\; n = \psi_\emptyset(i_{2j+1}))\}.
\end{aligned}
$$

Množiny Ψ_0 a Ψ_1 jsou disjunktní, neboť posloupnost $(\psi_\emptyset(i_k))_{k\in\omega}$ je rostoucí. Z tohoto důvodu jsou též množiny Ψ_0 a Ψ_1 nekonečné a zřejmě platí $\Psi_0 \subset \Psi_\emptyset$ a $\Psi_1 \subset \Psi_\emptyset$. Tedy $\left(f_1, (\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^1}\right)$ splňuje podmínky $(1)_1$ až $(5)_1$. Nechť nyní pro $p \in \omega \setminus \{0\}$ již máme funkcionál f_p a soubor $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^p}$ splňující podmínky $(2)_p$ až $(5)_p$. Nechť pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ je $(\psi_\gimel(i))_{i\in\omega}$ rostoucí posloupností přirozených čísel takovou, že $\psi_\gimel[\omega] = \Psi_\gimel$. Pro každé $i \in \omega$ definujme z_i takto

$$z_i := 2^{-p} \sum_{\sigma\in\mathbf{2}^p} x_{\psi_\sigma(i)}.$$

Vzhledem k $(2)_p$, $(3)_p$ a vzhledem k tomu, že pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ je posloupnost $(\psi_\gimel(i))_{i\in\omega}$ rostoucí, je $(z_i)_{i\in\omega}$ konvexní blokovou posloupností pro $\left(x_{\psi_\emptyset(i)}\right)_{i\in\omega}$. To znamená, že $(z_i)_{i\in\omega}$ je absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, a podle lemmatu 50, důsledku 62 (komplexní δ-Simonova rovnost) a důsledku 55 (O konvexních blocích) existují rostoucí posloupnost přirozených čísel $(i_k)_{k\in\omega}$ a funkcionál $f_{p+1} \in F$ takové, že pro každé $u \in \omega$ sudé a každé $v \in \omega$ liché platí

$$|f_{p+1}\,(z_{i_u} - z_{i_v})| > \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\delta_F(z_i) = \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\delta_{\overline{G}^*}(z_i) \geq \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma \quad (1)$$

a s lehkou újmou na obecnosti můžeme předpokládat, že navíc pro každé $\gimel \in 2^p$ a každé $\daleth \in 2^p$ platí

$$\left|f_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(i_u)} - x_{\psi_\daleth(i_v)}\right)\right| < \left(1 + \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma < (1+\eta_{p+1})\,\gamma. \qquad (2)$$

Stejně jako v důkazu tvrzení 36 si k nerovnosti (2) neodpustíme jistý komentář.

Zvolme pevně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$. Pro každý hromadný bod h posloupnosti $\left(f_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(i)}\right)\right)_{i\in\omega}$ a každý hromadný bod d posloupnosti $\left(f_{p+1}\left(x_{\psi_\daleth(i)}\right)\right)_{i\in\omega}$ platí

$$|h-d| < \left(1+\frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma. \tag{A}$$

Kdyby existovaly rostoucí posloupnosti přirozených čísel $(j_k)_{k\in\omega}$ a $(n_k)_{k\in\omega}$ takové, že

$$\left|f_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(j_k)} - x_{\psi_\daleth(n_k)}\right)\right| \geq \left(1+\frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma,$$

pak by existovaly body $\theta \in \mathbb{C}$ a $\vartheta \in \mathbb{C}$ takové, že θ by byl hromadným bodem posloupnosti $\left(f_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(j_k)}\right)\right)_{k\in\omega}$ a ϑ hromadným bodem posloupnosti $\left(f_{p+1}\left(x_{\psi_\daleth(n_k)}\right)\right)_{k\in\omega}$ a platilo by

$$|\theta-\vartheta| \geq \left(1+\frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma,$$

což by byl spor s (A). Proto existuje index $j \in \omega$ takový, že pro libovolné $k \in \omega$ splňující $k \geq j$ a libovolné $n \in \omega$ splňující $n \geq j$ platí

$$\left|f_{p+1}\left(x_{\psi_\gimel(k)} - x_{\psi_\daleth(n)}\right)\right| < \left(1+\frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma. \tag{B}$$

Vzhledem k tomu, že máme jen konečně mnoho dvojic $(\gimel,\daleth) \in \mathbf{2}^p \times \mathbf{2}^p$, existuje index $r \in \omega$ takový, že pro každé $k \in \omega$ splňující $k \geq r$, každé $n \in \omega$ splňující $n \geq r$, každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a každé $\daleth \in \mathbf{2}^p$ platí (B). Ať $b \in \omega$ je nejmenší sudé číslo takové, že $i_b \geq r$. Pro každé $k \in \omega$ položme $\tilde{\imath}_k := i_{b+k}$. Nyní je zřejmé, že (1) a (2) platí, pokud místo písmena i píšeme $\tilde{\imath}$.

Zřejmě je splněna podmínka $(4)_{p+1}$. Zvolme pevně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a definujme množiny $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_1}$ takto

$$\begin{aligned}\Psi_{\gimel\_0} &:= \{n:\ (\exists j)\left(j\in\omega\ \&\ n=\psi_\gimel(i_{2j})\right)\},\\ \Psi_{\gimel\_1} &:= \{n:\ (\exists j)\left(j\in\omega\ \&\ n=\psi_\gimel(i_{2j+1})\right)\}\end{aligned}$$

a pro každé $j \in \omega$ položme $\psi_{\gimel\_0}(j) := \psi_\gimel(i_{2j})$ a $\psi_{\gimel\_1}(j) := \psi_\gimel(i_{2j+1})$. Pak zřejmě jsou posloupnosti $\left(\psi_{\gimel\_0}(j)\right)_{j\in\omega}$ a $\left(\psi_{\gimel\_1}(j)\right)_{j\in\omega}$ rostoucí a platí $\psi_{\gimel\_0}[\omega] = \Psi_{\gimel\_0}$ a $\psi_{\gimel\_1}[\omega] = \Psi_{\gimel\_1}$. Tedy pro všechna $\gimel \in \mathbf{2}^p$ jsou $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_0}$ nekonečnými množinami a zřejmě $\Psi_{\gimel\_0} \subset \Psi_\gimel$ a $\Psi_{\gimel\_1} \subset \Psi_\gimel$. Tedy je splněna podmínka $(1)_{p+1}$, která společně s podmínkou $(3)_p$ dává $(3)_{p+1}$. Zřejmě též pro každé $\gimel \in \mathbf{2}^p$ jsou $\Psi_{\gimel\_0}$ a $\Psi_{\gimel\_1}$ disjunktními množinami a protože je splněna podmínka $(2)_p$ a již víme, že i $(1)_{p+1}$, pak pro každé $m \in \{0,1\}$ a každé $k \in \{0,1\}$ a všechna $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$ taková, že $\gimel \neq \daleth$, jsou i $\Psi_{\gimel\_m}$ a $\Psi_{\daleth\_k}$ disjunktními množinami. Tedy je splněna podmínka $(2)_{p+1}$. Pro každé $j \in \omega$ a každé $l \in \omega$ dostáváme

$$z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}} = 2^{-p}\sum_{\sigma\in\mathbf{2}^p}\left(x_{\psi_\sigma(i_{2j})} - x_{\psi_\sigma(i_{2l+1})}\right) = 2^{-p}\sum_{\sigma\in\mathbf{2}^p}\left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)}\right).$$

Z toho okamžitě plynou pro každá dvě různá $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$ a každé $j \in \omega$ a každé $l \in \omega$ rovnosti

$$x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\gimel\_1}(l)} = 2^p \left(z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}}\right) - \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p,\, \sigma \neq \gimel} \left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)}\right), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)} = {} & 2^p \left(z_{i_{2j}} - z_{i_{2l+1}}\right) \\ & - \left[\left(x_{\psi_{\daleth\_0}(j)} - x_{\psi_{\gimel\_1}(l)}\right) + \sum_{\sigma \in \mathbf{2}^p,\, \sigma \neq \gimel,\, \sigma \neq \daleth} \left(x_{\psi_{\sigma\_0}(j)} - x_{\psi_{\sigma\_1}(l)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Zvolme libovolně $\gimel \in \mathbf{2}^p$ a $\daleth \in \mathbf{2}^p$, $j \in \omega$ a $l \in \omega$. Nyní nepožadujeme, aby $\gimel$ a $\daleth$ byly různé prvky. Aplikujeme funkcionál f_{p+1} na prvek $\left(x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)}\right)$ a využijeme přitom rovnosti (3), respektive (4). V obou případech použitím trojúhelníkové nerovnosti dostáváme vzhledem k nerovnostem (1) a (2) tentýž následující výsledek

$$\begin{aligned} \left|f_{p+1}\left(x_{\psi_{\gimel\_0}(j)} - x_{\psi_{\daleth\_1}(l)}\right)\right| &> 2^p \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma - (2^p - 1)\left(1 + \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\right)\gamma \\ &= \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{2^{p+1}}\left[2^{p+1} - 1\right]\right)\gamma \\ &> (1 - \eta_{p+1})\,\gamma. \end{aligned}$$

Zřejmě je tedy splněna podmínka $(5)_{p+1}$. Princip indukce implikuje existenci posloupnosti $\left(\left(g_p, (\Psi_\sigma)_{\sigma \in \mathbf{2}^p}\right)\right)_{p \in \omega}$ splňující pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$ podmínky $(1)_p$ až $(5)_p$.

Snadno nahlédneme, že soubor $(\Psi_\sigma)_{\sigma \in \mathbf{2}^{<\omega}}$ je stromem, a že pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí (5.7). Tím je důkaz hotov. □

Poznámka 65. Nechť X je komplexním Banachovým prostorem. Pak stejně jako v poznámce 32 dostaneme tvrzení

- ⋆ pokud F je Jamesovou hranicí G, pak každá omezená posloupnost v X splňuje absolutní Simonovu podmínku pro (F, G),
- ⋆ pokud $(u_n)_{n \in \omega}$ je omezenou posloupností v X splňující (absolutní) Simonovu podmínku pro (F, G), pak $(u_n)_{n \in \omega}$ splňuje (absolutní) Simonovu podmínku i pro $(F, \overline{G}^*)$.

5.4 Hlavní výsledek

Tvrzení 66 (Pfitzner – komplexní verze). *Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, $G \subset X^*$ je omezenou množinou a $F \subset G$. Nechť dále $A \subset X$ je omezenou $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množinou a nechť každá posloupnost obsažená v A splňuje absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$. Nechť $(x_n)_{n \in \omega}$ je posloupností v A. Pak existuje posloupnost $(y_n)_{n \in \omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n \in \omega}$ taková, že $\delta_{\overline{G}^*}(y_n) = 0$. Jinými slovy, každá posloupnost v A obsahuje $\sigma(X, \overline{G}^*)$-cauchyovskou podposloupnost.*

Důkaz. Stejně jako v reálném případě budeme postupovat sporem. Nechť závěr tvrzení neplatí. Pak podle lemmatu 51 existuje $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že $\tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) > 0$. Podle předpokladu je $(z_n)_{n\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$, tedy podle tvrzení 64 (Hagler-Johnson – komplexní verze) existují číslo $\gamma \geq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n)$, posloupnost funkcionálů $(f_p)_{p=1}^{\infty}$ v F a strom $(\Psi_\sigma)_{\sigma\in\mathbf{2}^{<\omega}}$ takové, že pro každé $p \in \omega \setminus \{0\}$, každé $\sigma \in \mathbf{2}^p$ sudé a každé $\rho \in \mathbf{2}^p$ liché, každé $m \in \Psi_\sigma$ a každé $n \in \Psi_\rho$ platí

$$|f_p\,(z_m - z_n)| > \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma.$$

Nechť $f \in \overline{F}^*$ je w^*-hromadný bod posloupnosti $(f_p)_{p\in\omega}$. Takový funkcionál f existuje, neboť množina $\overline{F}^*$ je vzhledem k Banachově-Alaogluově větě w^*-kompaktní. Pro každé $m \in \omega$ zkonstruujeme posloupnost $(n_m(k))_{k\in\omega}$ stejně jako v důkazu tvrzení 37 (Pfitzner) a stejně tak pro každé $m \in \omega$ bude v_m označovat $\sigma(X, F)$-hromadný bod posloupnosti $\left(z_{n_m(k)}\right)_{k\in\omega}$.

Nechť nyní $s \in \omega$ je pevné. Též pevně zvolme $p \in \omega$ a $i \in \omega$ taková, že $p > s$ a $i \geq p$. Pak pro každé $k \in \omega$ takové, že $k > p$, a každé $l \in \omega$ takové, že $l > p$, platí

$$\left|f_p\left(z_{n_s(k)} - z_{n_i(l)}\right)\right| > \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma. \tag{1}$$

Z toho plyne

$$|f_p\,(v_s - v_i)| \geq \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma. \tag{2}$$

V opačném případě bychom totiž položili

$$\varepsilon := \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma - |f_p\,(v_s - v_i)| > 0. \tag{3}$$

Pak by existovalo $\tilde{k} \in \omega$ takové, že $\tilde{k} > p$, a platilo by

$$\left|f_p\left(z_{n_s(\tilde{k})} - v_s\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \tag{4}$$

též by existovalo $\tilde{l} \in \omega$ takové, že $\tilde{l} > p$ a platilo by

$$\left|f_p\left(z_{n_i(\tilde{l})} - v_i\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti bychom pak z (3), (4) a (5) dostali

$$\left|f_p\left(z_{n_s(\tilde{k})}\right) - f_p\left(z_{n_i(\tilde{l})}\right)\right| < \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma,$$

což by byl spor s (1).

Nechť v označuje $\sigma(X, F)$-hromadný bod posloupnosti $(v_m)_{m\in\omega}$. Vzhledem k tomu, že nerovnost (2) platí pro každé $i \in \omega$ takové, že $i \geq p$, dostáváme

$$|f_p\,(v_s - v)| \geq \left(1 - 2^{-p}\right)\gamma. \tag{6}$$

Tedy pro každé $p \in \omega$ takové, že $p > s$, platí (6). Pak existuje posloupnost $(f_{p_k})_{k\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(f_p)_{p\in\omega}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} f_{p_k}(v_s - v) = f(v_s - v)$.[1] Z toho plyne

$$\lim_{k\to\infty} |f_{p_k}(v_s - v)| = |f(v_s - v)|\,. \tag{7}$$

[1] Zdůrazněme, že f nezávisí na s, zatímco posloupnost $(p_k)_{k\in\omega}$ samozřejmě ano.

Vzhledem k tomu, že pro každé $p \in \omega$ takové, že $p > s$, platí (6), dostáváme z (7) toto

$$|f(v_s - v)|_2 \geq |f(v_s - v)| \geq \gamma. \tag{8}$$

Nyní definujme komplexní číslo ξ_s takto

$$\xi_s := \frac{f(v_s - v)}{|f(v_s - v)|_2}. \tag{9}$$

Pak vzhledem k (9) a (8) dostáváme

$$\frac{1}{\xi_s} f(v_s - v) \geq \gamma \tag{10}$$

V tuto chvíli tedy máme, že pro každé $s \in \omega$ existuje $\xi_s \in \mathbb{C}$ splňující $|\xi_s|_2 = 1$ a nerovnost (10). Nyní definujme prvek x^{**} takto

$$x^{**} := \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{s+1}\,\xi_s} \varepsilon_X (v_s - v), \tag{11}$$

kde ε_X je kanonickým vnořením X do X^{**}. Podobně jako v důkazu tvrzení 37 poznamenejme, že součet nekonečné řady napravo v (11) je brán v topologii vytvořené duální normou, a že bod x^{**} je definován korektně, neboť diskutovaná řada konverguje absolutně, a tedy s ohledem na úplnost prostoru X^{**} konverguje. Funkcionál x^{**} je též součtem zmiňované nekonečné řady v supremové normě prostoru $\ell^\infty(\overline{G}^*)$.

Pro každé $s \in \omega$ položme $w_{2s+1} := v_s$ a $w_{2s} := v$. Pak $(w_s)_{s\in\omega}$ je posloupností obsaženou v A, tedy posloupností splňující absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$. Dále pro každé $s \in \omega$ položme $u_s := 1/2v_s - 1/2v$. Posloupnost $(u_s)_{s\in\omega}$ je absolutně konvexní blokovou posloupností pro $(w_s)_{s\in\omega}$, a tedy podle poznámky 59 je $(u_s)_{s\in\omega}$ absolutně simonovskou posloupností pro $(F, \overline{G}^*)$. Pak pro každé $s \in \omega$ existuje prvek $h_s \in F$ takový, že

$$h_s(u_s) = \sup_{g \in \overline{G}^*} |g(u_s)|_2 \,. \tag{12}$$

Zopakujme si, že pro každé $s \in \omega$ je v_s $\sigma(X, F)$-hromadným bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$ a stejně tak i v je $\sigma(X, F)$-hromadným bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$. To spolu s tím, že pro všechna $s \in \omega$ existuje funkcionál $h_s \in F$ takový, že platí (12), a že $(z_n)_{n\in\omega}$ je $\delta_{\overline{G}^*}$-stabilní posloupností, dává pro každé $g \in \overline{G}^*$ a každé $s \in \omega$ následující

$$\begin{aligned} |g(v_s) - g(v)|_2 = 2\,|g(u_s)|_2 &\overset{(12)}{\leq} 2h_s(u_s) = h_s(v_s) - h_s(v) \\ &\leq |h_s(v_s) - h_s(v)| \leq \delta_F(z_n) \leq \tilde{\delta}_{\overline{G}^*}(z_n) \leq \gamma. \end{aligned}$$

Tedy platí formule

$$(\forall g)\,(\forall s)\left(\left(g \in \overline{G}^* \;\&\; s \in \omega\right) \Rightarrow |g(v_s) - g(v)|_2 \leq \gamma\right). \tag{13}$$

Vzhledem k tomu, že pro každé $s \in \omega$ platí (10), dostáváme $x^{**}(f) \geq \gamma$. Z toho plyne

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} |x^{**}(g)| \geq \gamma. \tag{14}$$

Protože $1/2x^{**} \in \mathrm{aco}_\infty(\varepsilon_X(u_s))$, existuje $h \in F$ takové, že

$$x^{**}(f) = \sup_{g \in \overline{G}^*} |x^{**}(g)|_2 \overset{(14)}{\geq} \gamma.$$

To implikuje

$$\gamma \leq x^{**}(h) = |x^{**}(h)|_2 \leq \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-(s+1)} |h(v_s - v)|_2 \,. \tag{15}$$

Z (13) a (15) plyne, že pro každé $m \in \omega$ platí $|h(v_m) - h(v)| = \gamma$. Protože v je $\sigma(X, F)$-hromadným bodem posloupnosti $(v_m)_{m\in\omega}$, dostáváme $0 = \gamma$, což je spor, neboť jsme předpokládali, že $\gamma > 0$. $\square$

Věta 67. *Nechť X je komplexním Banachovým prostorem, $G \subset X^*$ je omezenou množinou a $F \subset X^*$ je Jamesovou hranicí G. Nechť dále $A \subset X$ je omezenou $\sigma(X, F)$-spočetně kompaktní množinou. Pak A je $\sigma(X, \overline{G}^*)$-sekvenciálně kompaktní množinou.*

Důkaz. Nechť $(x_n)_{n\in\omega}$ je posloupností v A. Podle poznámky 65 splňuje každá omezená posloupnost v X absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$, a tedy podle tvrzení 66 (Pfitzner – komplexní verze) existuje posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ vybraná z posloupnosti $(x_n)_{n\in\omega}$ taková, že $\delta_{\overline{G}^*}(z_n) = 0$. Nechť $z \in A$ je $\sigma(X, F)$-hromadným bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$. Protože pro každé $g \in \overline{G}^*$ posloupnost $(g(z_n))_{n\in\omega}$ konverguje a pro každé $f \in F$ je $f(z)$ hromadným bodem posloupnosti $(f(z_n))_{n\in\omega}$, platí pro každé $f \in F$ toto

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z). \tag{1}$$

Podle poznámky 65 splňuje posloupnost $(z_n - z)_{n\in\omega}$ absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$, neboť F je Jamesovou hranicí G a X je Banachovým prostorem. Podle lemmatu 61 splňují absolutní Simonovu podmínku pro $(F, \overline{G}^*)$ posloupnosti $(\Re(\varepsilon_X(z_n - z)))_{n\in\omega}$ a $(\Im(\varepsilon_X(z_n - z)))_{n\in\omega}$, a tedy i posloupnosti $(-\Re(\varepsilon_X(z_n - z)))_{n\in\omega}$ a $(-\Im(\varepsilon_X(z_n - z)))_{n\in\omega}$, kde ε_X je jako obvykle kanonickým vnořením prostoru X do X^{**}. Důsledek 28 (Simonova rovnost) říká

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} \Re(g(z_n - z)) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} \Re(f(z_n - z)) \overset{(1)}{=} 0,$$

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} \Im(g(z_n - z)) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} \Im(f(z_n - z)) \overset{(1)}{=} 0,$$

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} \Re(g(z - z_n)) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} \Re(f(z - z_n)) \overset{(1)}{=} 0,$$

$$\sup_{g\in\overline{G}^*} \limsup_{n\to\infty} \Im(g(z - z_n)) = \sup_{f\in F} \limsup_{n\to\infty} \Im(f(z - z_n)) \overset{(1)}{=} 0.$$

Zvolme pevně $g \in \overline{G}^*$. Vidíme, že současně platí $\limsup_n (\Re(g(z_n - z))) = 0$ a $\liminf_n (\Re(g(z_n - z))) = 0$. Z toho bezprostředně plyne

$$\lim_{n\to\infty} \Re(g(z_n)) = \Re(g(z)). \tag{2}$$

Analogicky dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \Im\left(g(z_n)\right) = \Im\left(g(z)\right). \tag{3}$$

Rovnosti (2) a (3) implikují, že pro každé $g \in \overline{G}^*$ platí

$$\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(z),$$

což právě znamená, že posloupnost $(z_n)_{n\in\omega}$ konverguje k bodu z v topologii $\sigma(X, \overline{G}^*)$.[2] Dokázali jsme, že každá posloupnost v množině A obsahuje podposloupnost, která v topologii $\sigma(X, \overline{G}^*)$ konverguje k nějakému prvku množiny A, tedy A je $\sigma(X, \overline{G}^*)$-sekvenciálně kompaktní množinou. □

Poznámka 68. V příkladu 47 jsme viděli, že naše nová definice Jamesovy hranice je poměrně silná, že dokonce ani kompaktní množiny v jednorozměrném prostoru nemusí mít žádnou Jamesovu hranici. Naskýtá se otázka, zda by naopak nešlo rozumně zeslabit definici Jamesovy hranice. Slabší definicí je například tato

Definice Nechť X je komplexním normovaným lineárním prostorem, G je podmnožinou X^* a F je podmnožinou G. Řekneme, že F je Jamesovou hranicí G, jestliže pro každé $x \in X$ existuje $f \in F$ takové, že

$$|f(x)|_2 = \sup_{g\in G} |g(x)|_2.$$

Snadno se ukáže, že Jamesova hranice podle definice 1 je Jamesovou hranicí podle definice v této poznámce. Vraťme se k příkladu 47. Nechť $\widetilde{F}$ je jednoprvkovou množinou obsahující jen funkcionál reprezentovaný číslem 2. Pak $\widetilde{F}$ je Jamesovou hranicí G podle aktuální definice v této poznámce, avšak není Jamesovou hranicí G podle definice 1.

Lze pozitivně odpovědět na problém hranice v situaci aktuální definice Jamesovy hranice? Odpověď stojí na δ-Simonově rovnosti. Ptáme se tedy, zda je možné dokázat δ-Simonovu rovnost pro posloupnosti splňující příslušným způsobem pozměněnou absolutní Simonovu podmínku.

[2] Protože topologie $\sigma(X, \overline{G}^*)$ není obecně Hausdorffova, nemusí být z jediným limitním bodem posloupnosti $(z_n)_{n\in\omega}$.

Seznam použité literatury

[1] Behrends, Ehrhard. *New proofs of Rosenthal's ℓ^1-theorem and the Josefson-Nissenzweig theorem.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics **43**, 283-295. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1996. ISSN 0239-7269 (Print) ISSN 1732-8985 (Online)

[2] Bourgain, Jean, Talagrand, Michel. *Compacité extrémale.* Proceedings of the American Mathematical Society **80**, 68-70. American Mathematical Society, 1980. ISSN 0002-9939 (Print) ISSN 1088-6826 (Online)

[3] De Wilde, Marc. *Pointwise compactness in spaces of functions and R. C. James theorem.* Mathematische Annalen **208**, 33-48. Springer-Verlag, 1974. ISSN 0025-5831 (Print) ISSN 1432-1807 (Online)

[4] Fabian, Marián, Habala, Petr, Hájek, Petr, Montesinos Santalucía, Vicente, Pelant, Jan, Zizler, Václav. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, 80-81. CMS books in mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC **8**. Springer-Verlag New York Inc., 2001. ISBN 978-0-387-95219-2

[5] Godefroy, Gilles. *Boundaries of a convex set and interpolation sets.* Mathematische Annalen **277**, 173-184. Springer-Verlag, 1987. ISSN 0025-5831 (Print) ISSN 1432-1807 (Online)

[6] Pfitzner, Hermann. *Boundaries for Banach spaces determine weak compactness.* Inventiones mathematicae **182**, 585-604. Springer-Verlag, 2010. ISSN 0020-9910 (Print) ISSN 1432-1297 (Online)