

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Ružena Nistorová

Oceňování úrokových derivátů pomocí LIBOR tržního modelu (LMM)

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Moja vd'aka patrí v prvom rade RNDr. Petrovi Myškovi, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady, podnety a za čas, ktorý mi v priebehu písania tejto práce venoval. Ďalej by som rada poďakovala rodičom za všetko čo ma naučili. V neposlednom rade ďakujem svojmu priateľovi Peťovi za psychickú podporu počas celého štúdia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 30.11.2012

Bc. Ružena Nistorová

Název práce: Oceňování úrokových derivátů pomocí LIBOR tržního modelu (LMM)

Autor: Bc. Ružena Nistorová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Petr Myška, Ph.D., Česká spořitelna, a.s.

Abstrakt: V predloženej práci sú predstavené úrokové deriváty a základy ich oceňovania, ktoré sú založené na budúcom vývoji úrokových sadziieb. Podrobne je opísaný Hull-whiteov model, ktorý sa zaoberá modelovaním okamžitej úrokovej sadzby. Tá umožňuje oceňovanie rôznych úrokových derivátov. Na tomto modeli je prevedená kalibrácia na dáta z trhu. Hlavná časť práce je venovaná LIBOR tržnému modelu, ktorý modeluje množinu forwardových sadziieb. Sú predstavené výsledky kalibrácie tohto modelu pomocou tržných hodnôt swapových volatilit. V závere práce sú porovnané oba modely.

Klíčové slova: úrokové deriváty, okamžitá úroková sadzba, forwardová sadzba, Hull-Whiteův model, LIBOR tržní model

Title: Valuation of interest rates derivatives through LIBOR market model

Author: Bc. Ružena Nistorová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Petr Myška, Ph.D., Česká spořitelna, a.s.

Abstract: In this thesis, the interest rates derivatives and their valuation based on the future development of interest rates are presented. The Hull-White model focusing on the modeling of the instantaneous spot rates is described in detail. The model is calibrated to the market caplet volatilities and is used to evaluate various interest rates derivatives. The main emphasis is put on the LIBOR market model describing the development of set of forward rates. There are presented and in detail discussed results of the calibration of LMM model on the market swaption volatilities. At the end the two models are compared.

Keywords: interest rates derivatives, instantaneous interest rate, forward interest rate, Hull-White model, Libor market model

Obsah

Úvod	1
1 Základné pojmy	2
1.1 Spotová úroková sadzba	2
1.2 Forwardová úroková sadzba	3
2 Úrokové deriváty	5
2.1 Swap	5
2.2 Capy a floory	6
2.3 Swapce	7
3 Tržné dáta	9
3.1 Spotová výnosová krivka	9
3.2 Implikovaná capletová volatilita	10
3.3 Implikovaná swapcová volatilita	12
4 Modelovanie okamžitej úrokovej sadzby	14
4.1 Hull-Whiteov model	14
4.1.1 Cena dlhopisov	16
4.1.2 Oceňovanie úrokových derivátov s využitím HW modelu	17
4.2 Aplikácia HW modelu na reálne dáta	19
4.2.1 Simulovanie sadzieb	19
4.2.2 Ocenenie capletu a floorletu	20
4.2.3 Kalibrácia HW modelu	25
5 LIBOR tržný model	29
5.1 Teória k LMM	29
5.1.1 Okamžitá volatilita forwardovej úrokovej miery	30
5.1.2 Ocenenie capu a flooru pomocou LMM	31
5.1.3 Korelácia forwardových sadzieb	32
5.1.4 Ocenenie swapca pomocou LMM	33
5.1.5 Kalibrácia LMM	34
5.2 Aplikácia LMM na tržných dátach	36
5.2.1 Kalibrácia LMM	36
5.2.2 Určenie ceny swapca	43
6 Porovnanie oceňovania pomocou HW a LMM modelu	46
6.1 Porovnanie cien capu a flooru	46
6.2 Porovnanie cien swapca	47
Záver	50
Zoznam použitej literatúry	54

Úvod

V 70. a 80. rokoch minulého storočia sa v plnej miere rozvinul trh s úrokovými derivátmi. Podnetom k obchodovaniu s úrokovými inštrumentmi bola zvyšujúca sa volatilita úrokových sadzieb. Na trhu sa začali objavovať rozličné úrokové deriváty, ktorých cena závisela a aj dnes závisí od pohybu úrokových sadzieb. To podnietilo nielen obchodníkov, ale i radu ekonómov a matematikov k úvahám o budúcom vývoji úrokových sadzieb. Od tohto obdobia vzniklo mnoho modelov popisujúcich stochastický vývoj úrokových sadzieb.

Prvou skupina modelov, ktoré sa zaoberajú problematikou modelovania okamžitej úrokovej miery, sú jednofaktorové modely. Medzi ne patrí napríklad Vašíčkov model a Hull-Whiteov model. Keďže výnosová krivka modelovaná pomocou jednofaktorových modelov nemusí spĺňať niektoré z hlavných požiadaviek na úrokovú sadzbu, bolo potrebné vyvinúť zložitejšie modely, ktoré budú vo väčšom súlade s trhom.

Pridaním ďalšieho zdroja neistoty sa vyznačujú dvojfaktorové modely, ku ktorým patrí model Brennana a Schwartza, alebo konvergenčný model.

V roku 1997 bol predstavený LIBOR tržný model, ktorý bol ako prvý v súlade s dovtedy zaužívanými vzťahmi na oceňovanie niektorých úrokových derivátov. LIBOR tržný model predpovedá vývoj množiny forwardových sadzieb na základe znalostí okamžitej volatility forwardových sadzieb a korelácií medzi forwardovými sadzbami. LIBOR tržný model a jeho využitie pri oceňovaní úrokových derivátov je hlavnou témou tejto práce.

V prvej kapitole sú zhrnuté základné pojmy, ktoré sa využívajú v oblasti úrokových sadzieb.

Druhá kapitola je zhrnutím základných poznatkov o úrokových derivátoch. Zameriava sa hlavne na úrokové deriváty, ktoré sa v ďalších kapitolách oceňujú.

V tretej kapitole je možné nájsť dáta z trhu, ktoré sa používajú v ďalších kapitolách.

Štvrtá kapitola je venovaná modelovaniu okamžitej spotovej sadzby pomocou jednofaktorových modelov. V tejto kapitole je priblížená teória Hull-Whiteovho modelu, aplikácia na reálne dáta, kalibrácia modelu a oceňovanie capletov a floorletov s využitím Hull-Whiteovho modelu.

V piatej kapitole je charakterizovaná dynamika vývoja forwardovej úrokovej sadzby pomocou LIBOR tržného modelu a spôsoby oceňovania úrokových derivátov s využitím tohto modelu. Opísaná teória je aplikovaná na reálnych dátach, čo zahrňuje kalibráciu tohto modelu na tržné volatility a modelovanie forwardovej úrokovej sadzby.

Posledná kapitola je venovaná oceneniu capu, flooru a swapca využitím oboch opísaných modelov a Blackovej formuly.

K analýze dát bol využitý štatistický software R [8], aj všetky obrázky boli vytvorené pomocou tohto nástroja. Na priloženom CD sa nachádza zdrojový kód s výpočtami.

1. Základné pojmy

1.1 Spotová úroková sadzba

V tejto kapitole si priblížime pojmy, ktoré sa často spomínajú v teórii úrokových sadzieb a ktoré sa budú v ďalšom texte využívať.

Dôležitá je definícia diskontného faktoru $D(t, T)$ medzi časmi t a T . Je to hodnota v čase t rovná jednotkovej čiastke vyplatenej v čase T a je daný vzťahom

$$D(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right), \quad (1.1)$$

kde $r(t)$ je okamžitá úroková sadzba v čase t , nazývaná často aj krátkodobá spotová sadzba. kde $r(t)$ je okamžitá úroková sadzba v čase t , nazývaná často aj krátkodobá spotová sadzba.

S diskontným faktorom úzko súvisí cena bezkupónového dlhopisu. Bezkupónový dlhopis je kontrakt, ktorý garantuje držiteľovi v čase splatnosti T vyplatiť jednotkovú čiastku. Cena tohto dlhopisu v čase t je označovaná $P(t, T)$. Je zrejmé, že $P(T, T) = 1$ pre všetky T . Čas medzi t a T v rokoch budeme ďalej značiť $\tau(t, T)$. Ak by bola okamžitá úroková miera $r(t)$ deterministickou veličinou, tak by bol i diskontný faktor D deterministický, a platilo by $D(t, T) = P(t, T)$ pre každú dvojicu (t, T) . Keďže okamžitá úroková miera $r(t)$ je náhodná veličina, bude i diskontný faktor náhodnou veličinou závislou na budúcom vývoji okamžitej úrokovej sadzby $r(t)$ v období medzi t a T . Potom môže byť $P(t, T)$ vyjadrené ako stredná hodnota diskontného faktoru $D(t, T)$ podmienená informáciami dostupnými v čase t

$$P(t, T) = E_t \left[\exp\left(-\int_t^T r(s) ds\right) \right]. \quad (1.2)$$

Spotová úroková miera pre jednoduché úročenie so začiatkom v čase t a so splatnosťou v T sa označuje $L(t, T)$ a je to konštantná sadzba, s ktorou investor získa v čase splatnosti T jednotkovú čiastku, ak mal v čase t čiastku $P(t, T)$. To znamená, že

$$P(t, T)(1 + \tau(t, T)L(t, T)) = 1, \quad (1.3)$$

odkiaľ dostávame vzťah pre jednoducho úročenú spotovú úrokovú sadzbu

$$L(t, T) = \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)}. \quad (1.4)$$

Spotová sadzba $Y(t, T)$ pre zložené úročenie v čase t so splatnosťou v čase T je konštantná sadzba, ktorou investor z hodnoty $P(t, T)$ získa za obdobie $\tau(t, T)$ jednotkovú čiastku, pokiaľ získanú hodnotu každý rok počas doby splatnosti opäť reinvestuje, tj.

$$P(t, T)(1 + Y(t, T))^{\tau(t, T)} = 1, \quad (1.5)$$

z čoho vyplýva

$$Y(t, T) = \frac{1}{[P(t, T)]^{1/\tau(t, T)}} - 1. \quad (1.6)$$

Spotová sadzba pre spojité úročenie $R(t, T)$ v čase t a splatnosťou v T je konštantná sadzba, ktorú investor z hodnoty $P(t, T)$ získa za obdobie $\tau(t, T)$, jednotkovú čiastku, pokiaľ získanú hodnotu neustále reinvestuje, tj.

$$P(t, T)e^{R(t, T) \cdot \tau(t, T)} = 1, \quad (1.7)$$

z čoho vyplýva

$$R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{\tau(t, T)}. \quad (1.8)$$

Pre okamžitú úrokovú mieru platia vzťahy

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t^+} R(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} L(t, T) = \lim_{T \rightarrow t^+} Y(t, T). \quad (1.9)$$

Základná krivka, ktorú môžeme získať z trhu, je spotová výnosová krivka bezkupónového dlhopisu k času t . Táto krivka je grafom funkcie

$$T \rightarrow \begin{cases} L(t, T) & t < T \leq t + 1 \text{ (rokov);} \\ Y(t, T) & T > t + 1 \text{ (rokov)} \end{cases} \quad (1.10)$$

a často sa nazýva aj časová štruktúra úrokových sadzieb v čase t .

Príkladom sadzby jednoduchého úročenia je napríklad LIBOR úroková sadzba. Tržná LIBOR (London Interbank Offered Rate) úroková sadzba je taká sadzba, za ktorú si banky na Londýnskom medzibankovom trhu požičiavajú finančné prostriedky od iných bank. LIBOR je Britskou bankovou asociáciou denne fixovaný a počíta sa z filtrovaného priemeru úrokov pôžičiek poskytovaných najbonitnejšími bankami sveta. LIBOR úroková miera je zvyčajne naviazaná na cenu bezkupónového dlhopisu s Actual/360 dňovou konvenciou na určenie $\tau(t, T)$.

Vo Európe sa používajú aj iné podobné úrokové miery napríklad EURIBOR (The Euro Interbank Offered Rate), alebo v Českej republike PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate).

1.2 Forwardová úroková sadzba

Jeden zo základných prostriedkov, ktorý hrá hlavnú úlohu pri oceňovaní úrokových derivátov, je forwardová úroková sadzba. Forwardová sadzba je charakterizovaná tromi časovými okamžikmi, a to časom t , v ktorom je forwardová sadzba uvažovaná, čas T , kedy sadzba začne platiť, a doba jej splatnosti S , pre ktoré platí $t \leq T < S$. Forwardová sadzba je sadzba, ktorá môže byť dnes zafixovaná pre obchod, ktorý sa bude odohrávať v budúcnosti. Forwardovú sadzbu môžeme najlepšie charakterizovať pomocou FRA (forward rate agreement) kontraktu. FRA je dohoda o budúcej úrokovej miere, ktorá umožňuje jej majiteľovi zaistiť sa do budúcnosti voči pohybu úrokových mier. Vo FRA, podobne ako pre forwardovú úrokovú mieru, rozlišujeme tri časové okamžiky: dátum uzavretia t , čas T a dobu splatnosti S . V rámci tejto dohody platí kupujúci FRA (dlhá pozícia) predávajúcemu (krátka pozícia) k dátumu splatnosti FRA realizačnú sadzbu K a obdrží tržný úrok $L(T, S)$ za obdobia medzi T a S z istiny s nominálnou hodnotou N . Kupujúci FRA kontraktu sa jeho uzavretím zaistí voči vzostupu úrokových mier a predávajúci voči ich poklesu. Výplatná funkcia z kontraktu v čase S je preto

$$N\tau(T, S)(K - L(T, S)).$$

Označme $P(t, T)$ cenu bezkupónového dlhopisu v čase t se splatnosťou v T . V čase uzavretia t je výplata takéhoto kontraktu [1], str. 11

$$\text{FRA}(t, T, S, \tau(T, S), N, K) = N[P(t, S)\tau(T, S)K - P(t, T) + P(t, S)]. \quad (1.11)$$

Existuje jediné K , pre ktoré bude kontrakt v čase t spravodlivý, čiže jeho hodnota bude v čase t rovná 0. Úrokovej miere, ktorú z rovnice $\text{FRA}=0$ dostaneme, budeme hovoriť forwardová úroková miera v čase t na obdobie medzi T a S a označíme ju $F(t, T, S)$. V prípade jednoduchého úročenia je možné $F(t, T, S)$ vyjadriť ako

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\tau(T, S)} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right). \quad (1.12)$$

Ak sa doba splatnosti S bude blížiť k času T , dostaneme okamžitú forwardovú úrokovú sadzbu $f(t, T)$

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}. \quad (1.13)$$

Forwardová sadzba $F(t, T, S)$ môže byť chápaná ako odhad budúcej spotovej sadzby $L(T, S)$, ktorá je v čase T náhodná. Podobne to platí i pre okamžitú forwardovú sadzbu $f(t, T)$, ktorú je možno chápať ako očakávanú hodnotu okamžitej spotovej úrokovej sadzby $r(T)$.

2. Úrokové deriváty

Finančné deriváty patria medzi termínované obchody, čo znamená, že čas uzavretia a plnenia obchodu sú dva rôzne časové okamžiky. V čase uzavretia obchodu sa medzi dvoma stranami kontraktu, kupujúcim a predávajúcim, pevne stanovené parametre obchodu. Dohodnú sa na finančnom nástroji obchodu, množstve a kapacite obchodu. Určí sa, ktorý účastník bude mať právo predať a kto kúpiť, za akú cenu a kedy v budúcnosti obchod prebehne.

Medzi hlavné trhy derivátov, na ktorých sa obchoduje s tržným rizikom patria burzy a OTC (over-the-counter) trhy. Vďaka derivátom je možné jednoducho oddeliť tržné riziko od podkladového aktíva. Preto je jedným z hlavných využití derivátov zaistenie.

Úrokové deriváty sú finančné nástroje, ktorých cena závisí na výške určitej úrokovej miery. Sú to kontrakty na budúci nákup, či predaj úrokových sadzieb. Medzi rozšírené úrokové deriváty patria forwardy, swapy, swapece, capy a floory. Základom ich ohodnocovania je znalosť dynamiky úrokovej miery.

Táto práca je zameraná na ocenenie úrokových opcií, ako napr. cap, floor a swapece. Charakteristiky rôznych derivátov je možné nájsť v [2], v tejto kapitole zhrniem len nevyhnutné poznatky o niektorých úrokových derivátoch.

2.1 Swap

Označme množinu časov $T := \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ a množinu časových období medzi nimi $\tau := \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta\}$. Doba τ_i bude obdobie medzi časmi T_{i-1} a T_i .

Swap je dohoda medzi dvoma stranami o periodickej výmene budúcich platieb z podkladového aktíva s nominálnou hodnotou N , ktoré začnú v budúcnosti. V každom časovom okamžiku T_i z vopred stanovenej množiny časov $\{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$ platí jedna strana čiastku $N\tau_i K$, ktorá odpovedá úroku z podkladového aktíva za obdobie τ_i medzi časmi T_{i-1} a T_i pri vopred pevne stanovenej realizačnej sadzbe K . Zatiaľ čo prijíma od protistrany čiastku $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, ktorá odpovedá úrokom z podkladového aktíva pri spotovej úrokovej miere $L(T_{i-1}, T_i)$, nazývanej referenčná sadzba v čase T_{i-1} s dobou splatnosti T_i .

Diskontovaná výplata v čase $t < T_\alpha$ tej strany swapového obchodu, ktorá platí pevnú sadzbu (PFS - payer forward swap) je

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K).$$

Zatiaľ čo diskontovaná výplata strany prijímajúcej pevnú sadzbu (RFS - receiver forward swap) v čase $t < T_\alpha$ je

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i)).$$

Ak si swap predstavím ako portfólio FRA kontraktov, ktorých výplaty určíme zo vzťahu (1.11), bude výplata swapu pre stranu prijímajúcu pevnú sadzbu rovná

$$\text{RFS}(t, T, \tau, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \text{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, \tau(T_{i-1}, T_i), N, K) =$$

$$\begin{aligned}
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) \quad (2.1) \\
&= -NP(t, T_\alpha) + NP(t, T_\beta) + N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i KP(t, T_i)
\end{aligned}$$

Podobne sa určí aj výplata, ktorú bude mať swap pre stranu, ktorá prijíma pevnú sadzbu a platí pohyblivú sadzbu.

Forwardová swapová sadzba $S_{\alpha,\beta}(t)$ v čase t pre časy T a časové obdobie τ je úroková miera K fixnej strany, ktorá zaručí, aby bol kontrakt v čase t spravodlivý, to znamená $\text{RFS}(t, T, \tau, N, K) = 0$. Ľahko teda zistíme, že

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)}. \quad (2.2)$$

Teraz podelíme čitateľa i menovateľa vo vzťahu (2.2) výrazom $P(t, T_\alpha)$ a využitím vzťahu (1.12) dostanem

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1 - \prod_{j=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1+\tau_j F_j(t)}}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1+\tau_j F_j(t)}} = \frac{1 - FP(t, T_\alpha, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i FP(t, T_\alpha, T_i)}, \quad (2.3)$$

pričom

$$FP(t, T_\alpha, T_k) = \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{P(t, T_j)}{P(t, T_{j-1})} = \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{1 + \tau_j F_j(t)} \quad \text{pre } \forall k > \alpha + 1, \quad (2.4)$$

kde $F_j(t) = F(t, T_{j-1}, T_j)$.

2.2 Capy a floory

Capy a floory patria medzi hlavné úrokové deriváty na trhu. Tieto kontrakty môžeme vnímať ako swap, ktorého platby prebehnú len za situácie priaznivej pre držiteľa. To znamená, že držiteľ takéhoto derivátu platby len prijíma, ale nikdy neplatí. Držiteľ capu prijíma kladnú časť rozdielu tržnej úrokovej miery a referenčnej sadzby a držiteľ flooru opačný rozdiel, pokiaľ je kladný. Diskontovaná výplata capu v čase t je daná vzťahom

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+. \quad (2.5)$$

Analogicky diskontovaná výplata flooru je

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))^+. \quad (2.6)$$

Diskontovanú výplatu capu a flooru je možné rozdeliť na súčet podkladových capletov a floorletov, z ktorých každý závisí na osobitej budúcej spotovej úrokovej

miere. T_{i-1} -caplet je kontrakt, ktorý vypláca v čase T_i rozdiel, medzi spotovou úrokovou mierou $L(T_{i-1}, T_i)$ a pevnou sadzbou K , ak je tento rozdiel kladný. V opačnom prípade k platbe nedochádza. Podobne T_{i-1} -floorlet je kontrakt, ktorý vypláca v čase T_i kladnú časť rozdielu medzi pevnou sadzbou K a spotovou úrokovou mierou $L(T_{i-1}, T_i)$.

Bezrizikovú cenu capu a flooru je možné vnímať ako strednú hodnotu diskontovanej výplaty. Podľa [1], str.17 sa capy v praxi oceňujú pomocou sumy Blackovej formuly v čase t

$$\begin{aligned} \text{Cap}^{\text{Black}}(t, \omega, \tau, N, \sigma_{\alpha, \beta}) &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T) \tau_i \text{Bl}(K, F(t, T_{i-1}, T_i), v_i, 1), \quad (2.7) \\ \text{Bl}(K, F, v, \omega) &= F \omega \Phi(\omega d_1(K, F, v)) - K \omega \Phi(\omega d_2(K, F, v)), \\ d_1(K, F, v) &= \frac{\ln(F/K) + v^2/2}{v}, \\ d_2(K, F, v) &= \frac{\ln(F/K) - v^2/2}{v}, \\ v_i &= \sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}, \end{aligned}$$

kde Φ je distribučná funkcia normálneho rozdelenia so strednou hodnotou 0 a rozptylom 1. Za $\sigma_{\alpha, \beta}$ dosadíme volatilitu odvodenú z trhu. Podobným vzťahom je možné určiť i hodnotu flooru

$$\text{Floor}^{\text{Black}}(t, \omega, \tau, N, \sigma_{\alpha, \beta}) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T) \tau_i \text{Bl}(K, F(t, T_{i-1}, T_i), v_i, -1). \quad (2.8)$$

Cap s platbami v časoch $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$ je at-the-money ak platí $K = S_{\alpha, \beta}$, in-the-money pre $K < S_{\alpha, \beta}$ a out-of-the-money v prípade ak $K > S_{\alpha, \beta}$. Pre floor to platí naopak.

2.3 Swapce

Ďalším urokovým derivátom je opcia na swap, alebo swapec. Existujú dve hlavné verzie swapcov, platiaci a prijímajúci.

Európsky platiaci swapec dáva jeho majiteľovi právo, nie však povinnosť, vo vopred stanovenej dobe splatnosti swapca uzavrieť swap, v ktorom bude platiť protistrane fixnú hodnotu. Doba splatnosti swapca je zhodná s časom T_{α} . Dĺžka podkladového swapu $T_{\beta} - T_{\alpha}$ sa obvykle nazýva tenor swapca. Súbor výplatných dní swapu sa často označuje tenorovou štruktúrou swapca.

Keď vezmeme do úvahy hodnotu podkladového swapu v čase T_{α} , ktorý je tiež časom splatnosti swapca, môžeme určiť diskontovanú výplatu swapca pomocou vzťahu

$$ND(t, T_{\alpha}) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_{\alpha}, T_i) (F(T_{\alpha}, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+. \quad (2.9)$$

Diskontovanú výplatu zo swapca, na rozdiel od diskontovanej výplaty capu a flooru nie je možné rozdeliť na viac sčítancov. V tom taktiež spočíva najväčší rozdiel medzi nimi. U capu (flooru) môžeme zaobchádzať s každým capletom (floorletom) jednotlivo, určiť jeho diskontovanú výplatu a tieto potom zložiť dohromady a tak

dostať diskontovanú výplatu celej opcie. To isté so swapom nieje možné urobiť, pretože suma je v kladnej časti a nie mimo nej ako u capu (flooru). Tiež platí

$$\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+ \leq \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+, \quad (2.10)$$

z čoho jednoznačne vyplýva, že platiaca opcia na swap má stále nižšiu diskontovanú výplatu než má cap s rovnakými parametrami.

Swapec na podkladový swap s platbami v časoch $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$ je at-the-money ak platí $K = S_{\alpha,\beta}$. Swapec na PFS podkladový swap je in-in the-money pre $K < S_{\alpha,\beta}$ a out-of-money v prípade, ak $K > S_{\alpha,\beta}$. U swapca s RFS podkladovým swapom je to naopak.

V praxi sa swapece oceňujú pomocou Blackovej formule [1], str. 20. Podľa nej cena platiaceho swapca v čase t bude

$$\text{PS}^{\text{Black}}(t, \omega, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = N \text{Bl}(K, S_{\alpha,\beta}(t), \sigma_{\alpha,\beta}, \sqrt{T_\alpha}, 1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i), \quad (2.11)$$

kde $\sigma_{\alpha,\beta}$ je parameter volatility kotovaný na trhu, ale rôzny od $\sigma_{\alpha,\beta}$ pre cap (floor). Podobná formula sa používa na oceňovanie prijímajúceho swapca, ktorý dáva majiteľovi právo uzavrieť v čase T_α swap, v ktorom bude prijímať fixnú platbu v časoch T

$$\text{RS}^{\text{Black}}(0, \omega, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = N \text{Bl}(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta}, \sqrt{T_\alpha}, -1) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i). \quad (2.12)$$

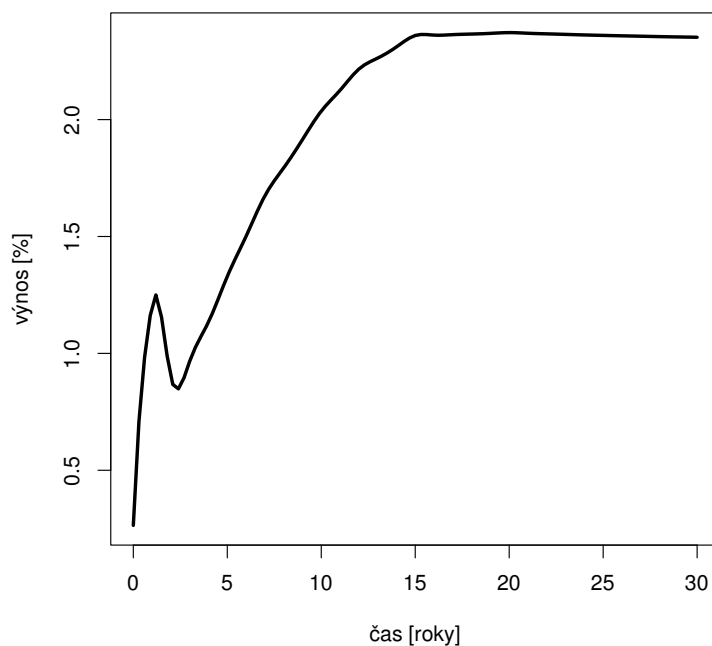
V ďalších kapitolách ukážeme, že capy, floory a swapece je možné oceňovať aj inými spôsobmi.

3. Tržné dáta

Z trhu je možné získať výnosy bezkupónového dlhopisu, implikované capletové a swapové volatility. Implikovaná capletová volatilita, je volatilita, z ktorej po dosadení do Blackovej formuly (2.7) získame tržnú cenu capu a po dosadení do (2.8) tržnú cenu flooru. Podobne pomocou swapcovej implikovanej volatility dosadenej do (2.11) a (2.12) vieme určiť trhovú cenu swapca. Všetky dáta využívané v tejto diplomovej práci poskytla agentúra Reuters a vzťahujú sa k 30.6.2012.

3.1 Spotová výnosová krivka

Základnými dátami pre moju diplomovú prácu sú výnosy bezkupónových dlhopisov s rôznymi dobami splatnosti uvedené v tabuľke 3.1. Po preložení týchto hodnôt splajnom získame spotovú výnosovú krivku (obrázok 3.1) definovanú vzťahom (1.10). Z takejto spotovej krivky vieme pomocou vzťahu (1.12), do ktorého dosadíme vyjadrenie ceny bezkupónového dlhopisu z rovnice (1.3), získať ročnú forwardovú krivku. Na obrázku 3.2 je takto získaná ročná forwardová krivka k 30.6.2012. Ak čas 30.12.2012 budeme chápať ako čas 0, hovoríme o forwardovej sadzbe $F(0, T, T + 1)$.



Obr. 3.1: EUR spotová výnosová krivka bezkupónového dlhopisu pozorovaná na trhu k 30.6.2012.

H

Tabuľka 3.1: Výnos bezkupónového dlhopisu pre rôzne doby splatnosti (Mat.-maturity) k 30.6.2012 pre EUR v percentách (D-deň, T-týždeň, M-mesiac, R-rok).

Mat.	Výnos	Mat.	Výnos	Mat.	Výnos	Mat.	Výnos
1 D	0.2720	9 M	1.0775	9 R	1.9145	20 R	2.3722
1 T	0.3053	10 M	1.1256	10 R	2.0363	21 R	2.3694
2 T	0.3244	11 M	1.1716	11 R	2.1252	22 R	2.3669
1 M	0.3671	1 R	1.2144	12 R	2.2161	23 R	2.3646
2 M	0.4709	2 R	0.8961	13 R	2.2630	24 R	2.3622
3 M	0.6486	3 R	0.9666	14 R	2.3109	25 R	2.3602
4 M	0.7466	4 R	1.1341	15 R	2.3598	26 R	2.3584
5 M	0.8377	5 R	1.3294	16 R	2.3614	27 R	2.3568
6 M	0.9297	6 R	1.5009	17 R	2.3635	28 R	2.3550
7 M	0.9786	7 R	1.6741	18 R	2.3660	29 R	2.3536
8 M	1.0291	8 R	1.7934	19 R	2.3689	30 R	2.3522

Tabuľka 3.2: Capletové volatility k 30.6.2012 pre at-the-money caplet a rôzne maturity capletu udávaná v percentách.

Mat.	Volatilita	Mat.	Volatilita	Mat.	Volatilita
1 R	86.30	11 R	41.20	21 R	37.90
2 R	83.40	12 R	40.20	22 R	38.10
3 R	58.30	13 R	39.60	23 R	38.20
4 R	55.50	14 R	39.00	24 R	38.40
5 R	51.70	15 R	38.40	25 R	38.50
6 R	48.60	16 R	38.30	26 R	38.70
7 R	46.40	17 R	38.20	27 R	38.80
8 R	44.70	18 R	38.00	28 R	39.00
9 R	43.40	19 R	37.90	29 R	39.10
10 R	42.10	20 R	37.80	30 R	39.30

3.2 Implikovaná capletová volatilita

Pri kalibrácii modelov na tržné dáta využijeme implikované capletové a swapové volatility odpozorované z trhu (tabuľka 3.2 a tabuľka 3.3).

Keďže capletové volatility sú kótované pre cap na polročnú forwardovú sadzbu, a my chceme oceniť deriváty na ročnú forwardovú sadzbu, musíme najprv zistiť hodnoty implikovaných capletových volatilit pre cap na ročnú sadzbu.

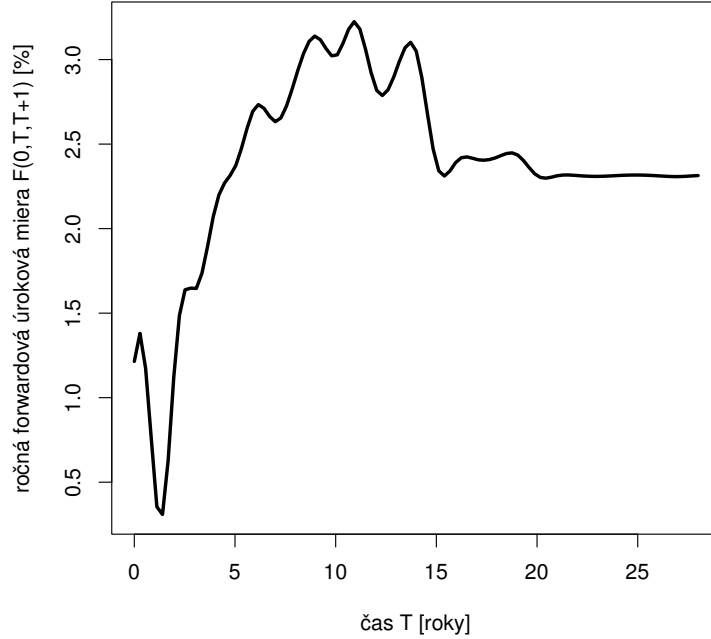
Zvolíme si tri časove okamžiky $0 < S < T < U$ vzdialené od seba šesť mesiacov. Uvažujeme dva polročné caplety s maturitou v S a T . Pre $t < S$ si označíme tri forwardové miery

$$F_1(t) := F(t, S, T), \quad F_2(t) := F(t, T, U), \quad F(t) := F(t, S, U). \quad (3.1)$$

Prvé dve sadzby $F_1(t)$ a $F_2(t)$, sú polročné forwardové sadzby a tretia $F(t)$ je ročná forwardová sadzba v ktorej sú obsiahnuté obe predošle sadzby.

Závislosť ročnej forwardovej sadzby $F(t)$ od polročných sadzieb $F_1(t)$ a $F_2(t)$ je možné odvodiť pomocou definície forwardových sadzieb (1.13)

$$F_1(t) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{P(t, S)}{P(t, T)} - 1 \right], \quad F_2(t) = \frac{1}{0.5} \left[\frac{P(t, T)}{P(t, U)} - 1 \right] \quad (3.2)$$



Obr. 3.2: Ročná EUR forwardová výnosová krivka pre jednoduché úročenie získaná zo spotovej výnosovej krivky bezkupónového dlhopisu znázornenej na obrázku 3.1.

a

$$F(t) = \frac{1}{1} \left[\frac{P(t, S)}{P(t, U)} - 1 \right] = \frac{P(t, S) P(t, T)}{P(t, T) P(t, U)} - 1. \quad (3.3)$$

Úpravami vyššie uvedených vzťahov dospejeme k ročnej forwardovej sadzbe $F(t)$ vyjadrenej pomocou dvoch polročných forwardových sadzieb $F_1(t)$ a $F_2(t)$ následovne

$$F(t) = \frac{F_1(t) + F_2(t)}{2} + \frac{F_1(t)F_2(t)}{4}. \quad (3.4)$$

Ročnú capletovú volatilitu je možné získať približným vzťahom [1], str.257

$$v^2 \approx u_1^2(0)v_{S\text{-caplet}}^2 + u_2^2(0)v_{T\text{-caplet}}^2 + 2\rho u_1(0)u_2(0)v_{S\text{-caplet}}v_{T\text{-caplet}}, \quad (3.5)$$

kde

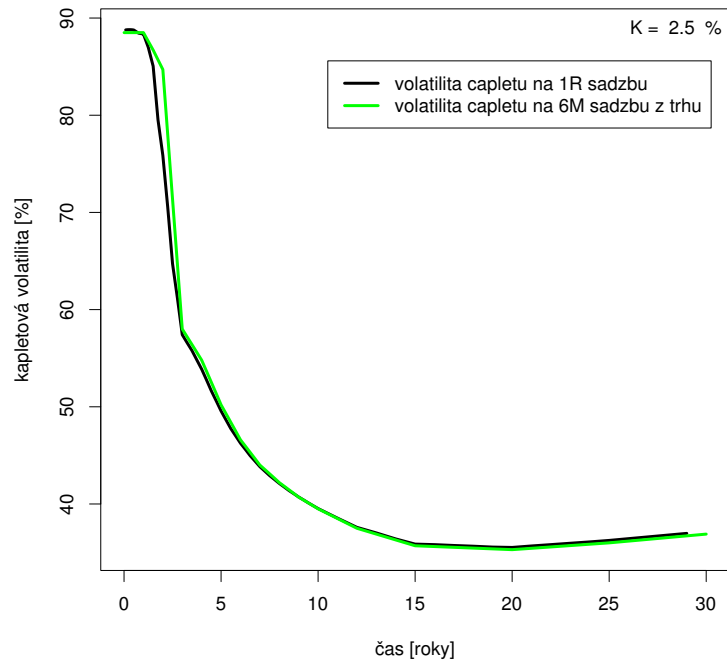
$$u_1(0) := \frac{1}{F(t)} \left(\frac{F_1(t)}{2} + \frac{F_1(t)F_2(t)}{4} \right)$$

$$u_2(0) := \frac{1}{F(t)} \left(\frac{F_2(t)}{2} + \frac{F_1(t)F_2(t)}{4} \right),$$

$v_{S\text{-caplet}}$ je volatilita S-tého capletu a ρ označuje koreláciu medzi $F_1(t)$ a $F_2(t)$. Najčastejšie sa za túto hodnotu dosadzuje 1. Preto budeme aj my používať $\rho = 1$.

Z obrázku 3.3 je vidieť, že medzi capletovou volatilitou na 6M, ktorú sme získala z trhu a capletovou volatilitou na 1R sadzbu spočítanou pomocou vzťahu (3.5) je len minimálny rozdiel.

V ďalšom texte budeme za tržnú capletovú volatilitu považovať v^2 napočítanú pomocou vzťahu (3.5).



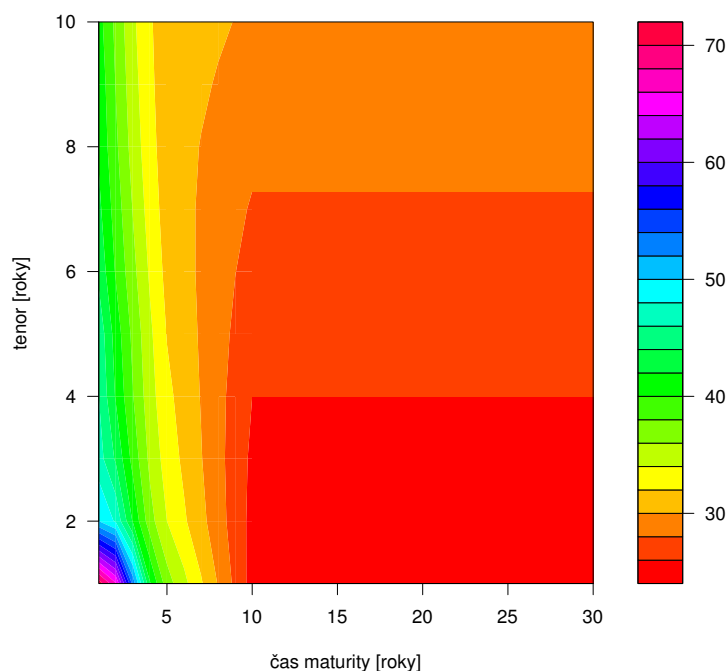
Obr. 3.3: Capletová volatilita pre cap na 6M získaná z trhu a volatilita capletu na 1R sadzbu spočítaná pomocou vzťahu (3.5).

3.3 Implikovaná swapcová volatilita

Pri výpočtoch budeme používať implikované swapcové volatility pre at-the-money swapce s trvaním od 1 do 10 rokov s výpliatnými obdobiami vzdialenými jeden rok (tabuľka 3.3 a obrázok 3.4).

Tabuľka 3.3: Swapcové volatility pre swap s jednotlivými dobami refixu vzdialenými jeden rok k 30.6.2012 udávané v percentách.

Maturita swapca	Doba trvania podkladového swapu									
	1 R	2 R	3 R	4 R	5 R	6 R	7 R	8 R	9 R	10 R
1 R	71.20	50.00	46.90	46.00	45.40	43.50	42.50	41.70	41.40	40.80
2 R	66.20	47.70	43.70	41.80	41.10	39.80	39.10	38.40	37.90	37.50
3 R	53.30	41.80	39.30	38.10	37.50	36.60	35.90	35.20	34.80	34.40
4 R	42.20	36.80	35.50	34.80	34.40	33.70	33.10	32.70	32.40	32.20
5 R	36.90	34.00	33.10	32.50	31.90	31.40	31.10	30.90	30.90	31.00
6 R	34.60	32.30	31.60	31.20	30.80	30.60	30.40	30.40	30.60	30.70
7 R	32.20	30.60	30.10	29.90	29.80	29.70	29.80	29.90	30.20	30.50
8 R	29.90	28.80	28.60	28.60	28.70	28.90	29.10	29.50	29.90	30.20
9 R	27.50	27.10	27.10	27.30	27.70	28.00	28.50	29.00	29.50	30.00
10 R	25.20	25.40	25.60	26.00	26.60	27.20	27.80	28.50	29.20	29.70
11 R	25.20	25.40	25.60	26.00	26.60	27.20	27.80	28.50	29.20	29.70
12 R	25.20	25.40	25.60	26.00	26.60	27.20	27.80	28.50	29.20	29.70
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
30 R	25.20	25.40	25.60	26.00	26.60	27.20	27.80	28.50	29.20	29.70



Obr. 3.4: Časová štruktúra swapcovej volatility kotovanej trhom na podkladový swap s ročnou forwardovou sadzbou k 30. 6. 2012.

4. Modelovanie okamžitej úrokovej sadzby

Jedným zo spôsobov, ako oceňovať úrokové deriváty, je modelovať okamžitú úrokovú sadzbu $r(t)$. Z okamžitej úrokovej sadzby $r(t)$ v čase t , je pomocou vzťahu (1.2) vyjadrená cena bezkupónového dlhopisu a pomocou tejto ceny diskontovaná výplata rôznych derivátov. Zo vzťahu (1.2) plynie, že pri známom rozdelení $e^{-\int_t^T r(s)ds}$, pre vybrané T , podmienené na dostupných informáciach v čase t , je možné určiť cenu bezkupónového dlhopisu $P(t, T)$ a z nej rôzne úrokové miery, tak ako to bolo naznačené v kapitole 1. Takže spotová krivka v ľubovoľnom budúcom čase t je jednoznačne charakterizovaná rozdelením okamžitej úrokovej sadzby $r(t)$.

Pri modelovaní okamžitej úrokovej sadzby rozlišujeme dve skupiny modelov, a to jednofaktorové a mnohofaktorové modely v závislosti na počtu zdrojov neistoty.

Jednofaktorové modely pracujú iba s jedným zdrojom neistoty a ich rovnicu je možné zapísať v obecnom tvare pomocou stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dZ(t). \quad (4.1)$$

Jedná sa o súčet deterministickej a stochastickej zložky, pričom náhodnosť je reprezentovaná Brownovým pohybom $Z(t)$. Výraz $\mu(t, r(t))$ sa nazýva driftový koeficient a výraz $\sigma(t, r(t))$ je difúzny koeficient.

Konkrétny model by mal splňovať aspoň niektoré ľahko pozorovateľné vlastnosti úrokových sadzieb, ako je napríklad nezápornosť $r(t)$ a tiež by mal zahrňovať očakávania trhu. Jedným z ďalších požiadavok je návratnosť $r(t)$ k určitej rovnovážnej hodnote, alebo k hodnote závislej na čase. Tento požiadavok je splnený u procesov, ktoré pracujú s tzv. návratnosťou ku stredu (meaning reversion). Medzi takéto patrí napr. Vašíčekov model, alebo Hull-Whiteov model.

Modely, v ktorých je výnosová krivka vstupom, sa nazývajú exogénne. Naopak, modely, u ktorých návrat prebieha len k jednej hodnote (v rovnici nie je zohľadnená forwardová krivka) nezávislej na čase, sa nazývajú endogénne.

4.1 Hull-Whiteov model

V tejto kapitole sa budeme zaoberať Hull-Whiteovým modelom [3]. Dynamiku Hull-Whiteovho (HW) modelu popisuje rovnica

$$dr(t) = (\vartheta(t) - kr(t))dt + \sigma dZ(t), \quad r(0) = r_0, \quad k > 0, \quad \sigma > 0. \quad (4.2)$$

Jedná sa o model, v ktorom rovnovážnu hodnotu reprezentuje časovo závislý parameter $\vartheta(t)$ a parameter k (obyčajne má hodnoty medzi 0.01-0.3) popisuje rýchlosť návratnosti k rovnovážnej hodnote. Keďže sa v stochastickom sčítaní nevyskytuje $r(t)$, značí parameter σ absolútnu volatilitu okamžitej úrokovej sadzby. Vzhľadom k tomu, že rovnovážna hodnota $\vartheta(t)$ závisí na čase, jedná sa o časovo nehomogénny model.

V HW modeli je hodnota parametru $\vartheta(t)$ nastavená tak, aby výsledná závislosť okamžitej úrokovej miery bola v súhlase s aktuálnou spotovou krivkou známou z trhu. To je dosiahnuté zvolením

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial t} + k f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}), \quad (4.3)$$

pričom $f^M(0, t)$ je tržná okamžitá forwardová úroková miera zadefinovaná vzťahom (1.13). Keďže HW model využíva tržnú spotovú krivku, je tento model exogénny na rozdiel od napr. Vašíčkovho modelu.

Dosadením za $\vartheta(t)$ môžeme rovnicu (4.2) prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} r(t + dt) - r(t) &= (f^M(0, t + dt) - f^M(0, t)) - k(r(t) - f^M(0, t))dt + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})dt + \sigma(Z(t + dt) - Z(t)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

z ktorého je vidieť, aké členy prispievajú k zmene $r(t)$ so zväčšujúcim sa časom t .

Prvý sčítanec rovnice (4.4) odpovedá vývoji forwardovej sadzby. Druhý sčítanec zaručuje to, aby sa spotová sadzba $r(t)$ vrátila k forwardovej sadzbe $f^M(0, t)$, pričom rýchlosť návratu je vyjadrená koeficientom k . Preto HW model splňuje podmienku návratnosti ku strediu. Tretí sčítanec môže byť, kvôli kvadrátu volatility σ , oproti ostatným sčítancom malý, ale tiež dáva určitý príspevok k zmene $r(t)$, a to vždy kladný. Štvrtý sčítanec tvorí náhodnú zložku s normálnym rozdelením. Takže HW model drží modelovanú okamžitú spotovú sadzbu v blízkosti okamžitej forwardovej sadzby získanej z dát.

Rovnicu (4.2) je možné následovne analyticky vyriešiť

$$d(r(u)e^{-k(t-u)}) = dr(u)e^{-k(t-u)} + r(u)ke^{-k(t-u)}du.$$

Základnú rovnicu HW modelu vynásobíme veličinou $e^{-k(t-u)}$

$$dr(u)e^{-k(t-u)} = e^{-k(t-u)}(\vartheta(t) - kr(u))du + \sigma e^{-k(t-u)}dZ(u).$$

Dosadením druhej rovnice do prvej dostaneme

$$d(r(u)e^{-k(t-u)}) = e^{-k(t-u)}\vartheta(t)du + \sigma e^{-k(t-u)}dZ(u).$$

Po integrácii v intervale 0 až t dostávame rovnicu pre $r(t)$

$$r(t) = r(0)e^{-kt} + \gamma(t) - f^M(0, t)e^{-k(t)} + \sigma \int_0^t e^{-k(t-u)}dZ(u), \quad (4.5)$$

kde

$$\gamma(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k^2}(1 - e^{-2kt}).$$

Preto má $r(t)$ normálne rozdelenie so strednou hodnotou a rozptylom v tvare

$$\begin{aligned} E r(t) &= r(0)e^{-\gamma(t)} + \gamma(t) - \gamma(0)e^{-\gamma(t)} \\ \text{Var } r(t) &= \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2kt}]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Z rozdelenia náhodnej veličiny $r(t)$ plynie, že existuje pravdepodobnosť, že okamžitá úroková miera $r(t)$ bude záporná. Táto pravdepodobnosť je daná vzťahom

$$P\{r(t) < 0\} = \Phi\left(-\frac{\gamma(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2k}[1 - e^{-2kt}]}}\right), \quad (4.7)$$

kde Φ značí distribučnú funkciu normovaného normálneho rozdelenia. Takáto pravdepodobnosť je v praxi väčšinou nízka, ale pri malej sadzbe $f^M(0, t)$ v určitom čase t môže byť nezanedbateľná.

4.1.1 Cena dlhopisov

K určení ceny dlhopisu je možné využiť tri spôsoby:

1. Priame odvodenie z rovnice (1.2).
2. Riešením Black-Scholes-Mertonovej parciálnej diferenciálnej rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} - rP &= 0 \\ P(T, T) &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

3. Využitím afínnej časovej štruktúry.

V prípade modelovania úrokovej sadzby pomocou HW modelu je k určení ceny dlhopisov výhodné použiť 3. spôsob, ktorý teraz bližšie priblížime.

Model má podľa definície afinnú časovú štruktúru, ak platí

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \quad (4.9)$$

Pokiaľ majú koeficienty v obecnej rovnici jednofaktorového modelu (4.1) tvar

$$\begin{aligned} \mu(t, r) &= \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t, r) &= \sqrt{\chi(t)r + \delta(t)}, \end{aligned}$$

a $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\chi(t)$, $\delta(t)$ sú deterministické funkcie, potom je možné dokázať, že takáto funkcia má afinnú časovú štruktúru.

Ak do (4.8) dosadíme vyjadrenie $P(t, T)$, z (4.9), a ak spojíme členy s rovnicou mocninou u $r(t)$ dostaneme nasledujúcu sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} + \alpha B - \frac{1}{2}\chi B^2 &= -1, \\ B(T, T) &= 0, \\ \frac{dA}{dt} - \beta B + \frac{1}{2}\delta B^2 &= 0, \\ A(T, T) &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Z týchto rovníc získame vzťah pre $A(t, T)$ a $B(t, T)$ a z nich po dosadení do (4.9) dostaneme $P(t, T)$.

Z rovnice (4.2) je vidieť, že HW model má afinnú časovú štruktúru s týmito koeficientmi

$$\alpha(t) = -k, \beta(t) = \vartheta(t), \chi(t) = 0, \delta(t) = \sigma^2.$$

Vyriešením diferenciálnej rovnice (4.10) je možné získať cenu dlhopisu v čase t

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} & (4.11) \\ B(t, T) &= \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}] \\ A(t, T) &= \log \left[\frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \right] + B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-2kt})B(t, T)^2. \end{aligned}$$

Ceny modelovaných dlhopisov prostredníctvom tržnej ceny dlhopisu $P^M(0, T)$ a úrokovej miery $f^M(0, T)$ priamo závisia na aktuálnej výnosovej krivke. Pre $t = 0$ máme

$$P(0, T) = P^M(0, T)\exp\{B(0, T)f(0, 0) - B(0, T)r(0)\} = P^M(0, T), \quad (4.12)$$

takže odvedenie ceny bezkupónového dlhopisu $P(0, T)$ je korektné.

4.1.2 Oceňovanie úrokových derivátov s využitím HW modelu

Cenu capu a flooru odvodíme pomocou ceny európskych opcií. Cap odpovedá portfóliu európskych PUT opcií na dlhopis a naopak floor je možné vnímať ako súbor európskych CALL opcií na dlhopis. Z tohoto dôvodu budeme pri oceňovaní capu a flooru vychádzať zo vzťahov na oceňovanie CALL a PUT opcie.

Cena európskej CALL opcie v čase uzavretia t a splatnosti T na bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti S a realizačnou cenou X sa v HW modeli riadi vzťahom [1], str. 67

$$ZBC(t, T, S, X) = N(P(t, S)\Phi(h) - XP(t, T)\Phi(h - \sigma_p)), \quad (4.13)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}} B(T, S), \\ h &= \frac{1}{\sigma_p} \log \frac{P(t, S)}{P(t, T)X} + \frac{\sigma_p}{2} \end{aligned}$$

a Φ označuje distribučnú funkciu štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Podobný vzťah na určenie ceny európskej PUT opcie s rovnakými parametrami bude v tvare

$$ZBP(t, T, S, X) = N(XP(t, T)\Phi(-h + \sigma_p) - P(t, S)\Phi(-h)). \quad (4.14)$$

Odvodíme cenu PUT opcie (flooru) v čase t s realizáciou v čase T_α na sadzby s rovnakými tenormi τ a realizačnou sadzbou K , ktorú sme bližšie charakterizovali v Kapitole 2.2. Diskontovanú výplatu z takejto opcie popisuje vzťah

$$\text{Payoff}_{\text{floor}} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + L(T_{i-1}, T_i)\tau} \max(\tau(K - L(T_{i-1}, T_i), 0)). \quad (4.15)$$

Cenu takejto opcie budeme značiť $\text{Floor}(N, t, T, K)$ a odvodíme ju z ceny portfólia CALL opcií so splatnosťami v časoch T_i pre $i = \alpha + 1, \dots, \beta$ na dlhopisy so splatnosťami v $T_i + \tau$ s jednotkovou nominálnou hodnotou. Ich výplatnú funkciu budeme upravovať až pokiaľ nedôjdeme k tvaru výplatnej funkcie flooru.

$$\begin{aligned}
\text{Payoff}_{\text{ZBC}} &= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \max\left(\frac{1}{1 + L(T_{i-1}, T_i)\tau} - X, 0\right) \\
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + L(T_{i-1}, T_i)\tau} \max(1 - X - L(T_{i-1}, T_i)X\tau, 0) \\
&= N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \frac{1}{1 + L(T_{i-1}, T_i)\tau} X \max\left(\left(\frac{1-X}{\tau X} - L(T_{i-1}, T_i)\right)\tau, 0\right) \\
&= NX \text{Payoff}_{\text{floor}}\left(t, \omega, \frac{1-X}{\tau X}\right).
\end{aligned}$$

Výraz $\frac{1-X}{\tau X}$ musí byť rovný K . Odkiaľ plynie, že $X = \frac{1}{1+K\tau}$. Cena flooru v HW modeli je teda

$$\text{Floor}^{\text{HW}}(t, T, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (1 + \tau K) \text{ZBC}\left(t, T_{i-1}, T_i, \frac{1}{1 + \tau K}\right) = \quad (4.16)$$

$$= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [(1 + K\tau)P(t, T_i)\Phi(h_i) - P(t, T_{i-1})\Phi(h_i - \sigma_{pi})], \quad (4.17)$$

kde h_i a σ_{pi} sú h a σ_p zo vzťahu (4.13) s príslušnými časmi T_i .

Podobným spôsobom môžeme získať aj vzťah na vypočítanie ceny capu, ktorý má tvar

$$\text{Cap}^{\text{HW}}(t, T, N, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (1 + \tau K) \text{ZBP}\left(t, T_{i-1}, T_i, \frac{1}{1 + \tau K}\right) \quad (4.18)$$

$$= \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} [P(t, T_{i-1})\Phi(-h_i + \sigma_{pi}) - (1 + K\tau)P(t, T_i)\Phi(-h_i)]. \quad (4.19)$$

Uvažujme ďalej európsku opciu s realizačnou sadzbou K a splatnosťou v čase T , upísanú na dlhopis, ktorý po splatnosti opcie vypláca n kupónov. Výplatný čas označím ako T_i , kde $T_i > T$ a c_i bude hodnota i -tej výplaty po čase T . Nech $\mathbb{T} := \{T_1, \dots, T_n\}$ a $c := \{c_1, \dots, c_n\}$. Ako r^* označíme spotovú úrokovú sadzbu v čase T , pre ktorú je cena kupónového dlhopisu rovná realizačnej cene opcie. Kupónový dlhopis je možné chápať ako portfólio bezkupónových dlhopisov, preto K_i budú ceny jednotlivých čiastkových dlhopisov s maturitami T_i pri spotovej miere r^* . Potom cena takejto opcie v čase $t < T$ bude

$$\text{CBO}(t, T, \mathbb{T}, c, K) = \sum_{i=1}^n c_i \text{ZBO}(t, T, T_i, K_i), \quad (4.20)$$

kde $\text{ZBO}(t, T, T_i, K_i)$ označuje cenu jednotlivých čiastkových opcií na dlhopisy.

S využitím vzťahu (4.20) je možné oceniť i swapec, stačí si ho len predstaviť ako opciu na kupónový dlhopis.

Budeme uvažovať platiaci swapec s pevnou sadzbou K , splatnosťou v T a nominálnou hodnotou N , ktorý dáva držiteľovi právo, nie však povinnosť, v čase $T_\alpha = T$ uzavrieť swap s platbami v časoch $\mathbb{T} = \{T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta\}$. Časové intervaly medzi T_{i-1} a T_i budú označené τ_i a $i = \alpha + 1, \dots, \beta$. Hodnoty výplat $c_i = X_i \tau_i$ pre $i = \alpha + 1, \dots, \beta - 1$. Výplatná hodnota $c_\beta = 1 + X_\beta \tau_\beta$. Pre spotovú sadzbu r^* v čase T platí

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i A(T, T_i) e^{-B(T, T_i) r^*} = 1. \quad (4.21)$$

Cena platiaceho swapca v čase $t < T$ je potom

$$\text{PS}^{\text{HW}}(t, T, \mathbb{T}, N, X) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i \text{ZBP}(t, T, T_i, X_i), \quad (4.22)$$

kde $X_i := A(T, T_i) \exp(-B(T, T_i) r^*)$. Analogicky je možné určiť cenu príslušného swapca na swap prijímajúci pevnú sadzbu

$$\text{RS}^{\text{HW}}(t, T, \mathbb{T}, N, X) = N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} c_i \text{ZBC}(t, T, T_i, X_i). \quad (4.23)$$

Pomocou HW modelu je teda možné získať explicitné rovnice na ocenenie capu, flooru a swapca, čo u iných modelov nemusí byť možné. Pri určení ceny swapca je však potrebné hľadať koreň r^* rovnice (4.21).

4.2 Aplikácia HW modelu na reálne dáta

4.2.1 Simulovanie sadziieb

Teóriu z kapitoly 4.1 aplikujeme na dáta, ktoré poskytla agentúra Reuters. Vstupom je eurová spotová krivka na obrázku 3.1 z 30.6.2012. Tento dátum budem označovať ako čas 0.

Zo spotovej krivky získame okamžitú forwardovú krivku $f^M(0, T)$. Vychádzame zo vzťahu (1.13) odkiaľ je možné dostať približný vzťah

$$f^M(0, T) \approx F^M(0, T, T + \Delta T), \quad (4.24)$$

pričom za ΔT si zvolíme jeden deň.

Podobne pomocou vzorca (1.9) je možné získať približnú počiatočnú hodnotu okamžitej úrokovej sadzby r_0

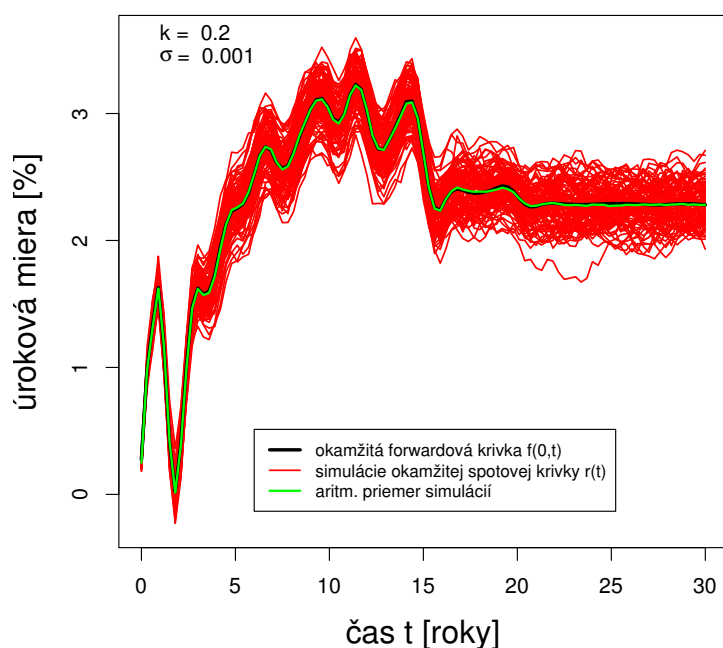
$$r_0 = r(0) \approx R^M(0, \Delta T), \quad (4.25)$$

kde $R^M(0, T)$ je tržná spotová sadzba pre spojitú úročenú.

Pomocou rovnice HW modelu (4.2) simulujeme vývoj okamžitej úrokovej miery $r(t)$. Na začiatok si pre ilustráciu simulovania sadziieb zvolíme ľubovoľné hodnoty parametrov k a σ , napr. $k = 0.2$ a $\sigma = 0.001$. Na obrázku 4.1 sú znázornené simulácie okamžitej úrokovej miery $r(t)$ vytvorené pomocou HW modelu spolu

s okamžitou forwardovou krivkou zo súčasnosti. Je vidieť, že simulácie kopírujú vývoj forwardovej krivky z trhu, ako to je zřejmé i z rovnice (4.4). Povšimnime si, že v okolí 2 rokov sú niektoré simulované sadzby $r(t) < 0$, čo je spôsobené tvarom a hodnotami forwardovej krivky v tomto období. Nenulová pravdepodobnosť výskytu záporných simulovaných sadzieb je jednou z negatívnych vlastností HW modelu. Priemer simulácií splýva s okamžitou forwardovou krivkou z trhu, čo súhlasí s rovnicou (4.6), z ktorej vyplýva, že pre malé časy je stredná hodnota $r(t)$ rovná približne $f^M(0, t)$.

Podobne na obrázku 4.2 je vynesená ročná forwardová krivka z trhu $F(0, T, T+1)$ v porovnaní s ročnými spotovými krivkami $L(T, T+1)$ získanými zo simulácií $r(t)$ pomocou vzorcov (4.11) a následne (1.4).

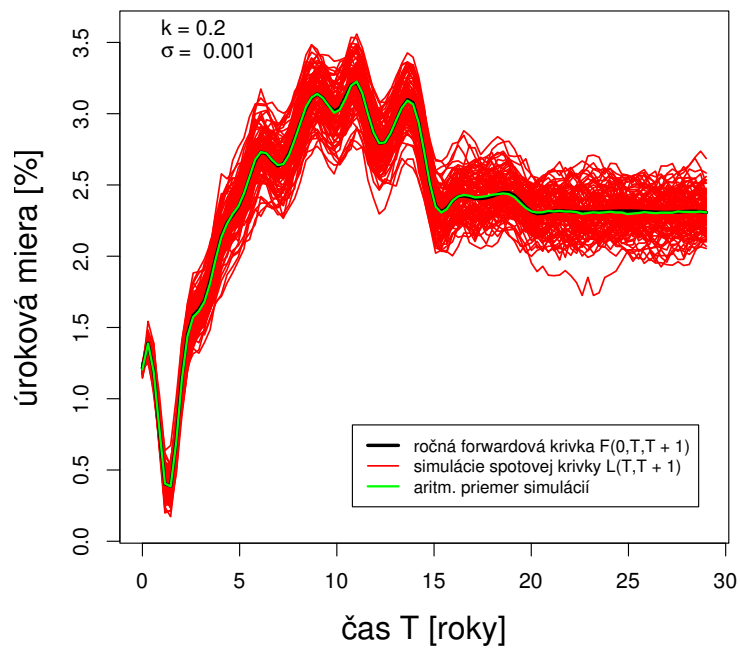


Obr. 4.1: Okamžitá forwardová krivka z trhu, 100 simulácií okamžitej spotovej úrokovej miery pomocou HW modelu a ich aritmetický priemer.

4.2.2 Ocenenie capletu a floorletu

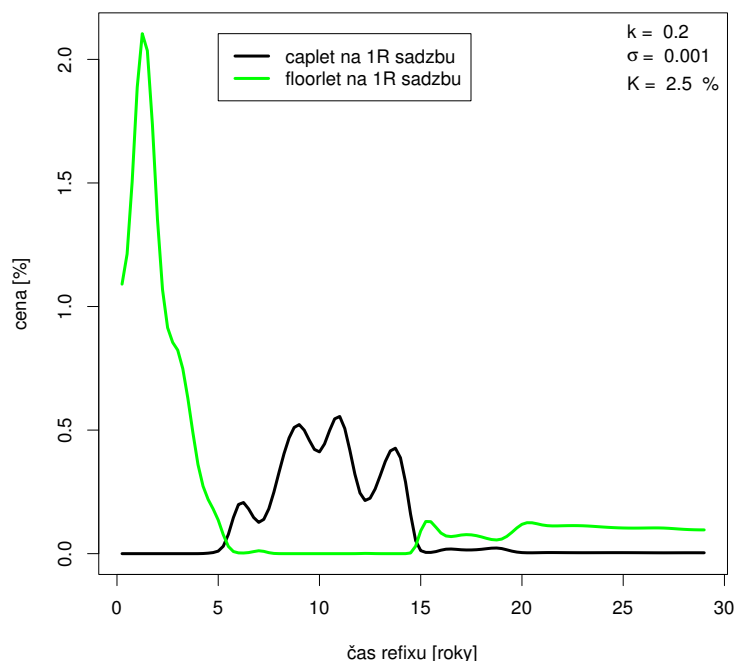
Ako je vidieť zo vzťahu (2.5) a (2.6) diskontované výplaty capu a flooru je možno rozdeliť na súčty jednotlivých capletov a floorletov. Ocenenie capu a flooru teda spočíva v ocenení týchto čiastkových produktov.

Na obrázku 4.3 je porovnanie ceny capletu a floorletu v závislosti na čase reflexu pre realizačnú sadzbu $K = 2.5\%$ s dobou trvania 1 roka. Tvar príslušných kriviek je možné dobre kvalitatívne vysvetliť pomocou tvaru ročnej forwardovej krivky z trhu na obrázku 4.2, ktorá slúži ako predpoveď spotovej sadzby. Keď je táto predpoveď menšia ako realizačná sadzba K (napr. v časoch od 0 do ~ 5 rokov) tak, je cena capletu zanedbateľne malá a cena floorletu kopíruje opačný vývoj forwardovej sadzby. Teda keby ozajstná spotová sadzba bola taká, aká



Obr. 4.2: Ročná forwardová krivka z trhu, 100 simulácií ročnej spotovej úrokovej miery pomocou HW modelu a použitím vzorca (4.11) a ich aritmetický priemer.

vyplýva z predpovede, tak bude diskontovaná výplata capletu nulová a diskontovaná výplata floorletu nezanedbateľná, čo odpovedá aj ich oceneniu. Podobné vysvetlenie má vývoj cien pre časy > 5 rokov.



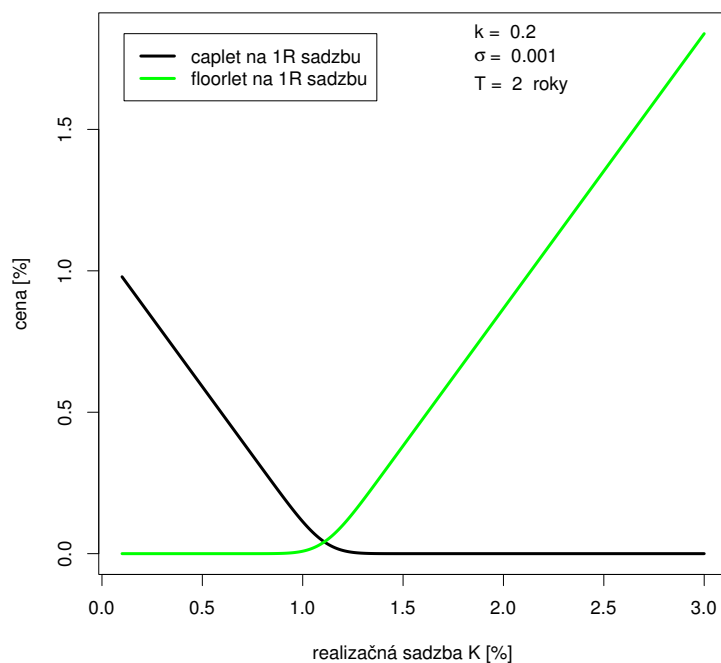
Obr. 4.3: Porovnanie ceny floorletu a capletu na 1R sadzbu s realizačnou sadzbou 2.5 % v závislosti na čase refixu. Krivky boli získané z HW modelu pomocou explicitných vzorcov (4.17) a (4.19).

Na obrázku 4.4 je porovnanie ceny capletu a floorletu v závislosti na realizačnej sadzbe pre čas refixu $T = 2$ roky s dobou trvania 1 rok. Opäť existuje kvalitatívne vysvetlenie tvarov týchto kriviek porovnaním s ročnou forwardovou krivkou z trhu na obrázku 4.2. Z tohoto obrázku je vidieť, že forwardová sadzba $F(0, 2, 3) \approx 0.6$ %, čo môže slúžiť ako predpoveď ročnej spotovej sadzby v čase 2 roky. Preto ceny capletu a floorletu sa na úrovni 0.6 % približne rovnajú. Cena floorletu začína od tejto úrovne vzrastať a cena capletu klesá približovaním sa k tejto úrovni.

V prípade všeobecného modelu popisujúceho dynamiku okamžitej spotovej krivky, z ktorého sa nedá explicitne vyjadriť cena capletu a floorletu je potrebné pri ich oceňovaní postupovať metódou Monte Carlo. Simuláciu okamžitej spotovej krivky je potrebné previesť veľa krát a pre každú simuláciu je treba zistiť diskontovanú výplatu capletu alebo floorletu pomocou definičných vzťahov (2.5) a (2.6). Na konci je potrebné spočítať priemer diskontovaných výplat, ktorý posluží ako odhad strednej hodnoty diskontovaných výplat. Tak je možné zistiť bezrizikovú cenu capletu alebo floorletu. To je možné urobiť aj pre HW model a porovnať s výsledkom z explicitného vzorca.

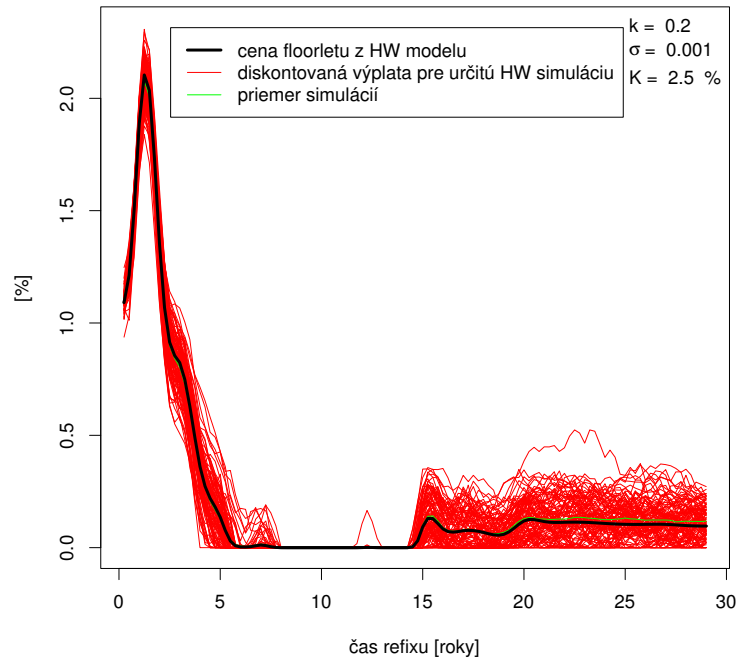
Na obrázku 4.5 sú znázornené tieto dva odlišné postupy ocenenia floorletu pomocou HW modelu. Je vidieť, že Monte Carlo postup, ktorý využíva 100 simulácií forwardovej krivky dáva približne rovnaký výsledok ako explicitný vzorec (2.6).

Krivky na obrázku 4.3 a 4.4 závisia na parametroch σ a k . Na obrázku 4.6 je znázornená závislosť týchto cien na parametre σ . Je vidieť, že ceny stúpajú

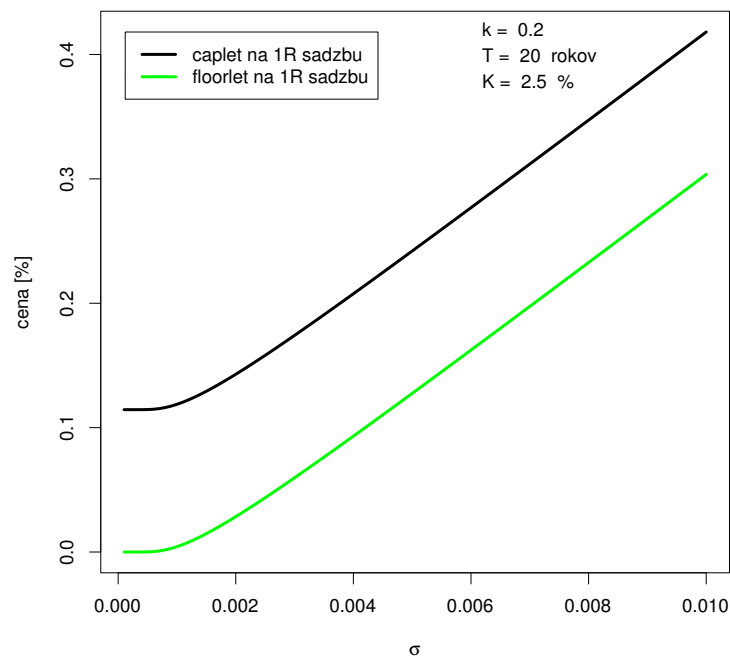


Obr. 4.4: Porovnanie ceny floorletu a capletu na 1R sadzbu s reflexom v čase 2 roky v závislosti na realizačnej sadzbe K . Krivky boli získané z HW modelu pomocou explicitných vzorcov (4.17) a (4.19).

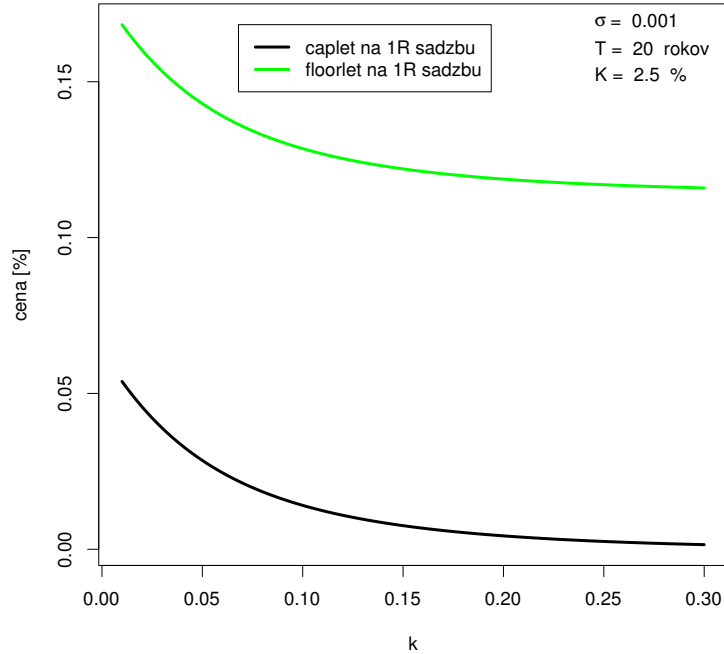
s volatilitou σ , ako sa to očakáva od modelu. Na obrázku 4.7 je možné pozorovať cenu v závislosti na hodnotách parametra k . Keďže so stúpajúcim k budú simulácie bližšie pôvodnej forwardovej krivke, musí cena s rastúcim k klesať. Ak chceme cenu derivátov čo najviac priblížiť skutočnosti, je potrebné parametre k a σ čo najviac prispôbiť situácií na trhu, ako si to ukážeme v ďalšej kapitole.



Obr. 4.5: Cena floorletu, 100 simulovaných diskontovaných výplat floorletu na 1R sadzbu s realizačnou sadzbou 2.5 % v závislosti na čase refixu a ich priemer. Cena bola zistená použitím explicitného vzorca (4.17) odvodeného z HW modelu. Diskontované výplaty boli zistené pomocou vzorca (2.6), pričom jednotlivé členy vo vzorci boli získané HW simuláciou.



Obr. 4.6: Závislosť ceny capletu a floorletu na 1R sadzbu na volatilitě σ .



Obr. 4.7: Závislosť ceny capletu a floorletu na 1R sadzbu na hodnote parametra k .

4.2.3 Kalibrácia HW modelu

Zistenie vhodných hodnôt parametrov σ a k sa volá kalibrácia HW modelu. Kalibrácia sa robí porovnaním zistených cien capletu a floorletu s tržnými hodnotami. Je možné pripraviť súčet s^{HW} štvorcov rozdielov tržnej ceny a ceny získanej z HW modelu. Súčet s^{HW} bude závisieť na parametroch σ a k . Optimálne hodnoty týchto parametrov sa získajú minimalizovaním tohto súčtu vzhľadom k parametrom σ a k

$$s^{HW} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \left(\text{Cap}^{\text{Black}}(0, \{T_{i-1}, T_i\}, N, 1, \sigma_{i-1,i}) - \text{Cap}^{HW}(0, \{T_{i-1}, T_i\}, k, \sigma) \right)^2 + \left(\text{Floor}^{\text{Black}}(0, \{T_{i-1}, T_i\}, N, 1, \sigma_{i-1,i}) - \text{Floor}^{HW}(0, \{T_{i-1}, T_i\}, k, \sigma) \right)^2 \quad (4.26)$$

kde za parameter $\sigma_{\alpha,i}$ dosadíme príslušné implikovanú capletovú volatilitu pre ročnú forwardovú sadzbu charakterizovanú v predošlej kapitole.

Na začiatku si zvolíme počiatočné hodnoty parametrov napr. $k = 0.1$ a $\sigma = 0.005$. Vzhľadom k požiadavkám nezápornosti k a σ je možné k súčtu s^{HW} pripočítať penalizačné členy

$$\begin{aligned} p_1 &= Q \cdot \max(0, -k), \\ p_2 &= Q \cdot \max(0, -\sigma), \end{aligned} \quad (4.27)$$

kde nezáporná konštanta Q je rovná napr. 1000.

Pri minimalizácii bola v software R použita metóda Nelder-Mead [6] obsiahnutú vo funkcii *optim* z balíčka *stats*. Minimalizačný algoritmus úspešne do-

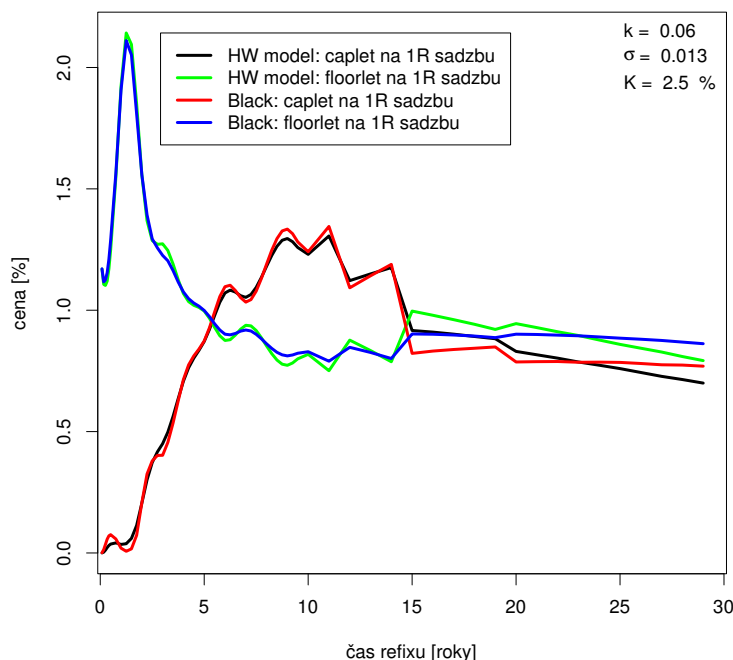
konvergoval k hodnote minima 0.1366 s hodnotami parametrov v minime zobrazenými v tabuľke 4.1.

Minimalizáciou $s^{\text{HW}} + p_1 + p_2$ sme získala optimálne hodnoty parametrov k a σ (tabuľka 4.1). Správnosť kalibrácie je možné overiť napríklad porovnaním cien

Tabuľka 4.1: Hodnoty parametrov HW modelu k a σ získané kalibráciou.

Parameter	k	σ
Opt. hodnota	0.0596	0.0132

capletu a floorletu spočítaných pomocou Blackových formúl a pomocou explicitných vzorcov HW modelu, ako tomu je na obrázku 4.8. Tu je vidieť, že ceny capletu a floorletu napočítané týmito dvoma metódami sú veľmi podobné z čoho môžeme konštatovať, že kalibrácia sa podarila.

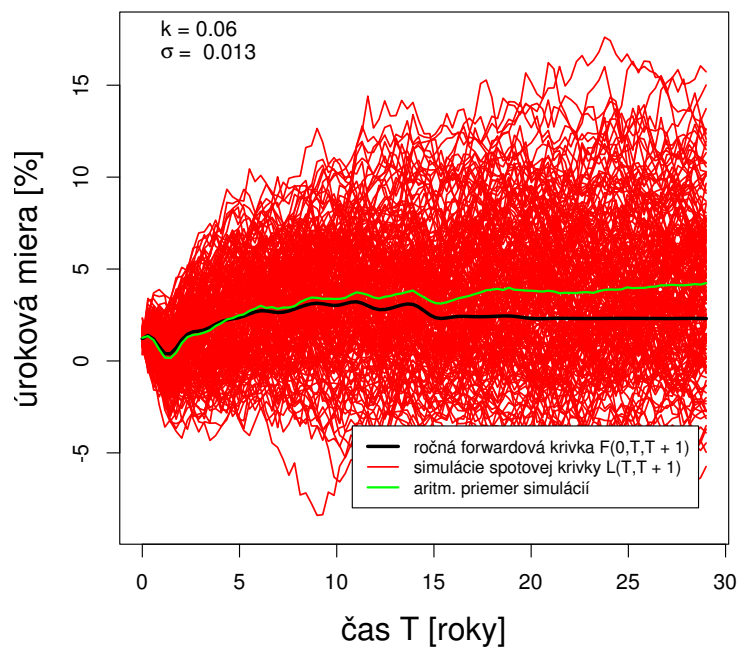


Obr. 4.8: Porovnanie ceny capletu a floorletu spočítanej pomocou Blackových formuly (2.7) a (2.8) a explicitných vzorcov pre HW model (4.17) a (4.19) s využitím optimálnych hodnôt parametrov k a σ .

S využitím nájdených optimálnych hodnôt parametrov sme si opäť nasimulovali vývoj ročnej forwardovej sadzby (obrázok 4.9).

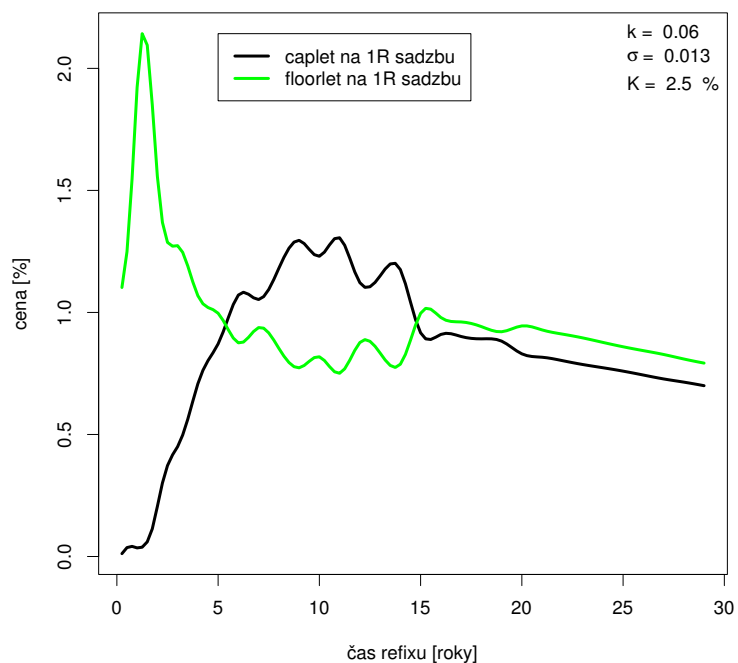
Pri porovnaní s obrázkom 4.2 je vidieť, že vplyvom vyššej hodnoty volatility σ a nižšej hodnoty parametra k sú simulácie oveľa viac vzdialené od forwardovej krivky. Malá hodnota k a tretí sčítanec rovnice (4.4) zapríčinili to, že so zvyšujúcim sa časom sa aritmetický priemer simulácií postupne vzdáva od forwardovej krivky. Aj z rovnice (4.6) je vidieť, že pri veľkej hodnote σ a malom k nebude platiť rovnosť $r(t) \approx f^M(0, t)$ a so zvyšujúcim sa časom bude tento rozdiel väčší.

Niektoré simulácie prechádza do záporných hodnôt. Záporná forwardová sadzba, ale v teórii úrokových sadziieb nemá zmysel. Táto vlastnosť je preto hlavnou nevýhodou HW modelu.



Obr. 4.9: 200 simulácií 1R forwardovej sadzby pomocou HW modelu s kalibrovanými hodnotami parametrov.

Aj napriek záporným simuláciám forwardových sadziieb, je možné model použiť na oceňovanie capletov a floorletov. Hodnotu capu a flooru ocenených HW modelom pri kalibrovaných hodnotách parametrov k a σ je možné vidieť na obrázku 4.10. Pri porovnaní s obrázkom 4.3 je vidieť, že cena floorletu i capletu sa vplyvom väčšej hodnoty volatility zvýšila.



Obr. 4.10: Porovnanie ceny floorletu a capletu na 1R sadzbu s realizačnou sadzbou 2.5 % v závislosti na čase refixu. Krivky boli získané z HW modelu pomocou explicitných vzorcov (4.17) a (4.19) do ktorých boli dosadené parametre k a σ získané z kalibrácie.

V kapitole 6 oceníme capy a floory a získané ceny porovnáme s inými oceňovacími nástrojmi.

5. LIBOR tržný model

V tejto kapitole si priblížime jeden z nástrojov na modelovanie úrokových mier, a to LIBOR tržný model. V ďalšom texte ho budeme značiť skratkou LMM z anglického LIBOR Market Model. Často sa mu hovorí aj Brace-Gatarek-Musieli (BGM) model podľa autorov článku [4], v ktorom bol tento model v roku 1997 oficiálne predstavený.

U jeho priaznivcov je obľúbený hlavne kvôli zhode medzi modelom a zaužívanými vzťahmi na oceňovanie capu a flooru, ako je Blackova formula. Pred zavedením tržného modelu neboli žiadne vzorce na určenie úrokových sadziieb kompatibilné s Blackovou formulou pre cap a floor. Tieto vzorce boli založené na napodobňovaní Black-Scholesovho modelu pre opcie na akcie a nepresných predpokladoch o rozdelení úrokových sadziieb. Predstavenie LMM poskytlo nové odvodenie Blackovej formuly založené na presnej dynamike forwardových úrokových sadziieb.

Pred zavedením LMM modelu boli jediným nástrojom na simulovanie úrokových sadziieb modely predpovedajúce okamžitú úrokovú sadzbu. Tieto modely sa ešte stále využívajú v mnohých aplikáciách. Princíp ich fungovania i jeden z modelov, Hull-Whiteov model, bol priblížený v kapitole 4.

5.1 Teória k LMM

Nech čas $t = 0$ značí súčasnosť. Uvažujme množinu časových okamžikov $T := \{T_0, \dots, T_M\}$ s dvojicami dôb splatnosti (T_{i-1}, T_i) . Označme τ_i ako časť roka príslušnú k páru (T_{i-1}, T_i) pre $i > 0$ a τ_0 je čas od uzavretia dohody po čas T_0 a položíme $T_{-1} := 0$, potom T_i bude v rokoch označovať dobu od času 0.

Uvažujme všeobecnú forwardovú mieru $F_k(t) \equiv F(t, T_{k-1}, T_k)$, $k = 1, \dots, M$, ktorá je vyjadrená do času T_{k-1} , kedy sa zhoduje so spotovou mierou $F_k(T_{k-1}) = L(T_{k-1}, T_k)$.

Predpokladajme, že forwardová miera F_k se bude vyvíjať v čase podľa vzťahu

$$dF_k(t) = \underline{\sigma}_k(t) F_k(t) dZ^k(t), t \leq T_{k-1}, \quad (5.1)$$

kde $Z^k(t)$ je M -dimenzionálny vektor Brownovho pohybu s kovarianciou $\rho = \rho_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, M$, pre ktorú platí

$$dZ^k(t) dZ^k(t)^T = \rho dt,$$

a kde $\underline{\sigma}_k(t)$ je horizontálny M -dimenzionálny vektor volatility forwardovej miery $F_k(t)$. Každý vektor $\underline{\sigma}_j(t)$ má na j -tom mieste jedinú nenulovú zložku $\sigma_j(t)$. Preto môžeme rovnicu (5.1) prepísať do tvaru

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k^k(t), t \leq T_{k-1}, \quad (5.2)$$

kde $Z_k^k(t)$ je k -tou zložkou vektoru Brownovho pohybu Z^k a ide teda o štandardný Brownov pohyb. Pokiaľ bude z kontextu zrejmé, rovnicu (5.2) budeme písať iba v tvare

$$dF_k(t) = \sigma_k(t) F_k(t) dZ_k(t), t \leq T_{k-1}. \quad (5.3)$$

Proces opísaný vzťahom (5.3) nemá drift. Po pridaní predpokladu na neexistenciu arbitráže je potrebné pridať do rovnice (5.3) člen, ktorý predstavuje drift. Tak je možné získať vzťah [1], str. 203, pomocou ktorého je možné simulovať forwardové sadzby

$$dF_k(t) = \sigma_k(t)F_k(t) \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\rho_{k,j}\tau_j\sigma_k(t)F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt + \sigma_k(t)F_k(t)dZ_k(t), \quad (5.4)$$

kde $\rho_{k,j}$ je korelácia medzi forwardovými sadzbami $F_k(t)$ a $F_j(t)$, pre $k = \alpha + 1, \dots, \beta$.

5.1.1 Okamžitá volatilita forwardovej úrokovej miery

Pre okamžitú volatilitu $\sigma_k(t)$ je nutné zaviesť niektoré zo zjednodušujúcich predpokladov. Od vhodnej voľby predpokladov bude závisieť kvalita získaného modelu.

Budeme predpokladať, že okamžitá volatilita forwardovej úrokovej miery $\sigma_k(t)$ je po častiach spojitá funkcia. Presnejšie, okamžitá volatilita $\sigma_k(t)$ je po častiach konštantná na každom z intervalov $T_{m-2} < t < T_{m-1}$ s dobou splatnosti T_{m-1} pre časy $t < T_{k-1}$. Podľa tohto predpokladu môžeme okamžitú volatilitu usporiadať do tabuľky:

Tabuľka 5.1: Okamžité volatility.

	Čas: $t \in (0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	\dots	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
Fwd miera $F_1(t)$	$\sigma_{1,1}$	-	-	\dots	-
$F_2(t)$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,2}$	-	\dots	-
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$F_M(t)$	$\sigma_{M,1}$	$\sigma_{M,2}$	$\sigma_{M,3}$	\dots	$\sigma_{M,M}$

V [1] môžeme nájsť viac tvarov a predpokladov pre okamžitou volatilitu. My sa zameriame na zredukovanie počtu parametrov v tabuľke 5.1. Môžeme predpokladať, že volatilita závisí len od času do splatnosti $T_k - T_{\beta(t)-1}$ forwardových sadzieb, kde $\beta(t) = k + 1$ pre $T_{k-1} < t \leq T_k$, a nie od času t a doby splatnosti T_k jednotlivo. V takomto prípade dostávame

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} =: \eta_{k-(\beta(t)-1)}. \quad (5.5)$$

Toto vyjadrenie volatility nás vedie k tabuľke 5.2.

Tabuľka 5.2: Aplikácia vzťahu (5.5) na tvar okamžitej volatility forwardových sadzieb.

	Čas: $t \in (0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	\dots	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
Fwd miera $F_1(t)$	η_1	-	-	\dots	-
$F_2(t)$	η_2	η_1	-	\dots	-
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$F_M(t)$	η_M	η_{M-1}	η_{M-2}	\dots	η_1

V tejto práci budeme predpokladať, že pre okamžité volatily z tabuľky 5.1 v každom čase t platí

$$\sigma_k(t) = \sigma_{k,\beta(t)} = \Phi_k \psi_{k-(\beta(t)-1)}, \quad (5.6)$$

kde $\beta(t) = k + 1$ pro $T_{k-1} < t < T_k$. Takéto vyjadrenie vedie k tabuľke 5.3.

Tabuľka 5.3: Aplikácia predpokladov (5.6) na tvar okamžitej volatily forwardových sadziieb.

	Čas: $t \in (0, T_0]$	$(T_0, T_1]$	$(T_1, T_2]$	\dots	$(T_{M-2}, T_{M-1}]$
Fwd miera $F_1(t)$	$\Phi_1 \psi_1$	-	-	\dots	-
$F_2(t)$	$\Phi_2 \psi_2$	$\Phi_2 \psi_1$	-	\dots	-
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots
$F_M(t)$	$\Phi_M \psi_M$	$\Phi_M \psi_{M-1}$	$\Phi_M \psi_{M-2}$	\dots	$\Phi_M \psi_1$

Stredná hodnota kvadrátu forwardovej sadzby odpovedá strednej hodnote kvadrátu capletu $v_{i-\text{caplet}}^2$ na obdobie 0 až T_{i-1} . Preto je možné vyjadriť volatilitu capletu $v_{i-\text{caplet}}$ pomocou okamžitej volatily $\sigma_{i,j}$

$$v_{i-\text{caplet}}^2 = \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_{i,\beta(t)}^2 dt = \frac{1}{T_{i-1}} \sum_{j=1}^i \tau_{j-2,j-1} \sigma_{i,j}^2, \quad (5.7)$$

kde $\tau_{i,j} = T_j - T_i$. Volatility capletov $v_{i-\text{caplet}}$ sa dajú získať z trhu.

5.1.2 Ocenenie capu a flooru pomocou LMM

Capu a flooru sme charakterizovali v kapitole 2.2. Tam sme uviedli, že diskontovaná výplata z capu v čase 0 so začiatkom v T_α a výplatnými dňami $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$ je daná vzťahom (2.5).

Hodnota takéhoto capu bude rovná očakávanej hodnote diskontovaných prichádzajúcich platieb

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i D(0, T_i) (F_i(T_{i-1}) - K)^+ \right\} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \mathbb{E}^i \left[(F_i(T_{i-1}) - K)^+ \right]. \quad (5.8)$$

Funkcia diskontovaných výplat (2.5) prešla do súčtu jednotlivých výplatných funkcií $(F_i(T_{i-1}) - K)^+$ združených s T_{i-1} -capletom. Cena takéhoto capletu k času 0 bude potom daná vzťahom

$$\tau_i P(0, T_i) \mathbb{E}^i (F_i(T_{i-1}) - K)^+. \quad (5.9)$$

Ako je vidieť zo vzťahu (2.5), vo výplatnej funkcii capu bude vystupovať vždy len jedna forwardová sadzba, preto korelácia medzi jednotlivými forwardovými sadzbami nebude mať vplyv na diskontovanú výplatu capu. Proces F_i je martingál a vyvíja sa podľa vzťahu

$$dF_i(t) = \sigma_i(t) F_i(t) dZ_i(t), \quad t \leq T_i. \quad (5.10)$$

Keďže F_i má logaritmicko-normálne rozdelenie, je možné priamo spočítať strednú hodnotu

$$\mathbb{E}^i \left[(F_i(T_{i-1}) - K)^+ \right], \quad (5.11)$$

ako Black-Scholesovu cenu pre CALL opciu na akciu s časom realizácie T_{i-1} , realizačnou cenou K , cenou v čase splatnosti F_i a okamžitou volatilitou $\sigma_i(t)$. Takto dostávame ekvivalenciu medzi LMM a Blackovou formulou pre diskontovanú cenu T_{i-1} -capletu

$$\begin{aligned} \text{Cpl}_i^{\text{LMM}}(t, T_{i-1}, T_i, K) &= \text{Clp}^{\text{Black}}(t, T_{i-1}, T_i, K, v_i) & (5.12) \\ &= P(t, T_i) \tau_i \text{Bl}(K, F_i(t), v_i), \\ \text{Bl}(K, F_i(t), v_i) &= \mathbb{E}^i \left[(F_i(T_{i-1}) - K)^+ \right], \\ &= F_i(t) \Phi(d_1(K, F_i(t), v_i)) - K \Phi(d_2(K, F_i(t), v_i)), \\ d_1(K, F_i(t), v_i) &= \frac{\ln F_i(t)/K + v_i^2/2}{v_i}, \\ d_2(K, F_i(t), v_i) &= \frac{\ln F_i(t)/K - v_i^2/2}{v_i}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

kde v_i^2 je okamžitý rozptyl nedelený časom, na rozdiel od $v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^2$, ktorý bude vždy štandardizovaný časom

$$\begin{aligned} v_i^2 &= T_{i-1} v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^2, \\ v_{T_{i-1}\text{-caplet}}^2 &:= \frac{1}{T_{i-1}} \int_0^{T_{i-1}} \sigma_{i,\beta(t)}^2 dt. \end{aligned}$$

Veličina $v_{T_{i-1}\text{-caplet}}$ sa nazýva T_{i-1} -volatilita capletu a je vyjadrená ako druhá odmocnina rozptylu forwardovej sadzby $F_i(t)$, pre $t \in [0, T_{i-1})$. Táto volatilita je známa a môžeme ju získať z trhu.

Hodnotu capu potom určíme jednoducho ako súčet cez všetky jeho caplety

$$V^{\text{cap}} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \text{Cpl}_i^{\text{LFM}}. \quad (5.14)$$

Podobne sa dá ukázať, že ceny floorletu získané Blackovou formulou (2.8) a priamym výpočtom v LMM sú zhodné a súčtom všetkých floorletov získame hodnotu flooru V^{floor} .

5.1.3 Korelácia forwardových sadziieb

Okamžitá korelácia je vyjadrením závislosti medzi zmenou rôznych forwardových sadziieb. Korelácie medzi jednotlivými forwardovými sadzbami je možné usporiadať do korelačnej matice do korelačnej matice ρ . Korelační matice dimenzie M môže mať všeobecne $M(M-1)/2$ parametrov. Ak bude počet forwardových sadziieb M veľký, môžeme dostať veľký počet parametrov. Preto se v nasledujúcej časti pokúsime počet parametrov čo najviac znížiť.

Keďže ρ je korelačná matica, musí byť symetrická a pozitívne semidefinitná, je ju možné prepísať do tvaru

$$\rho = PHP^T,$$

kde P je ortogonálna matica, $PP^T = I_M$ a H je diagonálna matica, ktorej prvky sú vlastnými číslami matice ρ . I_M je jednotková matica s hodnotou M .

Zavedieme diagonálnu maticu Λ ktorá obsahuje druhé odmocniny vlastných čísel matice ρ . Po definovaní matice $A := P\Lambda$, dostávame

$$AA^T = \rho, \quad A^T A = H.$$

Ďalej je možné nahradiť rozklad $\rho = AA^T$ maticou B s rozmermi $M \times n$, takou, že BB^T je korelačná matica s hodnotou n , kde $n \ll M$. Nahradíme pôvodnú zložku dZ vo vzťahu (5.3) členom $BdW(t)$, pričom W je n -rozmerný Brownov pohyb. Tak namiesto

$$dZdZ^T = \rho dt$$

dostaneme

$$BdW(BdW)^T = BdWdW^T B^T = BB^T dt.$$

Odtiaľ máme novú korelačnú maticu $\rho^B = BB^T$ s hodnotou n a rovnakú hodnotu má teraz i náhodná zložka v rovnici pre forwardovú úrokovú mieru. Nakoniec je ešte potrebné zistiť vhodné parametre matice B tak, aby ρ^B splňovala podmienky korelačnej matice.

Rebonato navrhol nasledujúcu formulu pre i -ty riadok matice B

$$\begin{aligned} b_{i,1} &= \cos \theta_{i,1} \\ b_{i,k} &= \cos \theta_{i,k} \sin \theta_{i,1} \cdots \sin \theta_{i,k-1}, \quad 1 < k < n, \\ b_{i,n} &= \sin \theta_{i,1} \cdots \sin \theta_{i,n-1}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

pre $i = 1, \dots, M$. Pre takúto maticu B bude ρ^B symetrická, pozitívne semidefinitná s jedničkami na diagonále, a teda pre ľubovoľné hodnoty parametrov $\theta_{i,j}$ splňuje vlastnosti korelačnej matice. Počet parametrov v tomto prípade bude už len $M \times (n - 1)$. V prípade, že $n = 2$ bude matice B vyzeráť nasledovne

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \cos \theta_M & \sin \theta_M \end{pmatrix}$$

a elementy korelační matice ρ^B budú tvaru

$$\rho_{i,j}^B = \cos(\theta_i - \theta_j), \quad (5.16)$$

a teda korelačná matica bude parametrizovaná M parametrami.

5.1.4 Ocenenie swapca pomocou LMM

Všeobecne je diskontovaná cenu swapca možné počítat ako strednú hodnotu výplaty

$$P(0, T_\alpha) E^\alpha \left[(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \right]. \quad (5.17)$$

Zo vzťahu (2.3) je vidieť, že swapová sadzba $S_{\alpha,\beta}$ závisí na zloženom rozdelení náhodných forwardových sadziieb

$$F_{\alpha+1}(T_\alpha), F_{\alpha+2}(T_\alpha), \dots, F_\beta(T_\alpha). \quad (5.18)$$

Preto bude pri oceňovaní swapcov zohrávať dôležitú úlohu korelácia medzi jednotlivými forwardovými sadzbami charakterizovaná v kapitole 5.1.3. Keďže cenu swapca nie je možné pomocou LMM explicitne vyjadriť použijeme na jeho oceňovanie metódu Monte Carlo, na základe ktorej je potrebné urobiť veľa simulácií forwardových sadzieb (5.18). Potom pre každú simuláciu spočítať diskontovaný výplatu swapca

$$P(0, T_\alpha)(S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i), \quad (5.19)$$

kde $S_{\alpha, \beta}$ je možné získať z rovnice (2.3).

Cena swapca je potom daná ako aritmetický priemer diskontovaných výplat napočítaných pomocou veľkého počtu simulácií.

Forwardové sadzby (5.18) je možné simulovať pomocou vzťahu (5.4). Túto rovnicu nie je možné analyticky vyriešiť, ale je možné odvodiť rekurentný vzťah pre jeho zdiskretizovanú formu. Použitím Itovho lemmatu dostaneme

$$d \ln F_k(t) = \sigma_k(t) \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\rho_{k,j} \tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} dt - \frac{\sigma_k(t)^2}{2} dt + \sigma_k(t) dZ_k(t). \quad (5.20)$$

Výhodou tohto vyjadrenia je, že jeho difúzny koeficient je deterministický. Voľbou malého Δt je možné dostať približný diskretizovaný tvar predchádzajúcej rovnice

$$\begin{aligned} \ln F_k(t + \Delta t) &= \ln F_k(t) + \sigma_k(t) \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\rho_{k,j} \tau_j \sigma_j(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} \Delta t - \\ &- \frac{\sigma_k(t)^2}{2} \Delta t + \sigma_k(t) (Z_k(t + \Delta t) - Z_k(t)), \end{aligned} \quad (5.21)$$

kde $(Z_k(t + \Delta t) - Z_k(t))$ má mnohorozmerné normálne rozdelenie $\sqrt{\Delta t} \mathcal{N}(0, \rho)$. Po úprave a aplikácii predpokladu (5.6) na tvar okamžitej volatility forwardových sadzieb je možné vyjadriť vzťah (5.21) v tvare

$$\begin{aligned} F_k(t + \Delta t) &= F_k(t) \exp \left[\sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\cos(\theta_k - \theta_j) \tau_j \Phi_j \Phi_k \psi_{j-\alpha} \psi_{k-\alpha}(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} \Delta t \right] \cdot \\ &\exp \left[-\frac{\Phi_k^2 \psi_{k-\alpha}^2}{2} \Delta t + \Phi_k \psi_{k-\alpha} \sqrt{\Delta t} \varepsilon_k \right], \end{aligned} \quad (5.22)$$

kde ε_k je k -ta zložka vektoru ε , ktorý má mnohorozmerné normálne rozdelenie $\mathcal{N}(0, \rho)$. Vzťah (5.22) popisuje zmenu forwardovej sadzby $F_k(t)$ v čase a je ho možné využiť na simuláciu forwardových sadzieb.

5.1.5 Kalibrácia LMM

Pred samotnou simuláciou, je potrebné zistiť hodnoty parametrov θ_i , ψ_i a Φ_i pre $i = 1, \dots, M$, kde M je doba na ktorú budeme chcieť simulovať vývoj forwardových sadzieb, tak, aby bol model čo najviac v súlade s trhom. Tomuto postupu sa hovorí kalibrácia modelu na trhové dáta.

Najskôr si upravíme vzťah (5.7) do tvaru

$$\Phi_i = \sqrt{\frac{v_{i\text{-caplet}}^2 T_i}{\sum_{j=1}^i (T_{j-1} - T_{j-2}) \psi_{i-j+1}^2}}, \quad (5.23)$$

pomocou ktorého získame z tržných capletových volatilit $v_{i\text{-caplet}}$ a známych parametrov ψ_i a θ_i pre $i = 1, \dots, M$.

Na kalibráciu použijeme Rebonatov vzťah (5.27) [1], str. 248 na výpočet swapcovej volatility swapca s podkladovým swapom začínajúcim v čase T_α a splatnom v čase T_β

$$(v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}})^2 = \frac{1}{T_\alpha} \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt, \quad (5.24)$$

kde swapová sadzba $S_{\alpha,\beta}$ bude daná lineárnou kombináciou forwardových sadzieb $F_i(t)$

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} w_i(t)F_i(t),$$

kde

$$\begin{aligned} w_i(t) &= w_i(F_{\alpha+1}(t), F_{\alpha+2}(t), \dots, F_\beta(t)) = \frac{\tau_i \text{FP}(t, T_\alpha, T_i)}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k \text{FP}(t, T_\alpha, T_k)} \\ &= \frac{\tau_i \prod_{j=\alpha+1}^i \frac{1}{1+\tau_j F_j(t)}}{\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \tau_k \prod_{j=\alpha+1}^k \frac{1}{1+\tau_j F_j(t)}}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Rebonatov vzťah (5.24) je približným vzťahom na určenie volatility z LMM.

Predpokladáme, že volatilita forwardovej sadzby je v tvare (5.6), preto môžeme integrál vo vzťahu (5.24) prepísať do tvaru

$$\int_0^{T_\alpha} \sigma_i(t)\sigma_j(t)dt = \int_0^{T_\alpha} \sigma_{i,\beta(t)}\sigma_{j,\beta(t)} = \Phi_i \Phi_j \sum_{h=0}^{\alpha} \psi_{i-h}\psi_{j-h}. \quad (5.26)$$

Ak dosadíme do Rebonatovho vzorca (5.24) vyššie uvedený zjednodušený tvar integrálu a namiesto korelačnej matice ρ dosadíme jej odhad ρ^B môžeme vzťah pre $(v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}})^2$ prepísať do tvaru

$$(v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}})^2 = \frac{1}{T_\alpha} \sum_{i,j=\alpha+1}^{\beta} \frac{w_i(0)w_j(0)F_i(0)F_j(0)\rho_{i,j}^B}{S_{\alpha,\beta}(0)^2} \Phi_i \Phi_j \sum_{h=0}^{\alpha} \psi_{i-h}\psi_{j-h}. \quad (5.27)$$

Tento vzťah je na kalibráciu vhodný hlavne preto, lebo obsahuje všetky dostupné vstupné parametre a jeho výstupom je druhá mocnina swapcovej volatility $v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}$. Takto spočítanú hodnotu swapcovej volatility je možné porovnať so swapcovou volatilitou získanou z trhu $v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}}$.

Princípom kalibrácie bude nastaviť vstupné parametre $\theta_1, \dots, \theta_M$ a ψ_1, \dots, ψ_M tak aby bola hodnota swapcovej volatility $v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}$ čo najbližšie k tržnej volatilitě $v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}}$ pre všetky možné dvojicen α, β . Pre tento účel využijeme súčet kvadrátov odchýliek

$$s^{\text{LMM}} = \sum_{\beta-\alpha>1} \left(v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}} - v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}} \right)^2, \quad (5.28)$$

ktorého minimalizáciou dosiahneme kalibráciu modelu na tržné dáta. Minimalizuje sa vzhľadom k parametrom θ_i a ψ_i . Pri určení minimálneho súčtu sme vynechali volatility swapcov s dĺžkou podkladového swapu 1 rok, lebo tieto volatility sú korelované s capletovými volatilitami.

Parametre ψ_i slúžia k určeniu okamžitých volatilit forwardových sadziieb podľa vzťahu (5.6). Keďže parametre Φ_i sú kladné, tak musia byť i všetky parametra ψ_i kladne, inak by bola výsledná volatilita záporná. Z tohto dôvodu si k súčtu s^{LMM} pridáme penalizačný člen

$$p_1 = Q \sum_{i=1}^M \max(-\psi_i, 0), \quad (5.29)$$

kde Q je nejaké veľké kladné číslo napr. 10^{10} .

Od korelačnej matice sa očakáva, že susedné forwardové miery budú kladne korelované, tj. $\rho_{i,i-1} > 0$. Chceme teda, aby platilo

$$-\pi/2 < \theta_i - \theta_{i-1} < \pi/2. \quad (5.30)$$

Preto k súčtu (5.28) pridáme ďalší penalizačný člen

$$p_2 = Q \sum_{i=2}^M \max(|\theta_i - \theta_{i-1}| - \pi/2, 0), \quad (5.31)$$

kde zvolíme $Q = 10^{10}$.

K overeniu správnosti kalibrácie je možné napočítať relatívnu chybu v percentách

$$\varepsilon_{\alpha,\beta} = 100 \frac{v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}} - v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}}{v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}}}. \quad (5.32)$$

Pri správnej kalibrácii by chyby mali byť v absolutnej hodnote malé, ideálne blízke 0.

5.2 Aplikácia LMM na tržných dátach

5.2.1 Kalibrácia LMM

LMM model budeme kalibrovať s využitím ročnej forwardovej krivky (obrázok 3.2), ročných implikovaných capletových volatilitách (obrázok 3.3) a implikovaných volatilitách swapca (obrázok 3.4 a tabuľka 3.3) k 30.6.2012.

Aby sme využili všetky dáta získane z trhu položíme $M = 29$. Pred počiatkom kalibrácie je potrebné zvoliť počiatočné hodnoty vstupných parametrov, napr. $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{29} = \pi/2$ a $\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_{29} = 1$.

Jeden kalibračný krok sa skladá z nasledujúcich bodov

- Zo zvolených hodnôt parametrov ψ_1, \dots, ψ_{29} a tržných capletových volatilit $v_{i,\text{caplet}}$ určíme pomocou vzťahu (5.23) parametre Φ_1, \dots, Φ_{29} .
- Pomocou vzťahu (5.27) určíme všetky možné swapcové volatility $v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}$, ktoré sú dostupné na trhu, okrem volatility swapca s podkladovým swapom dĺžky jeden rok.

Tabuľka 5.4: Hodnoty parametrov modelu LMM. Parametre θ a ψ sa získali kalibráciou. Parameter Φ sa získal pomocou vzťahu (5.23).

Index	θ	$\Phi[\%]$	ψ
1	-0.07	812.06	0.09
2	-0.10	973.48	0.04
3	0.13	845.27	0.05
4	0.31	653.40	0.07
5	0.43	534.57	0.08
6	0.73	473.62	0.09
7	1.05	385.91	0.13
8	1.30	297.08	0.18
9	1.49	220.57	0.24
10	1.57	164.83	0.31
11	1.71	133.77	0.40
12	1.90	110.00	0.49
13	2.04	89.26	0.64
14	1.96	72.14	0.82
15	1.91	58.12	1.05
16	1.91	46.74	1.35
17	1.92	37.55	1.73
18	1.92	30.12	2.22
19	1.92	24.14	2.85
20	1.92	19.32	3.65
21	1.92	15.45	4.67
22	1.92	12.34	5.99
23	1.92	9.84	7.68
24	1.92	7.83	9.88
25	1.92	6.24	12.64
26	1.92	4.96	16.21
27	1.92	3.94	20.86
28	1.92	3.12	26.91
29	1.92	2.52	32.78

- Z tržných swapcových volatilit $v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}}$ i napočítaných hodnôt swapcových volatilit $v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}$ vypočítame pomocou vzťahu (5.28) súčet s^{LMM} , ku ktorému pripočítame penalizačné členy (5.29) a (5.31).

Celá kalibrácia spočíva v opakovaní vyššie opísaného kalibračného kroku až po dobu kým nebude s^{LMM} najmenšie možné s ohľadom k parametrom $\theta_1, \dots, \theta_{29}$ a ψ_1, \dots, ψ_{29} .

Pri určení minimálneho s^{LMM} boli v softvare R využívané minimalizačné metódy Nelder-Mead [6] a BFGS [7] obsiahnutú vo funkcii *optim* z balíčka *stats* s rôznymi hodnotami vstupných parametrov.

Pre veľké množstvo optimalizovaných parametrov (až 58), boli najskôr zistené optimálne hodnoty parametrov potrebných k simulácii forwardovej krivky pre prvých desať rokov, tj. $\theta_1, \dots, \theta_{10}, \psi_1, \dots, \psi_{10}$. Tieto hodnoty boli následne použité ako počiatočné hodnoty prvých 20 parametrov pri hľadaní parametrov potrebných k simulácii forwardovej krovky na 29 rokov. Ostatných 38 počiatočných hodnôt bolo volených ľubovoľne. Je potrebné zdôrazniť, že výsledok minimalizácie závisí na voľbe počiatočných hodnôt parametrov.

Pri takom vysokom počte optimalizovaných parametrov je pomerne zložitá nájsť minimálnu hodnotu súčtu s^{LMM} . K najlepšiemu výsledku, minimálnej hodnote $s^{\text{LMM}} + p_1 + p_2 = 67.2$ a hodnotám optimalizovaných parametrov zobrazených v tabuľke 5.4, viedla minimalizačná metóda BFGS. Tento výsledok bol dosiahnutý pri počiatočných hodnotách parametrov $\psi_i = 2$ a parametre θ_i boli zvolené náhodne z rovnomerného rozdelenia na intervale $(0, \pi/2)$ pre $i = 1, \dots, 29$.

V tabuľky 5.4 je vidieť, že všetky nájdené parametre ψ_i sú tak, ako sme chceli,

Tabuľka 5.5: Relatívne odchýlky (v percentách) kalibrovaných swapových volatilit od tržných volatilit spočítané pomocou vzťahu (5.32).

Maturita swapca	Tenor podkladového swapu								
	2R	3R	4R	5R	6R	7R	8R	9R	10R
1R	0.44	0.69	1.06	0.96	0.38	-0.55	-1.08	-0.44	-0.67
2R	-1.11	-0.17	-1.59	-0.07	-0.07	0.56	0.81	0.88	0.82
3R	-0.47	-0.98	-1.18	0.05	0.52	0.82	0.26	-0.01	-0.05
4R	-0.44	-0.72	-0.51	0.68	0.79	0.27	-0.33	-0.45	-0.37
5R	0.26	0.01	0.11	0.05	-0.26	-0.82	-0.93	-0.53	-1.27
6R	-0.42	-0.17	0.36	0.55	0.08	0.07	0.20	-0.50	-1.25
7R	-0.56	-0.07	0.76	0.62	0.60	0.72	-0.06	-0.51	-1.11
8R	0.05	1.07	1.08	1.34	1.51	0.81	0.50	0.39	-0.01
9R	1.39	0.83	0.92	1.37	0.91	0.77	0.94	1.23	1.06
10R	-0.71	-1.25	-1.12	-1.04	-0.57	-0.13	0.66	1.43	1.54
11R	-0.34	-1.10	-1.75	-1.13	-0.56	-0.01	0.89	1.77	2.06
12R	-0.75	-1.98	-1.95	-1.22	-0.54	0.11	1.11	2.15	2.52
13R	-0.85	-1.49	-1.49	-0.75	-0.03	0.68	1.80	2.89	3.30
14R	-0.60	-1.38	-1.38	-0.59	0.19	1.03	2.21	3.34	3.81
15R	-0.76	-1.53	-1.46	-0.60	0.33	1.22	2.45	3.64	4.16
16R	-0.69	-1.36	-1.21	-0.21	0.77	1.72	2.99	4.23	4.79
17R	-0.61	-1.21	-0.92	0.13	1.15	2.15	3.46	4.74	5.35
18R	-0.55	-1.02	-0.69	0.40	1.47	2.51	3.87	5.19	5.83
19R	-0.44	-0.88	-0.51	0.63	1.74	2.82	4.22	5.58	6.25
20R	-0.42	-0.81	-0.38	0.80	1.95	3.08	4.52	5.90	6.62
21R	-0.36	-0.70	-0.23	1.00	2.20	3.37	4.84	6.26	NA
22R	-0.31	-0.60	-0.08	1.19	2.43	3.63	5.13	NA	NA
23R	-0.27	-0.51	0.05	1.36	2.63	3.87	NA	NA	NA
24R	-0.22	-0.42	0.18	1.52	2.83	NA	NA	NA	NA
25R	-0.18	-0.34	0.29	1.67	NA	NA	NA	NA	NA
26R	-0.15	-0.27	0.40	NA	NA	NA	NA	NA	NA
27R	-0.11	-0.20	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
28R	-0.07	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

kladné a parametre θ_i spĺňujú podmienku (5.30).

Chyby zobrazené v tabuľke 5.5 sú vzhľadom k počtu fitovaných parametrov relatívne malé, najväčšia chyba dosahuje hodnotu 6.62%. To nasvedčuje tomu, že minimalizácia prebehla úspešne.

V tabuľkách 5.6 a 5.7 sú znázornené korelácie medzi jednotlivými forwardovými sadzbami. U niektorých dvojíc sadzieb sme dostali zápornú koreláciu. Očakáva sa, že hodnoty korelácie medzi susednými sadzbami budú kladné a blízke jedničke, čo je vo väčšine prípadoch splnené. Tým sa potvrdila správna voľba hodnoty parametra $\rho = 1$ v kapitole 3, ktorý sme využili pri určení ročnej capletovej volatility a popisoval koreláciu medzi dvoma susednými forwardovými sadzbami. Od určitého indexu sa korelácie medzi sadzbami stavajú konštantné a od istého času sú korelácie rovné jedničke, čo je možné vysvetliť malými hodnotami okamžitej volatility týchto forwardových sadzieb.

Hodnoty okamžitých volatilit forwardových sadzieb z tabuľky 5.3 sú pri známych hodnotách parametrov Φ_i a ψ_i zobrazené v tabuľkách 5.8 a 5.9. Je vidieť, že pre každú $F_k(t)$ nastalo to, že že volatilita v čase $(T_{k-2}, T_{k-1}]$ je väčšia ako v predchádzajúcich časoch. Zanedbaním týchto posledných časových okamžikov volatilita forwardových sadzieb vždy klesá.

Je ťažké posúdiť či sa kalibrácia podarila. Napriek veľkému počtu parametrov je nájdené minimum pre $sLMM+p_1+p_2$ pomerne malé čo svedčí o pomerne dobrej zhode medzi nájdenými a trhovými volatilitami. Neprirodzený nárast okamžitých volatilit v posledných časových intervaloch a jednotkové korelácie medzi F_{12} až F_{29} správnosť kalibrácie mierne spochybňujú.

Tabuľka 5.6: Vzájomná korelácia forwardových sadzieb.

$F_1(t)$	1.00	$F_2(t)$	1.00	$F_3(t)$	0.98	$F_4(t)$	0.93	$F_5(t)$	0.88	$F_6(t)$	0.69	$F_7(t)$	0.43	$F_8(t)$	0.19	$F_9(t)$	0.01	$F_{10}(t)$	-0.07	$F_{11}(t)$	-0.21	$F_{12}(t)$	-0.40	$F_{13}(t)$	-0.51	$F_{14}(t)$	-0.44
$F_2(t)$	1.00	1.00	0.97	0.92	0.86	0.68	0.41	0.17	-0.02	-0.10	-0.24	-0.42	-0.54	-0.47													
$F_3(t)$	0.98	0.97	1.00	0.98	0.95	0.82	0.60	0.38	0.21	0.13	-0.01	-0.21	-0.33	-0.26													
$F_4(t)$	0.93	0.92	0.98	1.00	0.99	0.91	0.74	0.55	0.38	0.31	0.17	-0.02	-0.15	-0.08													
$F_5(t)$	0.88	0.86	0.95	0.99	1.00	0.96	0.81	0.64	0.49	0.42	0.29	0.10	-0.03	0.04													
$F_6(t)$	0.69	0.68	0.82	0.91	0.96	1.00	0.95	0.84	0.73	0.67	0.56	0.39	0.26	0.34													
$F_7(t)$	0.43	0.41	0.60	0.74	0.81	0.95	1.00	0.97	0.91	0.87	0.79	0.66	0.55	0.62													
$F_8(t)$	0.19	0.17	0.38	0.55	0.64	0.84	0.97	1.00	0.98	0.96	0.92	0.82	0.74	0.79													
$F_9(t)$	0.01	-0.02	0.21	0.38	0.49	0.73	0.91	0.98	1.00	1.00	0.98	0.91	0.85	0.89													
$F_{10}(t)$	-0.07	-0.10	0.13	0.31	0.42	0.67	0.87	0.96	1.00	1.00	0.99	0.94	0.89	0.93													
$F_{11}(t)$	-0.21	-0.24	-0.01	0.17	0.29	0.56	0.79	0.92	0.98	0.99	1.00	0.98	0.95	0.97													
$F_{12}(t)$	-0.40	-0.42	-0.21	-0.02	0.10	0.39	0.66	0.82	0.91	0.98	1.00	0.99	1.00	1.00													
$F_{13}(t)$	-0.51	-0.54	-0.33	-0.15	-0.03	0.26	0.55	0.74	0.85	0.89	0.95	0.99	1.00	1.00													
$F_{14}(t)$	-0.44	-0.47	-0.26	-0.08	0.04	0.34	0.62	0.79	0.89	0.93	0.97	1.00	1.00	1.00													
$F_{15}(t)$	-0.40	-0.42	-0.21	-0.03	0.09	0.38	0.66	0.82	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{16}(t)$	-0.40	-0.43	-0.21	-0.03	0.09	0.38	0.65	0.82	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{17}(t)$	-0.41	-0.43	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.65	0.82	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{18}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{19}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{20}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{21}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{22}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{23}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{24}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{25}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{26}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{27}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{28}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													
$F_{29}(t)$	-0.41	-0.44	-0.22	-0.04	0.08	0.37	0.64	0.81	0.91	0.94	0.98	1.00	1.00	1.00													

Tabuľka 5.7: Pokračovanie tabuľky 5.6 s vzájomnými koreláciami forwardových sadziieb.

	$F_{15}(t)$	$F_{16}(t)$	$F_{17}(t)$	$F_{18}(t)$	$F_{19}(t)$	$F_{20}(t)$	$F_{21}(t)$	$F_{22}(t)$	$F_{23}(t)$	$F_{24}(t)$	$F_{25}(t)$	$F_{26}(t)$	$F_{27}(t)$	$F_{28}(t)$	$F_{29}(t)$
$F_1(t)$	-0.40	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41	-0.41
$F_2(t)$	-0.42	-0.43	-0.43	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44	-0.44
$F_3(t)$	-0.21	-0.21	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22	-0.22
$F_4(t)$	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04	-0.04
$F_5(t)$	0.09	0.09	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
$F_6(t)$	0.38	0.38	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37
$F_7(t)$	0.66	0.65	0.65	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64	0.64
$F_8(t)$	0.82	0.82	0.82	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81
$F_9(t)$	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91	0.91
$F_{10}(t)$	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94	0.94
$F_{11}(t)$	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
$F_{12}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{13}(t)$	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
$F_{14}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{15}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{16}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{17}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{18}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{19}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{20}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{21}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{22}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{23}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{24}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{25}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{26}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{27}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{28}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$F_{29}(t)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabuľka 5.8: Okamžité volatility forwardových sadziieb v percentách získané dosadením parametrov ψ a Φ do tabuľky (5.3).

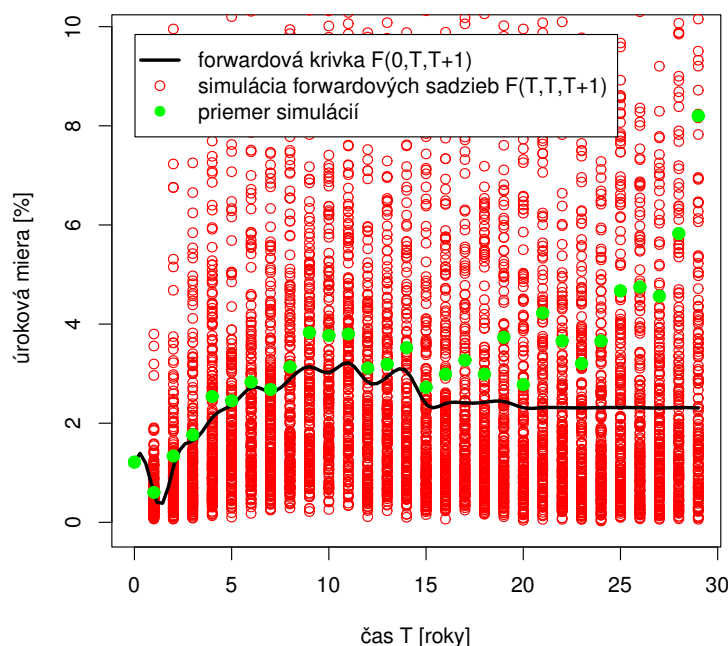
Fwd. s.	$(0, T_0)$	(T_0, T_1)	(T_1, T_2)	(T_2, T_3)	(T_3, T_4)	(T_4, T_5)	(T_5, T_6)	(T_6, T_7)	(T_7, T_8)	(T_8, T_9)	(T_9, T_{10})	(T_{10}, T_{11})	(T_{11}, T_{12})	(T_{12}, T_{13})
$F_1(t)$	71.2	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_2(t)$	38.5	85.4	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_3(t)$	43.8	33.4	74.1	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_4(t)$	45.1	33.8	25.8	57.3	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_5(t)$	45.2	36.9	27.7	21.1	46.9	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_6(t)$	42.7	40.0	32.7	24.5	18.7	41.5	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_7(t)$	50.1	34.8	32.6	26.6	20.0	15.2	33.8	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_8(t)$	53.2	38.6	26.8	25.1	20.5	15.4	11.7	26.0	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_9(t)$	53.7	39.5	28.6	19.9	18.6	15.2	11.4	8.7	19.3	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{10}(t)$	50.4	40.2	29.5	21.4	14.9	13.9	11.4	8.5	6.5	14.5	NA	NA	NA	NA
$F_{11}(t)$	52.9	40.9	32.6	24.0	17.4	12.1	11.3	9.2	6.9	5.3	11.7	NA	NA	NA
$F_{12}(t)$	53.8	43.5	33.6	26.8	19.7	14.3	9.9	9.3	7.6	5.7	4.3	9.6	NA	NA
$F_{13}(t)$	56.9	43.7	35.3	27.3	21.7	16.0	11.6	8.0	7.5	6.2	4.6	3.5	7.8	NA
$F_{14}(t)$	59.1	46.0	35.3	28.6	22.1	17.6	12.9	9.4	6.5	6.1	5.0	3.7	2.9	6.3
$F_{15}(t)$	61.3	47.6	37.1	28.4	23.0	17.8	14.2	10.4	7.5	5.2	4.9	4.0	3.0	2.3
$F_{16}(t)$	63.2	49.3	38.3	29.8	22.9	18.5	14.3	11.4	8.4	6.1	4.2	3.9	3.2	2.4
$F_{17}(t)$	65.1	50.8	39.6	30.8	23.9	18.4	14.9	11.5	9.1	6.7	4.9	3.4	3.2	2.6
$F_{18}(t)$	67.0	52.2	40.8	31.8	24.7	19.2	14.7	11.9	9.2	7.3	5.4	3.9	2.7	2.5
$F_{19}(t)$	68.7	53.6	41.9	32.7	25.5	19.8	15.4	11.8	9.6	7.4	5.9	4.3	3.1	2.2
$F_{20}(t)$	70.5	55.0	42.9	33.5	26.1	20.4	15.8	12.3	9.5	7.6	5.9	4.7	3.5	2.5
$F_{21}(t)$	72.2	56.4	44.0	34.3	26.8	20.9	16.3	12.7	9.8	7.6	6.1	4.7	3.8	2.8
$F_{22}(t)$	73.9	57.7	45.0	35.2	27.4	21.4	16.7	13.0	10.1	7.9	6.0	4.9	3.8	3.0
$F_{23}(t)$	75.6	58.9	46.0	35.9	28.0	21.9	17.1	13.3	10.4	8.1	6.3	4.8	3.9	3.0
$F_{24}(t)$	77.4	60.2	46.9	36.6	28.6	22.3	17.4	13.6	10.6	8.3	6.4	5.0	3.8	3.1
$F_{25}(t)$	78.8	61.6	47.9	37.3	29.2	22.8	17.8	13.9	10.8	8.4	6.6	5.1	4.0	3.1
$F_{26}(t)$	80.4	62.7	49.0	38.1	29.7	23.2	18.1	14.1	11.0	8.6	6.7	5.2	4.1	3.2
$F_{27}(t)$	82.1	63.8	49.8	38.9	30.3	23.6	18.4	14.4	11.2	8.7	6.8	5.3	4.2	3.2
$F_{28}(t)$	83.9	65.0	50.5	39.4	30.8	24.0	18.7	14.6	11.4	8.9	6.9	5.4	4.2	3.3
$F_{29}(t)$	82.5	67.7	52.5	40.8	31.8	24.9	19.3	15.1	11.8	9.2	7.2	5.6	4.4	3.4

Tabuľka 5.9: Pokračovanie tabuľky 5.8 . Okamžitá volatility forwardových sadziieb $F_1(t)$ až $F_{14}(t)$ sú vynechané, lebo tieto forwardové sadzby v zobrazených časových intervaloch neexistujú.

Fwd. s.	$\langle T_{13}, T_{14} \rangle$	$\langle T_{14}, T_{15} \rangle$	$\langle T_{15}, T_{16} \rangle$	$\langle T_{16}, T_{17} \rangle$	$\langle T_{17}, T_{18} \rangle$	$\langle T_{18}, T_{19} \rangle$	$\langle T_{19}, T_{20} \rangle$	$\langle T_{20}, T_{21} \rangle$	$\langle T_{21}, T_{22} \rangle$	$\langle T_{22}, T_{23} \rangle$	$\langle T_{23}, T_{24} \rangle$	$\langle T_{24}, T_{25} \rangle$	$\langle T_{25}, T_{26} \rangle$	$\langle T_{26}, T_{27} \rangle$	$\langle T_{27}, T_{28} \rangle$
$F_{15}(t)$	5.1	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{16}(t)$	1.8	4.1	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{17}(t)$	1.9	1.5	3.3	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{18}(t)$	2.1	1.6	1.2	2.6	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{19}(t)$	2.0	1.7	1.2	1.0	2.1	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{20}(t)$	1.7	1.6	1.3	1.0	0.8	1.7	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{21}(t)$	2.0	1.4	1.3	1.1	0.8	0.6	1.4	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{22}(t)$	2.2	1.6	1.1	1.0	0.9	0.6	0.5	1.1	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{23}(t)$	2.4	1.8	1.3	0.9	0.8	0.7	0.5	0.4	0.9	NA	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{24}(t)$	2.4	1.9	1.4	1.0	0.7	0.7	0.5	0.4	0.3	0.7	NA	NA	NA	NA	NA
$F_{25}(t)$	2.5	1.9	1.5	1.1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.5	NA	NA	NA	NA
$F_{26}(t)$	2.4	2.0	1.5	1.2	0.9	0.6	0.4	0.4	0.3	0.2	0.2	NA	NA	NA	NA
$F_{27}(t)$	2.5	1.9	1.6	1.2	1.0	0.7	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.3	NA	NA
$F_{28}(t)$	2.6	2.0	1.5	1.2	1.0	0.8	0.6	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	0.3	NA
$F_{29}(t)$	2.7	2.1	1.6	1.2	1.0	0.8	0.6	0.5	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	0.1	0.2

5.2.2 Určenie ceny swapca

Na rozdiel od HW modelu, ktorý modeluje okamžitú úrokovú sadzbu je LMM založený na modelovaní forwardovej sadzby. Tento model predpokladá, že forwardová sadzba $F_k(t)$ v čase $t < T_{k-1}$ na obdobie medzi T_{k-1} a T_k sa vyvíja podľa Brownovho pohybu vzťahom (5.4).



Obr. 5.1: Forwardová krivka z trhu, 200 simulácií forwardovej sadzby určenej k oceňovaniu swapca a ich aritmetický priemer. Simulácie forwardovej sadzby sú získané pomocou vzťahu (5.22)

Na obrázku 5.1 je znázornená forwardová krivka $F(0, T, T + 1)$ z trhu v čase 0 v porovnaní so simuláciami krivky $F(T, T, T + 1) = L(T, T + 1)$ získanej pomocou vzťahu (5.22). Pomocou vzťahu (5.22) sme simulovali množinu forwardových sadzieb $\{F_1(t), F_2(t), \dots, F_{29}(t)\}$ pre všetky dostupné časy t , pričom za Δt sme zvolili 1 mesiac. Môže byť zaujímavé pozorovať forwardové sadzby v budúcom čase T a čase 0, ako je to na obrázku 5.1.

Všimnime si že simulácie sa pohybujú v okolí forwardovej krivky, ale aritmetický priemer simulácií $L(T, T + 1)$ nie je zhodný s forwardovou krivkou získanou z trhu $F^M(0, T, T + 1)$ a s pribúdajúcim časom sa od nej čoraz viac vzdáľuje. Toto chovanie sa dá očakávať už zo samotného vzťahu (5.22) a hodnôt minimalizovaných parametrov. Pri normalite dat a 200 simuláciach už môžeme aritmetický priemer simulácií forwardovej krivky prehlásiť za dostatočne vierohodný odhad jej strednej hodnoty. Ak by mal byť priemer simulácií na forwardovej krivke, musela by byť stredná hodnota výrazu $\exp[\dots]$ vo vzťahu (5.22) rovná jednej. Pozrime sa preto na tento vzťah bližšie.

Rozdeľme si hranatú zátvorku zo vzťahu (5.22) na dve časti a označme

$$A = \sum_{j=\alpha+1}^k \frac{\cos(\theta_k - \theta_j) \tau_j \Phi_j \Phi_k \psi_{j-\alpha} \psi_{k-\alpha}(t) F_j(t)}{1 + \tau_j F_j(t)} \Delta t - \frac{\Phi_k^2 \psi_{k-\alpha}^2}{2} \Delta t, \quad (5.33)$$

$$B = \Phi_k \psi_{k-\alpha} \sqrt{\Delta t}. \quad (5.34)$$

Vzťah (5.22) môžeme prepísať do tvaru

$$\frac{F_k(t + \Delta t)}{F_k(t)} = e^A e^{B\varepsilon}, \quad (5.35)$$

kde A a B sú deterministické veličiny a $\varepsilon \sim N(0, 1)$, ktorý znázorňuje zmenu forwardovej sadzby $F_k(t)$ za čas Δt . Preto bude stredná hodnota forwardovej sadzby vyzeráť nasledovne

$$EF_k(t + \Delta t) = F_k(t) e^A Ee^{B\varepsilon} = F_k(t) e^A e^{B^2/2}. \quad (5.36)$$

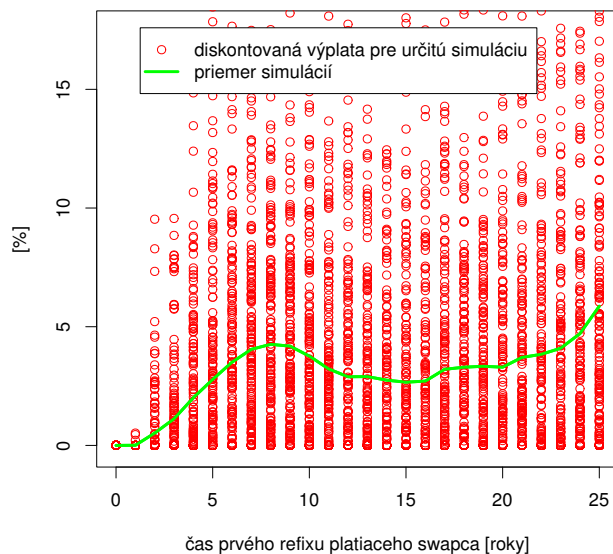
Posledná rovnosť zo vzťahu (5.36) platí preto, lebo ak $\varepsilon \sim N(0, 1)$, potom $e^{B\varepsilon} \sim LN(e^{B^2/2}, (e^{B^2} - 1)e^{B^2/2})$. Výraz $e^A e^{B^2/2}$ nemusí byť rovný 1 a preto ani stredná hodnota forwardových sadziieb nemusí byť rovná forwardovej sadzbe z trhu.

Táto technika umožňuje generovať len po sebe nasledujúce ročné forwardové sadzby $F(t, T, T + 1)$ pre $T \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

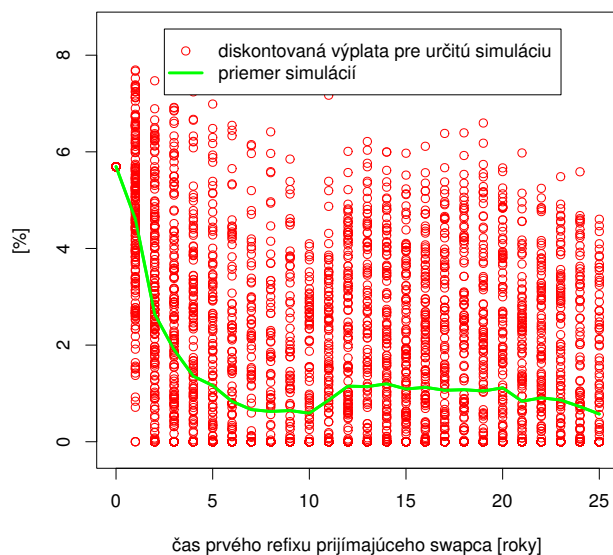
Metódou Monte Carlo z kapitoly 5.1.4 oceníme swapec na podkladový swap na dobu 5 rokov pri realizačnej sadzbe stanovenej na $K = 2.5\%$.

Pomocou vzťahu (5.22) nasimulujeme 200 simulácií forwardovej krivky. Zo simulovanej forwardovej sadzby spočítame pomocou vzorca (2.3) swapovú sadzu. Tú následne dosadíme do vzťahu (5.19) a určíme diskontovanú výplatu swapca pre každú simuláciu množiny forwardových sadziieb zvlášť.

Na obrázkoch 5.2 a 5.3 sú znázornené diskontované výplaty platiaceho a prijímajúceho swapca pre všetkých 200 simulácií forwardových kriviek a ich aritmetický priemer. Vysoká volatilita spôsobila vysokú variabilitu sadziieb a to má za dôsledok veľkú variabilitu diskontovaných výplat. Aritmetický priemer diskontovaných výplat dáva pomerne rozumné hodnoty. U platiaceho i prijímajúceho swapca sa priemerná hodnota diskontovaných výplat pohybuje v intervale od 0% do 6%. Na intervaloch, kde u platiaceho swapca diskontovaná výplata rastie, tam u prijímajúceho klesá a naopak. Toto chovanie sa dá očakávať, pretože tieto dva kontrakty sú dve strany jedného obchodu.



Obr. 5.2: Diskontované výplaty platiaceho swapca na swap s dĺžkou 5 rokov, realizačnou sadzbu 2.5% v závislosti na jeho maturite. Diskontované výplaty sú určené z 200 simulovaných množín forwardových sadzieb. Zelenými bodmi je znázornený aritmetický priemer diskontovaných výplat.



Obr. 5.3: Diskontované výplaty prijímajúceho swapca na swap s dĺžkou 5 rokov, realizačnou sadzbu 2.5% v závislosti na jeho maturite. Diskontované výplaty sú určené z 200 simulovaných množín forwardových sadzieb. Zelenými bodmi je znázornený aritmetický priemer diskontovaných výplat.

6. Porovnanie oceňovania pomocou HW a LMM modelu

V tejto kapitole porovnáme predstavené metódy oceňovania na rôznych úrokových derivátoch.

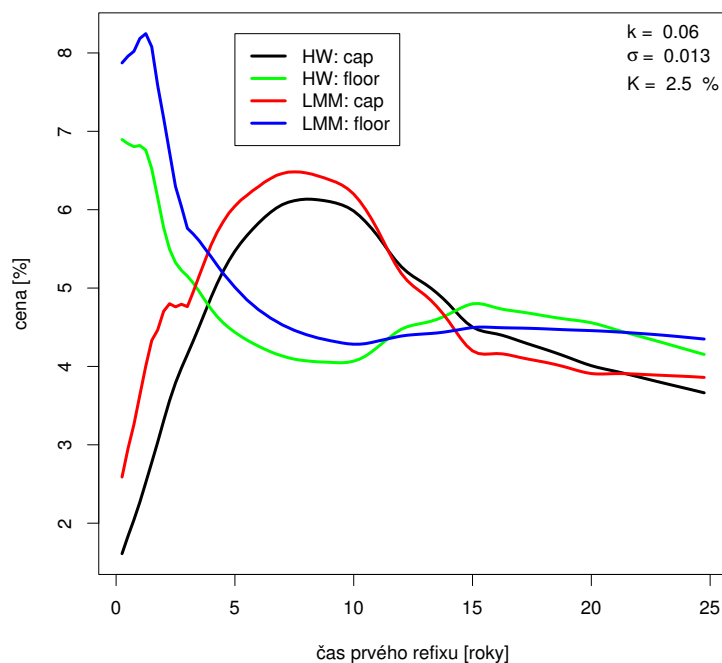
6.1 Porovnanie cien capu a flooru

V kapitole 5.1.2 je ukázané, že cena capu, a podobne aj flooru, napočítana pomocou LMM bude zhodná s cenou z Blackovej formuly. Preto sú na obrázku 6.1 znázornené len ceny capov a floorov získané z HW modelu pomocou vzťahov (4.17) a (4.19) a z LMM modelu pomocou vzťahov (5.14) a jeho ekvivalentu pre floor.

Oceníme capy a floory na dobu 5 rokov a realizačnú sadzbu 2.5% s rôznymi dobami do uplatnenia. Cenu budeme udávať v percentách z hodnoty podkladového aktíva.

Je vidieť, že ceny capu a flooru získané pomocou HW modelu a LMM majú podobný tvar. Rozdiel medzi nimi je síce pri kratšej dobe prvého refixu väčší miestami vyšší než 1%, no so zväčšujúcou sa dobou do prvého refixu sa rozdiel stáva malý miestami zanedbateľný.

Dobrá zhoda medzi zobrazovanými technikami ocenenia sa dala očakávať. Dôvodom je, že HW model bol kalibrovaný na tržné dáta pomocou cien capletov a floorletov získaných z Blackovej formuly na ocenenie capu a flooru zloženého len z jedného capletu a floorletu. Rozdiel medzi cenou capu a flooru z HW modelu a cenou z Blackovej formuly z obrázka 4.8 sa rovná súčtu rozdielov cien capletu a floorletu spočítaných týmito dvoma spôsobmi a znázornených na obrázku 4.8.



Obr. 6.1: Porovnanie cien capu a flooru na dobu 5 rokov pomocou HW modelu a LMM vyjadrených v percentách z hodnoty podkladového aktíva určených v závislosti na dobe prvého refixu.

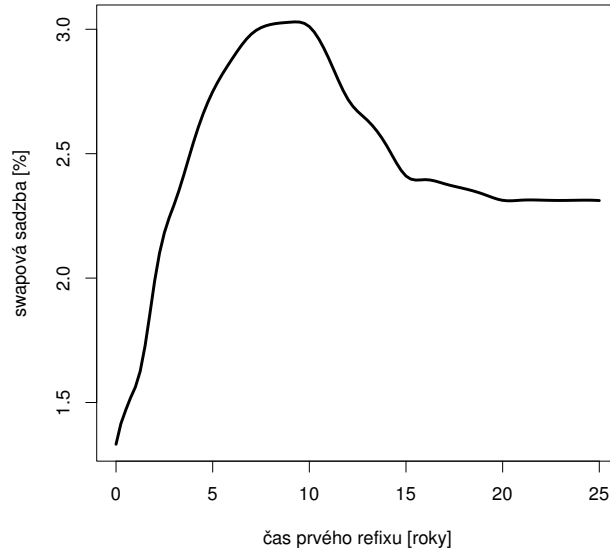
6.2 Porovnanie cien swapca

Na obrázkoch 6.3 a 6.4 sú znázornené ceny platiaceho a prijímajúceho swapca získané pomocou Blackovej formuly, HW modelu a LMM. Cenu swapca sme z HW modelu získali pomocou vzťahov (4.22) a (4.23). Predtým bolo potrebné zistiť r^* ako koreň rovnice (4.21). Táto rovnica má určite 1 koreň, pretože funkcia na jej ľavej strane je klesajúca. Na riešenie rovnice (4.21) je v softvare R možné využiť funkciu *nleqslv* z balíčka *nleqslv*.

Je zrejmé, že pri ocenení platiaceho swapca i prijímajúceho swapca sme už nedospeli k takej zhode cien získaných rôznymi modelmi, ako tomu bolo u capu a flooru.

Ceny swapca sú počítané pri realizačnej sadzbe 2.5%. Ak sa pozrieme na swapovú sadzbu pre 5 ročný swap (obrázok 6.2) spočítanú z trhovej forwardovej krivky vidíme že hodnota 2.5% nastáva približne v čase 4 roky. Pri pohľade na porovnaniam cien na obrázkoch 6.3 a 6.4 si môžeme všimnúť, že cena platiaceho swapca sa približne rovná cene prijímajúceho swapca s maturitou 4 roky na podkladový swap s dĺžkou 5 rokov a to pre všetky tri spôsoby ocenenia. U Blackovej formuly a HW modelu je táto zhoda daná priamo tvarom vzťahov pomocou ktorých swapce oceňujeme. U Blackovej formuly to sú vzťahy (2.11) a (2.12) a u HW modelu vzťahy (4.17) a (4.19).

Keď sa zameriame na porovnanie ceny z Blackovej formuly a HW modelu vidíme, že tvar týchto kriviek je dosť podobný, no ich rozdiel je väčší než rozdiel cien capu (flooru) určený rovnakými metódami na obrázku 6.1. Dôvod tejto nez-

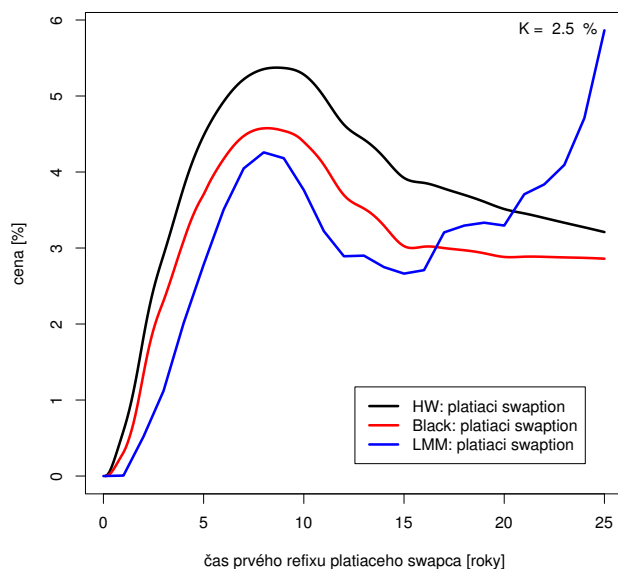


Obr. 6.2: Swapová sadzba pre swap na dobu 5 rokov v závislosti na čase prvého refixu. Sadzba bola určená pomocou vzťahu (2.3) z tržnej forwardovej sadzby.

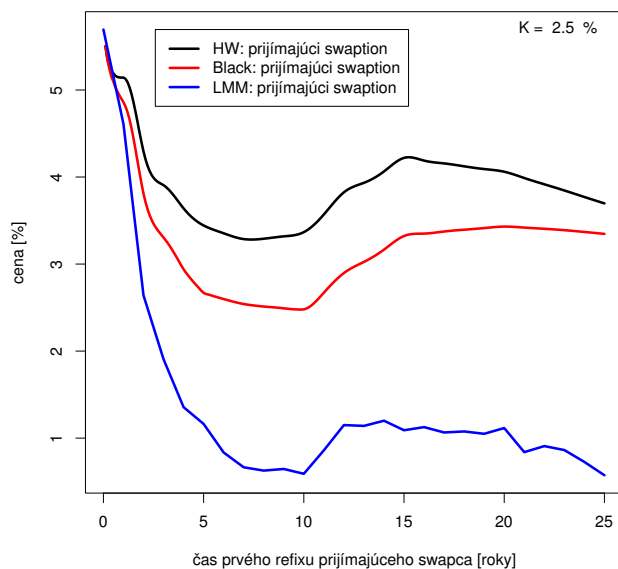
hody je v tom, že pri kalibrácii HW modelu na tržné dáta neboli využívané ceny swapca, ale len ceny capu a flooru.

Pri pohľade na ceny swapov získané z LMM je badať určité odlišnosti od cien swapu z HW modelu a Blackovej formuly (obrázok 6.3 a 6.4). Pre swapce s tenorom do 15 rokov je cena platiaceho swapca určená pomocou LMM podobná cene z Blackovej formuly. Medzi cenami prijímajúceho swapca s tenormi v tomto období, je už väčší rozdiel, no tvar kriviek zostáva podobný.

Cena swapca nebola počítaná pomocou explicitného vzorca, lebo takýto vzorec pre swapce u LMM modelu neexistuje. K určení ceny bolo treba LMM kalibrovať na tržné implikované swapcové a capletové volatility, ktoré majú za súčasnej situácie na trhu pomerne vysoké hodnoty. Tento fakt ovplyvnil cenu platiaceho swapca (obrázok 6.3) tak, že pri swapcoch s tenorom nad 15 rokov cena oproti zostávajúcim dvom modelom prudko vzrastá a naopak, cena prijímajúceho swapca na obrázku 6.4 je veľmi nízka. Toto chovanie môžeme odôvodniť tým, že zatiaľ čo HW model pracuje s konštantnou volatilitou u LMM hodnota okamžitej volatility forwardových sadzieb závisí na čase, pričom je spočiatku vysoká a s pribúdajúcim časom klesá.



Obr. 6.3: Porovnanie ceny platiaceho swapca na dobu 5 rokov, pri realizačnej sadzbe 2.5% určenej pomocou Blackovej formuly, HW modelu a LMM, vyjadrených v percentách z hodnoty podkladového aktíva v závislosti na čase prvého refixu. U LMM sú spočítané iba body pre časy 0, 1, 2, ... roky, a následne spojené úsečkami.



Obr. 6.4: Porovnanie ceny prijímajúceho swapca na dobu 5 rokov, s realizačnou sadzbou 2.5% určenej pomocou Blackovej formuly, HW modelu a LMM, vyjadrených v percentách z hodnoty podkladového aktíva v závislosti na čase prvého refixu. U LMM sú spočítané iba body pre časy 0, 1, 2, ... roky, a následne spojené úsečkami.

Záver

Úrokové deriváty nachádzajú v dnešnej dobe tri spôsoby využitia a to zaistenie rizika, špekulácia a cenová arbitráž. V každej z týchto oblastí zohráva ocenenie derivátov významnú úlohu pri ďalšom rozhodovaní. V tejto práci sme si predstavili tri rôzne spôsoby ocenenia finančných derivátov Blackovu formulu, Hull Whiteov model a LIBOR tržný model.

Blackova formula sa už desaťročia využíva na oceňovanie nielen úrokových derivátov. Jej výhodou je, že pozostáva z pomerne jednoduchého vzorca, ktorý k svojmu prevedeniu nepotrebuje zložité systémy a dlhé hodiny výpočtov. V praxi ale často nefunguje. Dôvodom je malé zohľadnenie aktuálnej situácie na trhu a predpoklad o konštantnej volatilitate.

Hull-Whiteov model vychádza z aktuálneho tvaru forwardovej krivky, čím zohľadňuje situáciu na trhu. Pracuje však s konštantnou hodnotou absolutnej volatility úrokovej sadzby. Nevýhodou je, že okamžitá úroková sadzba $r(t)$ generovaná týmto modelom má normálne rozdelenie. Preto existuje pravdepodobnosť, že simulované sadzby budú záporné. Takéto sadzby, ale na finančnom trhu, nemajú žiaden význam. Napriek tomu sa pri oceňovaní capu, flooru a swapcov dosiahol dobrý súhlas s Blackovou formulou.

LIBOR tržný model, je pomerne mladý nástroj na simulovanie budúceho vývoja forwardovej sadzby a oceňovanie derivátov. Jeho vstupom je spotová krivka a model dobre zohľadňuje implikované trhové volatility. Z tohto dôvodu je dobre prispôsobený aktuálnym trhovým podmienkam.

My sme pomocou tohto modelu oceňovali capy, floory a swapce, lebo sme chceli výsledok z tohto modelu porovnať s inými metódami oceňovania. V skutočnosti sa capletová a swapcová volatilita využíva len na kalibráciu modelu. Keď už sú hodnoty parametrov modelu v súlade s trhom, nasimuluje sa budúci vývoj forwardovej sadzby. Tá má bohaté využitie najmä pri oceňovaní exotických finančných derivátov. Pre tieto finančné inštrumenty neexistujú explicitné vzorce na určenie ceny. Ich cenu je preto potrebné získať metódou Monte Carlo.

LIBOR tržný model umožňuje generovať len ročné forwardové sadzby. Ďalším predmetom skúmania by mohla byť technika Brownovho premostenia, ktorá umožňuje z ročných sadziieb získať sadzby i na kratšie časové obdobie.

Pri nejstej trhovej situácii, keď sú implikované volatility forwardových sadziieb vysoké, môže nastať, že simulácie forwardovej sadzby budú mať veľký rozptyl. To nastalo aj v našom prípade pri oceňovaní swapca. V takejto situácii je na zvážení obchodníka, či bude takémuto výsledku dôverovať, alebo využije iný model.

Nemôžeme jednoznačne povedať, ktorý z týchto troch nástrojov na ocenenie úrokových derivátov je ten najvhodnejší. Ako sme uviedli, všetky modely majú svoje výhody i nevýhody a záleží len na používateľovi, jeho stratégii a postoju k riziku, ktorý model využije.

Zoznam použitých skratiek

- T množina časových okamžikov
- $v_{i\text{-caplet}}$ implikovaná volatilita i -teho capletu
- r^* spotová úroková sadzba pre ktorú je cena kupónového dlhopisu rovná realizačnej cene opcie
- $S_{\alpha,\beta}(t)$ forwardová swapová sadzba v čase t
- $W(t)$ n -dimenzionálny Brownov pohyb
- Λ diagonálna matica, ktorej prvky sú druhé mocniny vlastných čísel matice ρ
- $\text{Cap}^{\text{Black}}$ cena capu určená pomocou Blackovej formuly
- Cap^{HW} cena capu určená pomocou HW modelom
- $\text{Cpl}^{\text{LMM}}_i$ cena i -teho capletu určená pomocou LMM modelu
- $\text{Floor}^{\text{Black}}$ cena flooru určená pomocou Blackovej formuly
- Floor^{HW} cena flooru určená pomocou HW modelom
- FRA dohoda o forwardovom obchode, forwardový kontrakt
- $\text{FRA}(t, T, \tau(T, S), N, K)$ forwardový kontrakt uzavretý v čase t , so splatnosťou v čase T , na spotovú sadzbu, $L(T, S)$, realizačnú sadzbu K a hodnotou podkladového aktíva N
- HW model Hull-Whiteov model
- LMM LIBOR tržný model
- $\text{PFS}(t, T, \tau, N, K)$ výplata platiaceho swapu (majiteľ platí pevnú sadzbu a prijíma pohyblivú) uzavretého v čase t na realizačnú sadzbu K pri nominálnej hodnote podkladového aktíva N . Platby budú prebiehať v časoch T , medzi ktorými sú časové intervaly dĺžky τ
- PS^{HW} cena platiaceho swapca určená pomocou HW modelu
- PS^{Black} Cena platiaceho swapca určená pomocou Blackovej formuly
- $\text{RFS}(t, T, \tau, N, K)$ výplata prijímajúceho swapu (majiteľ prijíma pevnú sadzbu a platí pohyblivú) uzavretého v čase t na realizačnú sadzbu K pri nominálnej hodnote podkladového aktíva N . Platby budú prebiehať v časoch T , medzi ktorými sú časové intervaly dĺžky τ
- RS^{HW} cena platiaceho swapca určená pomocou HW modelu
- RS^{Black} Cena prijímajúceho swapca určená pomocou Blackovej formuly
- $\text{ZBC}(t, T, S, X)$ Cena európskej CALL opcie v čase uzavretia t a splatnosti T na bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti S a realizačnou cenou X

$ZBP(t, T, S, X)$	Cena európskej PUT opcie v čase uzavretia t a splatnosti T na bezkupónový dlhopis s dobou splatnosti S a realizačnou cenou X
Φ	distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia
Φ_i	parameter LMM
ψ_i	parameter LMM
ρ	korelačná matica forwardových sadzieb
$\rho_{k,j}$	korelácia medzi forwardovými sadzbami $F_k(t)$ a $F_j(t)$
σ	absolutná volatilita okamžitej úrokovej sadzby
$\sigma_i = \sigma_{i,\beta(t)}$	okamžitá volatilita forwardovej sadzby $F_i(t)$ pre $t \in (T_{\beta(t)-2, \beta(t)-1}]$
τ	množina časových období
$\tau(t, T)$	čas medzi t a T v rokoch
τ_i	doba medzi mčasnami T_{i-1} a T_i v rokoch
θ_i	parameter LMM
$v_{\alpha,\beta}^{\text{LMM}}$	swapcová volatilita určená pomocou Rebonatovho vzťahu
$v_{\alpha,\beta}^{\text{MARKET}}$	tržná implikovaná swapcová volatilita
$\varepsilon_{\alpha,\beta}$	relatívna chyba
$\vartheta(t)$	rovnovážna hodnota okamžitej úrokovej sadzby v HW modeli
$D(t, T)$	diskontný faktor medzi časmi t a T
$F(t, T, S)$	forwardová úroková sadzba určená v čase t na obdobie medzi T a S
$f(t, T, S)$	okamžitá forwardová úroková sadzba určená v čase t pre čas T
$F^M(0, T, S)$	tržná forwardová sadzba v čase 0 na čas od T do S
$f^M(0, t)$	okamžitá tržná forwardová úroková sadzba v čase 0 pre čas t
$F_k(t)$	forwardová sadzba v čase t na obdobie medzi T_{k-1} a T_k
H	diagonálna matica, ktorej prvky sú vlastnými číslami matice ρ
I_M	identitická matica s hodnotou M
K	realizačná sadzba
k	rýchlosť návratnosti k rovnovážnej hodnote $\vartheta(t)$ u HW modelu
$L(t, T)$	spotová úroková miera pre jednoduché úročenie so začiatkom v čase t a splatnosťou v čase T

$LN(\mu, \sigma)$ logaritmicke-normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ

N nominálna hodnota

$N(\mu, \sigma)$ normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozptylom σ

$P(t, T)$ cena bezkupónového dlhopisu v čase t so splatnosťou v čase T

$P^M(0, T)$ tržná cena bezkupónového dlhopisu v čase 0 so splatnosťou v T

$r(t)$ okamžitá úroková sadzba v čase t

$R(t, T)$ spotová sadzba pre spojité úročenie v čase t so splatnosťou v čase T

$R^M(0, T)$ tržná spotová sadzba pre spojité úročenia od času 0 do čase T

X realizačná cena

$Y(t, T)$ spotová sadzba pre zložené úročenie v čase t so splatnosťou v čase T

$Z(t)$ Brownov pohyb

Zoznam použitej literatúry

- [1] Brigo D., Mercurio F., *Interest rate models*, Springer, Berlin 2001, ISBN 3-540-41772-9
- [2] Hull J., *Options, futures, and other derivatives*, Pearson Education, Inc. New Persey, 2003, ISBN-13: 978-0-13500994-9
- [3] Hull J., White W., *One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 28, No 2, (June 1993) pp 235–254
- [4] Brace, A., Gatarek, D., Musiela, M., : *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, Mathematical Finance, (1997), 7(2), 127-154
- [5] Myška P. *Modely úrokových sazeb - teórie a praxe*
<http://www.actuaria.cz/upload/Modely%20%C3%BArokov%C3%BDch%20sazeb%20-%20teorie%20a%20praxe.pdf>, Praha, 2008.
- [6] Nelder J. A., Mead R. *A simplex algorithm for function minimization*, Computer Journal 7. 1965, 308–313.
- [7] Nash, J. C. *Compact Numerical Methods for Computers. Linear Algebra and Function Minimisation*. Adam Hilger. 1990.
- [8] R Development Core Team, *R: A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2012.