Oponentský posudek diplomové práce

Hana Holmes: Levodistributivní algebry a uzly

Tématem předložené práce je studium algebraických struktur souvisejících s invarianty uzlů. Těžištěm je potom pojem afinního quandlu (český termín patrně neexistuje), což je struktura, která se přirozeně objevuje v souvislosti s Alexandrovým invariantem uzlů.

Co se obsahu týče, první dvě kapitoly jsou věnovány velice stručnému úvodu do teorie uzlů a vztahu ke quandlům. V dalších dvou kapitolách je potom věnováno hodně prostoru afinním quandlům. Afinní quandle $(Q, *)$ podle definice vznikne z páru (A, φ), kde A je abelovská grupa a $\varphi\colon A \to A$ je automorfismus, tj. (A, φ) je modul nad okruhem $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$.

Výsledky kapitol 3 a 4 se stručně dají shrnout do těchto bodů:

(i) Afinní quandle se dá vždy rozložit na součin projektivního (triviálního) a tzv. esenciálního podquandlu. Pokud je quandle konečný, pak je esenciální podquandle též afinní.

(ii) Esenciální afinní quandle $(Q, *)$ původní $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modul (A, φ) neurčuje zcela, ale určuje až na isomorfismus jeho značnou část, tzv. esenciální obalující algebru.

(iii) Naopak konečná esenciální obalující algebra určuje afinní quandle. Podařilo se tedy v tomto případě vymezit informaci, která se při přechodu od $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-modulu k afinnímu quandlu ztrácí.

(iv) Výše uvedené poznatky jsou využity ke konstrukci algoritmu, který podle Cayleyho tabulky konečného quandlu rozhodne, zda je tento afinní.

Výsledný text obsahuje z velké části vlastní tvůrčí výsledky a po matematické stránce je sepsán až na několik překlepů velice pečlivě. V tomto ohledu mám pouze několik menších připomínek:

1. V Lemmatu 12 je dle mého názoru v charakterizaci esenciálních podquandlů třeba předpokládat, že Q' je sjednocením $\mathrm{Dis}(Q)$-orbit. Z definice je to nutná podmínka a nezdá se, že by to z ostatních předpokladů plynulo.

2. Některé použité termíny a značení nebyly zavedeny: Alexandrův invariant (= Alexandrův modul?) na str. 12 a pravé translace R_a na str. 34.

3. Termín “obalující algebra” má dobře známý a hluboce zakořeněný význam v souvislosti s Lieovými algebrami, které mimochodem s invarianty uzlů také souvisí. Téma práce se možná zdá být Lieovým algebrám vzdálené, přesto nechávám na úvaze změnu termínu.

4. Není Lemma 35 na str. 41 přímý důsledek Věty 13?

5. Proměnná a je v Algoritmu 2 na str. 44 použita trochu matoucím způsobem ve dvou různých významech.

Dále jsem přesvědčen, že Houovo lemma (Lemma 21 na str. 29) s použitím standardní homologické algebry platí i bez předpokladu konečnosti, což by mělo vést ke zobecnění Vět 24 a 26.

Předpokládejme totiž, že (D, φ) je abelovská grupa s endomorfismem. Máme tedy exaktní posloupnost

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \xrightarrow{\subseteq} D \xrightarrow{\varphi} D \longrightarrow D/\mathrm{Im}\varphi \longrightarrow 0,$$

která reprezentuje prvek grupy $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(D/\mathrm{Im}\varphi, \mathrm{Ker}\varphi)$. Okruh celých čísel $\mathbb{Z}$ je ovšem dědičný (jinak řečeno, podgrupa volné abelovské grupy je volná), což z pohledu homologické algebry znamená, že $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}}(B, C)$ je nulová grupa pro libovolné abelovské grupy B, C. Tento fakt lze standardním postupem (přes Yonedovu definici grup Ext) přeložit do existence následujícího komutativního diagramu abelovských grup s exaktními řádky i sloupci:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{Ker}\varphi \arrow[r, equal] \arrow[d, "\subseteq"'] & \mathrm{Ker}\varphi \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\varphi}"'] & D/\mathrm{Im}\varphi \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}\varphi \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & D/\mathrm{Im}\varphi \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Odtud již snadno vyčteme, že máme epimorfismus abelovských grup $\overline{\varphi}\colon A \to D$ takový, že $\overline{\varphi}|_D = \varphi$ a že $A/D \cong D/\mathrm{Im}\varphi$.

Práci **doporučuji uznat za diplomovou** a hodnocení přikládám na zvláštním listě.

V Praze dne 16. 8. 2013 RNDr. Jan Šťovíček, Ph.D.